
Análise qualitativa de modelos através de retratos de fase^{*}

Otávio Henrique Perez[†]
Tiago de Carvalho[†]

Resumo

Neste artigo iremos utilizar a Teoria de Sistemas Dinâmicos para modelar, usando Equações Diferenciais, problemas físicos, químicos e biológicos. Vamos analisar tais problemas através dos retratos de fase, que nos trazem informações importantes a respeito do sistema modelado. Assim, podemos fazer uma análise qualitativa e estudar o comportamento futuro e passado de fenômenos das mais diversas áreas da ciência. Um ponto interessante a ser destacado é que, mesmo se não for possível resolver a Equação Diferencial obtida a partir da modelagem do problema, podemos analisar o fenômeno utilizando retratos de fase.

Palavras Chave: Sistemas de equações diferenciais ordinárias, campos de vetores, retratos de fase, modelagem.

^{*}Trabalho realizado durante estágio de iniciação científica financiado pela FAPESP (processo número 2013/09624-7)

[†]Emails: otavioperez@hotmail.com e tcarvalho@fc.unesp.br

Introdução

É bem difundida a idéia que Equações Diferenciais modelam os mais variados problemas em diversas áreas do conhecimento, como: Física, Química, Engenharias, Biologia, Medicina, Meteorologia, entre outros. Aqui abordaremos algumas dessas aplicações e buscaremos obter informações topológicas a respeito das trajetórias dos campos de vetores usados para modelar determinados sistemas. Conforme descrito a seguir, utilizaremos a Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias para analisar modelos reais em um sistema Massa-Mola, um circuito LRC, um modelo Presa-Predador, entre outros.

1 Sistema Massa-Mola: Movimento Livre Não Amortecido

Vamos supor que uma massa m seja conectada a uma mola flexível que está suspensa verticalmente. Segundo [3], a distensão da mola dependerá da massa, ou seja, quanto maior o peso, maior será a elongação da mola. Pela **Lei de Hooke**, a mola exerce uma força restauradora F oposta à direção da distensão e ao mesmo tempo proporcional ao comprimento s da distensão, ou seja, $F = ks$, onde k é a constante de proporcionalidade (também chamada de constante da mola).

Após a massa m ser conectada e ter distendido a mola, ela atinge sua posição de equilíbrio, onde a força peso $P = mg$ é igual à força restauradora f , ou seja, $mg = ks$. Além disso, se a mola for distendida por um comprimento x de sua posição de equilíbrio, a força restauradora será dada por $F = k(s + x)$, conforme mostra Figura 1. Supondo que nenhuma força esteja agindo sobre o sistema, podemos afirmar que a força resultante

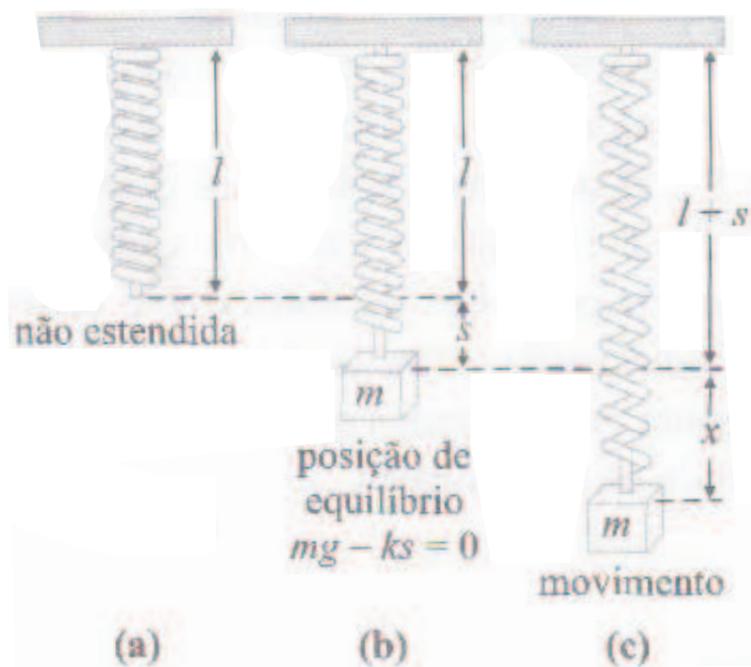


Figura 1: Sistema Massa-Mola

será a soma entre a força restauradora e a força peso, ou seja:

$$F_r = F + P \Rightarrow ma = -k(s + x) + mg \Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} = -ks - kx + mg \Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Vale destacar que o sinal negativo que acompanha k se deve pelo fato de que a força restauradora está agindo no sentido oposto ao movimento da mola. Dividindo a última equação por m e tomando $\frac{k}{m} = \omega^2$, temos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0. \quad (1)$$

A equação (1) é chamada de **Equação Diferencial do Movimento Livre Não Amortecido**. Além disso, as condições iniciais $x(t) = x_0$ e $x'(t) = x_1$ deste sistema representam, respectivamente, posição e velocidades iniciais. É importante frisar que, se $x_0 > 0$, a posição inicial da mola está abaixo da posição de equilíbrio, e se $x_0 < 0$, a posição inicial da mola está acima da posição de equilíbrio. Analogamente, $x_1 > 0$ indica que a velocidade inicial está direcionada para baixo, enquanto $x_1 < 0$ indica que a massa

está com a velocidade direcionada para cima. Se $x_1 = 0$, dizemos que a massa partiu do repouso.

Para analisarmos o comportamento da mola utilizando retratos de fase, precisamos encontrar um sistema matricial que seja equivalente à equação (1). Para tal, tomaremos:

$$\begin{cases} u = x, \\ v = x'. \end{cases}$$

Assim, segue que nosso sistema será

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = -\omega^2 u. \end{cases} \quad (2)$$

O sistema (2) pode ser escrito na forma matricial como:

$$X(u, v) = \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Calculando o polinômio característico, temos:

$$\begin{vmatrix} -m & 1 \\ -\omega^2 & -m \end{vmatrix} = m^2 + \omega^2. \quad (3)$$

O polinômio característico (3) é chamado de **Equação Auxiliar** e suas raízes são $m_1 = \omega i$ e $m_2 = -\omega i$. Como obtemos duas raízes complexas com parte real nula, segue que as trajetórias no retrato de fase serão elipses.

A solução da Equação Diferencial (de agora em diante abreviada por ED) (1) é dada por $x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$ e, sendo assim, o gráfico de $x(t)$ é periódico. Além disso, o período T da função pode ser calculado por $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e a frequência f pode ser calculada por $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$. A amplitude A das vibrações pode ser calculada por $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, ou seja, o pontos de pico e de mínimo de $x(t)$ são, respectivamente, A e $-A$. É importante destacar que A representa a distância máxima que a mola vai atingir abaixo da posição de equilíbrio, e $-A$ a distância máxima que a mola irá atingir acima da posição de equilíbrio.

Para que isso possa ficar mais claro, vamos analisar o seguinte exemplo:

Exemplo 1.1 Uma massa de $\frac{1}{16}$ slugs distende uma mola em $\frac{1}{2}$ pé. Em $t = 0$, a massa é solta de um ponto $\frac{2}{3}$ pé abaixo da posição de equilíbrio a uma velocidade de $-\frac{4}{3}$ pés/s para cima. Considerando $g = 32$ pés/s², temos que a constante k da mola será:

$$mg = ks \Rightarrow \frac{1}{16}32 = k\frac{1}{2} \Rightarrow k = 4.$$

Como $\omega^2 = \frac{k}{m} = 64$, a Equação do Movimento para este problema será

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0.$$

Assim, a solução desta ED será dada por

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \text{sen} \omega t = c_1 \cos 8t + c_2 \text{sen} 8t.$$

Para calcular c_1 e c_2 , basta utilizarmos as condições iniciais dadas, ou seja, utilizarmos o fato de que $x(0) = \frac{2}{3}$ e $x'(0) = -\frac{4}{3}$. Assim, temos

$$\begin{cases} x(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \text{sen} 0 = c_1 = \frac{2}{3}, \\ x'(0) = -8c_1 \text{sen} 0 + 8c_2 \cos 0 = 8c_2 = -\frac{4}{3}. \end{cases}$$

Como $c_1 = \frac{2}{3}$ e $c_2 = -\frac{1}{6}$, segue que $x(t) = \frac{2}{3} \cos 8t - \frac{1}{6} \text{sen} 8t$. Calculando a amplitude das vibrações, temos:

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{6}.$$

Assim, concluímos que a mola se distende no máximo $\frac{\sqrt{17}}{6}$ abaixo da posição de equilíbrio e $-\frac{\sqrt{17}}{6}$ acima da posição de equilíbrio. O gráfico de $x(t)$ pode ser visto na Figura 2.

Além disso, é possível esboçar o retrato de fase deste problema. Como vimos anteriormente, a Equação Auxiliar é dada por $m^2 + 64 = 0$, logo as raízes são $m_1 = 8i$ e $m_2 = -8i$ e a trajetória será uma elipse. Veja a Figura 3.

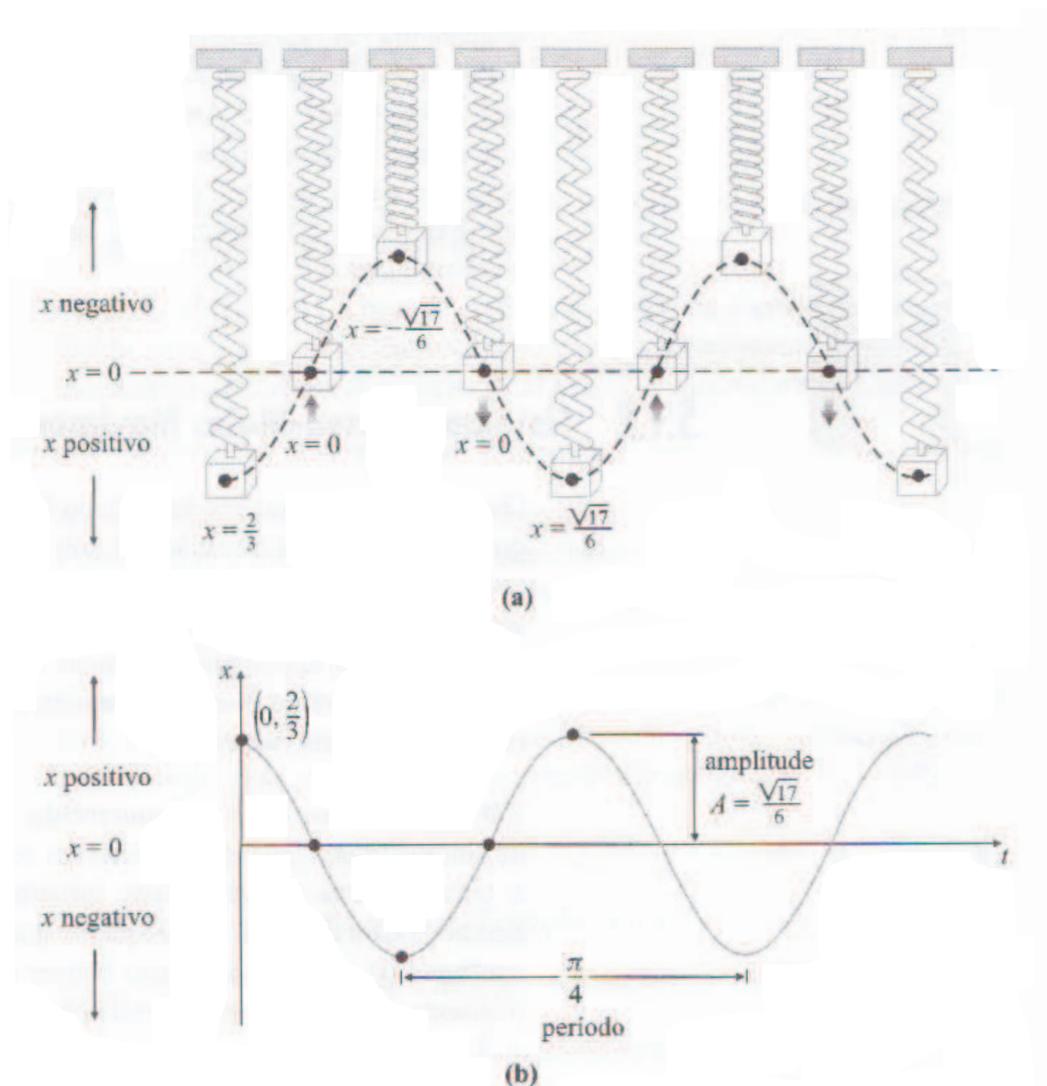


Figura 2: Gráfico de $x(t)$

Através do retrato de fase é possível compreender melhor o que está acontecendo com o comportamento da mola. Observa-se que quando a mola está na posição de equilíbrio é justamente quando ela atinge maior velocidade (em módulo). Além disso, podemos ver que a velocidade se anula quando a mola atinge a distância máxima acima ou abaixo do ponto de equilíbrio.

A ideia do Movimento Livre Não Amortecido é um tanto quanto ilusória, já que estamos considerando um mundo ideal, onde nenhuma força externa age sobre o sistema.

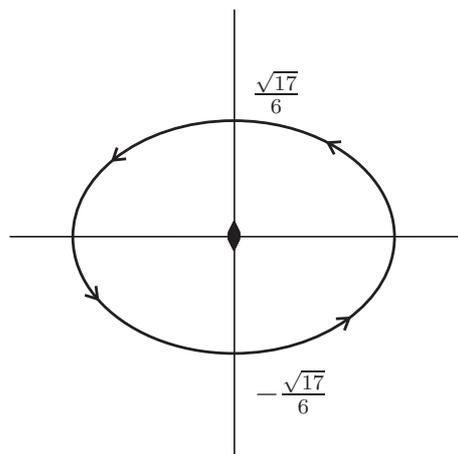


Figura 3: Retrato de Fase

Sendo assim, vamos analisar, como está proposto em [3], o comportamento da mola quando existe uma força que faça com que a intensidade do movimento da mola diminua com o passar do tempo.

2 Sistema Massa-Mola: Movimento Livre Amortecido

No estudo de mecânica, as forças de amortecimento são proporcionais a uma potência da velocidade instantânea. Aqui, vamos supor que a força de amortecimento seja um múltiplo da velocidade. Assim, quando não houver outras forças atuando sobre a mola, segue que

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta \frac{dx}{dt},$$

onde $\beta > 0$ é chamado de constante de amortecimento. O sinal negativo se deve pelo fato da força estar agindo no sentido oposto do movimento. Dividindo a equação acima por m e tomando $2\lambda = \frac{\beta}{m}$ e $\omega^2 = \frac{k}{m}$, a **Equação Diferencial do Movimento Livre**

Amortecido será dada por

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2x = 0. \quad (4)$$

Analogamente ao Movimento Livre Não Amortecido, as condições iniciais $x(t) = x_0$ e $x'(t) = x_1$ deste sistema representam, respectivamente, posição e velocidades iniciais. Se $x_0 > 0$, a posição inicial da mola está abaixo da posição de equilíbrio, e se $x_0 < 0$, a posição inicial da mola está acima da posição de equilíbrio. No que diz respeito à velocidade, $x_1 > 0$ indica que a velocidade inicial está direcionada para baixo, enquanto $x_1 < 0$ indica que a massa está com a velocidade direcionada para cima. Se $x_1 = 0$, dizemos que a massa partiu do repouso.

Para analisarmos o comportamento da mola utilizando retratos de fase, precisamos encontrar um sistema matricial que seja equivalente à equação (4). Para tal, tomaremos:

$$\begin{cases} u = x, \\ v = x'. \end{cases}$$

Assim, segue que nosso sistema será

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = -2\lambda v - \omega^2 u. \end{cases} \quad (5)$$

O sistema (5) pode ser escrito na forma matricial como:

$$X(u, v) = \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Calculando o polinômio característico, temos:

$$\begin{vmatrix} -m & 1 \\ -\omega^2 & -2\lambda - m \end{vmatrix} = m^2 + 2\lambda m + \omega^2. \quad (6)$$

Determinando as raízes do polinômio (6), obtemos $m = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$. Portanto, para determinarmos qual será a trajetória que representa o sistema, devemos estudar três casos:

1. Se $\lambda^2 - \omega^2 > 0$, dizemos que o sistema é **super-amortecido**. Aqui, como vamos obter duas soluções negativas, o retrato de fase do sistema será um Nó Atrator. Isso indica que o coeficiente de amortecimento β é grande comparado à constante k e, conseqüentemente, a velocidade da mola decresce rapidamente. Neste caso, a solução da ED é $x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}t})$.
2. Se $\lambda^2 - \omega^2 = 0$, dizemos que o sistema é **criticamente amortecido**. Neste caso, a Equação Auxiliar irá possuir apenas uma raiz e, dessa forma, o retrato de fase do sistema será um Nó Próprio ou Nó Impróprio (dependendo da quantidade de autovetores associados à raiz). A solução da ED será $x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 + c_2 t)$.
3. Se $\lambda^2 - \omega^2 < 0$, dizemos que o sistema é **sub-amortecido**. Aqui, obtemos duas raízes complexas com parte real negativa, logo o retrato de fase do sistema será uma espiral convergindo para a origem. Isso indica que o coeficiente de amortecimento β é pequeno comparado à constante k e, conseqüentemente, a mola tem um movimento oscilatório. Como as raízes da Equação Auxiliar são

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} = -\lambda + \sqrt{(-1)(\omega^2 - \lambda^2)} = -\lambda + \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}i,$$

e

$$m_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} = -\lambda - \sqrt{(-1)(\omega^2 - \lambda^2)} = -\lambda - \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}i,$$

a solução da ED é dada por $x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 \cos \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t + c_2 \text{sen} \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t)$.

Note que, nos três casos, quando $t \rightarrow \infty$, segue que $x(t) \rightarrow 0$, portanto o movimento da mola tende a enfraquecer.

Exemplo 2.1 *Seja o problema de valor inicial:*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 4x = 0, x(0) = 1, x'(0) = 1.$$

Temos que a Equação Auxiliar é $m^2 + 5m + 4 = 0$ e que suas raízes são $m_1 = -1$ e $m_2 = -4$. Como temos duas raízes negativas, segue que o movimento é super-amortecido.

Assim, a solução da ED será

$$x(t) = c_1 e^{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}t} + c_2 e^{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}t} = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t}.$$

Usando as condições iniciais $x(0) = 1$ e $x'(0) = 1$ para determinar c_1 e c_2 , temos

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ -c_1 - 4c_2 = 1. \end{cases}$$

Portanto, $x(t) = \frac{5}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t}$. Observe que, conforme dito anteriormente, quando $t \rightarrow \infty$ temos $x(t) \rightarrow 0$.

Para analisarmos o retrato de fase, devemos levar em consideração a Equação Auxiliar $m^2 + 5m + 4 = 0$ e suas raízes $m_1 = -1$ e $m_2 = -4$. Calculando o autovetor associado à $m_1 = -1$, temos:

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como $u_1 = -u_2$, o autovetor associado ao autovalor $m_1 = -1$ é $v_1 = (-1, 1)$. Para $m_2 = -4$, segue:

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, o autovetor associado ao autovalor $m_2 = -4$ é $v_2 = (1, -4)$. Além disso, como $|m_1| < |m_2|$, a trajetória irá tangenciar a reta passando pela origem cujo vetor diretor é v_1 . Segue que a trajetória da solução será um Nó Atrator, como mostra a Figura 4.

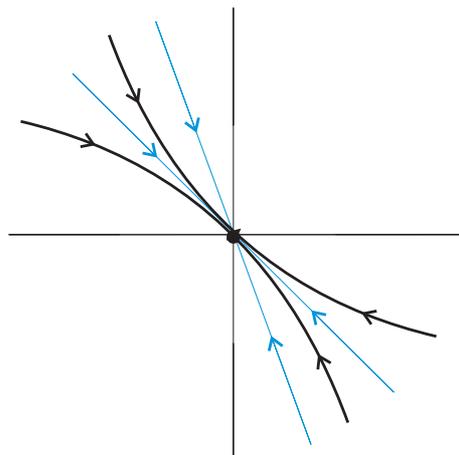


Figura 4: Retrato de fase

3 Sistema Massa-Mola: Movimento Forçado

Além da força de atrito, vamos considerar agora que uma força externa $f(t)$ esteja agindo sobre o sistema. A Equação Diferencial do Movimento Forçado, segundo [3], será da forma

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \beta \frac{dx}{dt} + f(t).$$

Dividindo a equação por m , obtemos

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F(t), \quad (7)$$

onde $F(t) = \frac{f(t)}{m}$, $2\lambda = \frac{\beta}{m}$ e $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Não existe um método específico para resolver a equação (7), já que $F(t)$ pode ser uma função de qualquer tipo: polinomial, exponencial, etc. Sendo assim, vamos analisar o caso particular do exemplo a seguir.

Exemplo 3.1 *Seja o problema de valor inicial*

$$\frac{1}{5} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{6}{5} \frac{dx}{dt} + 2x = 5 \cos 4t, x(0) = \frac{1}{2}, x'(0) = 0.$$

A equação acima nos diz que o sistema em questão consiste em uma massa de peso $m = \frac{1}{5}$ kg presa a uma mola, onde $k = 2$ N/m. A massa é solta do repouso a $\frac{1}{2}$ m abaixo da posição de equilíbrio, com um coeficiente de atrito $\beta = \frac{6}{5}$.

Se F é uma função periódica, como por exemplo $F(t) = F_0 \text{sen } \gamma t$ ou $F(t) = F_0 \text{cos } \gamma t$, a solução da ED (7) é a soma de uma função não periódica $x_c(t)$ (chamada de termo transiente) com uma função periódica $x_p(t)$ (chamada de termo estacionário), onde $x_p(t) = A \text{cos } \gamma t + B \text{sen } \gamma t$.

Para resolver o PVI em discurso, primeiramente multiplicamos a equação por 5 e resolvemos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 10x = 0.$$

A partir da ED acima, obtemos a Equação Auxiliar $m^2 + 6m + 10 = 0$, cujas raízes são $m_1 = -3 + i$ e $m_2 = -3 - i$. Como as raízes são complexas, temos que

$$x_c(t) = e^{-\lambda t}(c_1 \text{cos } \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t + c_2 \text{sen } \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t) = e^{-3t}(c_1 \text{cos } t + c_2 \text{sen } t).$$

Agora, usando o método dos coeficientes a determinar, temos que encontrar $x_p(t) = A \text{cos } 4t + B \text{sen } 4t$. Note que

$$\begin{cases} x'_p(t) &= -4A \text{sen } 4t + 4B \text{cos } 4t, \\ x''_p(t) &= -16A \text{cos } 4t - 16B \text{sen } 4t. \end{cases}$$

Assim, segue que :

$$\begin{aligned} x'' + 6x' + 10x &= (-16A \text{cos } 4t - 16B \text{sen } 4t) + 6(-4A \text{sen } 4t + 4B \text{cos } 4t) + 10(A \text{cos } 4t + B \text{sen } 4t) = \\ &= (-16A \text{cos } 4t - 16B \text{sen } 4t) + (-24A \text{sen } 4t + 24B \text{cos } 4t) + (10A \text{cos } 4t + 10B \text{sen } 4t) = \\ &= -6A \text{cos } 4t - 6B \text{sen } 4t + 24B \text{cos } 4t - 24A \text{sen } 4t = \\ &= (-6A + 24B) \text{cos } 4t + (-24A - 6B) \text{sen } 4t = 25 \text{cos } 4t. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} -6A + 24B &= 25, \\ -24A - 6B &= 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos $A = -\frac{25}{102}$ e $B = \frac{50}{51}$. Portanto, temos que a solução da ED é

$$x(t) = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t) + \left(-\frac{25}{102} \cos 4t + \frac{50}{51} \operatorname{sen} 4t\right).$$

Aplicando as condições iniciais $x(0) = \frac{1}{2}$ e $x'(0) = 0$, obtemos

$$\begin{cases} x(0) = c_1 - \frac{25}{102} = \frac{1}{2}, \\ x'(0) = -3c_1 + c_2 + \frac{200}{51} = 0. \end{cases}$$

Por fim, segue que $c_1 = \frac{38}{51}$ e $c_2 = -\frac{86}{51}$ e assim a solução da ED é dada por:

$$x(t) = e^{-3t}\left(\frac{38}{51} \cos t - \frac{86}{51} \operatorname{sen} t\right) + \left(-\frac{25}{102} \cos 4t + \frac{50}{51} \operatorname{sen} 4t\right),$$

onde $x_c(t) = e^{-3t}\left(\frac{38}{51} \cos t - \frac{86}{51} \operatorname{sen} t\right)$ e $x_p(t) = -\frac{25}{102} \cos 4t + \frac{50}{51} \operatorname{sen} 4t$. É importante observar que quando $t \rightarrow \infty$, temos $x_c(t) \rightarrow 0$, ou seja, para grandes quantidades de tempo, o termo $x_c(t)$ se torna desprezível, logo o movimento da mola pode ser aproximado por $x_p(t)$. Por conta disso, podemos notar pelo gráfico de $x(t)$ (como mostra a Figura 5) e pelo retrato de fase (Figura 6) que no início o movimento da mola é oscilatório, e conforme o tempo passa ele se torna periódico.

Vamos analisar agora, assim como proposto em [3], uma situação onde existe uma força externa agindo sobre o sistema, porém não há força de amortecimento.

Exemplo 3.2 Considere o sistema:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen} \gamma t, \quad (8)$$

onde $\gamma \neq \omega$, $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$. Como visto anteriormente, a solução de (8) é dada por $x(t) = x_c(t) + x_p(t)$. Para encontrar $x_c(t)$, precisamos resolver $x'' + \omega^2 x = 0$. Utilizando a equação auxiliar $m^2 + \omega^2 = 0$, encontramos as raízes $m_1 = \omega i$ e $m_2 = -\omega i$ e assim

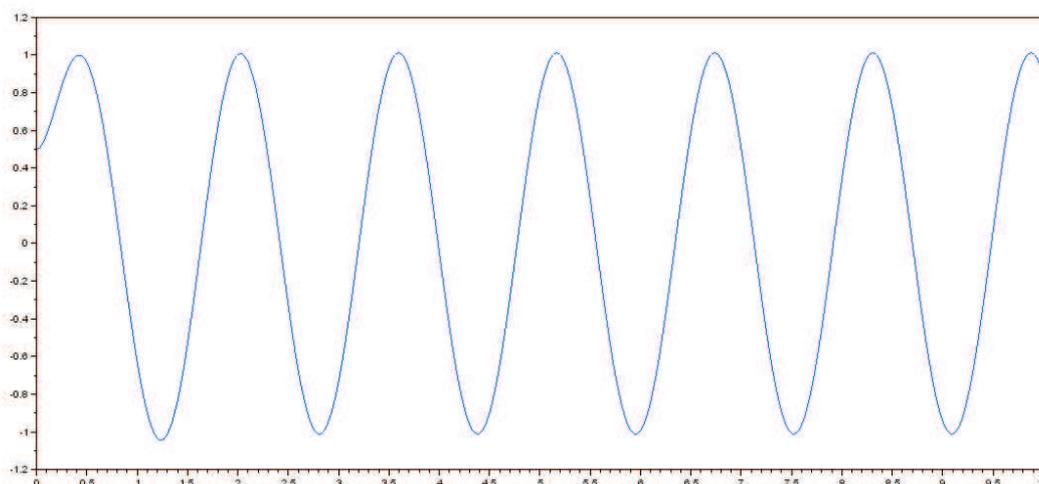


Figura 5: Gráfico de $x(t)$

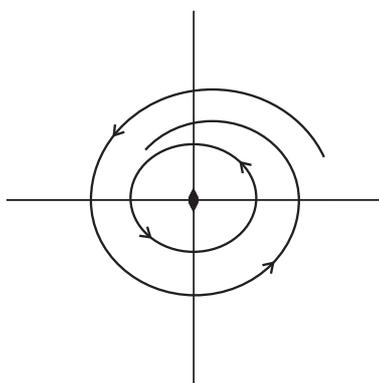


Figura 6: Retrato de fase do problema

obtemos $x_c(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \text{sen } \omega t$. Para encontrar $x_p(t) = A \cos \gamma t + B \text{sen } \gamma t$, utilizamos o método dos coeficientes a determinar:

$$x_p(t) = A \cos \gamma t + B \text{sen } \gamma t,$$

$$x'_p(t) = -\gamma A \text{sen } \gamma t + \gamma B \cos \gamma t,$$

$$x''_p(t) = -\gamma^2 A \cos \gamma t - \gamma^2 B \text{sen } \gamma t.$$

Substituindo em (8), encontramos

$$x'' + \omega^2 x = (-\gamma^2 A \cos \gamma t - \gamma^2 B \text{sen } \gamma t) + \omega^2 (A \cos \gamma t + B \text{sen } \gamma t) =$$

$$= A(\omega^2 - \gamma^2) \cos \gamma t + B(\omega^2 - \gamma^2) \sin \gamma t = F_0 \sin \gamma t.$$

Assim, resolvemos a seguinte sistema

$$\begin{cases} A(\omega^2 - \gamma^2) = 0, \\ B(\omega^2 - \gamma^2) = F_0. \end{cases}$$

Portanto, $A = 0$ e $B = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}$. Por fim, temos que a solução $x(t)$ será da forma

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t) + \left(\frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \sin \gamma t \right).$$

Aplicando as condições iniciais $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$ para calcular c_1 e c_2 , obtemos

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)} (-\gamma \sin \omega t + \omega \sin \gamma t).$$

Obviamente, $x(t)$ não está definida para $\gamma = \omega$. Porém, podemos usar l'Hopital para determinar um valor-limite para a função quando $\gamma \rightarrow \omega$. Assim, quando $\omega = \gamma$ a solução é dada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{\gamma \rightarrow \omega} F_0 \frac{-\gamma \sin \omega t + \omega \sin \gamma t}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)} = F_0 \lim_{\gamma \rightarrow \omega} \frac{\frac{d}{d\gamma}(-\gamma \sin \omega t + \omega \sin \gamma t)}{\frac{d}{d\gamma}(\omega(\omega^2 - \gamma^2))} = \\ &= F_0 \lim_{\gamma \rightarrow \omega} \frac{-\sin \omega t + \omega t \cos \gamma t}{-2\omega\gamma} = F_0 \frac{-\sin \omega t + \omega t \cos \omega t}{-2\omega^2} = \frac{F_0}{2\omega^2} \sin \omega t - \frac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t. \end{aligned}$$

O comportamento de um sistema massa-mola não pode ser descrito como na função acima, pois, quando $t \rightarrow \infty$, a mola é forçada além do limite de sua elasticidade, e assim o sistema falharia. O gráfico de $x(t)$ para $\gamma = \omega$ pode ser visto na Figura 7 e o retrato de fase que mostra o comportamento da mola na Figura 8.

4 Circuito em Série LRC

Considere o circuito em série contendo um indutor, um resistor e um capacitor. A corrente no circuito no instante t é denotada por $i(t)$ e a carga em um capacitor no instante

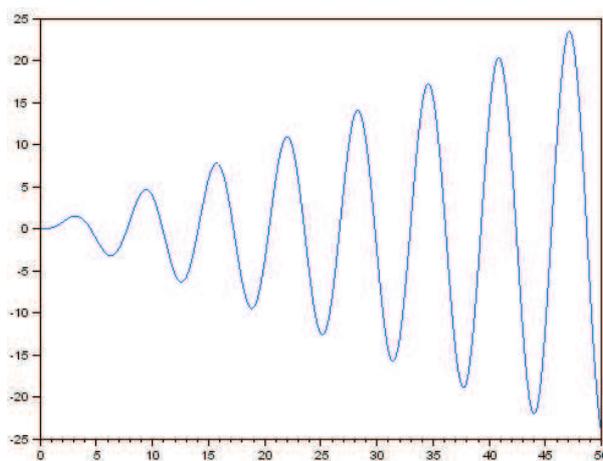


Figura 7: Gráfico de $x(t)$.

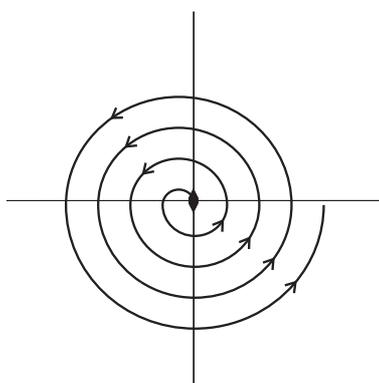


Figura 8: Retrato de fase.

t é denotada por $q(t)$. As constantes L , R e C representem indutância, resistência e capacitância, respectivamente. De acordo com a **Segunda Lei de Kirchhoff**, a voltagem aplicada $E(t)$ em uma malha fechada é igual à soma das quedas de voltagem da malha.

Além disso, por [3], as quedas de voltagem do indutor, do resistor e do capacitor são dadas respectivamente por $L \frac{di}{dt}$, iR e $\frac{1}{C}q$. Uma vez que $i = \frac{dq}{dt}$, obtemos a seguinte equação:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \quad (9)$$

Quando $E(t) = 0$, as vibrações elétricas são consideradas livres. Neste caso, tomando

$u = q$ e $v = q'$, é possível calcular a equação auxiliar de maneira semelhante ao do sistema massa-mola:

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = -\frac{R}{L}v - \frac{1}{CL}u. \end{cases}$$

A forma matricial do sistema acima é

$$X(u, v) = \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Logo, a equação auxiliar de (9) é

$$\begin{vmatrix} 0 - m & 1 \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R}{L} - m \end{vmatrix} = m^2 + \frac{R}{L}m + \frac{1}{CL} = Lm^2 + Rm + \frac{1}{C}, \quad (10)$$

onde raízes do polinômio acima são dadas por

$$m = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L}.$$

A solução de (9) dependerá das raízes da equação auxiliar, de acordo com o discriminante $R^2 - \frac{4L}{C}$. A nomenclatura usada na análise de circuitos é semelhante à usada na análise de sistemas massa-mola. Sendo assim, temos três casos possíveis:

1. Se $R^2 - \frac{4L}{C} > 0$, chamamos o circuito de **super-amortecido**.
2. Se $R^2 - \frac{4L}{C} = 0$, chamamos o circuito de **criticamente amortecido**.
3. Se $R^2 - \frac{4L}{C} < 0$, chamamos o circuito de **sub-amortecido**.

Nos três casos, a solução de (9) contém o termo $e^{-\frac{Rt}{2L}}$, logo $q(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Exemplo 4.1 *Seja um circuito em série LRC, onde $L = 0,25$ henry (h), $R = 10$ ohms (Ω), $C = 0,001$ Farad (f), $E(t) = 0$, $q(0) = q_0$ coulombs (C) e $i(0) = 0$. A equação diferencial que representa este problema é dada por*

$$\frac{1}{4}q'' + 10q' + 1000q = 0,$$

ou ainda

$$q'' + 40q' + 4000q = 0.$$

Segue que a equação auxiliar do problema é $m^2 + 40m + 4000 = 0$, logo $m = -20 \pm 60i$. Como temos duas raízes complexas, o circuito em questão é classificado como sub-amortecido. Neste caso, a carga sobre o capacitor oscilará a medida que decair, ou seja, o capacitor é carregado e descarregado quando $t \rightarrow \infty$.

Analogamente ao caso sub-amortecido do sistema massa-mola, a solução da ED deste problema é

$$q(t) = e^{-20t}(c_1 \cos 60t + c_2 \sin 60t).$$

Utilizando as condições iniciais $q(0) = q_0$ e $q'(0) = 0$, temos que $c_1 = q_0$ e $c_2 = \frac{q_0}{3}$, portanto

$$q(t) = q_0 e^{-20t} \left(\cos 60t + \frac{1}{3} \sin 60t \right).$$

Como as raízes da equação auxiliar são complexas com parte real negativa, a trajetória da solução no retrato de fase será uma espiral convergindo para a origem. Além disso, considerando que $\theta = 60t$ é positivo (pois $t > 0$ sempre), segue que a espiral gira no sentido anti-horário, como mostra a Figura 9.

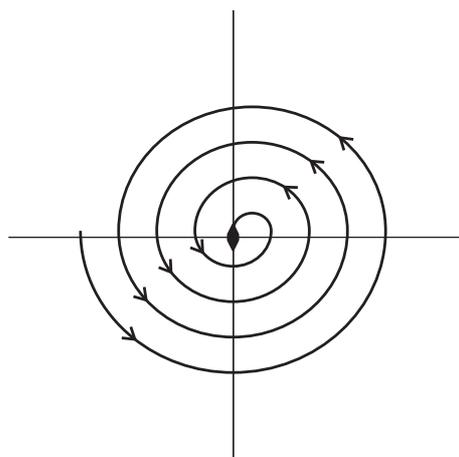


Figura 9: Retrato de fase.

No caso de $E(t) = 0$ e $R = 0$, o sistema é dito não amortecido e as vibrações elétricas não tendem à zero quando $t \rightarrow \infty$. No caso de $E(t)$ ser uma função e $R \neq 0$, as vibrações elétricas são chamadas de forçadas.

5 Love Affairs

Vamos analisar agora um modelo chamado Love Affairs, proposto em 1988 pelo matemático norte-americano Steven Henry Strogatz.

Strogatz chamou de $R(t)$ o amor de Romeu por Julieta (ou ódio, caso $R(t) < 0$) e $J(t)$ o amor de Julieta por Romeu (ou ódio, caso $J(t) < 0$). A forma geral do modelo é dada por

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = aR + bJ, \\ \frac{dJ}{dt} = cR + dJ, \end{cases} \quad (11)$$

onde as constantes a e b representam características amorosas de Romeu e c e d representam as características amorosas de Julieta.

Exemplo 5.1 *Vamos considerar novamente o casal Romeu e Julieta. Nesta situação, quanto maior o amor de Romeu, mais a Julieta "foge" desse relacionamento. Então, Romeu se sente rejeitado e começa a se afastar de Julieta. Esta, por sua vez, começa a achá-lo interessante e atraente, porém Romeu tenta evitá-la.*

O modelo para este tipo de relacionamento é dado por

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = aJ, \\ \frac{dJ}{dt} = -bR, \end{cases}$$

com a e b positivos.

Analisando a matriz do sistema, temos $\text{tr}A = 0$ e $\det A > 0$. Dessa forma, o ponto crítico deste modelo é um centro, como mostra a Figura 10.

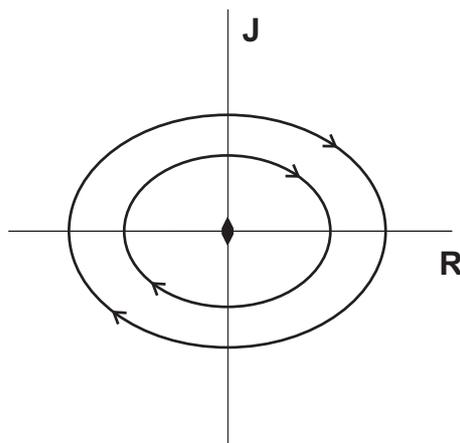


Figura 10: Retrato de fase.

O retrato de fase nos mostra que a relação entre Romeu e Julieta será um ciclo sem fim de amor e ódio. Conforme o amor de Romeu aumenta, o amor de Julieta diminui e chega a se tornar ódio. Por outro lado, o amor de Romeu diminui e o de Julieta aumenta e assim por diante. Observe que o casal se ama apenas em um quarto do tempo (primeiro quadrante) e que ambos se odeiam também em um quarto do tempo (terceiro quadrante).

Exemplo 5.2 Seja o sistema

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = aR + bJ, \\ \frac{dJ}{dt} = bR + aJ, \end{cases}$$

com $a < 0$ e $b > 0$. Aqui, a constante a representa cautela (ambos evitam se "entregar" ao outro) e a constante b representa a reação da pessoa (ambos se sentem atraídos com os avanços do próximo.) A matriz do sistema é

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix},$$

e portanto $\text{tr}A = 2a < 0$ e $\det A = a^2 - b^2$. Calculando as raízes do polinômio característico da matriz, temos:

$$\lambda = \frac{2a \pm \sqrt{(\text{tr}A)^2 - 4\det A}}{2} = \frac{2a \pm \sqrt{4b^2}}{2} = a \pm b.$$

O autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = a + b$ é $(1, 1)$ e o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = a - b$ é $(1, -1)$.

Se $|a| > |b|$, teremos dois autovalores negativos e o ponto crítico será um nó atrator. Observe que $|\lambda_2| > |\lambda_1|$, logo as trajetórias vão tangenciar a reta gerada pelo autovetor $(1, 1)$. Isso nos mostra que cautela em excesso leva a uma indiferença de ambas as partes, tornando a relação apática, como nos mostra a Figura 11.

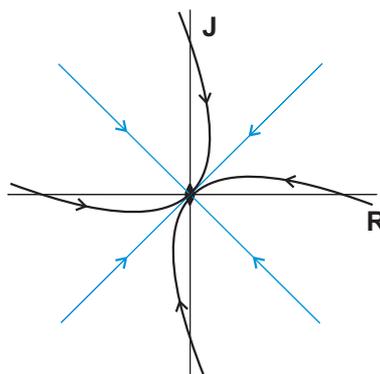


Figura 11: Relação apática.

Por outro lado, se $|a| < |b|$, teremos dois autovalores de sinais distintos e assim o ponto crítico será uma sela. Isso indica que, dependendo dos sentimentos do casal no início, a relação poderá ser puro amor ou puro ódio. Em ambos os casos, o sentimento entre os dois será recíproco. Veja a Figura 12.

6 Reações Químicas

Vamos supor que a gramas de uma substância A sejam combinados com b gramas de uma substância B , formando uma terceira substância C . Considerando $X(t)$ a quantidade de gramas da substância C e que ela seja formada por M partes de A e N partes de B , o número de gramas restantes das substâncias A e B são, respectivamente, $a - \frac{M}{M+N}X$ e $b - \frac{N}{M+N}X$.

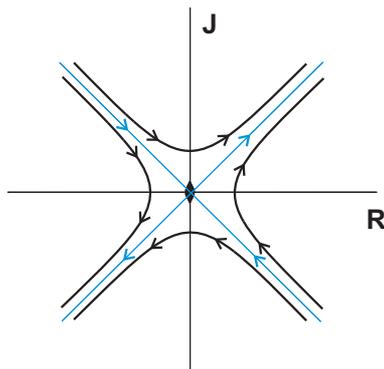


Figura 12: Sentimento recíproco.

Segundo a **Lei de Ação das Massas** descrita em [3], quando não há mudanças na temperatura, a quantidade da substância C é proporcional ao produto da quantidade de A e B remanescentes, ou seja:

$$\frac{dX}{dt} = k_1 \left(a - \frac{M}{M+N} X \right) \left(b - \frac{N}{M+N} X \right). \quad (12)$$

Colocando em evidência os fatores $\frac{M}{M+N}$ e $\frac{N}{M+N}$, temos:

$$\left(a - \frac{M}{M+N} X \right) \left(b - \frac{N}{M+N} X \right) = \left(\frac{M}{M+N} \right) \left(\frac{N}{M+N} \right) \left(\frac{a(M+N)}{M} - X \right) \left(\frac{b(M+N)}{N} - X \right). \quad (13)$$

Substituindo (13) em (12) e tomando $\alpha = \frac{a(M+N)}{M}$ e $\beta = \frac{b(M+N)}{N}$, obtemos:

$$\frac{dX}{dt} = k(\alpha - X)(\beta - X), \quad (14)$$

onde $k = k_1 \left(\frac{M}{M+N} \right) \left(\frac{N}{M+N} \right)$.

O exemplo a seguir nos mostra um caso onde o retrato de fase não será uma trajetória no plano, mas sim uma reta. Isso se deve ao fato de que, para este problema, não é possível obter um sistema 2×2 de equações diferenciais. Dessa forma, o retrato de fase estará em uma reta e não no plano.

Exemplo 6.1 *Seja C um composto químico formado por A e B . Nesta reação química, para cada grama de A , quatro gramas de B são usadas. Além disso, observa-se que 30*

gramas do composto C são formadas em 10 minutos. Considerando que inicialmente temos 50 gramas de A e 32 gramas de B , calculemos a quantidade do composto C quando $t \rightarrow \infty$.

Vamos chamar de $X(t)$ o número de gramas do composto C no instante t . Sabe-se que $X(0) = 0$ e $X(10) = 30$.

Para formarmos 1 grama do composto C , precisamos de a gramas de A e b gramas de B de tal forma que $a + b = 1$. Temos, também, que $b = 4a$. Assim, resolvendo o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a + b = 1, \\ 4a - b = 0. \end{cases}$$

concluimos que para obtermos X gramas de C , precisamos de $\frac{X}{5}$ gramas de A e $\frac{4X}{5}$ gramas de B . As quantidades remanescentes de A e B são, respectivamente, $50 - \frac{X}{5}$ e $32 - \frac{4X}{5}$.

Pela Lei de Ação das Massas, temos:

$$\frac{dX}{dt} = k_1 \left(50 - \frac{X}{5}\right) \left(32 - \frac{4X}{5}\right) \Rightarrow \frac{dX}{dt} = k_1 \frac{1}{5} (250 - X) \frac{4}{5} (40 - X) \Rightarrow \frac{dX}{dt} = k(250 - X)(40 - X).$$

Resolvendo a última equação diferencial, temos:

$$\frac{dX}{(250 - X)(40 - X)} = k dt.$$

Aplicando o método das frações parciais, segue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(250 - X)(40 - X)} &= \frac{A}{250 - X} + \frac{B}{40 - X} = \frac{A(40 - X) + B(250 - X)}{(250 - X)(40 - X)} = \\ &= \frac{40A - AX + 250B - BX}{(250 - X)(40 - X)} = \frac{(-A - B)X + (40A + 250B)}{(250 - X)(40 - X)}. \end{aligned}$$

Agora, resolvemos o sistema linear:

$$\begin{cases} -A - B = 0, \\ 40A + 250B = 1. \end{cases}$$

donde obtemos $A = -\frac{1}{210}$ e $B = \frac{1}{210}$, portanto:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{(250-X)(40-X)} = kdt &\Rightarrow -\frac{1}{210} \frac{dX}{(250-X)} + \frac{1}{210} \frac{dX}{40-X} = kdt \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{1}{210} \int \frac{dX}{(250-X)} + \frac{1}{210} \int \frac{dX}{40-X} = \int kdt \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{210} \ln|250-X| - \frac{1}{210} \ln|40-X| = kt + c_1 \Rightarrow \ln \left| \frac{250-X}{40-X} \right| = 210kt + c_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow e^{210kt+c_2} = \frac{250-X}{40-X} \Rightarrow ce^{210kt} = \frac{250-X}{40-X}. \end{aligned}$$

Isolando $X(t)$, obtemos

$$ce^{210kt} = \frac{250-X}{40-X} \Rightarrow X - 250 = ce^{210kt} X - 40ce^{210kt} \Rightarrow X(t) = \frac{-40ce^{210kt} + 250}{1 - ce^{210kt}}.$$

Usando as condições iniciais $X(0) = 0$ e $X(10) = 30$, segue que $c = \frac{25}{4}$ e $k = 0,1258$ e, por fim, temos que a solução do problema é

$$X(t) = \frac{-1000e^{0,1258t} + 1000}{4 - 25e^{0,1258t}} = \frac{1000 - 1000e^{-0,1258t}}{25 - 4e^{-0,1258t}}.$$

Pelo gráfico da solução, notamos que $X \rightarrow 40$ quando $t \rightarrow \infty$, como mostra a Figura

13.

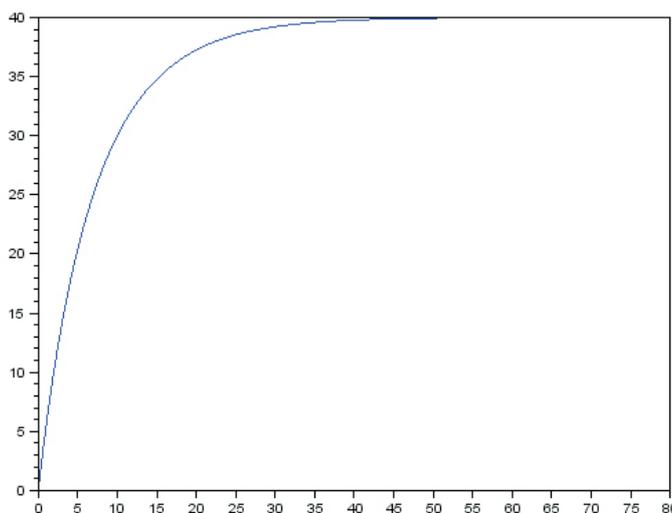


Figura 13: Gráfico de $X(t)$.

Tal comportamento também é explicitado pelo retrato de fase. Como $X' = k(250 - X)(40 - X)$, temos que os pontos críticos são $X = 250$ e $X = 40$. Para $X < 40$ temos $X' > 0$, logo a trajetória neste intervalo é orientada da esquerda para a direita. Para $40 < X < 250$ temos $X' < 0$, logo a trajetória neste intervalo é orientada da direita para a esquerda. Para $X > 250$, temos novamente $X' > 0$ e neste intervalo a trajetória é orientada da esquerda para a direita. Em tais condições, concluímos que $X = 40$ é um ponto atrator e $X = 250$ é um ponto repulsor, conforme mostra a Figura 14.



Figura 14: Retrato de fase.

Observe que é muito mais prático estudarmos o retrato de fase para analisar este problema do que resolver a ED.

7 Modelo Presa-Predador e Modelos com Competição

Em outro modelo proposto por [3], vamos supor que duas espécies diferentes vivem no mesmo ecossistema e, além disso, a primeira espécie alimente-se apenas de vegetais e que a segunda espécie alimente-se da primeira espécie, ou seja, a primeira espécie é a presa e a segunda espécie o predador.

Vamos chamar de $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente, a população de predador e presa no instante t . Caso não existisse presa, é natural imaginar que a população de predadores diminuiria por falta de alimento, ou seja

$$\frac{dx}{dt} = -ax,$$

onde $a > 0$. Porém, quando as presas estão no ecossistema, obviamente o número de interações entre as duas espécies é proporcional às populações x e y , ou seja, são proporcionais à xy . Logo, quando houver presas no ecossistema, a população de predadores irá crescer a uma taxa de bxy , onde $b > 0$. Sendo assim, a variação da população de predadores é dada por:

$$\frac{dx}{dt} = -ax + bxy.$$

Com um raciocínio análogo, podemos inferir que se não houvesse predadores e que a fonte de alimentos fosse ilimitada, a população de presas cresceria, ou seja

$$\frac{dy}{dt} = dy.$$

Porém, com a presença dos predadores, a população de presas tende a decair a medida que elas interagem com os predadores. Logo, a variação da população de presas é dada por

$$\frac{dy}{dt} = dy - cxy,$$

onde $c > 0$ e $d > 0$. Portanto, teremos um sistema de equações diferenciais não-lineares:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax + bxy, \\ \frac{dy}{dt} = dy - cxy. \end{cases} \quad (15)$$

O sistema de equações diferenciais acima é conhecido como **Modelo Presa-Predador de Lotka-Volterra**. Tal sistema não pode ser resolvido em termos de funções elementares, porém é possível analisá-lo qualitativamente a partir dos retratos de fase. Como se trata de um sistema de equações diferenciais não-lineares, teremos mais de um ponto crítico. No caso do modelo Lotka Volterra, resolvendo

$$\begin{cases} x(-a + by) = 0, \\ y(d - cx) = 0, \end{cases}$$

podemos ver que o sistema terá dois pontos críticos: $(0, 0)$ e $\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$. Mesmo o sistema sendo não-linear, pelo **Teorema de Grobman-Hartman** enunciado e demonstrado em [2], numa vizinhança próxima aos pontos críticos os retratos de fase terão um comportamento linear, como poderemos ver no exemplo que segue.

Exemplo 7.1 *Seja o sistema*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0,16x + 0,08xy, \\ \frac{dy}{dt} = 4,5y - 0,9xy. \end{cases}$$

Facilmente, verificamos que os pontos críticos do sistema são $(0, 0)$ e $(5, 2)$. Pelos métodos estudados até aqui, não podemos determinar como serão as trajetórias, pois se trata de um sistema não-linear. Porém, podemos utilizar o Teorema de Grobman-Hartman para analisarmos o comportamento das trajetórias em uma vizinhança próxima desses pontos. Para que possamos fazer tal análise, devemos estudar a Matriz Jacobiana do sistema. Neste exemplo, devemos analisar a seguinte matriz:

$$J_{(x,y)} = \begin{bmatrix} -0,16 + 0,08y & 0,08x \\ -0,9y & 4,5 - 0,9x \end{bmatrix}.$$

Analisando a matriz acima nos pontos críticos obtidos, temos

$$J_{(0,0)} = \begin{bmatrix} -0,16 & 0 \\ 0 & 4,5 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$J_{(5,2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0,4 \\ -1,8 & 0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Observe que a matriz (16) possui determinante negativo e traço positivo. Sendo assim, numa vizinhança próxima de $(0, 0)$, as trajetórias se comportam como uma sela. No caso da matriz (17), temos que seu determinante é positivo e seu traço é igual à zero. A princípio, as trajetórias em torno desse ponto seriam centros, contudo não podemos

afirmar isso pois, como esta singularidade não é hiperbólica (ou seja, o autovalor associado a esta singularidade possui parte real nula), temos que analisar também a parte não-linear. Veja a Figura 15.

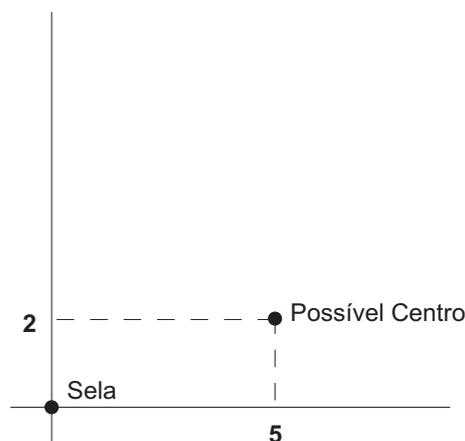


Figura 15: Pontos críticos do sistema.

Vamos supor agora duas espécies no mesmo ecossistemas disputando por recursos (comida, água), ao invés de uma ser predadora e a outra ser presa, modelo também proposto em [3]. A população da primeira espécie é dada pela função $x(t)$ e a população da segunda espécie é dada por $y(t)$. Sendo assim, na ausência de uma das espécies, a taxa na qual cada população cresce será

$$\begin{cases} x' = a_1x, \\ y' = a_2y. \end{cases}$$

Analogamente ao Sistema Lotka-Volterra, a população de cada espécie diminui a uma taxa proporcional ao número de interações com a outra espécie:

$$\begin{cases} x' = a_1x - b_1xy, \\ y' = a_2y - b_2xy. \end{cases}$$

Para ser mais realista, vamos considerar que a população de cada espécie, quando em isolamento, cresce de forma logística, ou seja, quando a população de uma espécie está

crescendo sem a presença de outra espécie, a população é limitada por um longo período de tempo. Assim, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} x' = a_1x - b_1xy - c_1x^2, \\ y' = a_2y - b_2xy - c_2y^2, \end{cases} \quad (18)$$

onde a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , c_1 e c_2 são constantes positivas.

O sistema acima é chamado de **Modelo com Competição**. Analogamente ao Modelo Lotka-Volterra, o sistema acima não pode ser resolvido em termos de funções elementares, mas podemos estudar o comportamento das soluções a partir do retrato de fase. Para isso, basta analisarmos como a solução se comporta numa vizinhança próxima às singularidades. Novamente, como se trata de um sistema de equações diferenciais não lineares, o retrato de fase terá mais de um ponto crítico.

Exemplo 7.2 *Seja o sistema*

$$\begin{cases} x' = x(2 - 0,4x - 0,3y), \\ y' = y(1 - 0,1y - 0,3x). \end{cases}$$

Para calcularmos os pontos críticos, basta resolvermos o sistema

$$\begin{cases} x(2 - 0,4x - 0,3y) = 0, \\ y(1 - 0,1y - 0,3x) = 0, \end{cases}$$

e assim encontramos que as singularidades são $(0,0)$, $(5,0)$, $(0,10)$ e $(2,4)$. Calculando a matriz jacobiana do sistema, temos

$$J_{(x,y)} = \begin{bmatrix} 2 - 0,8x - 0,3y & -0,3x \\ -0,3y & 1 - 0,2y - 0,3x \end{bmatrix}.$$

Vamos estudar o traço e o determinante da matriz jacobiana do sistema e analisar cada uma das singularidades.

1. *Para o ponto $(0,0)$, a matriz é dada por*

$$J_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $(\text{tr}J)^2 > 4\det J$ com $\det J > 0$ e $\text{tr}J > 0$, logo a origem do sistema se comportará como uma fonte (nó repulsor).

2. Para o ponto $(5, 0)$, a matriz é dada por

$$J_{(5,0)} = \begin{bmatrix} -2 & -1,5 \\ 0 & -0,5 \end{bmatrix}.$$

Como $(\text{tr}J)^2 = 6,25 > 4 = 4\det J$ e $\text{tr}J = -2,5 < 0$, logo o ponto $(5, 0)$ é um nó atrator.

3. Calculando a matriz jacobiana no ponto $(0, 10)$, segue

$$J_{(0,10)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como $(\text{tr}J)^2 = 4 = 4\det J$, e $\text{tr}J < 0$, o ponto $(0, 10)$ será um nó.

4. Calculando a matriz jacobiana no ponto $(2, 4)$, temos

$$J_{(2,4)} = \begin{bmatrix} -0,8 & -0,6 \\ -1,2 & -0,4 \end{bmatrix}.$$

Temos que $\det J = -0,08 < 0$ e, conseqüentemente, $(2, 4)$ é um ponto de sela.

Veja a Figura 16.

8 Pêndulo Oscilatório

Considere uma massa m presa a uma barra rígida sem peso e de comprimento L . Na outra extremidade da barra encontramos a origem O . A posição do pêndulo é determinada pelo ângulo θ entre a barra e a direção vertical a partir da origem, onde o sentido anti-horário é considerado positivo, como mostra a Figura 17.

Observe que o arco s está relacionado ao arco de uma circunferência de raio L cujo ângulo central é θ . Por uma simples regra de três, temos que:

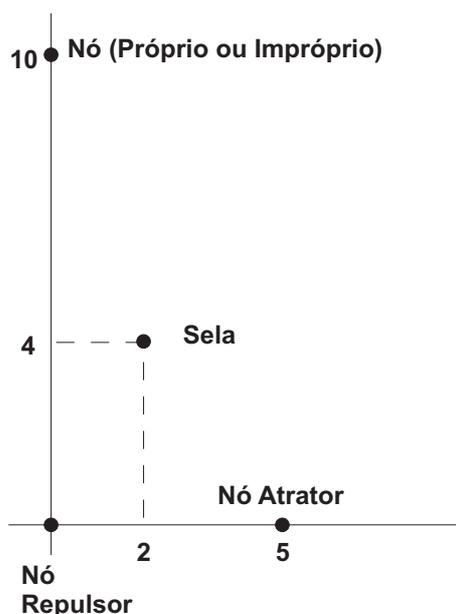


Figura 16: Pontos críticos do sistema.

$$2\pi \longrightarrow 2\pi L,$$

$$\theta \longrightarrow s,$$

logo $s = L\theta$. Dessa forma, a aceleração angular é $a = \frac{d^2s}{dt^2} = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$. Temos também que a força peso $W = mg$ age para baixo, donde obtemos uma força $mg\text{sen } \theta$ que atua no sentido oposto ao movimento, além da força de amortecimento $c\frac{d\theta}{dt}$ ($c > 0$) que também atua no sentido contrário ao movimento.

A equação do movimento pode ser obtida a partir do **Princípio do Momento Angular** conforme descrito em [1], que nos diz que a taxa de variação no tempo do movimento angular é igual ao momento da força resultante naquele ponto. Assim, considerando $F = ma = mL\frac{d^2\theta}{dt^2}$, a equação do movimento é

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -c\frac{d\theta}{dt} - mg\text{sen } \theta,$$

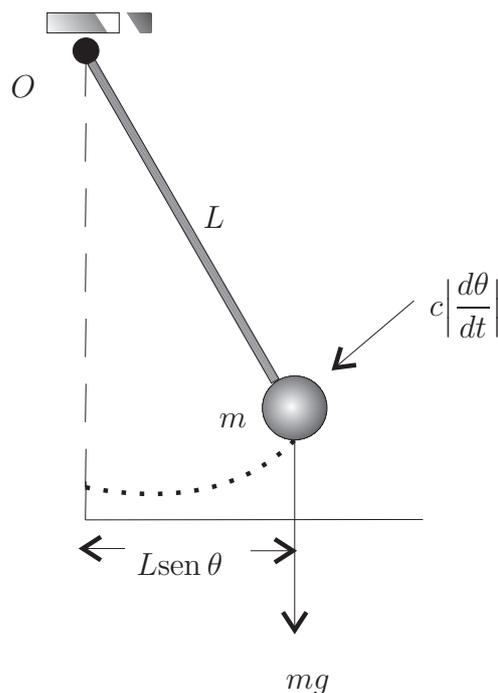


Figura 17: Pêndulo oscilatório.

ou ainda

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega^2 \sin \theta = 0, \quad (19)$$

onde $\gamma = \frac{c}{mL}$ e $\omega^2 = \frac{g}{L}$.

Para encontrar os pontos críticos, tomemos $x = \theta$ e $y = \frac{d\theta}{dt}$. Assim, segue que

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\omega^2 \sin x - \gamma y, \end{cases} \quad (20)$$

e portanto

$$\begin{cases} 0 = y, \\ 0 = -\omega^2 \sin x - \gamma y, \end{cases}$$

donde obtemos $y = 0$ e $x = \theta = \pm n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Podemos deduzir que para um n par teremos uma posição de equilíbrio estável, e para um n ímpar teremos uma posição de equilíbrio que é instável. Em outras palavras, se n for par, a massa estará diretamente abaixo do suporte, enquanto que se n for ímpar a massa estará diretamente acima do suporte.

Se a massa for ligeiramente deslocada da posição de equilíbrio abaixo do suporte, ela irá oscilar para a direita e para esquerda até que a força de amortecimento faça com que o pêndulo se mova cada vez menos, atingindo novamente a posição de equilíbrio. Por outro lado, se a massa for ligeiramente deslocada da posição de equilíbrio acima do suporte, ela irá cair rapidamente por influência da gravidade e oscilará até atingir a posição de equilíbrio abaixo do suporte.

Vale destacar que, se $c = 0$ ($\gamma = 0$), teríamos um sistema cujo coeficiente de amortecimento é nulo. Assim, quando a massa fosse deslocada ligeiramente da posição de equilíbrio abaixo do suporte, ela oscilaria com amplitude constante e nunca tenderia ao ponto de equilíbrio. Esse movimento é impossível de acontecer, já que, por menor que seja a resistência o ar ou o atrito do ponto no suporte, isso faria com que a massa tendesse assintoticamente para a posição de repouso.

A matriz jacobiana do sistema (20) é dada por

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos x & -\gamma \end{bmatrix}.$$

Devemos calcular a matriz acima nos pontos $(n\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$, para n par e n ímpar. Para tal, vamos usar os pontos $(0, 0)$ e $(\pi, 0)$, já que para todos os outros pontos iremos obter matrizes iguais. Sejam

$$J_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$J_{(\pi,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -\gamma \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Observe que o determinante da Matriz (22) é negativo. Dessa forma, os pontos $(\pm n\pi, 0)$ com n inteiro ímpar serão pontos de sela.

No caso da matriz (21), os autovalores são dados por

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}{2},$$

e além disso as trajetórias do sistema dependem do discriminante.

1. Se $\gamma^2 - 4\omega^2 > 0$, chamamos o sistema de **super-amortecido**. Aqui, teremos duas raízes reais e negativas, logo a trajetória em torno do ponto crítico será um nó atrator.
2. Se $\gamma^2 - 4\omega^2 = 0$, chamamos o sistema de **criticamente amortecido**. Neste caso, vamos obter apenas uma raiz negativa e, dessa forma, o ponto crítico será um Nó Próprio ou Nó Impróprio (dependendo da quantidade de autovetores gerados pela raiz).
3. Se $\gamma^2 - 4\omega^2 < 0$, chamamos o sistema de **sub-amortecido**. Aqui, obtemos duas raízes complexas com parte real negativa, e conseqüentemente a trajetória numa vizinhança próxima do ponto crítico será uma espiral convergindo para o ponto.

Como suspeitávamos, os pontos $(\pm n\pi, 0)$ com n par são pontos estáveis, ou seja, as trajetórias irão convergir para esses pontos. Já os pontos $(\pm n\pi, 0)$ com n ímpar são pontos instáveis, ou seja, as trajetórias tendem a se afastar desses pontos.

Exemplo 8.1 *Seja um pêndulo cuja suas equações de movimento são*

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -9\text{sen } x - \frac{1}{5}y, \end{cases}$$

onde $x = \theta$ e $y = \theta'$. Além disso, temos que $\omega^2 = 9$ e $\gamma = \frac{1}{5}$. Para estudarmos os pontos críticos, devemos estudar as seguintes matrizes:

$$J_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix},$$

$$J_{(\pi,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Considerando a primeira matriz, como $\frac{1}{25} = (\text{tr}A)^2 < 4\det A = 36$ com $\det A > 0$ e $\text{tr}A < 0$, teremos que as trajetórias numa vizinhança próxima dos pontos críticos $(n\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$, onde n é par, são espirais convergindo para seus respectivos pontos críticos. É importante observar que neste exemplo a gravidade é mais forte que a resistência do ar, pois $\gamma^2 - 4\omega^2 < 0$.

Considerando a segunda matriz, como $\det A = -9 < 0$, as trajetórias numa vizinhança próxima dos pontos críticos $(n\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$, onde n é ímpar, são pontos de sela. Veja a Figura 18.

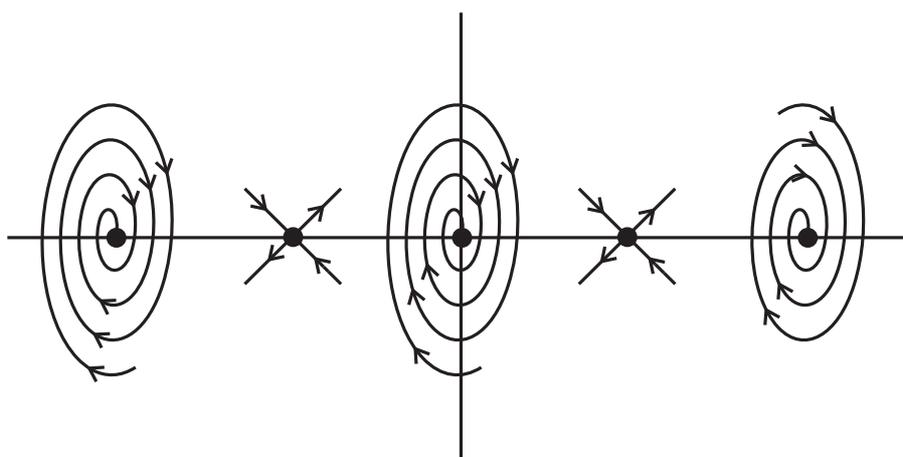


Figura 18: Retrato de fase do movimento do pêndulo.

Referências

- [1] BOYCE, W. E. E DIPRIMA, R. C., *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Editora LTC S. A, Rio de Janeiro, 2005



-
- [2] PERKO, L., *Differential equations and dynamical systems*, Texts in Applied Mathematics, 7, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [3] ZILL, D.G., *Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem*, 2 ed., Cengage Learning, Sao Paulo, 2011.