As Pontes de Königsberg *

Anderson Freitas Ferreira†
Lívia Minami Borges †

Resumo

A teoria de grafos teve seu início em 1736, quando Euler utilizou uma estrutura para resolver o "Problema das Pontes de Königsberg". Neste artigo, vamos falar sobre este problema e para isso, vamos fazer uma introdução à Teoria de Grafos, com as principais definições e alguns resultados considerados importantes para que possamos estudar o Teorema de Euler, que solucionará tal problema.

Palavras Chave: Teorema de Euler, teoria de grafos, grafos eulerianos, grafos conexos

Introdução

A teoria de grafos estuda a relação entre os elementos de um determinado conjunto e nos permite modelar vários problemas em matemática aplicada, engenharia, física, química, dentre outros. Podemos citar alguns problemas famosos tais como "O Problema do carteiro chinês", "O Problema do caixeiro viajante"e "O problema das quatro cores". Esta teoria é relativamente recente e sua primeira evidência data de 1736, quando Euler resolveu o problema das "Pontes de Königsberg".

Königsberg foi uma importante cidade da Prússia, hoje chamada de Kaliningrado, cortada pelo rio Pregel, o qual a dividia em duas ilhas H_1 e H_2. Havia uma ponte p_5 ligando uma ilha à outra e seis outras pontes, ligando-as às margens M_1 e M_2, exatamente como mostra a Figura 1. A pergunta que atormentava aos moradores era se seria possível realizar um passeio pelas ilhas, passando uma única vez em todas as sete pontes, voltando ao ponto de origem.

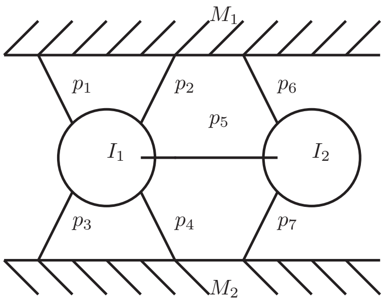

Figura 1: cidade de Königsberg

*Este trabalho é parte do estudo de iniciação científica do primeiro autor orientado pelo segundo autor.

†Email: anderson.ryuuzaki@hotmail.com e liviaminami@ifsp.edu.br

Para resolver o Problema de Königsberg, Euler eliminou os detalhes que não influenciavam o problema, como a distância entre as ilhas e tamanho das ilhas, e se concentrou apenas nos aspectos que considerou importantes. Com isso, Euler representou o problema de uma forma bastante simples, como mostra a Figura 2, e acredita-se que esta estrutura tenha sido o primeiro exemplo de grafo.

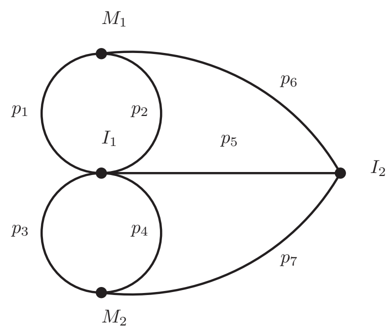

Figura 2: Grafo que representa o Problema das Pontes de Königsberg

Vamos fazer uma breve introdução à teoria de grafos, com as principais definições, visando fixar notações. A seguir, veremos alguns resultados que nos ajudarão a discutir a solução deste problema. E finalmente, estaremos prontos para discutir o Problema das Pontes de Königsberg.

1 Introdução à Teoria de Grafos

1.1 Definições Iniciais

Definição 1. *Um* grafo *G é um par $(V; A)$ onde V é um conjunto de pontos chamados vértices e A é um conjunto de segmentos que ligam dois dos elementos de V, denominados arestas.*

Se xy for uma aresta de G, então os vértices x e y são ditos *adjacentes* ou *vizinhos*, caso contrário são *independentes*. Este mesmo termo pode ser dado para arestas, ou seja, dizemos que duas arestas são adjacentes se possuem vértice comum.

Definição 2. *Dado vértice v, o* grau *deste vértice, denotado por $d(v)$, é dado pelo número de arestas que incidem nele.*

Um vértice v é dito *isolado* se não existem vértices adjacentes a ele, ou seja, quando $d(v) = 0$. E é dito *pendente* quando $d(v) = 1$.

Definição 3. *Dado vértice v, um* laço *é a aresta vv, ou seja, é uma aresta que liga um vértice v a ele mesmo.*

Definição 4. *Um* caminho *é um grafo não vazio $P(V, A)$, tal que $V = \{x_0, x_1, ..., x_k\}$ e $A = \{x_0x_1, x_1x_2, ..., x_{k-1}x_k\}$. Denotamos este caminho por $P = x_0x_1...x_k$. O caminho é dito* fechado *se $x_0 = x_k$. Caso contrário, dizemos que o caminho é* aberto.

Definição 5. *Um* ciclo *em um grafo G é um* caminho fechado *de comprimento mínimo três, em que o primeiro e o último vértice coincidem, mas nenhum outro vértice é repetido, ou seja, um* ciclo *em um grafo G é um caminho $(v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1})$ em que $v_1 = v_{n+1}, n \geq 3$ e ainda, $v_i \neq v_j, 2 \leq i, j \leq n$.*

Definição 6. *Um grafo G é* conexo *se existe um caminho entre quaisquer dois de seus vértices. Se um grafo não é conexo, dizemos que ele é* desconexo.

FREITAS, A.; BORGES, L. M. As pontes de Königsberg. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática,** Bauru, v. 5, p. 44-48, dez. 2015.
DOI: 10.21167/cqdvol5201523169664aflmb4448 - Disponível em: http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/index.jsp

Definição 7. *Um grafo G é dito* completo *se é simples e se, dados quaisquer dois vértices, existe uma aresta que os liga. Portanto, um grafo completo é conexo. Denotamos um grafo completo, com n vértices, por K_n.*

A Figura 3 é uma ilustração do grafo completo K_5.

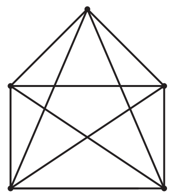

Figura 3: K_5

1.2 Grafos eulerianos

O conceito de grafo euleriano será fundamental para a resolução que está sendo proposta neste trabalho.

Definição 8. *Um grafo diz-se* euleriano *se admite um caminho fechado, sem repetição de arestas, contendo todas as arestas. Este caminho é chamado caminho euleriano. Note que todo grafo euleriano é conexo.*

Veremos agora um lema que será utilizado na demonstração do Teorema de Euler.

Lema 9. *Se G é um grafo no qual o grau de qualquer vértice é pelo menos 2, então G contém um ciclo.*
Demonstração. Se G possui laços ou arestas múltiplas, o resultado é óbvio. Podemos então assumir que G é um grafo simples. Seja v um vértice de G. Vamos construir um caminho $(v, v_1, v_2 ...)$, escolhendo v_1 entre os vértices adjacentes a v e, para cada $i > 1$, escolhendo v_{i+1} entre os vértices adjacentes a v_i de forma que este não seja o v_{i-1} (a existência de tal vértice é garantida pela hipótese). Como G contém somente um número finito de vértices, teremos que, em algum momento, teremos como única hipótese a escolha de um vértice que já tenha sido escolhido anteriormente. Se v_k for o primeiro destes vértices então a parte do caminho entre as duas ocorrências de v_k é o ciclo requerido. □

O seguinte teorema, demonstrado por Euler em 1736, permite a resolução imediata do problema das pontes de Königsberg, como veremos na Seção 2, e caracteriza os grafos conexos que são eulerianos.

Teorema 10. ***[Euler 1736]*** *Seja $G(V, A)$ um grafo conexo. Então, G é euleriano se, e somente se, $d(v)$ é par, $\forall v \in V$.*
Demonstração. Seja E um caminho euleriano em G. Cada vez que um vértice aparece em E, este possui duas arestas incidentes. Como cada aresta ocorre precisamente uma única vez em E, o grau de cada vértice é par.

Provaremos a recíproca por indução sobre o número de arestas de G. Suponhamos então que o grau de cada vértice de G é par. O caso em que G não possui arestas é trivial. Portanto, como hipótese de indução, admitiremos que o resultado é válido se G possuir menos de n arestas e nessas condições provaremos que o resultado é válido no caso de G possuir n arestas $(n > 1)$.

Como G é conexo, cada vértice terá pelo menos grau 2 e, portanto, pelo Lema 9, G contém um ciclo C. Se C contiver todas as arestas de G, então C é um caminho euleriano e a prova está concluída. Caso contrário, removeremos de G todas as arestas de C, formando um novo grafo H, eventualmente desconexo, com menos arestas que G e no qual todo vértice continua tendo grau par. Pela hipótese de indução, cada componente conexa de H é um grafo euleriano e ainda, possui pelo menos um vértice em comum com C (pela conexidade de G). Obtemos o caminho euleriano de G seguindo as arestas de C até um vértice não isolado de H ser alcançado, traçando o caminho euleriano da componente conexa de H que contem tal vértice e, em seguida, continuando pelas arestas de C até encontrar um vértice não isolado pertencendo a outra componente conexa de H, traçando o caminho euleriano desta, e assim sucessivamente. O processo terminará quando voltarmos ao vértice inicial. □

2 "O Problema das Pontes de Königsberg"

De posse dos resultados vistos anteriormente, estamos prontos para solucionar O Problema das Pontes de Königsberg.

2.1 Problema original.

Euler modelou-o como um grafo (Figura 2), identificando cada ponte com uma aresta e cada ilha e margem com um vértice. Com isso, o problema ficou reduzido a verificar se seria possível encontrar uma trajetória sobre o grafo, que percorresse todas as arestas uma única vez, voltando ao ponto de partida, que é equivalente a verificar se este grafo é euleriano. O Problema das Pontes de Königsberg é bem conhecido e se aplicarmos o Teorema de Euler, como nenhum vértice possui grau par, temos que este grafo não é euleriano e portanto, é impossível realizar tal passeio.

2.2 Sem retornar ao ponto de partida.

Uma modificação interessante no problema, é tirar a exigência de termos que voltar ao ponto de partida, ou seja, tentar realizar o passeio, passando uma única vez por cada uma das 7 pontes, mas podendo terminar o passeio em qualquer ponto. Neste caso, teríamos que verificar se existe no grafo da Figura 2 um caminho semi-euleriano, *isto é, um caminho aberto sem repetição de arestas, contendo todas as arestas. Os grafos que possuem tais caminhos chamam-se* grafos semi-eulerianos. *Veremos a seguir um resultado que caracteriza os grafos conexos semi-eulerianos.*

Corolário 11. *Um grafo conexo é semi-euleriano se, e somente se, possuir exatamente dois vértices de grau ímpar. Neste caso o caminho semi-euleriano inicia-se num desses vértices e termina no outro.*
Demonstração. Suponhamos que G possui um caminho semi-euleriano E começando num vértice v e terminando num vértice w. Como $v \neq w$ é claro que v e w têm ambos grau ímpar. Cada vez que um dos outros vértices aparece em E tem 2 arestas incidentes. Como cada aresta ocorre precisamente uma vez em E, o grau desses vértices é par.

Reciprocamente, suponhamos que G é conexo e possui exatamente 2 vértices, v e w, de grau ímpar. Consideremos o grafo G' que se obtém de G por junção de uma

FREITAS, A.; BORGES, L. M. As pontes de Königsberg. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática,** Bauru, v. 5, p. 44-48, dez. 2015.
DOI: 10.21167/cqdvol5201523169664aflmb4448 - Disponível em: http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/index.jsp

nova aresta ligando v a w. A este novo grafo podemos aplicar o Teorema de Euler e concluir que admite um caminho euleriano. Apagando deste caminho a aresta previamente adicionada a G obtemos um caminho semi-euleriano, ligando v e w, como desejávamos. $\square$

Pelo Corolário 11*, como o grafo da Figura* 2 *possui mais de* 2 *vértices com grau ímpar, ele também não é semi-euleriano e o passeio continua sendo impossível.*

Referências

[1] DIESTEL, R.Graph Theory. Springer, second edition, (2010);

[2] SAMPAIO, J.C.V. Passeios de Euler e as Pontes de Königsberg. Disponível em http://www.dm.ufscar.br/ sampaio/PasseiosdeEuler.pdf, acesso em 10 de junho de 2015.

[3] TRUDEAU, R.J. Introduction to Graph Theory. Dover Publications, (1993);

[4] WILSON, R. J.Graph Theory. Prentice Hall, fourth edition, (1996);

FREITAS, A.; BORGES, L. M. As pontes de Königsberg. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática,** Bauru, v. 5, p. 44-48, dez. 2015.
DOI: 10.21167/cqdvol5201523169664aflmb4448 - Disponível em: http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/index.jsp