Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 20, jul. 2021

# A Lógica do Muito descrita em um sistema de tablôs

The Logic of Many presented in a system of tableaux

**Mariana Matulovic**
Faculdade de Ciência e Engenharia
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
mariana.matulovic@unesp.br

**Hércules de Araujo Feitosa**
Faculdade de Ciências
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
hercules.feitosa@unesp.br

**Resumo**

O conceito de 'muitos' nos remete naturalmente a uma noção de quantificação. Todavia, esta quantificação não tem um entendimento único e satisfatório como os usuais quantificadores 'para todo' e 'existe algum'. Grácio (1999) introduziu um sistema lógico de primeira ordem, o qual denominou de 'Lógica do Muito', que formaliza uma proposta de estrutura matemática para o conceito de 'muitos'. Este trabalho apresentou a Lógica do Muito em um sistema axiomático dedutivo, que estende a lógica clássica de primeira ordem com elementos que formalizam a noção de Grácio para o conceito de 'muitos'.
Neste artigo, delineamos a Lógica do Muito em um sistema de tablôs, que é uma forma alternativa de sistema dedutivo, em geral, tido como mais econômico e com deduções mais simples. Naturalmente, demonstramos a equivalência dedutiva entre o sistema axiomático original e o sistema de tablôs aqui introduzido.

**Palavras-chave:** Muitos. Lógica quantificacional. Sistemas dedutivos. Tablôs.

**Abstract**

The concept of 'many' naturally lead us to a notion of quantification. However, this quantification does not have a unique and satisfactory understanding as for the usual quantifiers 'for all' and 'exist some'. Grácio (1999) introduced a first order logical system, that was named by 'Logic of Many', whose formalize the mathematical structure proposed for the concept of 'many'. That paper described the Logic of Many in an axiomatic deductive system, which extends the first order classical logic with elements that formalize the notion of Grácio for the concept of 'many'.
In this article, we present the Logic of Many in a system of tableaux, that is an alternative way of deductive system, in general, more economic and with simpler deductions. Furthermore, we proof the deductive equivalence between the original axiomatic system and the system of tableaux introduced in this paper.

**Keywords:** Many. Quantificational Logic. Deduction systems. Tableaux.

Artigo recebido em mar. 2021 e aceito em mai. 2021

# 1 Introdução

Mostowski (1957), com o artigo “On a generalization of quantifiers”, inaugurou um novo tópico de pesquisa em Lógica, as lógicas generalizadas, ao evidenciar a incapacidade dos clássicos quantificadores lógicos $\forall$ (para todos) e $\exists$ (existe algum), e demais quantificadores definidos a partir destes, de expressar alguns relevantes conceitos matemáticos, tal como a concepção numérica de “a maioria”, uma porção enumerável, uma quantidade infinita de elementos, entre outros.

Para tanto, Mostowski passou a caracterizar e formalizar de modo apropriado novos quantificadores, os chamados quantificadores generalizados, que foram integrados ao desenvolvimento lógico usual da lógica de primeira ordem (EITER; GOTTLOB; VEITH, 1999; VAANANEN, 1999).

Lindström (1966) generalizou o tratamento dos quantificadores de Mostowski ao permitir o uso de várias variáveis e fórmulas que formalizam, nessas condições, importantes propriedades da matemática e da teria dos conjuntos.

Como desdobramento, nas décadas de 1960 e 1970, vivenciamos um enorme desenvolvimento de pesquisas sobre esses novos quantificadores na Linguística, na Computação e na própria Lógica (VAANANEN, 1999).

No contexto das pesquisas com temas lógicos, o interesse central deu-se no uso dos quantificadores generalizados para caracterizar estruturas matemáticas importantes, mas não definíveis em termos da usual linguagem de primeira ordem. Paralelamente, linguistas como Barwise e Cooper (1981) analisavam a inter-relação dos quantificadores lógicos com questões das semânticas das linguagens naturais, mais uma vez, não definidos a partir dos quantificadores usuais $\forall$ e $\exists$. São exemplos destes quantificadores naturais os termos ‘muitos’, ‘uma boa parte’, ‘a maioria’, ‘bastante’, ‘poucos’, entre outros. De modo complementar, investigadores buscaram explorar a ação dos quantificadores lógicos em estruturas finitas, ou em procedimentos algorítmicos, de caráter finito (VAANANEN, 1999).

O tema de pesquisa chegou ao Brasil. Sette, Carnielli e Veloso (1999) introduziram no artigo “An alternative view of default reasoning and its logic” um sistema lógico, nomeado de Lógica dos Ultrafiltros, para formalizar o tema conjuntista e algébrico dos ultrafiltros, com a intenção de interpretar os conceitos linguísticos de ‘quase sempre’ ou ‘quase todos’.

Grácio (1999) desenvolveu em sua tese “Lógicas moduladas e raciocínio sob incertezas” um conjunto de lógicas, as Lógicas Moduladas, cujo sistema formal “[...] pode ser considerado uma abstração do sistema de Sette, Carnielli e Veloso para a formalização da noção de ‘quase todos’ ” (GRÁCIO, 1999, p. 105).

Lógicas moduladas são casos de lógicas generalizadas que complementam a lógica clássica de primeira ordem, caracterizando-as pelo acréscimo de novos quantificadores generalizados na linguagem de primeira ordem. Esses novos quantificadores são planejados para representarem noções indutivas do tipo ‘muitos’, ‘a maioria’, ‘uma boa parte’ e ‘quase todos’, como apresenta a autora com os seus quantificadores modulados.

Neste trabalho, concentramo-nos numa destas lógicas moduladas, a Lógica do Muito de Grácio (GRÁCIO, 1999). A pioneira, ao desenvolver a Lógica do Muito, tinha como meta formalizar sentenças com a noção intuitiva de ‘muitos indivíduos de um domínio’. De acordo com o considerado anteriormente, ela inseriu um novo quantificador generalizado $G$ na linguagem de primeira ordem, com o significado seguinte: $(Gx)\ \varphi(x)$ indica que ‘muitos $x$ satisfazem $\varphi(x)$’.

Como nossa contribuição original, apresentamos esta Lógica do Muito de Grácio (GRÁCIO, 1999), inicialmente descrita num sistema dedutivo axiomático, num sistema de tablôs, que é método dedutivo alternativo ao axiomático ou Hilbertiano.

Assim, para facilitar o entendimento global do artigo e como forma de destacar os tópicos mencionados, então apresentamos elementos de lógicas moduladas, e a sua particularização dada na Lógica do Muito. Relembramos noções básicas sobre os tablôs e, então, introduzimos um sistema de tablôs para a Lógica do Muito e verificamos a equivalência entre o sistema de tablôs aqui introduzido e o sistema axiomático original de Grácio (GRÁCIO, 1999).

# 2 Lógicas moduladas

Apresentamos noções breves sobre as lógicas moduladas.

Considere **L** uma linguagem de primeira ordem, com símbolos para predicados, funções e constantes, fechada para os operadores $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ e, também, para os quantificadores $\exists$ e $\forall$.

Denotamos por $\mathbb{L}(Q)$ a extensão da lógica de primeira ordem $\mathbb{L}$ obtida pela inserção de um quantificador generalizado $Q$ (quantificador modulado).

As *fórmulas* (e *sentenças*) de $\mathbb{L}(Q)$ são aquelas de $\mathbb{L}$ acrescidas das fórmulas geradas pela cláusula seguinte:

- se $\varphi$ é uma fórmula de $\mathbb{L}(Q)$ e $x$ ocorre em $\varphi$, então $(Qx)\varphi(x)$ é uma fórmula de $\mathbb{L}(Q)$.

As conceitualizações clássicas de variável livre e ligada em uma fórmula são estendidas ao quantificador $Q$, isto é, se $x$ é livre em $\varphi$, então $x$ ocorre ligada em $(Qx)\varphi(x)$. Denota-se por $\varphi(x)(t/x)$ o resultado da substituição de todas as ocorrências livres em $\varphi$ da variável $x$ pelo termo $t$. Por questões de simplicidade, quando não houver confusão, representaremos apenas $\varphi(t)$ ao invés de $\varphi(x)(t/x)$.

Em termos semânticos, dada uma estrutura clássica de primeira ordem $\mathcal{A}$, com domínio $A$, e $\mathbf{Q}$ um conjunto de subconjuntos de $A$, tal que $\emptyset \notin \mathbf{Q}$, isto é, $\mathbf{Q} \subseteq \mathcal{P}(A) - \emptyset$. A *estrutura modulada* para $\mathbb{L}(Q)$, indicada por $\mathcal{A}^{\mathbf{Q}}$, é determinada pelo par $(\mathcal{A}, \mathbf{Q})$.

A interpretação dos símbolos relacionais, funcionais e constantes individuais de $\mathbb{L}(Q)$ é a mesma de $\mathbb{L}$ em $\mathcal{A}$.

A satisfação de uma fórmula de $\mathbb{L}(Q)$ em uma estrutura $\mathcal{A}^{\mathbf{Q}}$ é definida recursivamente, do modo usual, acrescentando-se a cláusula seguinte:

- seja $\varphi$ uma fórmula cujo conjunto de variáveis livres esteja contido em $\{y_1, ..., y_n\}$ e consideremos uma sequência $\vec{a} = (a_1, ..., a_n)$ em $A$. Então:

$$\mathcal{A}^{\mathbf{Q}} \vDash (Qx)\varphi[x, \vec{a}] \Leftrightarrow \{b \in A : \mathcal{A}^{\mathbf{Q}} \vDash \varphi[b, \vec{a}]\} \in \mathbf{Q}.$$

Em resumo, ao determinar $\mathbf{Q}$ a partir de estruturas matemáticas, Grácio (1999) analisa proposições do tipo 'maioria', 'muitos' e 'para uma boa parte'.

A lógica dos ultrafiltros, introduzida em Sette, Carnielli e Veloso (1999) procurou formalizar proposições do tipo 'quase todos' ou 'geralmente', e também deve ser entendida como uma particularização das lógicas moduladas.

Verifica-se que as noções de verdadeiro e falso, intrínsecas aos quantificadores modulados, é dependente da lógica subjacente, pois depende de qual medida (quantificação) estamos usando e que "[...] deve ser incluída como parte do modelo antes que as sentenças tenham qualquer valor de verdade estabelecido" (BARWISE; COOPER, 1981, p. 163).

As noções semânticas usuais como modelo, validade, consequência lógica, entre outras, podem ser apropriadamente adaptadas.

F Os axiomas de $\mathbb{L}(Q)$ são aqueles de $\mathbb{L}$ com os axiomas da identidade acrescidos dos seguintes axiomas para o quantificador $Q$:

(Ax1) $(\forall x)(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \to ((Qx)\varphi(x) \to (Qx)\psi(x))$
(Ax2) $(Qx)\varphi(x) \to (Qy)\varphi(y)$
(Ax3) $(\forall x)\varphi(x) \to (Qx)\varphi(x)$
(Ax4) $(Qx)\varphi(x) \to (\exists x)\varphi(x)$.

Dada uma interpretação com universo $A$ em $\mathcal{A}^{\mathbf{Q}}$ e as fórmulas $\varphi$, $\psi$, com exatamente uma variável livre $x$, então indicamos os conjuntos $[\varphi] = \{a \in A : \varphi[a]\}$ e $[\psi] = \{a \in A : \psi[a]\}$.

Intuitivamente, os axiomas indicam que: (Ax3) se todos os indivíduos satisfazem $\varphi$, então $Q$ indivíduos de $A$ satisfazem $\varphi$, ou, ainda, que $A \in \mathbf{Q}$; Em (Ax4) tem-se que $\emptyset \notin \mathbf{Q}$. Em (Ax1) evidencia-se que, se $[\varphi]$ e $[\psi]$ são idênticos, então um deles pertence à $\mathbf{Q}$ se, e somente se, o outro também pertence a $\mathbf{Q}$. O (Ax2) apenas registra a substitutibilidade para varáveis livres.

Em termos de regras para os sistemas modulados adere-se às usuais de $\mathbb{L}$ (MENDELSON, 1964), a saber: *Modus Ponens* (MP) e Generalização (Gen).

As definições de sentença, demonstração, teorema, consequência lógica, consistência, dentre outras, para $\mathbb{L}(Q)$, são definidas de modo semelhante às caracterizadas para a lógica clássica.

# 3 A lógica do muito

A *Lógica do Muito* é um caso particular da lógica modulada, motivada pela formalização da noção de 'muitos'. Esta vaga noção associa-se, neste artigo, como a concepção de um conjunto grande de evidências, mas não necessariamente com a ideia de majoritário (em termos de cardinalidade).

## 3.1 Família fechada superiormente própria de conjuntos

Carnielli e Grácio (2008) consideram que as seguintes propriedades devem ser contempladas ao se formalizar a ideia de 'muitos', que expressa "um conjunto grande de evidências":

(i) se $\varphi$ é uma sentença verdadeira para todos os membros do domínio, então $\varphi$ é verdadeira para muitos indivíduos deste universo;

(ii) se $\varphi$ é uma sentença verdadeira para muitos indivíduos, então há ao menos um elemento do universo que satisfaz $\varphi$;

(iii) se o conjunto de elementos que satisfazem $\varphi$ está incluso no conjuntos de elementos que satisfazem $\psi$, e há muitos membros que satisfazem $\varphi$, então há muitos membros que satisfazem $\psi$.

Esta noção de 'muitos' pode ser representada, matematicamente, pelo conceito de família fechada superiormente própria de conjuntos.

**Definição 1** *Uma família fechada superiormente própria de conjuntos no universo $E$ é uma coleção $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(E)$ tal que:*

(i) *$E \in \mathcal{M}$,*
(ii) *$\emptyset \notin \mathcal{M}$,*
(iii) *Se $B \in \mathcal{M}$ e $B \subseteq C$, então $C \in \mathcal{M}$.*

## 3.2 Um sistema axiomático para 'muitos'

Seja $\mathbb{L}$ a lógica clássica de primeira ordem com a igualdade. A *Lógica do Muito*, denotada por $\mathbb{L}(M)$, é obtida a partir de $\mathbb{L}$ do seguinte modo.

Os axiomas de $\mathbb{L}(M)$ são todos os axiomas de $\mathbb{L}$ acrescidos de novos axiomas relativos ao novo quantificador $M$, denominado *quantificador do muito* que denota "para muitos $x, \varphi(x)$":

$(Ax_1)$ $(\forall x)(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \to ((Mx)\varphi(x) \to (Mx)\psi(x))$
$(Ax_2)$ $(Mx)\varphi(x) \to (My)\varphi(y)$, quando $y$ é livre para $x$ em $\varphi(x)$
$(Ax_3)$ $(\forall x)\varphi(x) \to (Mx)\varphi(x)$
$(Ax_4)$ $(Mx)\varphi(x) \to (\exists x)\varphi(x)$
$(Ax_5)$ $(\forall x)(\varphi(x) \to \psi(x)) \to ((Mx)\varphi(x) \to (Mx)\psi(x))$.

As regras dedutivas para $\mathbb{L}(M)$ são as mesmas de $\mathbb{L}$, especificamente:

(MP) *Modus Ponens*: $\varphi, \varphi \to \psi \ / \ \psi$
(Gen) Generalização: $\varphi \ / \ (\forall x)\varphi(x)$.

A intuição original de 'muitos' está formalizada nos axiomas $(Ax_3) - (Ax_5)$.
Os dois primeiros axiomas têm a tarefa de tornar possível a adequação com o modelo proposto.

## 3.3 O modelo em primeira ordem

Seja $\mathcal{A}$ uma estrutura clássica de primeira ordem com universo A.

**Definição 2** *Uma estrutura de família fechada superiormente própria de conjuntos, denotada por $\mathcal{A}^{\mathcal{M}}$, para $\mathbb{L}(M)$, é obtida a partir da estrutura $\mathcal{A}$ acrescida de uma família fechada superiormente própria de conjuntos $\mathcal{M}$.*

A interpretação das relações, funções e símbolos de constantes é dado como a interpretação de $\mathbb{L}$ com relação a $\mathcal{A}$.

**Definição 3** *A satisfação de uma formula $\varphi$ de $\mathbb{L}(M)$ em uma estrutura $\mathcal{A}^{\mathcal{M}}$, é indutivamente definida como o modo usual adicionada da seguinte cláusula:*
• *se $\varphi$ é uma fórmula cujo conjunto de variáveis livres está contido em $\{x\} \cup \{y_1, ..., y_n\}$ e $\vec{a} = (a_1, ..., a_n)$ é uma sequência de elementos de A, então:*

$$\mathcal{A}^{\mathcal{M}} \vDash (Mx)\varphi[x, \vec{a}] \Leftrightarrow \{b \in A : \mathcal{A}^{\mathcal{M}} \vDash [b, \vec{a}]\} \in \mathcal{M}.$$

Para uma sentença $(Mx)\varphi(x)$, tem-se:

$$\mathcal{A}^{\mathcal{M}} \vDash (Mx)\varphi(x) \Leftrightarrow \{a \in A : \mathcal{A}^{\mathcal{M}} \vDash \varphi(a)\} \in \mathcal{M}.$$

Carnielli e Grácio (2008) provaram que a estrutura de família fechada superiormente própria de conjuntos $\mathcal{A}^{\mathcal{M}}$ são modelos corretos e completos para $\mathbb{L}(M)$.

# 4 Tablôs para a lógica do muito

Os primeiros sistemas de tablôs tiveram origem a partir dos sistemas de provas desenvolvidos por Gentzen (1969), e foram aperfeiçoados e difundidos por Smullyan (1995). Os sistemas de tablôs clássicos e pioneiros caracterizaram-se pela obediência à propriedade das subfórmulas,[1] como nos cálculos de sequentes de Gentzen, e ainda por ser um método dedutivo por refutação.

Suponhamos que nos seja dada uma fórmula $\varphi$ para analisarmos a sua validade (dedutibilidade) no sistema lógico em que estamos trabalhando. Para tanto, partimos, como hipótese, da negação da fórmula $\varphi$, ou seja, supomos que $\neg\varphi$ é válida. Se após aplicarmos todas as possíveis regras do sistema, chegarmos a uma contradição lógica, então entendemos que a fórmula $\neg\varphi$, que inicialmente supomos como válida, não pode ser aceita. Dada a bivalência do sistema, então a fórmula $\varphi$, em questão, é válida. Caso contrário, dizemos que ela não é válida.

Antes de delinearmos o método em si, exporemos algumas definições que são essenciais para uma melhor compreensão da teoria, as quais foram retiradas de Matulovic (2008), Silvestrini (2007) e Smullyan (1995).

Consideramos, inicialmente, a definição de árvore, visto que um tablô pode ser caracterizado como uma árvore constituída de nós ou pontos.

Cada nó ou ponto, de acordo com Silvestrini (2007), denota uma fórmula associada com a fórmula inicialmente dada.

A utilização do termo 'árvore' faz referência às árvores genealógicas em razão de sua semelhança estrutural com os nascimentos hierárquicos de familiares.

Distinguem-se dois tipos de nós ou pontos: (i) os nós sucessores imediatos que, conforme o próprio nome sugere, ocorrem imediatamente após algum ponto; (ii) os nós apenas sucessores, que em algum momento sucedem um determinado ponto.

As concepções de sucessor e sucessor imediato são sempre relativos a algum ponto.

Sejam $A$ um conjunto não-vazio de nós ou pontos, e $R$ uma relação sobre $A$, isto é, $R \subseteq A \times A$, cuja especificidade está em determinar a relação (antecessor x sucessor) entre os elementos de $A$, ou seja, $xRy$ denota a concepção de que o nó $x$ é antecessor ou predecessor de $y$. Neste caso, o nó $y$ é o sucessor de $x$.

**Definição 4** *Uma árvore é uma estrutura $\mathcal{A} = \langle A, R\rangle$, que satisfaz as seguintes propriedades (MATULOVIC, 2008, p. 55):*

1. *existe um único nó, denominado raiz ou origem e denotado por $r$, que não possui elementos antecessores, ou seja: $\neg\exists x \in A, xRr$*

2. *todo nó, distinto da raiz, possui um único antecessor, isto é, se $y \in A, y \neq r$, então $\exists! z \in A$ tal que $zRy$*

3. *a relação $R$ não possui ciclos, isto é, $\neg\exists\{x_1, ..., x_n\} \subseteq A$ de modo que: $x_1Rx_2R...Rx_1$*

4. *se $y$ é um ponto sucessor imediato de $x$, isto é, $xRy$, então o nível $n$ de $y$ é o nível de $x$ acrescido de uma unidade*
$$n(y) = n(x) + 1.$$

[1]Propriedade das subfórmulas: Trata-se de um procedimento utilizado em demonstrações ou provas que usa como elementos de análise apenas subfórmulas da fórmula inicial considerada, ou seja, analisa-se apenas as subfórmulas da fórmula que se quer demonstrar (MORTARI, 2001).

Atribui-se um nível para cada nó ou ponto de uma árvore $A$ por uma função que associa a cada ponto ou nó $x$ da árvore um número inteiro positivo, do seguinte modo:

$$n : A \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$\text{se } y \text{ é a raiz, então } n(y) = 1$$
$$\text{se } xRy, \text{ então } n(y) = n(x) + 1.$$

Um nó ou ponto final ou terminal não tem qualquer tipo de sucessor.

Os pontos com um único sucessor imediato são denominamos de pontos simples. Os pontos com mais de um sucessor imediato são os pontos de junção.

De acordo com Smullyan (1995), um caminho ou ramo é uma sequência finita ou infinita porém enumerável de pontos, que se inicia no ponto da origem, tal que cada termo da sequência, exceto o último, é o predecessor de um próximo. Naturalmente, o último ponto de um ramo é um ponto final.

Um ramo constituído por um conjunto finito de pontos é dito finito. Do contrário, ele é um ramo infinito.

Uma árvore é finitamente gerada quando cada ponto dela tem apenas uma quantidade finita de sucessores.

Como o método é fundado na propriedade das subfórmulas de Gentzen, temos como fundamentais os conceitos de fórmulas e subfórmulas do sistema.

Assim, caracterizam-se como *fórmulas imediadas* àquelas que obedecem as seguintes condições:

- a fórmula $\neg\varphi$ tem como subfórmula imediata $\varphi$;
- as fórmulas $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$ , $\varphi \to \psi$ têm como subfórmulas imediatas $\varphi$ e $\psi$;
- variáveis proposicionais não têm subfórmulas imediatas.

Conforme Smullyan, "$\varphi$ é uma subfórmula de $\psi$ se, e somente se, existe uma sequência finita que se inicia em $\psi$ e termina em $\varphi$, de maneira que cada termo da sequência, exceto o primeiro, é uma subfórmula imediata do termo precedente[2]" (SMULLYAN, 1995, p. 8, tradução nossa).

A estrutura de árvore consiste do seguinte: no topo da árvore colocamos a fórmula dada $\varphi$. Os nós abaixo são as subfórmulas da fórmula $\varphi$. Em cada tablô, se a validade de uma fórmula estiver condicionada com a validade das suas subfórmulas, então dispomos essas subfórmulas abaixo fórmula na árvore, ou seja, ocorrem num mesmo ramo. Em particular, se a validade da fórmula depende apenas de uma das subfórmulas, então as subfórmulas aparecerão em ramos distintos na árvore, isto é, a fórmula gerará uma bifurcação (dois ramos), de modo que em sua sucessão, cada subfórmula estará em um ramo distinto (MATULOVIC, 2008, p. 58).

Em razão da complementariedade da Lógica do Muito em relação à Lógica de Primeira Ordem, muitas das propriedades e definições válidas para a segunda também se aplicam para a primeira. No entanto, há diferenças em termos das regras referentes ao quantificador modulado $M$, bem como na cláusula de fechamento dos tablôs, conforme exposto na subseção seguinte.

## 4.1 As regras de expansão

O operador generalizado $M$, vinculado à definição de família própria fechada superiormente, impõe ao sistema dedutivo da Lógica do Muito a necessidade de se elaborar um novo conjunto de

[2]Usamos a notação $\varphi$ e $\psi$ ao invés de $Y$ e $Z$ para mantermos a coerência de notação das fórmulas no decorrer do artigo.

regras para subsidiar as características próprias desse sistema.

As regras que representam o operador $M$ no sistema dedutivo de tablôs, o qual denotaremos por $\mathbf{Tabl}[\mathbb{L}(M)]$, são as seguintes:

(i) Regra $M_1$

$$\begin{array}{lr} 1 & (Mx)\varphi(x) \\ \hline 1 & \varphi(a) \end{array} \tag{1}$$

para um novo termo $a$.

De modo intuitivo, tem-se que se há muitos indivíduos que satisfazem uma dada propriedade $\varphi(x)$, então existe pelo menos um elemento que a satisfaz.

(ii) Regra $M_2$

$$\begin{array}{lr} 0 & (Mx)\varphi(x) \\ \hline 0 & \varphi(a) \end{array} \tag{2}$$

para um novo termo $a$.

Esta regra destaca que se conjunto de evidências que satisfazem uma tal propriedade não tem muitos indivíduos, então não é o caso que ela seja satisfeita por algum elemento.

(iii) Regra $M_3$

$$\begin{array}{lr} 0 & (Mx)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \\ \hline 0 & (Mx)\varphi(x) \\ 0 & (Mx)\psi(x) \end{array} \tag{3}$$

A definição de família fechada superiormente determina que numa união de conjuntos, se um (ou mais) de seus constituintes goza da propriedade de 'ter muitos elementos', então toda a união também terá muitos elementos. Analogamente, se a união de conjuntos não goza da propriedade de ter um conjunto grande de elementos que a satisfaz, então cada um dos seus conjuntos constituintes também não terá um conjunto grande de elementos.

(iv) Regra $M_4$

$$\begin{array}{ll} 1 & (\forall x)(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \\ \hline 1 & (\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \\ 1 & (\forall x)(\psi(x) \rightarrow \varphi(x)) \end{array} \tag{4}$$

Regra que contempla propriedades válidas da LPO (Lógica de Primeira Ordem). Assim é uma regra clássica e está aqui apenas para simplicidade, pois a sua inserção decorre da necessidade de utilizá-la nesse formato antes de instanciá-la, como ocorre nos tablôs tradicionais para a LPO.

(v) Regra $M_5$

$$\frac{1 \quad (\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))}{0 \quad (Mx)\varphi(x) \quad | \quad 1 \quad (Mx)\psi(x)} \tag{5}$$

Essa regra deriva do Axioma 1 da Lógica do Muitos ($\mathbb{L}(M)$) e da propriedade dos condicionais associados à bi-implicação.

Para a efetividade do método **Tabl**$[\mathbb{L}(M)]$, o sistema deve ser executado na seguinte ordem:

1. Aplicação das regras dos tablôs clássicos inerentes aos operadores ($\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$) e dos quantificadores ($\forall, \exists$) (sem instanciação).

2. Aplicar as regras específicas do **Tabl**$[\mathbb{L}(M)]$.

3. Instanciação das fórmulas.

4. Análise das cláusulas de fechamento

Em termos de cláusulas de fechamento para **Tabl**$[\mathbb{L}(M)]$, temos a definição seguinte:

**Definição 5** *Um ramo de um tablô em **Tabl**$[\mathbb{L}(M)]$ é fechado se ocorre uma das condições seguintes:*
*(i) $\varphi$ e $\neg\varphi$ (cláusula de fechamento dos tablôs clássicos);*
*(ii) $(Mx)\varphi(x)$ e $\neg(My)\varphi(y)$, para situações em que $y$ é uma variável livre para $x$ em $\varphi(x)$.*

Seguem alguns exemplos de tablôs de **Tabl**$[\mathbb{L}(M)]$, conforme Matulovic (2008).

**Exemplo 6** $((Mx)\varphi(x) \vee (Mx)\psi(x)) \rightarrow (\exists x)(\varphi(x) \vee \psi(x))$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *(a)* | 0 | $((Mx)\varphi(x) \vee (Mx)\psi(x)) \rightarrow (\exists x)(\varphi(x) \vee \psi(x))$ | | | | *Início do tablô* |
| *(b)* | 1 | $((Mx)\varphi(x) \vee (Mx)\psi(x))$ | | | | *Regra do condicional em (a)* |
| *(c)* | 0 | $(\exists x)(\varphi(x) \vee \psi(x))$ | | | | *Regra do condicional em (a)* |
| *(d)* | 1 | $(Mx)\varphi(x)$ | \| | 1 | $(Mx)\psi(x)$ | *LPC em (b)* |
| *(e)* | 1 | $\varphi(a)$ | \| | 1 | $\psi(b)$ | *Regra $M_1$ em (d)* |
| *(f)* | 0 | $\varphi(a) \vee \psi(a)$ | \| | 0 | $\varphi(a) \vee \psi(a)$ | *LPO em (c)* |
| *(g)* | 0 | $\varphi(b) \vee \psi(b)$ | \| | 0 | $\varphi(b) \vee \psi(b)$ | *LPO em (c)* |
| *(h)* | 0 | $\varphi(a)$ | \| | 0 | $\varphi(b)$ | *LPC em (f, g)* |
| *(i)* | 0 | $\psi(a)$ | \| | 0 | $\psi(b)$ | *LPC em (f, g)* |
| | | $x$ | \| | | $x$ | |

**Exemplo 7** $(Mx)(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$

| | | | |
|---|---|---|---|
| *(a)* | 0 | $(Mx)(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$ | *Início do tablô* |
| *(b)* | 0 | $\varphi(a) \vee \neg\varphi(a)$ | *Regra $M_1$ em (a)* |
| *(c)* | 0 | $\varphi(a)$ | *LPC em (b)* |
| *(d)* | 0 | $\neg\varphi(a)$ | *LPC em (b)* |
| *(e)* | 1 | $\varphi(a)$ | *LPC em (d)* |
| | | $x$ | |

A comprovação da correção (corretude) e completude da Lógica do Muito em tablôs ocorrerá do seguinte modo: primeiro, não perderemos de vista a adequação (correção e completude fortes) de Grácio (1999); a seguir, mostraremos que a toda dedução no sistema axiomático corresponde uma dedução no sistema de tablôs; por fim, que a cada dedução do sistema de tablôs corresponde uma consequência semântica no modelo de $\mathbb{L}(M)$.

# 5 A equivalência entre os sistemas dedutivos

Com vistas a demonstrarmos a equivalência entre o sistema $\mathbf{Tabl}[\mathbb{L}(M)]$ e o sistema hilbertiano proposto em Grácio (1999), denotado por $\mathbf{L}^{\tau}_{\omega\omega}(M)$ [3], desenvolveremos o seguinte:

$$\begin{array}{c} \Gamma \vdash_{\mathbf{L}^{\tau}_{\omega\omega}(M)} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \models_{\mathbf{L}^{\tau}_{\omega\omega}(M)} \varphi \\ \Updownarrow \\ \Gamma \Vdash_{\mathbf{Tabl}[\mathbb{L}(M)]} \varphi \end{array}$$

Ao demonstrarmos que $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}^{\tau}_{\omega\omega}(M)} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \Vdash_{\mathbf{Tabl}[\mathbb{L}(M)]} \varphi$, estabelecemos uma equivalência dedutiva entre os dois sistemas. Considerando que em Grácio (1999) estão demonstrados os Teoremas de Correção e Completude para a Lógica do Muito, então o sistema por tablôs, $\mathbf{Tabl}[\mathbb{L}(M)]$ também é correto e completo para a semântica da Seção 3.3.

**Observação 8** *O símbolo $\Vdash$ representa a dedução no sistema de tablôs.*

Algumas definições e teoremas expostos abaixo foram inspirados em Carnielli, Coniglio e Bianconi (2005).

**Definição 9** *Se $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é um conjunto de fórmulas de $\mathbb{L}(M)$, então $\Gamma$ deduz analiticamente $\varphi$, o que é denotado por $\Gamma \Vdash_T \varphi$, se existe um tablô fechado para o conjunto $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$.*

Por vezes, o conjunto $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é indicado por $(\Gamma, \neg\varphi)$.

**Definição 10** *Um conjunto $\Gamma$ de fórmulas de $\mathbb{L}(M)$ é T-inconsistente (inconsistente por tablôs) se existe um tablô fechado para $\Gamma$.*

[3] Em Grácio (1999) a autora denotou a Lógica de Primeira Ordem por $\mathbf{L}^{\tau}_{\omega\omega}$ e a da Lógica do Muito por $\mathbf{L}^{\tau}_{\omega\omega}(G)$. Na versão original o quantificador ‘muitos’ foi indicado por $G$.

Uma regra central para as nossas demonstrações seguintes, que é válida tanto para a Lógica Proposicional Clássica (LPC), quanto para a Lógica de Primeira Ordem (clássica) (LPO), é a introdução ao corte. Em razão disto, veremos que ela é preservada ao complementarmos a LPO com o quantificador generalizado $M$ na $\mathbb{L}(M)$.

**Teorema 11** *(Introdução do Corte) Os conjuntos* $(\Gamma, \varphi)$ *e* $(\Gamma, \neg\varphi)$ *são T-inconsistentes se, e somente se, o conjunto* $\Gamma$ *é T-inconsistente*[4].

***Demonstração 1*** $(\Leftarrow)$ *Se* $\Gamma$ *é T-inconsistente, então* $(\Gamma, \varphi)$ *e* $(\Gamma, \neg\varphi)$ *são T-inconsistentes.*

*Se* $\Gamma$ *é T-inconsistente, então há um tablô fechado para* $\Gamma$*. Pela Monotonicidade, se* $\Gamma \subseteq \Delta$ *e* $\Gamma$ *é fechado por tablô, então também* $\Delta$ *também é fechado por tablô. Logo* $(\Gamma, \varphi)$ *e* $(\Gamma, \neg\varphi)$ *são T-inconsistentes.*

$(\Rightarrow)$ *Se* $(\Gamma, \varphi)$ *e* $(\Gamma, \neg\varphi)$ *são T-inconsistentes, então* $\Gamma$ *é T-inconsistente.*

*Em Carnielli, Coniglio e Bianconi (2005) está uma demonstração deste teorema para a linguagem* $L = \{\vee, \neg\}$*. Estenderemos para a linguagem da Lógica do Muito, começando pela inserção do condicional e depois pelos quantificadores, um a um.*

1. *Para a inserção do condicional na linguagem* $L = \{\vee, \neg, \rightarrow\}$*, teremos o caso em que* $\varphi$ *é* $\varphi \rightarrow \psi$*:*

   *Por hipótese,* $(\Gamma, (\varphi \rightarrow \psi))$ *e* $(\Gamma, \neg(\varphi \rightarrow \psi))$ *são T-inconsistentes. Pela Definição 9, cada conjunto T-inconsistentes admite um tablô fechado. Daí, ou há um tablô fechado para* $\Gamma$ *(e nada precisa ser acrescentado) ou o tablô fecha pela inclusão da fórmula condicional:*

   *(a)*

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma & \\ & \varphi \rightarrow \psi & \\ \neg\varphi & \mid & \psi \\ x & \mid & x \end{array}$$

   *Como esse tablô é fechado, então* $\varphi$ *ocorre no ramo à esquerda, e* $\neg\psi$ *ocorre no ramo à direita a partir de* $\Gamma$*.*

   *(b)*

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \neg(\varphi \rightarrow \psi) \\ \varphi \\ \neg\psi \\ x \end{array}$$

[4]Com vistas a uma simplificação de notação, substituímos os valores de verdade 0 e 1, pelo sinal $(\neg)$ da negação, e a ausência de marcação para a afirmação. Logo, $(\neg(Mx)\varphi(x))$ indica que não são muitos os indivíduos que satisfazem $\varphi(x)$ e $(Mx)\varphi(x))$ indica que muitos indivíduos satisfazem $\varphi(x)$. No momento adequado retornamos com a notação usual.

*Como o tablô é fechado, então $\neg\varphi$ ou $\psi$ ocorre no tablô de $\Gamma$.*

*Como devem ocorrer (a) e (b), então há um tablô fechado para $\Gamma$ e, portanto, $\Gamma$ é T-consistente.*

2. *Para a inclusão do quantificador universal em $L = \{\vee, \neg, \rightarrow, \forall\}$, consideramos que $\varphi$ é $(\forall x)\varphi(x)$:*

   *Por hipótese, $(\Gamma, (\forall x)\varphi(x))$ e $(\Gamma, \neg(\forall x)\varphi(x))$ são T-inconsistentes e pela Definição 9, existe um tablô fechado para cada um destes conjuntos. Assim:*

   *(a)*

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ (\forall x)\varphi(x) \\ \varphi(x), \textit{ para todo } x \\ x \end{array}$$

   *Então, temos que $\neg\varphi$ ocorre no tablô de $\Gamma$.*

   *(b)*

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \neg(\forall x)\varphi(x) \\ \neg\varphi(x), \textit{ x novo no ramo} \\ x \end{array}$$

   *Logo, $\varphi(x)$ ocorre em $\Gamma$, para um $x$ novo no ramo.*

   *Como valem (a) e (b), então $\Gamma$ é T-inconsistente.*

3. *Para a inclusão do quantificador generalizado em $L = \{\vee, \neg, \rightarrow, \forall, M\}$, tomamos que: $\varphi$ é $(Mx)\varphi(x))$:*

   *Como $(\Gamma, (Mx)\varphi(x))$ e $(\Gamma, \neg(Mx)\varphi(x))$ são T-inconsistentes, então existe um tablô fechado para cada um destes conjuntos. Daí:*

   *(a)*

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ (Mx)\varphi(x) \\ x \end{array}$$

   *Como o tablô é fechado, então tem-se $\neg(Mx)\varphi(x)$, ou $\neg(\exists x)\varphi(x)$, ou $\neg\varphi(a)$, para alguma nova constante $a$ ocorre no tablô de $\Gamma$.*
   *(b)*

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \neg(Mx)\varphi(x) \\ x \end{array}$$

*Diante disso, ocorre no tablô de* $\Gamma$*:* $(Mx)\varphi(x)$ *ou* $(\forall x)\varphi(x)$*. Com o intuito de demonstrar que* $\Gamma$ *é T-inconsistente, avaliaremos todas as combinações possíveis entre os distintos tipos de fórmulas que podem estar inseridas no tablô de* $\Gamma$*, lembrando que (a) e (b) ocorrem conjuntamente.*

- $\neg(Mx)\varphi(x)$ *e* $(Mx)\varphi(x)$*. Trivialmente,* $\Gamma$ *é T- inconsistente.*
- $\neg(Mx)\varphi(x)$ *e* $(\forall x)\varphi(x)$*. De* $(\forall x)\varphi(x)$ *temos* $\varphi(a)$*, para todo a, inclusive para o* $\neg\varphi(a)$*, originário da instanciação de* $\neg(Mx)\varphi(x)$*. Logo,* $\Gamma$ *é T- inconsistente.*
- $\neg(\exists x)\varphi(x)$ *e* $(Mx)\varphi(x)$*. De* $\neg(\exists x)\varphi(x)$ *tem-se* $\neg\varphi(a)$*, para todo a, inclusive para o* $\varphi(a)$*, oriundo da instanciação de* $(Mx)\varphi(x)$*. Logo,* $\Gamma$ *é T- inconsistente.*
- $\neg(\exists x)\varphi(x)$ *e* $(\forall x)\varphi(x)$*. Por análise direta,* $\Gamma$ *é T- inconsistente.*

Logo, a regra do corte pode ser aplicada em contexto de fórmulas generalizadas pelo quantificador $M$.

## 5.1 Do sistema axiomático para os tablôs

Verificamos, agora, a primeira parte da equivalência entre os dois sistemas considerados.

**Teorema 12** *Do sistema hilbertiano para os tablôs:*

$$\Gamma \vdash_{L^{\tau}_{\omega\omega}(M)} \varphi \Rightarrow \Gamma \Vdash_{Tabl[\mathbb{L}(M)]} \varphi$$

***Demonstração 2*** *Por indução sobre o comprimento da dedução* $\Gamma \vdash_{L^{\tau}_{\omega\omega}(M)} \varphi$*.*

- *Para dedução de comprimento* $1$*, ou seja* $n = 1$*, tem-se que* $\varphi \in \Gamma$ *ou* $\varphi$ *é um axioma de* $\mathbb{L}(M)$*:*
  - *se* $\varphi \in \Gamma$*, um tablô de* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *certamente fecha.*
  - *se* $\varphi$ *é um axioma, então deve ter a forma de algum dos esquemas de axiomas. Mostremos que para cada axioma específico da Lógica do Muito existe um tablô fechado:*
    $Ax_5 : (\forall x)(\varphi(x) \to \psi(x)) \to (Mx)\varphi(x) \to (Mx)\psi(x))$

    | | | | |
    |---|---|---|---|
    | *(a)* | $0$ | $(\forall x)(\varphi(x) \to \psi(x)) \to ((Mx)\varphi(x) \leftrightarrow (Mx)\psi(x))$ | *Início do tablô* |
    | *(b)* | $1$ | $(\forall x)(\varphi(x) \to \psi(x))$ | *Regra do condicional em (a)* |
    | *(c)* | $0$ | $(Mx)\varphi(x) \to (Mx)\psi(x)$ | *Regra do condicional em (a)* |
    | *(d)* | $1$ | $(Mx)\varphi(x)$ | *Regra do condicional em (c)* |
    | *(e)* | $0$ | $(Mx)\psi(x)$ | *Regra do condicional em (c)* |
    | *(f)* | $0$ | $(Mx)\varphi(x)$ \| $1$ $(Mx)\psi(x)$ | *Regra* $M_5$ *em (b)* |
    | | | $x$ \| $x$ | |

    $Ax_3 : (\forall x)\varphi(x) \to (Mx)\varphi(x)$

*(a)* $0$ $(\forall x)\varphi(x) \rightarrow (Mx)\varphi(x)$ *Início do tablô*

*(b)* $1$ $(\forall x)\varphi(x)$ *Regra do condicional em (a)*

*(c)* $0$ $(Mx)\varphi(x)$ *Regra do condicional em (a)*

*(d)* $0$ $\varphi(a)$ *Regra $M_2$ em (c), para um termo a*

*(e)* $1$ $\varphi(a)$ *Regra do Universal em (b)*

$x$

$Ax_4 : (Mx)\varphi(x) \rightarrow (\exists x)\varphi(x)$

*(a)* $0$ $(Mx)\varphi(x) \rightarrow (\exists x)\varphi(x)$ *Início do tablô*

*(b)* $1$ $(Mx)\varphi(x)$ *Regra do condicional em (a)*

*(c)* $0$ $(\exists x)\varphi(x)$ *Regra do condicional em (a)*

*(d)* $1$ $\varphi(a)$ *Regra $M_1$ em (b), para um termo a*

*(e)* $0$ $\varphi(a)$ *Regra do existencial em (c)*

$\boldsymbol{x}$

$Ax_1 : (\forall x)(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow ((Mx)\varphi(x) \rightarrow (Mx)\psi(x))$

*(a)* $0$ $(\forall x)(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow ((Mx)\varphi(x) \rightarrow (Mx)\psi(x))$ *Início*

*(b)* $1$ $(\forall x)(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$ *Regra do condicional em (a)*

*(c)* $0$ $(Mx)\varphi(x) \rightarrow (Mx)\psi(x))$ *Regra do condicional em (a)*

*(d)* $1$ $(\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$ *Regra $M_4$ em (b)*

*(e)* $1$ $(\forall x)(\psi(x) \rightarrow \varphi(x))$ *Regra $M_4$ em (b)*

*(f)* $1$ $(Mx)\varphi(x)$ *Regra do condicional em (c)*

*(g)* $0$ $(Mx)\psi(x)$ *Regra do condicional em (c)*

/ \

$0$ $(Mx)\varphi(x)$ *$M_5$ em (d)* | $1$ $(Mx)\psi(x)$ *$M_5$ em (d)*

| |

$x$ $x$

$Ax_2 : (Mx)\varphi(x) \rightarrow (My)\varphi(y)$, *quando y é livre para x em* $\varphi(x)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| *(a)* | 0 | $(Mx)\varphi(x) \rightarrow (My)\varphi(y)$ | *Início* |
| *(b)* | 1 | $(Mx)\varphi(x)$ | *Regra do condicional em (a)* |
| *(c)* | 0 | $(My)\varphi(y)$ | *Regra do condicional em (a)* |
| | | $\boldsymbol{x}$ | *Condição de fechamento em (b) e (c).* |

- *Para deduções de comprimento maior que* 1*, isto é,* $n > 1$.

*Consideremos uma dedução* $(\delta_1, ..., \delta_n = \varphi)$*, no sistema axiomático, a partir de um conjunto* $\Gamma$ *com comprimento n.*

*Pela hipótese da indução, para toda fórmula* $\delta_i$ *da dedução, para* $i < n$*, há uma dedução por tablô.*

*Para demonstrarmos que* $\Gamma \Vdash \varphi$*, precisamos avaliar cada situação que gera* $\delta_n = \varphi$ *na dedução:*

*(i) se* $i = 1$*, então* $\varphi$ *é uma premissa ou um axioma da Lógica do Muito, e a mesma justificativa da base da indução se aplica.*

*(ii) se* $i > 1$*, então* $\varphi = \delta_n$*, foi deduzida a partir da aplicação de alguma das regras de inferência do sistema: Modus Ponens ou Generalização.*

*(1) Modus Ponens (MP):*

$$\frac{\begin{array}{r}\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi \\ \Gamma \vdash \psi\end{array}}{\Gamma \vdash \varphi} \tag{6}$$

*Sabemos que* $\varphi$ *é obtido de* $\delta_i = \psi$ *e* $\delta_j = \psi \rightarrow \varphi$*, com* $(i, j < n)$ *por Modus Ponens.*

*Pela hipótese de indução e definição 9, temos que:*
*(a)* $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ *é fechado por tablô.*
*(b)* $\Gamma \cup \{\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$ *é fechado por tablô.*

*Da Definição 10, temos que* $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ *e* $\Gamma \cup \{\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$ *são T-inconsistentes. Da LPC obtemos que* $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ *e* $\Gamma \cup \{\psi, \neg\varphi\}$ *são T-inconsistentes.*

*Daí, pelo Teorema 11 da Introdução ao Corte, temos que o conjunto* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *é T-inconsistente e, portanto,* $\Gamma \Vdash \varphi$.

*(2) Generalização:*

$$\frac{\Gamma \vdash \psi(x)}{\Gamma \vdash (\forall x)\psi(x) = \varphi(x)} \tag{7}$$

*A sentença $(\forall x)\psi$ é obtida de $\delta_i = \psi$, para $i < n$ pela regra de Generalização.*

*Para verificarmos que $\Gamma \Vdash (\forall x)\psi(x)$, basta um tablô fechado para $\Gamma \cup \{\neg(\forall x)\psi(x)\}$. Mas, pela hipótese de indução, sabemos que há um tablô fechado para $\Gamma \cup \{\neg\psi(x)\}$.*

*Assim:*

*(i)* $\Gamma$

*(ii)* $0 \quad \forall(x)\psi$

*(iii)* $0 \quad \psi(a)$*, para um novo termo a no ramo.*

$\boldsymbol{x}$

*Portanto,* $\Gamma \Vdash (\forall x)\psi(x)$.

*Concluímos, deste modo, que se $\Gamma \vdash_{\mathbb{L}(M)} \varphi$, então $\Gamma \Vdash_{\textbf{\textit{Tabl}}[\mathbb{L}(M)]} \varphi$.*

## 5.2 Dos tablôs para a consequência semântica

Mostraremos a dedução do sistema de tablôs desenvolvidos neste artigo implica a consequência semântica da Lógica do Muito de Grácio.

Uma ideia subjacente e central é a verificação de que cada uma das regras propostas em **Tabl**$[\mathbb{L}(M)]$ pode ser deduzida no sistema axiomático ou hilbertiano inicial.

Como para a Lógica do Muito vale a completude forte $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash \varphi$, então, por dedução vamos mostrar a validade das regras de **Tabl**$[\mathbb{L}(M)]$.

**Teorema 13** *As regras de **Tabl**$[\mathbb{L}(M)]$ preservam a validade.*

***Demonstração 3*** *Para cada regra de **Tabl**$[\mathbb{L}(M)]$ faremos uma dedução no sistema axiomático com as mesmas hipóteses e conclusões:*

*(1) Regra* $M_1 : (Mx)\varphi(x) \vdash \varphi(a)$*, para um termo novo a:*

*(a)* $(Mx)\varphi(x)$ *Premissa*

*(b)* $(Mx)\varphi(x) \rightarrow (\exists x)\varphi(x)$ $Ax_3$

*(c)* $(\exists x)\varphi(x)$ *MP em (a) e (b)*

*(d)* $\varphi(a)$ *LPO em (c).*

*(2) Regra* $M_2 : \neg(Mx)\varphi(x) \vdash \neg\varphi(a)$*, para um novo termo a.*

*(a)* $\neg(Mx)\varphi(x)$ *Premissa*

*(b)* $(\forall x)\varphi(x) \rightarrow (Mx)\varphi(x)$ *$Ax_2$*

*(c)* $\neg(\forall x)\varphi(x)$ *MT em (a) e (b)*

*(d)* $\neg\varphi(a)$ *LPO em (c).*

*(3) Regra $M_3$ :* $\neg(Mx)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \vdash \neg(Mx)\varphi(x) \wedge \neg(Mx)\psi(x))$

*(a)* $\neg((\neg(Mx)\varphi(x) \wedge \neg(Mx)\psi(x)))$ *Negação do consequente*

*(b)* $\neg\neg(Mx)\varphi(x) \vee \neg\neg(Mx)\psi(x)$ *De Morgan em (a)*

*(c)* $(Mx)\varphi(x) \vee (Mx)\psi(x)$ *Dupla negação em (b)*

*(d)* $(Mx)\varphi(x) \vee (Mx)\psi(x) \rightarrow (Mx)(\varphi(x) \vee \psi(x))$ *Teorema sobre muitos*

*(e)* $(Mx)(\varphi(x) \vee \psi(x))$ *MP em (c) e (d)).*

*(4) Regra $M_4$ é classicamente válida.*

*(5) Regra $M_5$ :* $(\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \vdash \neg(Mx)\varphi(x) \vee (Mx)\psi(x)$

*(a)* $(\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$ *Premissa*

*(b)* $(\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow ((Mx)\varphi(x) \rightarrow (Mx)\psi(x))$ *$Ax_5$*

*(c)* $(Mx)\varphi(x) \rightarrow (Mx)\psi(x)$ *MP em (a) e (b)*

*(d)* $\neg(Mx)\varphi(x) \vee (Mx)\psi(x)$ *LPC em (c).*

O teorema anterior nos diz que se temos um conjunto válido de fórmulas e sobre ele aplicamos as regras de expansão do sistema de tablôs, devemos determinar um conjunto válido de fórmulas. Como numa dedução por tablô temos um conjunto fechado ao acrescentarmos a negação da tese, então a contradição tem que vir da fórmula acrescida que é a negação da tese. Portanto, tem que valer a tese.

**Definição 14** *Um ramo de um tablô **T** é válido sob um modelo $\mathcal{A}^{\mathcal{M}}$ se todo ponto do ramo é válido sob $\mathcal{A}^{\mathcal{M}}$.*

**Definição 15** *Um tablô **T** é válido sob um modelo $\mathcal{A}^{\mathcal{M}}$ se pelo menos um ramo de **T** é válido sob $\mathcal{A}^{\mathcal{M}}$.*

**Teorema 16** *Do sistema de tablôs para a consequência semântica:*

$$\Gamma \Vdash_{\boldsymbol{Tabl}[\mathbb{L}(M)]} \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash_{\boldsymbol{L}^{\tau}_{\omega\omega}(M)} \varphi.$$

***Demonstração 4*** *Consideremos um tablô* $\boldsymbol{T}$ *e uma estrutura* $\mathcal{A}^{\mathcal{M}}$ *para as fórmulas que ocorrem em qualquer ponto de* $\boldsymbol{T}$.

*Se um tablô* $\mathbf{T_2}$ *é uma extensão imediata de* $\mathbf{T_1}$*, então* $\mathbf{T_2}$ *é válido em todo modelo que valida* $\mathbf{T_1}$*, pois se* $\mathbf{T_1}$ *é válido, então contém um ramo válido* $\eta_1$*. Como* $\mathbf{T_2}$ *é determinado a partir de* $\mathbf{T_1}$ *pelo acréscimo de 1 ou 2 sucessores ao ponto terminal do ramo* $\eta_1$ *de* $\mathbf{T_1}$*, então a proposição anterior garante que a aplicação das regras do tablô preservam a validade dos ramos válidos.*

*Isto mostra que toda extensão imediata de um tablô* $\boldsymbol{T}$ *que é válido para um modelo* $\mathcal{A}^{\mathcal{M}}$ *é ainda válido para este modelo. Segue por indução, que se um tablô* $\boldsymbol{T}$ *tem sua origem válida sob* $\mathcal{A}^{\mathcal{M}}$*, então* $\boldsymbol{T}$ *tem que ser válido sob* $\mathcal{A}^{\mathcal{M}}$.

*Um tablô fechado não pode ser válido sob qualquer modelo* $\mathcal{A}^{\mathcal{M}}$*, logo a origem do tablô também não pode ser válida sob qualquer modelo* $\mathcal{A}^{\mathcal{M}}$ *e, portanto, a origem de um tablô fechado tem que ser insatisfatível (não tem modelo).*

*Assim, não há um modelo* $\mathcal{A}^{\mathcal{M}}$ *tal que* $\mathcal{A}^{\mathcal{M}} \vDash \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$*, ou seja, todo modelo* $\mathcal{A}^{\mathcal{M}}$ *de* $\Gamma$ *é modelo de* $\varphi$ *e* $\Gamma \vDash \varphi$.

Ao demonstrarmos os Teoremas 12 e 16, podemos concluir que:

$$\begin{array}{c}\Gamma \vdash_{\mathbb{L}(M)} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \Vdash_{\mathbb{L}(M)} \varphi \\ \Updownarrow \\ \Gamma \vdash_{\mathbf{Tabl}[\mathbb{L}(M)]} \varphi\end{array}$$

Portanto, demonstramos que o sistema de tablôs proposto para a Lógica do Muito é equivalente ao sistema hilbertiano introduzido por Grácio para a Lógica do Muito.

# 6 Considerações finais

Este trabalho destaca alguns aspectos conceituais e metodológicos interessantes.

Num primeiro momento, temos a revisão da Lógica do Muito de Grácio (GRÁCIO, 1999), que é uma tentativa inicial de formalizar uma noção do quantificador muitos. Dentre numerosos quantificadores generalizados ou estendidos, o conceito de ‘muitos’ é um bastante difícil de ser conceituado. Ele depende muito da noção a ser tratada. Por exemplo, se dizemos que muitos brasileiros são analfabetos, então digamos 5% deles já dá uma noção de muitos; mas se dissermos que muitos brasileiros não gostam de carnaval e apresentarmos 5% deles, então não teremos a mesma avaliação para muitos. Isto decorre das impressões que temos sobre estes conceitos de muitos, analfabetismo e aceitação do carnaval. Por outro lado, se dissermos que a maioria dos bauruenses gostam de café, basta termos a metade e mais um. Se dissermos que quase todos bauruenses falam Português, basta um índice que se aproxime do todo. São quantificadores mais simples de serem tratados. Então uma proposta, mesmo que não completamente satisfatória, já ajuda na discussão.

Posteriormente, tratamos da variação de sistemas dedutivos, no caso de um sistema axiomático e outro por tablôs. A variação já conta de modo relevante, mas tratá-los com linguagem quantificacional agrega algum grau de dificuldade.

Como uma última observação, nem sempre dá para fazermos novos sistemas de tablôs como os clássicos com exatamente duas regras para cada operador e tal que cada regra aplicada gera apenas subfórmulas (princípio das subfórmulas dos tablôs analíticos). No caso deste sistema de tablôs, as regras para o novo quantificador são em maior número e não simétricas, mas não geraram fórmulas mais complexas que a fórmula anterior, e o princípio das subfórmulas está presente nas regras.

# 7 Referências Bibliográficas


BARWISE, J.; COOPER, R. Generalized quantifiers and natural language. **Linguistics and Philosophy**, v. 4, n. 2, p. 159-219, 1981.

BIANCONI, R. **Teoria dos modelos: ultraprodutos**. [2019?]. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~bianconi/mat5865/PRODUTOS.PDF. Acesso em: 19 nov. 2020.

CARNIELLI, W. A.; CONIGLIO, M. E.; BIANCONI, R. **Lógica e aplicações**: matemática, ciência da computação e filosofia. Campinas: Unicamp, 2005. cap. 1. Versão preliminar.

CARNIELLI, W. A. ; GRÁCIO, M. C. C. Modulated logics and flexible reasoning. **Logic and logical philosophy**, v. 17, n. 3, p. 211-249, 2008.

EITER, T.; GOTTLOB, G.; VEITH, H. Generalized quantifiers in logic programs. In: VAANANEN, J. (ed.). **Generalized quantifiers and computation**. ESSLLI 1997. Lecture Notes in Computer Science, v. 1754. Berlin: Springer, 1999.

GENTZEN, G. **The collected papers of Gerhard Gentzen**. Amsterdam: North-Holland, 1969.

GRÁCIO, M. C. C. **Lógicas moduladas e raciocínio sob incerteza**. 1999. 194 f. Tese (Doutorado em Filosofia) Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.

GRÁCIO, M. C. C.; FEITOSA, H. A. Lógicas moduladas: implicações em um fragmento da teoria da linguagem natural. **Revista Eletrônica Informação e Cognição**, v. 4, n. 1, p. 34-46, 2005.

LINDSTROM, P. First order predicate logic with generalized quantifiers. **Theoria**, v. 32, n. 3, p. 186–195, 1966.

MATULOVIC, M. **A lógica do muito em um sistema de tablôs**. 2008. 121 f. (Mestrado em Filosofia) - Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista, Marília, 2008.

MENDELSON, E. **Introduction to mathematical logic**. Princeton: D. Van Nostrand, 1964.

MORTARI, C. A. **Introdução à lógica**. São Paulo: Editora Unesp, 2001.

MOSTOWSKI, A. On a generalization of quantifiers. **Fundamenta Mathematicae**, v. 44, n. 2, p. 12-36, 1957.

SETTE, A. M.; CARNIELLI, W. A.; VELOSO, P. An alternative view of default reasoning and its logic. In: HAUESLER, E. H.; PEREIRA, L. C. (ed.) **Pratica**: proofs, types and categories. Rio de Janeiro: PUC, 1999. p. 127-158.

SILVESTRINI, L. H. C. Um sistema de tableaux analíticos para a lógica do plausível. **Revista Eletrônica Informação e Cognição**, v. 6, n. 2, p. 57-71, 2007.

SMULLYAN, R. M. **First-order logic**. New York: Dover, 1995.

VAANANEN, J. Generalized quantifiers, an introduction. In: VAANANEN, J. (ed.). **Generalized quantifiers and computation**. ESSLLI 1997. Lecture Notes in Computer Science, v. 1754. Berlin: Springer, 1999.