Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 19, dez. 2020

Rodrigo José Martinelli Biglia Andrade
UNIMEP
Universidade Metodista de Piracicaba
contato@pontoabc.com

Uma fórmula para a equação de sexto grau

A formula to sextic degree equation

Resumo

Pelo teorema de Abel-Ruffini equações de grau igual ou superior a 5 não podem, na maioria das vezes, serem resolvidas por radicais. Por conta desse teorema apresentaremos uma fórmula que resolve casos específicos de equações do sexto grau utilizando como base o polinômio de Martinelli. Para entendermos melhor como funciona essa fórmula faremos a resolução de uma equação de sexto grau como exemplo. Veremos também que todas as equações do sexto grau que obecedem o critério dos coeficientes possuem uma resolvente que é uma equação de quinto grau a qual pode ser separada em uma de segundo grau e outra de terceiro grau. Ao decorrer do artigo veremos uma demonstração da relação de uma equação de sexto grau possível de ser resolvida por radicais com a fórmula que será apresentada neste artigo.

Palavras-chave: Fórmula de Milanez. Fórmula equação do sexto grau. Relação de Milanez. Resolvente equação do sexto grau. Polinômio de Martinelli. Raízes

Abstract

According to the Abel-Ruffini theorem, equations of degree equal to or greater than 5 cannot, in most cases, be solved by radicals. Due of this theorem we will present a formula that solves specific cases of sixth degree equations using Martinelli's polynomial as a base. To better understand how this formula works, we will solve a sixth degree equation as an example. We will also see that all sixth degree equations that meet the coefficient criterion have a solver that is a fifth degree equation that can be separated into a second degree and a third degree equation. Throughout the paper we will see a demonstration of the ratio of the coefficients of a sixth degree equation that can be solved with the formula that will be presented this paper

Keywords: Milanez's Formula. Sextic degree formula. Milanez relation. Sextic degree resolvent. Martinelli's Polynomial. Roots.

Artigo recebido em ago. 2020 e aceito em dez. 2020

1 Introdução

Primeiramente, este artigo tem como objetivo contribuir com o conteúdo acadêmico sobre matemática e tem como foco os profissionais da área de exatas que desejam aumentar a gama de conteúdo que possam estar ensinando em classe de aula para seus alunos. Em segundo lugar, o artigo tem também como finalidade apresentar de maneira didática uma fórmula (a fórmula de Milanez) capaz de resolver casos específicos de equação do sexto grau. Esta fórmula é deduzida pelo polinômio de Martinelli e consequentemente teremos uma equação resolvente de quinto grau da equação de sexto grau. Toda equação de quinto grau que é separável em uma de grau 2 e outra de grau 3 é a resolvente de uma equação de sexto grau. A demonstração da relação da equação de sexto grau será feita ao decorrer do artigo, pois somente em casos onde os coeficientes são condizentes com a relação que irá ser apresentada e provada matematicamente é possível resolver uma equação de sexto grau onde possui uma resolvente de quinto grau separável.

Com um exemplo teremos uma maior compreensão da resolução de uma equação de sexto grau segundo a relação de Milanez. Todas as equações que obedecem a relação de Milanez são solúveis por radicais sendo as raízes do polinômio de sexto grau a soma das raízes de um polinômio de grau 2 com as raízes de um polinômio de grau 3. Porém, a equação de sexto grau tem uma resolvente de quinto grau onde não é necessário passar por nenhuma transformação que elimine o termo de quarto grau da equação de quinto grau pois todas as resolventes terão o termo de quarto grau suprimido.

É conveniente demonstrar e explicar cada detalhe do polinômio de Martinelli para podermos dar um maior entendimento no desenvolvimento da fórmula de Milanez.

Mas, é também interessante ao leitor saber que qualquer das raízes do polinômio de Martinelli tem a utilidade única de ser usado para poder separar uma equação do quinto grau em duas de grau menor como uma de grau 2 e uma de grau 3. Sendo assim a igualdade de Martinelli é também útil para resolver equações do quinto grau. Neste artigo apresentaremos então uma forma bastante simples de usar esse recurso para poder deduzir uma fórmula para casos específicos de equação do sexto grau onde suas raízes podem ser representadas por meio de radicais.

O artigo também se compromete com um conteúdo amigável e didático para o leitor, tornando a leitura convidativa e interessante para qualquer estudante e professor da área de exatas.

2 Sobre o teorema de Abel-Ruffini e a teoria de Galois

Veremos alguns conceitos acerca da teoria de Galois e do Teorema de Abel-Ruffini.

O teorema, de maneira sucinta, consiste na prova de que não existe uma fórmula "fechada"para todas as equações de grau acima ou igual a 5. Isso é, não existe uma maneira de se chegar algebricamente a uma fórmula para essas equações superiores ou iguais a 5. Portanto o teorema afirma que: "... a solução de uma equação de grau cinco ou superior não pode ser sempre expressa a partir dos coeficentes e usando simplesmente as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação (incluindo-se nesta última a extração de raízes)."(ZOLADEK, 2000).

Assim, a teoria de Galois vem para confirmar, através do estudo da relação das raízes que é impossível resolver, por meio algébrico, equações de grau igual ou superior a 5. Em sua forma mais básica, o teorema afirma que dada uma extensão de campo E / F que é finita e Galois, há uma correspondência um-para-um entre seus campos intermediários e subgrupos de seu grupo de Galois. (Campos intermediários são campos K que satisfazem $F \subseteq K \subseteq E$; eles também são chamados de subextensões de E / F.).

Então, segundo o teorema de Abel-Ruffini e a teoria de Galois, existem casos onde equações de grau 5 ou superior são possíveis de serem solucionadas por radicais ou algebricamente.

3 Demonstração do polinômio de Martinelli

Para demonstrá-lo é preciso considerar as raízes de uma equação de quinto grau qualquer. Cada raíz deve ser associada a uma única outra raíz. Tem-se então que a combinação das raízes de uma equação de quinto grau são dez (por conta disso que o polinômio é de décimo grau). Consideremos então as seguintes equações:

$$(x^2 - kx + n)(x^3 + kx^2 + kx + m) = 0. \tag{1}$$

$$(x^2 - kx + n)(x^3 + kx^2 + lx + m) = 0. \tag{2}$$

A equação 1 tem relação com a equação 2. Se expandirmos ambas as equações 1 e 2 teremos, separados em uma tabela cada termo correspondente:

Tabela 1: Equação 1 expandida

x^3	x^2	x	Termo Independente
$k + n - k^2 = C_2$	$-k^2 + kn + m = D_2$	$kn - km = E_2$	$mn = F$

Tabela 2: Equação 2 expandida

x^3	x^2	x	Termo Independente
$l + n - k^2 = C$	$nk - lk + m = D$	$nl - km = E$	$mn = F$

Segundo ANDRADE,2019. podemos tomar como exemplo a seguinte equação:

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \tag{3}$$

Se substituirmos x pela soma das raízes da equação (3) teremos 2=0, que seria um absurdo, mas, com essa ideia, podemos criar uma equação de segundo grau utilizando os termos C, C_2, D, D_2, E e E_2 como mostrado na tabela 1 e 2 anterioriormente. Igualando a equação que será criada com $(-k^2 + n + k - C)n$ teremos, do lado direito da equação, a mesma coisa que $E_2 - E$, pois E_2 é o mesmo que $kn - km$ e $-E$ é o mesmo que $-nl + km$. A soma de $E_2 - E$ resultará em $kn - nl$ sendo $l = C - n + k^2$. Assim temos $kn - n(C - n + k^2)$ que é o mesmo que $(-k^2 + n + k - C)n$.

Para criarmos uma equação de segundo grau onde uma das soluções da equação será a soma de duas soluções de uma equação de quinto grau devemos seguir essa lógica: Temos a forma geral da equação de segundo grau que é $ax^2 + bx + c = 0$, os coeficientes da equação de segundo grau que será criada serão $a = C_2 - C$, $b = D_2 - D$, $c = E_2 - E$ e no lado direito da equação temos que adicionar $(-k^2 + n + k - C)n$ pois do lado esquerdo vai restar $E_2 - E$.

Essa ideia vai nos dar a possibilidade de isolar a incógnita n da equação (2). O objetivo é formar uma equação de décimo grau com a incógnita k. Como $a = C_2 - C$ e $b = D_2 - D$ de acordo com a tabela 1 e 2, segue que $a = k + n - k^2 - C$, $b = -k^2 + kn + m - D$, $c = nk - km - E$ e o membro direito da equação será $(-k^2 + n + k - C)n$. Desse modo, fazendo as substituições em $ak^2 + bk + c = 0$ temos:

$$
\begin{aligned}
(-k^2 + n + k - C)k^2 + (-k^2 + nk + m - D)k + nk - km - E &= (-k^2 + n + k - C)n.\\
(-k^4 + nk^2 + k^3 - Ck^2) + (-k^3 + nk^2 + km - Dk) + nk - km - E &= (-k^2 + n + k - C)n.\\
-k^4 + 2nk^2 - Ck^2 - Dk + nk - E &= (-k^2 + n + k - C)n.\\
(-k^2 + n + k - C)k^2 + (-k^2 + nk + m - D)k + nk - km - E &= (-k^2 + n + k - C)n.\\
-k^4 - Ck^2 - Dk - E &= -3nk^2 + n^2 - Cn.
\end{aligned}
$$

Isolando n, temos:

$$
n = \frac{k^4 + Ck^2 + Dk + E}{3k^2 - n + C}. \tag{4}
$$

Sendo k a soma de duas raízes de uma equação de quinto grau, C,D,E e F os coeficientes de uma equação de quinto grau e n é o produto das raízes de uma equação de segundo grau.

Para se chegar no polinômio de Martinelli temos que substituir a variável n com o uso de uma manipulação algébrica. Essa manipulação algébrica consiste em pegar a igualdade referente ao termo D da tabela (2). Dessa forma:

$$
nk - (k^2 - n + C)k + \frac{F}{n} = D. \tag{5}
$$

Isolando n^2 em (5).

$$
n^2 = \frac{nk^3 + Cnk - F + Dn}{2k}. \tag{6}
$$

Agora é só substituir o n^2 na equação (5) e assim obter n:

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{k^4 + Ck^2 + Dk + E}{3k^2 - n + C}.\\
-n^2 + 3nk^2 + Cn &= k^4 + Ck^2 + Dk + E.\\
\frac{-nk^3 - Cnk + F - Dn}{2k} + 3nk^2 + Cn &= k^4 + Ck^2 + Dk + E.\\
n &= \frac{2(k^5 + Ck^3 + Dk^2 + Ek) - F}{5k^3 + Ck - D}. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Se temos n, então nós podemos criar o polinômio de Martinelli que será fundamental na fórmula de Milanez. Na igualdade (4) podemos substituir o n no lado esquerdo e no lado direito da equação, desta forma:

$$
\frac{2(k^5 + Ck^3 + Dk^2 + Ek) - F}{5k^3 + Ck - D} = \frac{k^4 + Ck^2 + Dk + E}{3k^2 - \frac{2(k^5 + Ck^3 + Dk^2 + Ek) - F}{5k^3 + Ck - D} + C}.
$$

Arrumando a equação em ambos os lados e igualando a 0 chegamos no polinômio de Martinelli:

$$(2(k^5+Ck^3+Dk^2+Ek)-F)(13k^5+6Ck^3-5Dk^2+(-2E+C^2)k+F-DC)$$
$$-(k^4+Ck^2+Dk+E)(5k^3+Ck-D)^2=0. \tag{8}$$

4 A relação de Milanez

Quando uma equação do quinto grau é perfeitamente separável em uma equação de grau 2 e outra equação de grau 3, então podemos dizer que o polinômio de Martinelli também é perfeitamente separável em dois, no caso, um de grau 4 e outro de grau 6.

A relação seguinte mostra como é uma equação separável de forma que ela fique algebricamente representada, ou seja, por radicais.

$$(x^2-ax+b)(x^3+ax^2+cx+d)=0. \tag{9}$$

Expandindo a equação (9) chegamos numa equação de quinto grau da forma:

$$x^5+(-a^2+c+b)x^3+(ab+d-ac)x^2+(bc-ad)x+bd=0. \tag{10}$$

Sabendo que C=$(-a^2+c+b)$, D=$(ab+d-ac)$, E=$(bc-ad)$ e F=bd, então podemos criar uma relação com o polinômio de Martinelli que, se expandido, terão os seguintes termos:

$$k^{10}+3Ck^8+Dk^7+(3C^2-3E)k^6+(2DC-11F)k^5+(C^3-D^2-2CE)k^4+(DC^2-4DE-4CF)k^3$$
$$+(7DF-CD^2-4E^2+EC^2)k^2+(4EF-FC^2-D^3)k-F^2+FDC-D^2E=0. \tag{11}$$

Se substituirmos cada letra pela relação da equação (10) teremos então um polinômio que pode ser separado em um de quarto e outro de sexto grau. Dessa forma:

$$(k^4+(a)k^3+(c-a^2)k^2+(-a^3-d)k+(ad-a^2c))$$
$$(k^6+(-a)k^5+(-a^2+3b+2c)k^4+(a^3-2ab-2ac+2d)k^3+(-a^2b+c^2+3b^2-ad)k^2$$
$$+(-ac^2-ab^2+a^2d+2abc-6bd+2dc)k+(adb-adc-2b^2c+d^2+b^3+bc^2))=0. \tag{12}$$

Portanto podemos resolver casos específicos de equação do sexto grau por radicais quando a equação resolvente de quinto grau for separável de maneira perfeita. Então, a relação de Milanez são os coeficientes de cada termo da equação de sexto grau que compõe o polinômio de Martinelli quando o mesmo pode ser separado em duas equações (uma de grau 4 e outra de grau 6). Assim, temos que a relação para se obter uma equação de sexto grau solúvel por radicais quando a resolvente for uma equação de quinto grau separável em uma de grau 2 e outra de grau 3, é:

$$
\begin{aligned}
k^6 \\
-ak^5 \\
(-a^2+3b+2c)k^4 \\
(a^3-2ab-2ac+2d)k^3 \\
(-a^2b+c^2+3b^2-ad)k^2 \\
(-ac^2-ab^2+a^2d+2abc-6bd+2dc)k \\
(adb-adc-2b^2c+d^2+b^3+bc^2)
\end{aligned}
$$

5 A fórmula de Milanez

Para deduzir a fórmula de Milanez é bastante simples. Se o polinômio de Martinelli é a soma de duas raízes de uma equação de quinto grau qualquer, então a fórmula para resolver uma equação de sexto grau onde os coeficientes são condizentes com a relação de Milanez dada é:

$$
x = \sqrt[3]{\left(-\frac{a_2^3}{27a_1^3}+\frac{a_2a_3}{6a_1^2}-\frac{a_4}{2a_1}\right)+\sqrt{\left(-\frac{a_2^3}{27a_1^3}+\frac{a_2a_3}{6a_1^2}-\frac{a_4}{2a_1}\right)^2+\left(\frac{a_3}{3a_1}-\frac{a_2^2}{9a_1^2}\right)^3}}+
\sqrt[3]{\left(-\frac{a_2^3}{27a_1^3}-\frac{a_2a_3}{6a_1^2}-\frac{a_4}{2a_1}\right)-\sqrt{\left(-\frac{a_2^3}{27a_1^3}+\frac{a_2a_3}{6a_1^2}-\frac{a_4}{2a_1}\right)^2+\left(\frac{a_3}{3a_1}-\frac{a_2^2}{9a_1^2}\right)^3}}+
\frac{-a_5+\sqrt{a_5^2-4a_6}}{2}. \tag{13}
$$

Na equação (13), os coeficientes $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ são de duas equações, uma de terceiro e outra de segundo grau.

A equação (13) é então a fórmula que fornece uma raiz da equação de sexto grau possível de ser resolvida por radicais de acordo com a relação de Milanez. Veremos com mais detalhes a resolução de uma equação de sexto grau a posteriori.

5.1 Exemplo: Solução de uma equação de sexto grau

Como de exemplo, iremos resolver uma equação de sexto grau segundo a relação de Milanez. A equação é:

$$
x^6+2x^3+21x^2-18x+51=0. \tag{14}
$$

Na equação (14) o termo a é 0, e com base nisso podemos encontrar os termos b, c e d. Para isso vamos pegar a relação de Milanez e fazer as comparações.

Se $a=0$ então, segundo a relação temos que:

$$-a = 0.$$
$$3b + 2c = 0.$$
$$d = 1.$$
$$c^2 + 3b^2 = 21.$$
$$-6b + 2c = -18.$$
$$-2b^2c + b^3 + bc^2 = 50.$$

Temos então um sistema que podemos resolver sem problemas. É conveniente escolher as equações mais simples.

$$3b + 2c = 0. \tag{15}$$
$$-6b + 2c = -18. \tag{16}$$

Se resolvermos o sistema de b e c teremos que $b = 2$ e $c = -3$. Então encontramos todas as variáveis da nossa equação segundo a relação de Milanez. Portanto basta substituir na equação (9) e teremos uma equação de quinto grau resolvente. Vejamos:

$$(x^2 - 0x + 2)(x^3 + 0x^2 - 3x + 1) = 0.$$
$$x^5 - x^3 + x^2 - 6x + 2 = 0. \tag{17}$$

Resolvendo a equação de segundo grau e a de terceiro grau e somando as raizes da equação de segundo grau com cada raiz da equação de terceiro grau teremos as raízes da equação de sexto grau, ou seja, estaremos utilizando a fórmula de Milanez para poder obter as raízes da equação (14). Assim, segundo a fórmula (13) uma das raízes da equação (14) é:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{(0)^3}{27(1)^3} + \frac{(0)(-3)}{6(1)^2} - \frac{1}{2(1)}\Bigg) + \sqrt{\left(-\frac{(0)^3}{27(1)^3} + \frac{(0)(-3)}{6(1)^2} - \frac{(1)}{2(1)}\right)^2 + \left(\frac{(-3)}{3(1)} - \frac{(0)^2}{9(1)^2}\right)^3}} +$$
$$\sqrt[3]{\left(-\frac{(0)^3}{27(1)^3} + \frac{(0)(-3)}{6(1)^2} - \frac{1}{2(1)}\right) - \sqrt{\left(-\frac{(0)^3}{27(1)^3} + \frac{(0)(-3)}{6(1)^2} - \frac{(1)}{2(1)}\right)^2 + \left(\frac{(-3)}{3(1)} - \frac{(0)^2}{9(1)^2}\right)^3}} +$$
$$\frac{-(0) + \sqrt{(0)^2 - 4(2)}}{2}.$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}} + \sqrt{2}i. \tag{18}$$

Ou aproximadamente $1,5320888.... + 1,4142.....i$. A soma das raízes da equação de segundo grau com as raízes da equação de terceiro grau formam as raízes de uma equação de sexto grau segundo a relação de Milanez. Então as demais raízes serão:

$$x_2 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}} - \sqrt{2}i. \tag{19}$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}}}+\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\sqrt{-\frac{3}{4}}}+\sqrt{2}i. \tag{20}$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}}}+\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\sqrt{-\frac{3}{4}}}-\sqrt{2}i. \tag{21}$$

$$x_5 = \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}}}+\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}}}+\sqrt{2}i. \tag{22}$$

$$x_6 = \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}}}+\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\sqrt{-\frac{3}{4}}}-\sqrt{2}i. \tag{23}$$

Ou se preferir, podemos representar as raízes de maneira trigonométrica, dessa forma:

$$\begin{aligned}
x &= 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)+\sqrt{2}i.\\
x_2 &= 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)-\sqrt{2}i.\\
x_3 &= -2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)+\sqrt{2}i.\\
x_4 &= -2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)-\sqrt{2}i.\\
x_5 &= \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)-\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)+\sqrt{2}i.\\
x_6 &= \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)-\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)-\sqrt{2}i.
\end{aligned}$$

No caso da equação (14) de exemplo todas as raízes são complexas como visto acima.

6 Conclusão

Como visto, a relação de Milanez é fundamental para poder resolver equações do sexto grau. Todas as equações de sexto grau que obedecem os coeficientes segundo a relação de Milanez podem ser resolvidas por radicais. Como demonstrado, a fórmula de Milanez é com base no polinômio de Martinelli que tem como função somar duas raízes de um polinômio de quinto grau. Com base no polinômio de Martinelli foi possível demonstrar a fórmula de Milanez. Após encontrar a equação de quinto grau resolvente da equação de sexto grau segundo a relação de Milanez é possível encontrar as raízes do polinômio de sexto grau. Conclui-se então que uma fórmula capaz de resolver casos específicos de equação de sexto grau foi alcançada com êxito.

Referências

[1] ZOLADEK, H. The topological proof of Abel-Ruffini theorem. **Topological Methods in Nonlinear Analysis**.v. 16, n.2, p. 253-265, 2000.

[2] NICKALLS, R. W. D. A new approach to solving the cubic: Cardan's solution revealed. **The mathematical Gazette**, v. 77, n. 480, p. 354-359, 1993.

[3] ANDRADE, R. J. M. B. Resolução de uma equação do quinto grau. **C.Q.D - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 16, p. 196-205, dez. 2019. Disponível em: `https://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/revista-cqd/`. Acesso em: 27 ago. 2020.