Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 19, dez. 2020

Juan López Linares
Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos
Universidade de São Paulo
jlopez@usp.br

Três problemas sobre partições na Olimpíada Internacional de Matemática

Three partition problems at the International Mathematical Olympiad

Resumo

Problemas de Combinatória, em geral, e partições em particular, são pouco discutidos com os estudantes de Ensino Fundamental e Médio. Porém, seu conhecimento é importante para o sucesso em competições. Neste artigo discutimos detalhadamente três desafios propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). No primeiro problema se procura o maior número de retângulos diferentes, com igual número de casas brancas e pretas, em que se pode particionar um tabuleiro de Xadrez. No segundo problema se busca dividir um quadrado em outros quadrados menores e se pergunta a partir de que número natural isto é sempre possível. No terceiro problema se descobre como e quando é possível dividir uma lista de naturais consecutivos em duas de igual soma. Para resolvê-los deve-se usar uma mistura de vários conteúdos: progressão aritmética, formular e resolver desigualdades, fatoração, representação de inteiros na divisão por dois e quatro e lógica.

Palavras-chave: Olimpíada Internacional de Matemática. Partições. Ensino Médio e Universitário. Combinatória.

Abstract

Combinatorial problems, in general, and partitions in particular, are rarely discussed with elementary and high school students. However, this knowledge is important for success in competitions. In this article we discuss in detail three problems proposed for the International Mathematical Olympiad (IMO). In the first problem the greatest number of different rectangles, with an equal number of white and black squares, in which a chess board can be partitioned is sought. In the second problem one seeks to divide a square into other smaller squares and asks from which natural number this is always possible. In the third problem we discover how and when it is possible to divide a list of consecutive naturals into two of equal sum. To solve them one must use a mixture of several contents: arithmetic progression, formulate and solve inequalities, factoring, representation of integers in the division by two and four and logic.

Keywords: International Mathematical Olympiad. Partitions. High School Education. University Teaching. Combinatory.

Artigo recebido em out. 2020 e aceito em nov. 2020

1 Introdução

Problemas de Combinatória, em geral, e partições em particular, são pouco discutidos com os estudantes de Ensino Médio. Porém, seu conhecimento é importante para o sucesso em competições de conhecimentos.

Neste artigo discutimos detalhadamente três problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). No primeiro problema (P4 da IMO de 1974, Alemanha) se procura o maior número de retângulos diferentes, com igual número de casas brancas e pretas, em que se pode particionar um tabuleiro de Xadrez.

No segundo problema (P10 da SL da IMO de 1981, Estados Unidos) se busca dividir um quadrado em outros quadrados menores e se pergunta a partir de que número natural isto é sempre possível. No terceiro problema (P15 da SL da IMO de 1990, China) se descobre como e quando é possível dividir uma lista de naturais consecutivos em duas de igual soma.

Para resolvê-los deve-se usar uma mistura de vários conteúdos: progressão aritmética, formular e resolver desigualdades, fatoração, representação de inteiros na divisão por dois e quatro, lógica, etc.

Resolvendo problemas da Olimpíada Internacional de Matemática pretendemos incentivar estudantes premiados e professores do Ensino Fundamental e Médio a aumentar seus conhecimentos do assunto. Exercícios de olimpíadas requerem uma solução em múltiplos passos onde se integram várias habilidades matemáticas.

Embora úteis e proveitosas, as resoluções apresentadas nos fóruns de problemas da IMO não detalham muitas transições, as quais ficam para o leitor. Os autores parecem supor que todos temos conhecimentos matemáticos suficientemente avançados. Adicionalmente, essas resoluções se encontram frequentemente em inglês.

Nossa apresentação pretende que o material possa de fato ser lido e estudado por estudantes de língua portuguesa (e talvez espanhola) que se preparam para as fases finais das olimpíadas nacionais ou internacionais. Em comparação com outras soluções disponíveis, as apresentadas no artigo usam argumentos menos rebuscados e um número menor de transições a serem feitas somente pelo leitor.

Partições aparecem com frequência nos problemas da IMO coligadas a diversos assuntos. Neste artigo escolhemos três problemas, que usam conhecimentos diferentes, mas sem a pretensão de esgotar o tema.

Anteriormente discutimos problemas IMO sobre Bases Numéricas (LÓPEZ LINARES; BRUNO-ALFONSO; BARBOSA, 2019), Serie Harmônica (LÓPEZ LINARES; BRUNO-ALFONSO; BARBOSA, 2020a) e Desigualdades (LÓPEZ LINARES; BRUNO-ALFONSO; BARBOSA, 2020b). Uma discussão detalhada de outros 23 IMO pode ser encontrada em (LÓPEZ LINARES, 2019).

2 Partição em tabuleiro de Xadrez. IMO 1974 P4

Problema 1 *Considerar a partição de um tabuleiro de Xadrez* $(8x8)$ *em* p *retângulos com interiores disjuntos tais que cada um deles tem um número igual de casas brancas e pretas. Assumir que* $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$*, onde* a_i *denota o número de casas brancas no retângulo* i*-ésimo. Encontrar o valor máximo de* p *para o qual este tipo de partição é possível e determinar para esse* p *as sequências possíveis correspondentes* $a_1, a_2, ..., a_p$.

A IMO 1974 foi realizada na cidade de Erforte, na Alemanha (INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD, 2019). O problema acima foi proposto pela delegação da Bulgária (DJUKIC *et al*, 2006).

2.1 Resolução do problema 1.

Como numa partição a_i denota o número de casas brancas no retângulo i-ésimo, e os retângulos tem interiores disjuntos, a soma dos a_i deve ser o total de casas brancas em um tabuleiro de Xadrez:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_p = 32. \tag{1}$$

Foi dito que $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$, isto é, os a_i são todos números naturais diferentes. Segue que a sequência de a_i, para todo $i \in \mathbb{N}$ entre 1 e p, é maior ou igual a sequência dos naturais. Ou seja,

$$i \leq a_i \quad \forall i \in \{1, 2, \cdots, p\}.$$

Logo,

$$1 + 2 + \cdots + p \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_p. \tag{2}$$

A soma da progressão aritmética, de passo um, dos naturais é

$$1 + 2 + \cdots + p = \frac{p\,(p+1)}{2}. \tag{3}$$

De (3), (2) e (1) temos

$$p(p+1) \leq 64.$$

Da desigualdade anterior concluímos que $p \leq 7$.

Como devemos encontrar o valor máximo de p para o qual este tipo de partição é possível vamos estudar o caso $p = 7$.

Isto é, por (1) e $a_1 < a_2 < \cdots < a_7$, temos que escrever 32 como a soma de 7 números naturais diferentes.

A Tabela 1 enumera todas as possibilidades.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
(1)	1	2	3	4	5	6	11
(2)	1	2	3	4	5	7	10
(3)	1	2	3	4	5	8	9
(4)	1	2	3	4	6	7	9
(5)	1	2	3	5	6	7	8

Tabela 1: Escrita de 32 como a soma de 7 números naturais diferentes.

Em um tabuleiro de Xadrez, com 8 linhas e 8 colunas de quadrados, não podemos marcar um retângulo com um dos lados formado por 11 casas. Logo, a primeira linha da Tabela 1, o caso (1), deve ser eliminada.

A Tabela 2 lista as fatorações viáveis de $2a_i$ em um tabuleiro $8x8$.

$2a_i$	Fatoração Viável de $2a_i$
2	1x2
4	2x2
6	2x3
8	1x8 ou 2x4
10	2x5
12	2x6 ou 3x4
14	2x7
16	2x8 ou 4x4
18	3x6
20	4x5

Tabela 2: Fatorações viáveis de $2a_i$ em um tabuleiro $8x8$.

A Figura 1 mostra um exemplo nos casos (2), (3), (4) e (5) da Tabela 1.

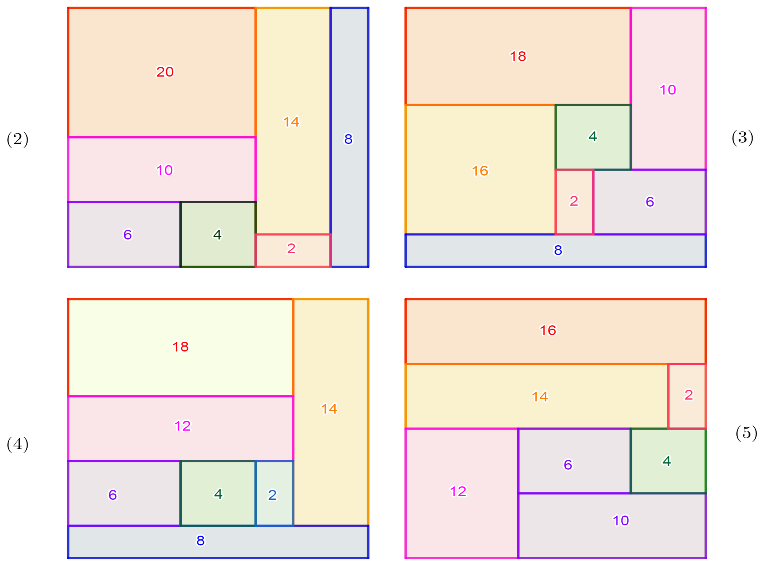

Figura 1: Uma exemplo nos casos (2), (3), (4) e (5) da Tabela 1.

Resumindo, $p = 7$ é o valor máximo de números diferentes de retângulos em que pode ser dividido um tabuleiro de Xadrez, tais que cada um deles tem um número igual de casas brancas e pretas, e existem 4 partições.

3 Partição de um quadrado em quadrados menores. SL da IMO 1981 P10

Problema 2 *Determinar o menor número natural n com a propriedade a seguir. Para cada inteiro p, $p \geq n$, é possível subdividir (particionar) o quadrado em p quadrados menores (não necessariamente iguais).*

A IMO 1981 foi realizada na cidade de Washington, Estados Unidos (INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD, 2019). O problema acima foi proposto pela delegação da França (DJUKIC *et al*, 2006).

3.1 Resolução do problema 2.

Notamos primeiro que para $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 2$ é possível particionar um quadrado em $2k - 1$ quadrados de lado $\frac{1}{k}$ e 1 quadrado de lado $\frac{k-1}{k}$. Isto é, $p = 2k$.

A Figura 2 mostra uma partição possível nos casos $k = 2$, $k = 3$, $k = 4$ e $k = 5$.

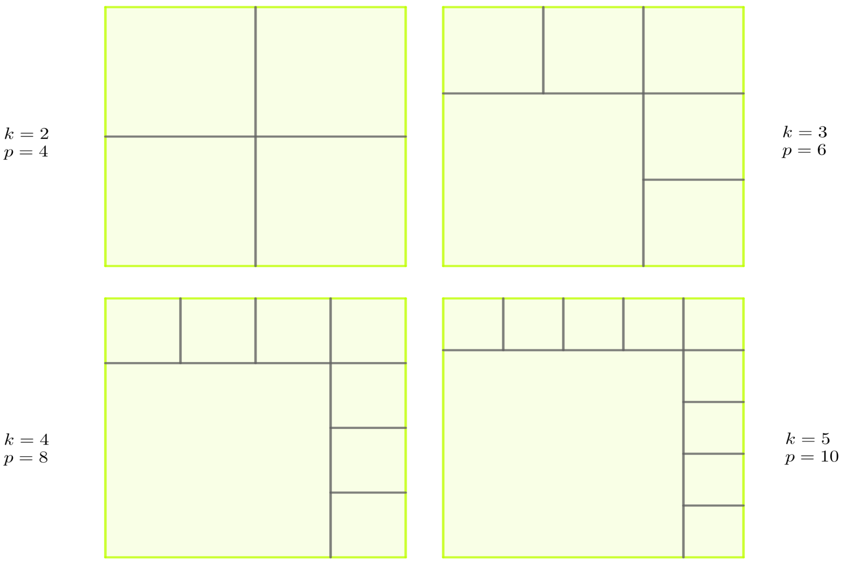

Figura 2: Uma partição possível nos casos $k = 2$, $k = 3$, $k = 4$ e $k = 5$.

Por outro lado, dado um quadrado particionado em $p = 2k$ quadrados menores é sempre possível obter $p = 2k + 3$. Para isto, basta escolher um dos quadrados menores e particioná-lo em quatro quadrados. A Figura 3 mostra o caso $k = 4$ e $p = 2 \cdot 4 + 3 = 11$.

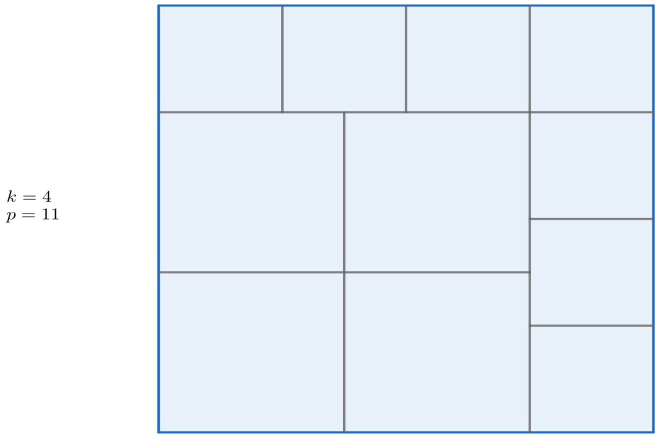

Figura 3: Uma partição possível no caso $k = 4$ e $p = 2 \cdot 4 + 3 = 11$.

Notamos que todos os números naturais maiores que cinco podem ser escritos como $p = 2k$ (pares) ou $p = 2k + 3$ (ímpares) com $k \geq 2$:

$$(2k) = (4, 6, 8, \cdots),$$

$$(2k + 3) = (7, 9, 11, \cdots).$$

Falta mostrar que um quadrado não pode ser particionado em cinco quadrados. Suponhamos, por absurdo, o contrário. Um dos lados do quadrado de comprimento L deve ser coberto por exatamente dois quadrados de comprimentos x e $L - x$, com $\frac{L}{2} < x < \frac{L}{3}$, $x = \frac{L}{3}$ ou $\frac{L}{3} < x < L$ (lado inferior horizontal na esquerda da Figura 4). No caso $x = \frac{L}{2}$ será particionado exatamente em 4 quadrados menores. Para colocar exatamente 3 quadrados cobrindo o lado direito devemos ter $x = \frac{2}{3}L$. Mas nesse caso o que resta é um retângulo de lados $\frac{2}{3}L$ e $\frac{1}{3}L$ (direita da Figura 4). Contradição.

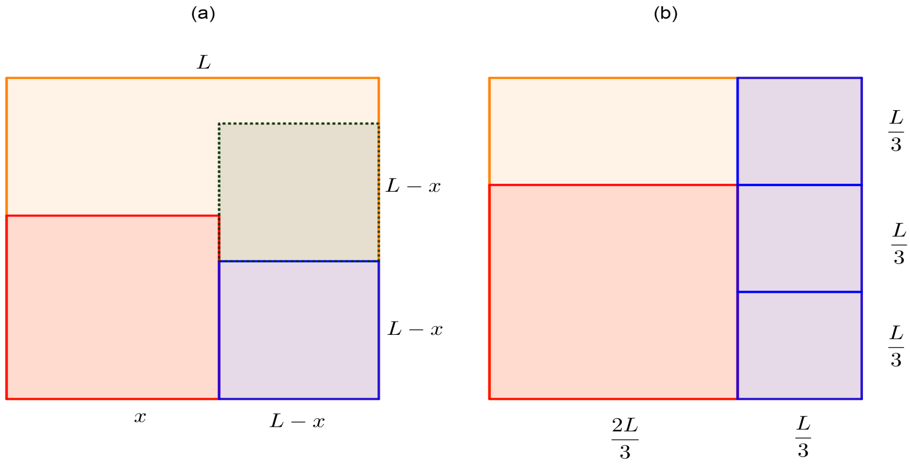

Figura 4: Um quadrado não pode ser particionado em cinco quadrados.

Conclui-se que $n = 6$ é o menor número natural tal que, para cada inteiro p, $p \geq n$, é possível subdividir um quadrado em p quadrados menores.

4 Partição de um conjunto de naturais em dois de igual soma. SL da IMO 1990 P15

Problema 3 *Determine para quais inteiros positivos k o conjunto*

$$X = \{1990, 1990 + 1, 1990 + 2, \cdots, 1990 + k\}$$

pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos A e B tais que a soma dos elementos de A seja igual a soma dos elementos de B.

A IMO 1990 foi realizada na cidade de Beijing, China (INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD, 2019). O problema acima foi proposto pela delegação do México (DJUKIC *et al*, 2006).

4.1 Resolução do problema 3.

Os elementos do conjunto X formam uma progressão aritmética de passo 1 e valor inicial 1990 e sua soma será:

$$S(X) = \frac{(1990 + 1990 + k)}{2} \cdot (k + 1) = 1990 \cdot (k + 1) + \frac{k(k + 1)}{2}.$$

Como queremos que a soma dos elementos de A seja igual a soma dos elementos de B, e estes conjuntos são disjuntos, segue que

$$S(A) = S(B) = \frac{S(X)}{2} = 995 \cdot (k + 1) + \frac{k(k + 1)}{4}. \tag{4}$$

Sendo A e B subconjuntos de X suas somas, $S(A)$ e $S(B)$, são números inteiros, logo $S(X)$ deve ser um número par. Isto somente acontece quando 4 divide $k(k+1)$.

Existem quatro possibilidades para k: (i) $k = 4r$, (ii) $k = 4r+1$, (iii) $k = 4r+2$ e (iv) $k = 4r+3$ com r inteiro positivo ou zero.

(i) Se $k = 4r$, então $k(k+1) = 4r(4r+1)$ e 4 divide $4r(4r+1)$.

(ii) Se $k = 4r+1$, então $k(k+1) = (4r+1)(4r+2) = 2(4r+1)(2r+1)$ e 4 não divide $2(4r+1)(2r+1)$.

(iii) Se $k = 4r+2$, então $k(k+1) = (4r+2)(4r+3) = 2(2r+1)(4r+3)$ e 4 não divide $2(2r+1)(4r+3)$.

(iv) Se $k = 4r+3$, então $k(k+1) = (4r+3)(4r+4) = 4(4r+3)(r+1)$ e 4 divide $4(4r+3)(r+1)$.

Suponhamos primeiramente que vale (iv) $k = 4r+3$. Neste caso X pode ser particionado em subconjuntos disjuntos e consecutivos da forma

$$\{1990+4l, 1990+4l+1, 1990+4l+2, 1990+4l+3\}$$

com l inteiro e $0 \leq l \leq r$. Isto é,

$$X = \bigcup_{l=0}^{r} \{1990+4l, 1990+4l+1, 1990+4l+2, 1990+4l+3\}.$$

Para ter subconjuntos A e B de igual soma e disjuntos coloque os elementos da forma $1990+4l$ e $1990+4l+3$ em A e os elementos da forma $1990+4l+1$ e $1990+4l+2$ em B.

$$A = \bigcup_{l=0}^{r} \{1990+4l, 1990+4l+3\},$$

$$B = \bigcup_{l=0}^{r} \{1990+4l+1, 1990+4l+2\}.$$

Substituindo $k = 4r+3$ em (4) encontramos

$$S(A) = S(B) = (r+1) \cdot (3980+4r+3).$$

Agora estudaremos o caso mais desafiador (i) $k = 4r$. O conjunto X possui $4r+1$ elementos, logo não pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos do mesmo tamanho. A primeira tentativa de partição chamaremos “2r-grandes-2r+1-pequenos”: colocamos os $2r$ maiores elementos em A_g e os $2r+1$ menores em B_p. Isto é,

$$A_g(r) = \{1990+2r+1, 1990+2r+2, \cdots, 1990+4r\},$$

$$B_p(r) = \{1990, 1990+1, \cdots, 1990+2r\}.$$

Qualquer outra partição disjunta de X com o mesmo número de elementos em A e B e não “2r-grandes-2r+1-pequenos” terá soma menor dos elementos de A e soma maior dos elementos de B. Isto é, com $\mid A \mid = \mid A_g \mid$ e $\mid B \mid = \mid B_p \mid$, temos $S(A) \leq S(A_g)$ e $S(B) \geq S(B_p)$.

Os elementos em A_g e B_p, resultados da partição “2r-grandes-2r+1-pequenos”, formam progressões aritméticas de passo 1. Suas somas são

$$S(A_g(r)) = (3980+6r+1) \cdot r, \tag{5}$$

$$S(B_p(r)) = (1990 + r) \cdot (2r + 1). \tag{6}$$

Igualando as duas equações acima encontramos para r um valor que não é um número inteiro; r é aproximadamente $22,3$. Isto é, a primeira tentativa de partição de X não foi bem sucedida. Porém, podemos concluir que com este tipo de partição $S(A_g) < S(B_p)$ quando $r < 23$ e $S(A_g) > S(B_p)$ quando $r \geq 23$.

Por exemplo, substituindo $r = 22$ em (5) e (6) encontramos $S(A_g(22)) - S(B_p(22)) = -54$ e substituindo $r = 23$ encontramos

$$S(A_g(23)) - S(B_p(23)) = 126. \tag{7}$$

Concluímos que no caso $k = 4r$ e $r < 23$ não é possível particionar X para satisfazer que $S(A) = S(B)$, pois a partição "2r-grandes-2r+1-pequenos" era a melhor escolha. Porém, no caso $k = 4r$ e $r \geq 23$ uma partição não "2r-grandes-2r+1-pequenos" resolve o problema.

No caso $k = 4r$ e $r = 23$ temos

$$A_g(23) = \{2037, 2038, \cdots, 2081, 2082\},$$
$$B_p(23) = \{1990, 1991, \cdots, 2034, 2035, 2036\}.$$

Para encontrar os dois conjuntos de igual soma usaremos o seguinte algoritmo. Tiramos o maior elemento de $A_g(23)$, 2082, e colocamos no novo conjunto $B'(23)$. Para compensar, passamos os dois maiores elementos de $B_p(23)$, 2035 e 2036, para o novo conjunto $A'(23)$:

$$A'(23) = \{2035, 2036, 2037, 2038, \cdots, 2081\},$$
$$B'(23) = \{1990, 1991, \cdots, 2034\} \cup \{2082\}.$$

Partindo da equação (7) temos

$$S(A'(23)) - S(B'(23)) = 126 - 2 \cdot 2082 + 2 \cdot 2035 + 2 \cdot 2036 = 4104.$$

Notamos que cada mudança deve ser contabilizada duas vezes (saída de um conjunto e entrada no outro). Resta agora transferir de $A'(23)$ para o novo conjunto $B^*(23)$ o número que corresponde a metade do resultado anterior:

$$A^*(23) = \{2035, 2036, \cdots, 2051\} \cup \{2053, 2054, \cdots, 2081\},$$
$$B^*(23) = \{1990; 1991; \cdots; 2034\} \cup \{2052\} \cup \{2082\},$$

Pelo cálculo direto, ou substituindo $k = 92$ em (4), temos $S(A^*(23)) = S(B^*(23)) = 94674$. Esta última é a partição que resolve o problema no caso $k = 4r$ e $r = 23$.

No caso $k = 4r$ e $r > 23$ usamos os conjuntos $A^*(23)$ e $B^*(23)$ como ponto de partida e continuamos a separação dos elementos de X para $k > 92$ como no caso (iv) $k = 4r + 3$.

Resumindo, existe solução para o problema quando $k = 4r + 3$, com r inteiro positivo ou zero, e quando $k = 4r$ e $r \geq 23$, com r inteiro positivo.

5 Comentários finais

Discutimos três problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). No primeiro, se procurou a maior quantidade de retângulos diferentes, com igual número de casas brancas e pretas, em que se pode particionar um tabuleiro de Xadrez. No segundo, um quadrado foi dividido em outros quadrados menores e se encontrou a partir de que número natural isto é sempre factível. No terceiro, se descobre como e quando é possível dividir uma lista de naturais consecutivos em duas de igual soma. Resolvendo este tipo de desafio pretendemos incentivar estudantes e professores.

6 Referências Bibliográficas

DJUKIC, D. *et al.* **The IMO compendium:** a collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2004. New York: Springer, 2006. Disponível em: http://web.cs.elte.hu/~nagyzoli/compendium.pdf. Acesso em: 22 out. 2020.

INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD. **Problems.** 2019. Disponível em: http://www.imo-official.org/problems.aspx. Acesso em: 22 out. 2020.

LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Bases numéricas na Olimpíada Internacional de Matemática. **Professor de Matemática Online (PMO),** v. 7, n. 2, p. 195-204, 2019. Disponível em: https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo715. Acesso em: 22 out. 2020.

LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre série harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 17, p. 127-138, fev. 2020a. Edição Ermac. DOI: 10.21167/cqdvol17ermac202023169664jllabagfb127138. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd. Acesso em: 22 out. 2020.

LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre desigualdades na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 78-88, jul. 2020b. DOI: 10.21167/cqdvol18202023169664jllabagfb7888. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd. Acesso em: 22 out. 2020.

LÓPEZ LINARES, J. **Problemas resolvidos sobre sequências no treinamento de estudantes do ensino médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática.** 2019. 123 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11881. Acesso em: 22 out. 2020.