Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 18, jul. 2020

Juan López Linares
Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos
Universidade de São Paulo
jlopez@usp.br

Alexys Bruno-Alfonso
Faculdade de Ciências
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
alexys.bruno-alfonso@unesp.br

Grazielle Feliciani Barbosa
Departamento de Matemática
Universidade Federal de São Carlos
grazielle@dm.ufscar.br

Três problemas sobre desigualdades na Olimpíada Internacional de Matemática

Three problems on inequalities in the International Mathematical Olympiad

Resumo

As desigualdades recebem menor atenção em comparação com as igualdades devido à maior dificuldade para seu estudo, porém não são menos importantes. Três problemas que foram propostos para a IMO (International Mathematical Olympiad) são discutidos detalhadamente. Os mesmos podem ser incorporados no treinamentos de estudantes de ensino médio para este tipo de competição ou nas aulas para estudantes universitários. No primeiro se usa uma sequência infinita e estritamente crescente de inteiros positivos. A desigualdade envolvida é satisfeita sempre por um único termo da sequência. O segundo explora uma sequência de números reais positivos. A solução do desafio usa repetidamente a desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica. O terceiro problema trata de uma sequência infinita e não crescente de números reais positivos. Para resolve-lo é usada a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a soma de uma série geométrica.
Palavras-chave: Ensino. Olimpíada de Matemática Internacional. Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica. Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Sequências.

Abstract

Inequalities receive less attention compared to equalities because of a greater difficulty in their study, however they are no less important. Three problems that were proposed for IMO (International Mathematical Olympiad) are discussed in detail. They can be incorporated into the training of high school students for this type of competition or in classes for college students. In the first one, an infinite and strictly increasing sequence of positive integers is used. The inequality involved is always satisfied by a single term in the sequence. The second one explores a sequence of positive real numbers. The solution of the challenge is obtained by the repeated use of the Arithmetic and Geometric Means inequality. The third problem deals with an infinite and non-increasing sequence of positive real numbers. To solve it, we use the Cauchy-Schwarz inequality and the sum of a geometric series.
Keywords: Teaching. International Mathematical Olympiad. Arithmetic and Geometric Inequality. Cauchy-Schwarz Inequality. Sequences.

Artigo recebido em set. 2019 e aceito em jun. 2020

1 Introdução

A Olimpíada Internacional de Matemática (IMO, International Mathematical Olympiad) é uma competição para estudantes do Ensino Médio que é realizada anualmente desde 1959. O único ano em que não ocorreu foi em 1980, devido a conflitos na Mongólia, país que iria sediar o evento (TURNER, 1985). Atualmente é a competição de Matemática pré-universitária mais prestigiada (INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD, 2019a).

Embora úteis e proveitosas, as resoluções apresentadas nos fóruns de problemas da IMO não detalham muitas transições, as quais ficam para o leitor. Os autores parecem supor que todos temos conhecimentos matemáticos suficientemente avançados. Adicionalmente, essas resoluções se encontram frequentemente em inglês.

Nossa apresentação visa que o material possa de fato ser lido e estudado por estudantes de língua portuguesa (e talvez espanhola) que se preparam para as fases finais das olimpíadas nacionais ou internacionais. Esperamos também que a presente abordagem sirva de apoio aos professores do Ensino Médio que se aventuram em tópicos mais avançados. Em comparação com outras soluções disponíveis, as apresentadas no artigo usam argumentos menos rebuscados e um número menor de transições a serem preenchidas pelo leitor.

As desigualdades aparecem com muita frequência nos problemas da IMO coligadas a diversos assuntos. Neste artigo discutimos três problemas, que usam conhecimentos diferentes, mas sem a pretensão de esgotar o tema.

O primeiro problema foi proposto para a IMO de 2014 e usa uma sequência infinita e estritamente crescente de inteiros positivos. A desigualdade envolvida é satisfeita sempre por um único termo da sequência. O segundo foi proposto para a IMO de 2012 e explora uma sequência de números reais positivos. A solução do desafio requer o uso repetido da desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica. O terceiro problema foi proposto para a IMO de 1982, estuda uma sequência infinita e não crescente de números reais positivos e lida com a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a soma de uma série geométrica.

Num trabalho apresentado no VI Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional resolvemos três problemas da Olimpíada Internacional de Matemática relacionados com Séries Harmônicas (LÓPEZ LINARES; BRUNO-ALFONSO; BARBOSA, 2019a). Os mesmos foram ampliados em (LÓPEZ LINARES; BRUNO-ALFONSO; BARBOSA, 2020). Também expomos problemas IMO sobre Bases Numéricas (LÓPEZ LINARES; BRUNO-ALFONSO; BARBOSA, 2019b). Uma discussão detalhada de outros 23 IMO pode ser encontrada em (LÓPEZ LINARES, 2019).

2 Desigualdades com sequências de inteiros. IMO 2014 P1

Problema 1. Seja $a_0 < a_1 < a_2 \ldots$ uma sequência infinita de inteiros positivos. Provar que existe um único inteiro $n \geq 1$ tal que

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}. \quad (1)$$

A IMO 2014 foi realizada na Cidade do Cabo, África do Sul. Problema proposto por Gerhard Wöginger, Áustria (INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD, 2019b).

2.1 Considerações iniciais sobre o Problema 1

A fração que aparece na desigualdade inicialmente lembra a média aritmética, mas não é o caso devido ao termo a_0. É uma soma de $n+1$ termos da sequência, dividida por n.

Vamos estudar primeiramente um exemplo. Seja $a_n = n+1$ com $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, temos que (a_n) é estritamente crescente (vale $0 < a_0 < a_1 < a_2 \ldots$). Adicionalmente

$$a_{n+1} - a_n = (n+2) - (n+1) = 1.$$

Isto é, a sequência é uma progressão aritmética (PA) de inteiros positivos. A soma de $n+1$ termos de uma PA é

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{(n+1)\cdot(a_0+a_n)}{2} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}.$$

Segue que podemos escrever a desigualdade (1) como

$$n+1 < \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2n} \leq n+2. \tag{2}$$

O lado esquerdo de (2) vale se $n < 2$ e o lado direito de (2) se $n \geq 1$. Com isto, $n = 1$ é a única solução da desigualdade.

2.2 Resolução do Problema 1

Olhando para o lado esquerdo da desigualdade (1), e como todos os números são inteiros positivos, vamos definir uma nova sequência (d_n)

$$na_n < a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

$$0 < a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n - na_n = d_n,$$
$$0 < d_n.$$

Agora focamos no lado direito da desigualdade (1)

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq na_{n+1},$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} \leq na_{n+1} + a_{n+1} = (n+1)a_{n+1},$$
$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} - (n+1)a_{n+1} \leq 0,$$
$$d_{n+1} \leq 0.$$

Isto é, a desigualdade (1) é equivalente a

$$d_{n+1} \leq 0 < d_n \tag{3}$$

para a sequência (d_n). Note de (2.2) que $d_0 = d_1 = a_0 > 0$. Temos adicionalmente que

$$d_{n+1} - d_n = (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} - (n+1)a_{n+1}) - (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n - na_n).$$

Logo, para $n \geq 1$ vale que

$$d_{n+1} - d_n = n(a_n - a_{n+1}) < 0. \tag{4}$$

Como a sequência (a_n) é estritamente crescente temos $a_n - a_{n+1} < 0$ e $d_{n+1} < d_n$. Isto é, a sequência (d_n) é estritamente decrescente para $n > 1$.

Segue que, para algum valor de n, a desigualdade (3) é satisfeita, pois a sequência (d_n) inicia em um inteiro positivo, é estritamente decrescente e somente assume valores inteiros.

O fato da sequência inicial ser de números inteiros é essencial na demonstração. Como contra-exemplo, seja (a_n) uma sequência de números reais dada por

$$a_n = 10 - \frac{1}{2^n}.$$

Temos $a_0 = 9$ e usando (2.2) $d_0 = a_0 = 9 > 0$. Adicionalmente

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} = -\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Logo $a_n < a_{n+1}$ e (a_n) é estritamente crescente. Pela equação (4) segue que,

$$d_{n+1} - d_n = -\frac{n}{2^{n+1}}.$$

Isto é, a sequência (d_n) é estritamente decrescente para $n > 0$. Porém, como o número $\frac{n}{2^{n+1}}$ tende a zero rapidamente quando n cresce, pode ser verificado que $d_n > 8 > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$d_n = 10 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{n-1}{2^n} = 8 + \frac{n+1}{2^n} > 8.$$

Com isso não existe um valor de n que satisfaça a desigualdade (3).

2.3 Comentários finais sobre o Problema 1

O Problema 1 discutiu uma propriedade, satisfeita por uma sequência, que podia ser confundida com uma média aritmética. Mostramos que o fato da sequência ser estritamente crescente e de números inteiros positivos foi essencial na solução.

Outras discussões relacionadas a este problema se encontram em inglês em (THE PROBLEM SELECTION COMMITTEE OF IMO 2014, 2014) e (ART OF PROBLEM SOLVING, 2020).

3 Desigualdade das médias aritmética e geométrica. IMO 2012 P2

Problema 2. Seja $n \geq 3$ um inteiro e sejam $a_2, a_3, ..., a_n$ números reais positivos tais que $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Provar que

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n. \tag{5}$$

A IMO 2012 foi realizada na cidade de Mar del Plata, Argentina (INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD, 2019b).

3.1 Considerações iniciais sobre o Problema 2

A ferramenta principal para resolver o problema desta seção é a desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica.

Proposição 1 (Desigualdade das médias aritmética e geométrica) *Seja* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *uma lista de números reais positivos com* $n \geq 2$*, então*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i},$$

onde $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ *e* $\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$*. A igualdade ocorre quando* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$*.*

Demonstração. Caso $n = 2$: Queremos provar que:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2}.$$

Multiplicando os dois lados por 2 e elevando ao quadrado temos:

$$(x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1 \cdot x_2.$$

Desenvolvendo o quadrado e simplificando obtemos outras sentenças equivalentes:

$$x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 \geq 4x_1 \cdot x_2,$$

$$x_1^2 - 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 \geq 0,$$

$$(x_1 - x_2)^2 \geq 0.$$

Mas o quadrado de um número real é sempre não negativo. A igualdade acontece quando $x_1 = x_2$. □

A demonstração para $n > 2$ pode ser encontrada, por exemplo, em Morgado e Carvalho (2015) e Souza (2015).

3.2 Resolução do Problema 2

Para o primeiro fator na multiplicação da desigualdade (5) considere a lista $\{1, a_2\}$. Como ambos números são positivos podemos aplicar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$\frac{1 + a_2}{2} \geq \sqrt{1 \cdot a_2}.$$

Elevando ao quadrado os dois lados da desigualdade anterior temos

$$(1 + a_2)^2 \geq 2^2 \cdot a_2. \tag{6}$$

A igualdade ocorre quando $a_2 = 1$.

Para o segundo fator na multiplicação da desigualdade (5) consideremos a lista $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, a_3\right\}$. Como os três números são positivos podemos aplicar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+a_3}{3} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)+a_3}{3} \geq \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot a_3} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot a_3}.$$

Elevando ao cubo na desigualdade anterior temos

$$(1+a_3)^3 = \left(2\left(\frac{1}{2}\right)+a_3\right)^3 \geq 3^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot a_3. \tag{7}$$

A igualdade ocorre quando $a_3 = \frac{1}{2}$.

Em geral, para o termo k-ésimo ($2 \leq k \leq n$) do lado esquerdo na desigualdade (5) consideramos a lista com $k-1$ números iguais a $\frac{1}{k-1}$ e a_k, isto é,

$$\left\{\underbrace{\frac{1}{k-1}, \frac{1}{k-1}, \dots, \frac{1}{k-1}}_{(k-1)\quad números}, a_k\right\}.$$

Como todos os números são positivos podemos aplicar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica

$$\frac{(k-1)\left(\frac{1}{k-1}\right)+a_k}{k} \geq \sqrt[k]{\left(\frac{1}{k-1}\right)^{(k-1)}\cdot a_k}.$$

Elevando à potência k-ésima os dois lados da desigualdade anterior obtemos

$$(1+a_k)^k \geq k^k\cdot\left(\frac{1}{k-1}\right)^{(k-1)}\cdot a_k. \tag{8}$$

A igualdade ocorre quando $a_k = \frac{1}{k-1}$.

Como k varia de 2 até n multiplicando os termos da desigualdade anterior temos

$$\prod_{k=2}^{n}(1+a_k)^k \geq \prod_{k=2}^{n} k^k\cdot\left(\frac{1}{k-1}\right)^{(k-1)}\cdot a_k.$$

Notamos que parte do lado direito da desigualdade anterior é um produto telescópico onde todos os termos se cancelam, exceto um

$$\prod_{k=2}^{n} k^k\left(\frac{1}{k-1}\right)^{k-1} = 2^2 3^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdots(n-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n-2}\right)^{n-2} n^n\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = n^n,$$

logo

$$\prod_{k=2}^{n}(1+a_k)^k \geq n^n\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n.$$

Usando a hipótese no enunciado do problema $a_2 a_3\cdots a_n = 1$ podemos escrever

$$\prod_{k=2}^{n}(1+a_k)^k \geq n^n.$$

Para que aconteça a igualdade devemos ter que $a_k = \frac{1}{k-1}$ $\forall k \in \mathbb{N}, 2 \leq k \leq n$, mas $n \geq 3$ e

$$a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n-1} \neq 1.$$

Isto é, a igualdade nunca acontece, provando que a desigualdade é estrita

$$\prod_{k=2}^{n} (1 + a_k)^k > n^n.$$

3.3 Comentários finais sobre o Problema 2

Este segundo problema, proposto para a IMO de 2012, explorou uma sequência de números reais positivos. A solução do desafio envolveu o uso repetido da desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica.

Uma outra solução, embora mais rebuscada, para este problema pode ser encontrada em (THE PROBLEM SELECTION COMMITTEE OF IMO 2012, 2012).

4 Desigualdade de Cauchy-Schwarz. IMO 1982 P3

Problema 3. Seja a sequência infinita (x_n) de números reais e positivos com as propriedades a seguir: $x_0 = 1$ e para todo $i \geq 0$, $x_{i+1} \leq x_i$.
(a) Provar que para toda sequência desse tipo existe $n \geq 1$ tal que

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3,999. \tag{9}$$

(b) Encontrar uma sequência para a qual

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4 \tag{10}$$

para todo n.

A IMO 1982 foi realizada na cidade de Budapeste, Hungria (INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD, 2019b). O problema acima foi proposto pela delegação da antiga União Soviética (DJUKIC *et al*, 2006).

4.1 Considerações iniciais sobre o Problema 3

Proposição 2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Dadas duas sequências de números reais* $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ *e* $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ *então*

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \tag{11}$$

e vale a igualdade quando $b_i = \lambda a_i$ *para todo* $1 \leq i \leq n$ *com* λ *real.*

Demonstração. Consideremos a função real de variável real

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x - b_i)^2.$$

Desenvolvendo o quadrado e colocando x em evidência podemos escrever

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) x + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Isto é, $f(x)$ é um polinômio de segundo grau em x. Como $f(x)$ é uma soma de quadrados teremos $f(x) \geq 0$ e seu discriminante negativo ou igual a zero:

$$\Delta = 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0.$$

Dividindo por 4 obtemos a desigualdade de Cauchy-Schwarz reescrita com os símbolos de somatórios:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 .$$

A igualdade acontece quando o discriminante é zero. Nesse caso $f(x)$ tem uma raiz dupla $x = \lambda$. Mas isto corresponde a

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x - b_i)^2 = 0.$$

Como as sequências (a_n) e (b_n) são de números reais, os quadrados são não negativos. A única possibilidade é que $a_i\lambda - b_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Isto é, acontece a igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz quando as sequências (a_n) e (b_n) são proporcionais. $\square$

4.2 Resolução do Problema 3

(a) Inicialmente usaremos a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Consideremos as sequências de números reais e positivos

$$(a_n) = \left(\frac{x_0}{\sqrt{x_1}}, \frac{x_1}{\sqrt{x_2}}, \cdots, \frac{x_{n-1}}{\sqrt{x_n}}\right),$$
$$(b_n) = (\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \cdots, \sqrt{x_n}).$$

Pela equação (11) temos

$$\left(\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n}\right)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \geq (x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1})^2 .$$

Seja $X_{n-1} = x_1 + \cdots + x_{n-1}$. Como $x_0 = 1$ segue que

$$\left(\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n}\right)(X_{n-1} + x_n) \geq (1 + X_{n-1})^2 .$$

Adicionalmente, desenvolvendo o quadrado, simplificando e fatorando novamente verifica-se que $(1 + X_{n-1})^2 \geq 4X_{n-1}$. Logo

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq \frac{4X_{n-1}}{X_{n-1} + x_n} = \frac{4}{1 + \frac{x_n}{X_{n-1}}}. \tag{12}$$

Das hipóteses do problema a sequência (x_n) é não crescente:

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n.$$

Logo,

$$X_{n-1} = x_1 + \cdots + x_{n-1} \geq (n-1)x_n.$$

Segue que

$$\frac{x_n}{X_{n-1}} \leq \frac{1}{n-1}. \tag{13}$$

Substituindo (13) em (12) encontramos

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq \frac{4}{1 + \frac{x_n}{X_{n-1}}} \geq \frac{4\,(n-1)}{n}.$$

Como queremos encontrar um valor de n tal que (9) seja verdadeiro basta escolher

$$\frac{4(n-1)}{n} \geq 3,999,$$

ou seja, $n > 4000$.

(b) A sequência $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ é uma solução. Note que $x_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ e (x_n) é decrescente (logo não crescente). De fato, $x_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^n = x_n$.

Para mostrar que vale (10) notamos que

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

Sendo o lado direito da equação anterior a soma de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ segue que

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

Logo, vale para todo n que

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} < 4.$$

4.3 Comentários finais sobre o Problema 3

Este terceiro problema, proposto para a IMO de 1982, lidou com uma sequência infinita e não crescente de números reais positivos. Como tema central treinamos o uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Porém, outros conhecimentos clássicos, como a soma de uma série geométrica, também foram necessários.

5 Referências Bibliográficas

ART OF PROBLEM SOLVING. IMO 2014 Problem 1. 2020. Disponível em: https://artofproblemsolving.com/community/q1h596930p3542095. Acesso em: 23 mai. 2020.

DJUKIC, D. *et al.* **The IMO compendium:** a collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2004. New York: Springer, 2006. Disponível em: http://web.cs.elte.hu/~nagyzoli/compendium.pdf. Acesso em: 23 mai. 2020.

INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD. *In*: WIKIPÉDIA. 2019a. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/International_Mathematical_Olympiad. Acesso em: 23 mai. 2020.

INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD. **Problems.** 2019b. Disponível em: http://www.imo-official.org/problems.aspx. Acesso em: 23 mai. 2020.

LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. A série harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática. *In*: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 6., 2019a, Bauru. **Caderno de trabalhos completos e resumos** [...]. Bauru: Unesp, Faculdade de Ciências, 2019a. p. 16-22. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/eventos2341/ermac-2019/caderno-de-trabalhos-e-resumos. Acesso em: 23 mai. 2020.

LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre série harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 17, p. 127-138, fev. 2020. Edição Ermac. DOI: 10.21167/cqdvol17ermac202023169664jllabagfb127138. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd. Acesso em: 23 mai. 2020.

LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Bases numéricas na Olimpíada Internacional de Matemática. **Professor de Matemática Online (PMO),** v. 7, n. 2, p. 195-204, 2019b. Disponível em: https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo715. Acesso em: 23 mai. 2020.

LÓPEZ LINARES, J. **Problemas resolvidos sobre sequências no treinamento de estudantes do ensino médio para Olimpíadas Internacionais de Matemática.** 2019. 124 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, [São Carlos], 2019. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11881. Acesso em: 23 mai. 2020.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção ProfMat).

SOUZA, F. H. T. de. **Desigualdades: aula 6: desigualdades das médias aritméticas e geométrica (MA-MG).** [*S. l.*: *s. n.*], 2015. 1 vídeo (19 min 43 seg). Publicado pelo canal Programa de Iniciação Cientifica da OBMEP. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=da1prIpZniQ&index=6. Acesso em: 23 mai. 2020.

THE PROBLEM SELECTION COMMITTEE OF IMO 2012. **Shortlisted problems with solutions.** Mar del Plata: [*s. n.*], 2012. Disponível em: http://www.imo-official.org/problems/IMO2012SL.pdf. Acesso em: 23 mai. 2020.

THE PROBLEM SELECTION COMMITTEE OF IMO 2014. **Shortlisted problems with solutions.** Cape Town: [*s. n.*], 2014. Disponível em: http://www.imo-official.org/problems/IMO2014SL.pdf. Acesso em: 23 mai. 2020.

TURNER, N. D. A historical sketch of olympiads: U.S.A. and international. **The College Mathematics Journal**, v. 16, n. 5, p. 330-335, Nov. 1985.