Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 17, fev. 2020
Edição Ermac

Análise das soluções numéricas do modelo do tipo presa-predador de Holling-Tanner

Analysis of the numerical solutions of the Holling-Tanner prey-predator model

Graciele Paraguaia Silveira
Campus Sorocaba
Universidade Federal de São Carlos
gracimat@gmail.com

Raphael de Oliveira Garcia
Campus Osasco
Universidade Federal de São Paulo
gr.gubim@gmail.com

Resumo

A modelagem matemática de dinâmicas populacionais, como interações entre espécies, via sistemas de equações diferenciais podem auxiliar na tomada de decisões como por exemplo, para controle biológico. O propósito deste trabalho foi obter soluções numéricas do modelo do tipo presa-predador de Holling-Tanner, representado por um sistema de EDO's, por meio de diferentes métodos numéricos. Foram considerados os métodos de Euler, Euler modificado, Runge-Kutta clássico, Adams-Bashforth 2 e Adams-Moulton 2. Simulações de três cenários foram realizadas, cada um deles representando situações distintas das populações envolvidas. Os resultados mostraram que os valores dos parâmetros têm grande impacto na evolução das populações e que todos os métodos numéricos escolhidos, desde que alguns cuidados sejam tomados, são capazes de gerar soluções satisfatórias.
Palavras-chave: Biomatemática. Modelo Presa-Predador. Holling-Tanner. Métodos Numéricos.

Abstract

Mathematical modeling of population dynamics, such as interactions between species, via differential equations systems can assist in decision making for example in biological control. The purpose of this work was to obtain numerical solutions of the Holling-Tanner prey-predator model, represented by an ODE system, using different numerical methods. The methods of Euler, modified Euler, classic Runge-Kutta, Adams-Bashforth 2 and Adams-Moulton 2 were considered. Simulations of three scenarios were performed, each representing different situations of the populations involved. The results showed that the parameter values have a great impact on population evolution and that all numerical methods chosen, as long as some precautions are taken, are capable of generating satisfactory solutions.
Keywords: Biomathematics. Prey-Predator Model. Holling-Tanner. Numerical Methods.

Artigo recebido em set. 2019 e aceito em jan. 2020

1 Introdução

A modelagem matemática e as equações diferenciais ordinárias, aliadas ao avanço das técnicas numéricas e computacionais, vêm se destacando cada vez mais por possibilitar estudos de fenômenos biológicos como dinâmicas entre populações e suas consequências, através da simulação de diferentes cenários. Os modelos matemáticos são importantes pois permitem antever situações futuras e auxiliam em tomadas de decisões.

Neste sentido, o objetivo desta pesquisa foi estudar o modelo matemático do tipo presa-predador, de Holling-Tanner, por meio do uso de diferentes métodos numéricos em sua resolução, tomando por base a referência Silveira e Garcia (2019). Simulações computacionais foram implementadas a fim de se explorar e comparar os métodos numéricos empregados. A importância do modelo de Holling-Tanner está no fato de que este leva em consideração o efeito predação e as capacidades de suportes das populações de presas e predadores, o que não ocorre no modelo de Lotka-Volterra.

Na referência mencionada, as soluções aproximadas do sistema foram obtidas via métodos de Euler, Euler modificado, Adams-Bashforth de 2 passos e Adams-Moulton 2. Neste artigo manteve-se as simulações com todos esses métodos citados e houve o acréscimo do método de Runge-Kutta clássico em todos os exemplos executados. Além disso, um dos cenários considerados foi totalmente reformulado e apresentou conclusões importantes envolvendo espaçamento, domínio temporal e valores dos parâmetros adotados, conforme será destacado na Seção 4. A implementação computacional foi efetuada no Octave, versão 4.2.1, sem o uso de pacotes prontos, isto é, com códigos próprios.

Nas próximas seções encontram-se detalhes do modelo matemático, dos métodos numéricos e dos exemplos investigados.

2 O modelo de Holling-Tanner

As equações diferenciais ordinárias que representam o modelo presa-predador de Holling-Tanner são dadas por:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = rx\left(1 - \dfrac{x}{K}\right) - \dfrac{mx}{A+x}y \\ \dfrac{dy}{dt} = sy\left(1 - c\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}, \quad x(0) = x_0 \ \text{ e } \ y(0) = y_0, \tag{1}$$

em que $x(t)$ representa a população de presas, $y(t)$ corresponde à população de predadores, r equivale a taxa de natalidade da população de presas, K simboliza a capacidade de suporte da população de presas, c está relacionado com a quantidade de alimentos necessária para que resulte em nascimentos de predadores e s é a taxa de natalidade da população de predadores. Nesse sistema também é considerada uma capacidade de suporte para a população de predadores, diretamente proporcional à quantidade de presas (baseado no modelo de Leslie-Gower), além do termo conhecido como função resposta $-\dfrac{mx}{A+x}y$, baseado no modelo de Milchaelis-Mentem para concentrações de substâncias em reações enzimáticas (CECCONELLO; SILVA; BASSANEZI, 2012).

Esse modelo de interação entre espécies possui algumas características importantes:

- A dinâmica populacional das presas segue o modelo logístico, com capacidade de suporte K e razão intrínseca r, na ausência de predadores.

- O parâmetro m é o número máximo de presas que podem ser capturadas pelo predador, por unidade de tempo.
- A constante A refere-se a capacidade, por parte das presas, em evitar o ataque dos predadores. Se os demais parâmetros forem mantidos constantes, quanto maior for A, menor será a influência do predador sobre a população das presas.
- A população de predadores cresce logisticamente. Quanto maior é a razão y/x, menor é o número de presas disponíveis para cada predador, e por consequência, a população de predadores decresce.

Para a realização de estudos numéricos é conveniente efetuar as mudanças de variáveis, $\bar{t} = rt$, $\bar{x} = \frac{x}{K}$ e $\bar{y} = \frac{my}{rK}$ no Sistema (1). Dessa forma, após remover a notação de barra sobre as variáveis, tem-se o seguinte sistema equivalente

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x\,(1-x) - \dfrac{x}{a+x}y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = y\left(d - b\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}, \quad x(0) = x_0 \ \text{ e } \ y(0) = y_0. \tag{2}$$

Os estudos numéricos implementados neste trabalho foram feitos a partir do Sistema (2).

3 Métodos numéricos

Nesta seção, estão expostos os métodos numéricos utilizados na obtenção de soluções aproximadas das equações diferenciais que modelam dinâmica populacional do tipo Holling-Tanner. Nesse momento, é suficiente apresentar os métodos numéricos aplicados ao Problema de Valor Inicial (PVI),

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x), \ \ t \in I \subset \mathbb{R} \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \tag{3}$$

em que $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x = x(t)$, $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Os esquemas numéricos foram escolhidos tomando como base o trabalho de Garcia e Silveira (2018), a saber, método de Euler, método de Euler modificado, Adams-Bashforth de dois passos e Adams-Moulton de dois passos. Para todos os esquemas realizou-se a discretização convencional, que pode ser encontrada na referência citada e outros detalhes sobre os métodos numéricos podem ser estudados em Buchanan e Turner (1992).

Os métodos explícitos de passo simples aplicados no Sistema (2) foram o método de Euler e o método de Euler modificado.

3.1 Método de Euler

No esquema de Euler explícito de primeira ordem, a solução aproximada ξ_{i+1} é definida por

$$\xi_{i+1} = \xi_i + hf(t_i, \xi_i), \ \ i = 0, \ldots, N-1. \tag{4}$$

3.2 Método de Euler modificado

No método de Euler modificado explícito de segunda ordem, a solução aproximada ξ_{i+1} é definida por

$$\begin{cases} m_1 = f(t_i, \xi_i) \\ m_2 = f(t_i + h, \xi_i + hm_1) \\ \xi_{i+1} = \xi_i + \dfrac{h}{2}\left[m_1 + m_2\right] \end{cases}, \; i = 0, \ldots, N-1. \tag{5}$$

3.3 Método de Runge-Kutta clássico

No método de Runge-Kutta de quarta ordem, a solução aproximada ξ_{i+1} é definida por

$$\begin{cases} m_1 = f(t_i, \xi_i) \\ m_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, \xi_i + \frac{h}{2}m_1) \\ m_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, \xi_i + \frac{h}{2}m_2) \\ m_4 = f(t_i + h, \xi_i + hm_3) \\ \xi_{i+1} = \xi_i + \dfrac{h}{6}\left[m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4\right] \end{cases}, \quad i = 0, \ldots, N-1. \tag{6}$$

Os métodos de múltiplos passos aplicados ao Sistema (2) foram o esquema de Adams-Bashforth de dois passos (método explícito) e o método de Adams-Moulton de dois passos (método implícito).

3.4 Método de Adams-Bashforth 2

No esquema de Adams-Bashforth explícito de dois pontos e de segunda ordem, a solução aproximada ξ_{i+1} é definida por

$$\xi_{i+1} = \xi_i + \frac{h}{2}\left[3f(t_i, \xi_i) - f(t_{i-1}, \xi_{i-1})\right], \; i = 1, \ldots, N-1. \tag{7}$$

Note que ξ_1 não está definido na Equação (7), desse modo é necessário obtê-lo por um esquema de passo simples. Neste estudo optou-se pelo método de Euler modificado definido pela Equação (5).

Além dos métodos explícitos apresentados, um método implícito também foi empregado na resolução numérica do Sistema (2).

3.5 Método de Adams-Moulton 2

No esquema de Adams-Moulton implícito de dois pontos e de segunda ordem (também conhecido como método Trapezoidal implícito), a solução aproximada ξ_{i+1} é definida por

$$\xi_{i+1} = \xi_i + \frac{h}{2}\left[f(t_{i+1}, \xi_{i+1}) + f(t_i, \xi_i)\right], \; i = 0, \ldots, N-1. \tag{8}$$

Note que neste caso não é possível obter ξ_{i+1} de maneira recursiva, tornando-se necessário resolver um sistema linear definido pela Equação (8). Uma alternativa para evitar a resolução do sistema linear é utilizar o conceito de predição e correção. O processo consiste em estimar ξ_{i+1} do lado direito da Equação (8), via algum método explícito e substituí-lo na expressão do método

implícito. Dessa maneira o método de Adams-Moulton 2 preditor-corretor, cuja predição é realizada pelo método de Adams-Bashforth 2, torna-se

$$\begin{cases} \xi_{pred} = \xi_i + \dfrac{h}{2}\left[3f(t_i,\xi_i) - f(t_{i-1},\xi_{i-1})\right] \\ \xi_{i+1} = \xi_i + \dfrac{h}{2}\left[f(t_{i+1},\xi_{pred}) + f(t_i,\xi_i)\right] \end{cases}, \; i = 1,\ldots,N-1. \tag{9}$$

4 Simulações computacionais

Assim como ocorreu em Silveira e Garcia (2019), serão apresentados três exemplos de cenários cujas simulações numéricas realizadas levaram em consideração informações presentes na referência Gasull, Kooij e Torregrosa (1997). Contudo, modificações importantes em relação ao trabalho inicial foram implementadas como os acréscimos de um quinto método numérico e de comentários adicionais em todas as simulações, além da reformulação total do Exemplo 2, ampliando as discussões sobre o comportamento das soluções aproximadas obtidas.

As implementações computacionais foram executadas em *Octave*, com códigos elaborados pelos autores, tendo como referência Quarteroni e Saleri, 2017.

4.1 Exemplo 1

Neste cenário escolheu-se valores para a dinâmica populacional tomando por base a literatura, $a = 0,2$; $b = 0,06$; $d = 0,1$. Os valores iniciais foram $x_0 = 1$ e $y_0 = 1$ e para a discretização utilizou-se tempo inicial $t_0 = 0$, tempo final $t_f = 200$ e $h = 0,2$. A Figura 1 mostra a evolução temporal das populações sob tais condições.

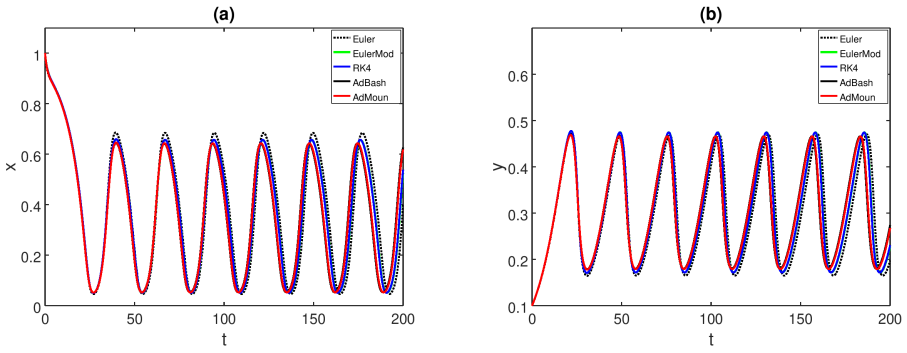

Figura 1: Evolução temporal das populações de presas (a) e de predadores (b), para $h = 0,2$.

Nos gráficos das Figuras 1(a) e 1(b) é possível observar diferenças entre as soluções numéricas. O método de Euler ficou mais afastado dos demais por ser de ordem 1. Além disso, os métodos de Euler Modificado e Runge-Kutta clássico apresentaram desempenhos similares, não sendo possível verificar diferenças visuais. O mesmo acontece com os métodos Adams-Bashforth 2 e Adams-Moulton 2. Nota-se que o comportamento das populações é cíclico, isto é, à medida que a população de predadores aumenta, o número de presas diminui e vice-versa. Isso ficou evidenciado no plano de fase apresentado na Figura 3(a).

Alterando o espaçamento h para $0,05$, obtém-se os cenários representados na Figura 2.

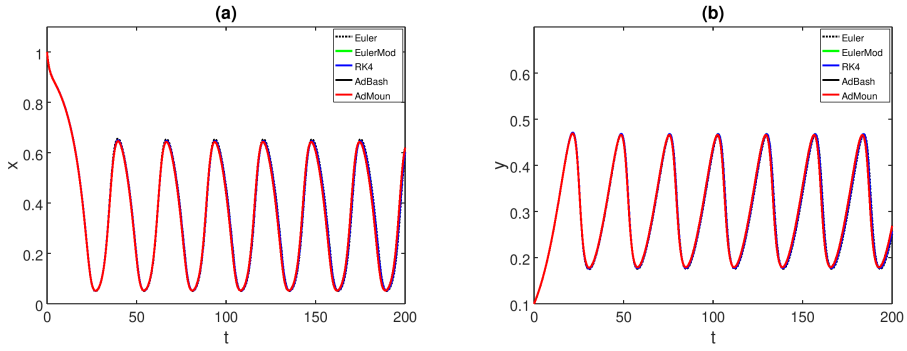

Figura 2: Evolução temporal das populações de presas (a) e de predadores (b), para $h = 0,05$.

Verifica-se que quase não há diferenças visuais entre as soluções numéricas, o que indica uma convergência numérica. Na Figura 3(b), tem-se o plano de fase deste caso, destacando o comportamento de ciclo limite na dinâmica das populações.

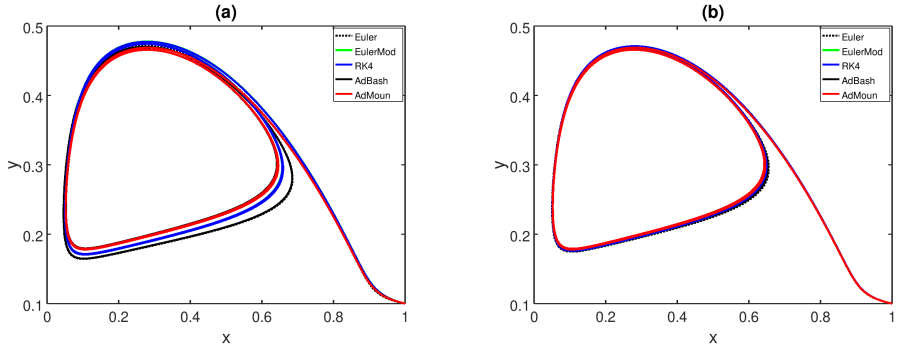

Figura 3: Plano de fase entre as populações de presas e predadores; em (a) para $h = 0,2$ e em (b) para $h = 0,05$.

4.2 Exemplo 2

Neste exemplo os seguintes valores para os parâmetros foram estabelecidos, a partir de dados da literatura: $a = 0,2$, $b = 0,0682$, $d = 0,2$. A diferença em relação ao cenário anterior é que houve aumento no número de predadores.

No trabalho de Silveira e Garcia (2019), os dados utilizados para a discretização temporal foram $t_0 = 0$, $t_f = 100$ e $h = 0,2$ e as soluções numéricas apresentaram uma convergência lenta para um possível ponto de equilíbrio. Reproduzindo essa simulação, com o acréscimo do método de Runge-Kutta clássico, obtém-se os gráficos da Figura 4 cujos planos de fase de cada simulação encontram-se na Figura 5.

Neste caso, de início a evolução temporal das populações de presas e predadores estão muito próximas, entretanto a partir de $t = 10$, percebe-se que as diferenças entre as soluções começam a aparecer. O método de Euler passa a ter picos maiores tanto para a população de presas quanto para a população de predadores, quando comparado com as soluções dos outros métodos, conforme

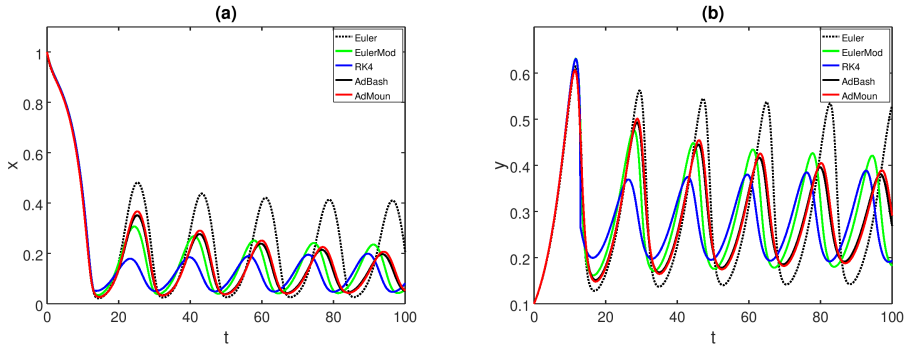

Figura 4: Evolução temporal das populações de presas (a) e de predadores (b), $t_f = 100$, para $h = 0,2$.

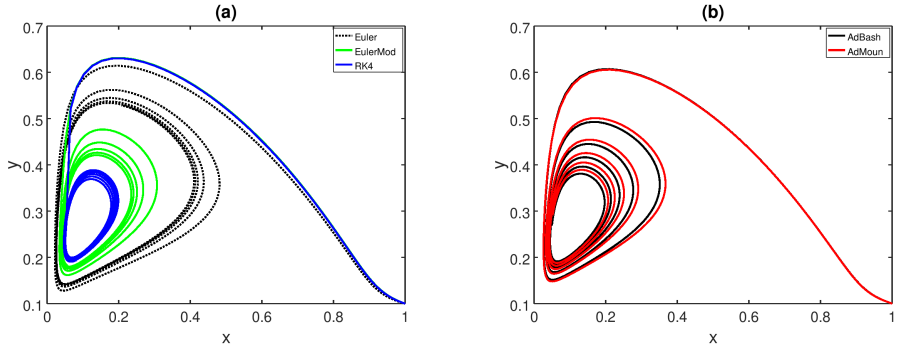

Figura 5: Plano de fase entre as populações de presas (a) e predadores (b), $t_f = 100$, para $h = 0,2$.

mostra a Figura 4. Essa diferença também aparece no plano de fase, resultando em um ciclo mais largo que o apresentado pelos demais métodos (ver Figura 5).

Na Figura 4 observa-se que a medida que o tempo passa, as amplitudes das populações diminuem, com exceção da solução obtida pelo método de Runge-Kutta clássico. Os planos de fase dos métodos de passo simples, Figura 5(a), apresentam ciclos bem distintos enquanto que os métodos de passos múltiplos, Figura 5(b), revelam comportamentos similares. Os planos de fase dos métodos de passos múltiplos apontam para uma convergência lenta da solução.

Em Silveira e Garcia (2019), onde o método de Runge-Kutta clássico não foi considerado, as soluções aproximadas encontradas com os métodos de Euler, Euler Modificado, Adams-Bashforth 2 e Adams-Moulton 2 apontaram para uma convergência lenta, uma vez que todos os métodos apresentaram diminuição na amplitude dos picos das populações. Entretanto, ao adicionar o método de Runge-Kutta clássico obteve-se um comportamento adverso, isto é, um aumento na amplitude das populações a partir de um determinado tempo.

Com o intuito de investigar melhor as soluções numéricas, neste estudo o tempo final da evolução temporal foi estendido para $t_f = 400$ e $t_f = 800$, e as soluções obtidas podem ser visualizadas, respectivamente nas Figuras 6(a) e 6(b). Os planos de fase são mostrados nas Figuras 7(c) e 7(d), respectivamente.

A análise dos gráficos exibidos nas Figuras 6(a) e 6(b), mostra que o método de Euler apresenta

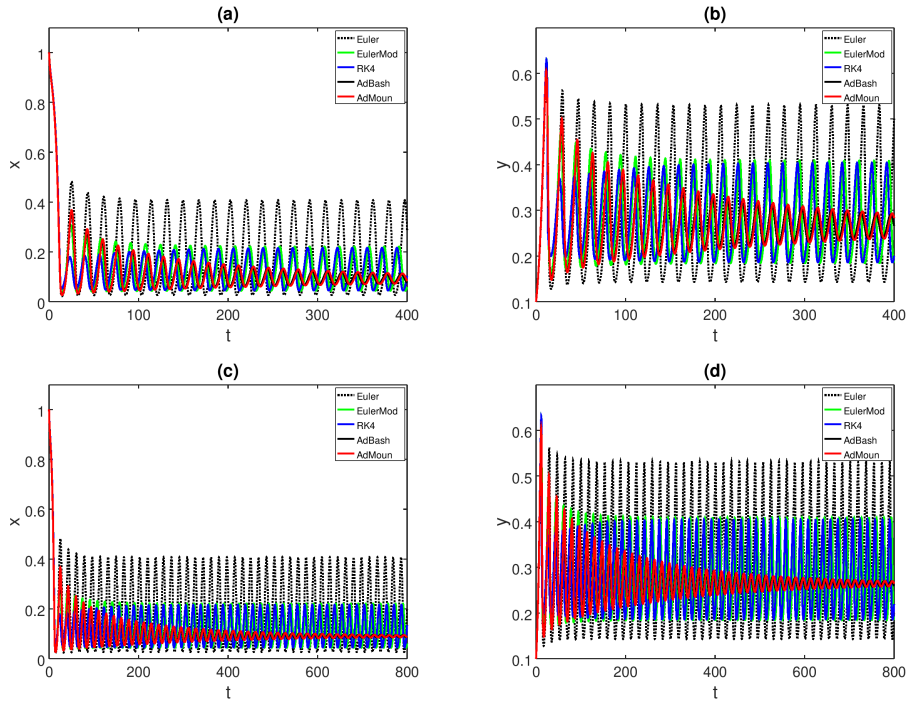

Figura 6: Evolução temporal das populações de presas e de predadores, com $h = 0,2$: para $t_f = 400$ em (a) e (b) e para $t_f = 800$ em (c) e (d).

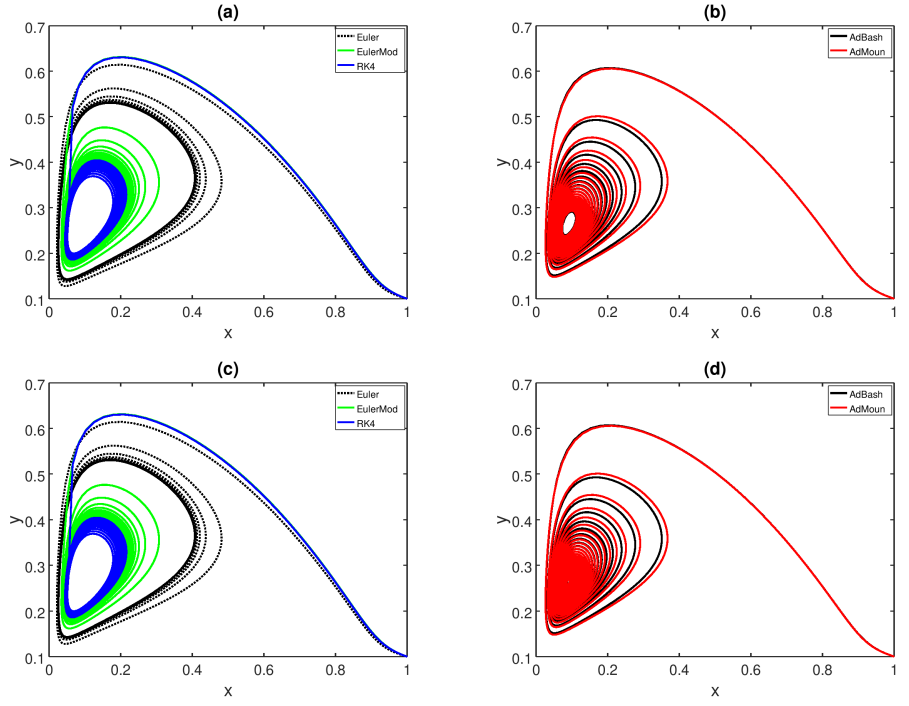

Figura 7: Plano de fase entre as populações de presas e predadores, com $h = 0,2$: para $t_f = 400$ em (a) e (b) e para $t_f = 800$ em (c) e (d).

diminuição nos picos das populações até aproximadamente $t = 100$. A partir desse tempo os picos das populações passam a ser constantes e, prosseguindo a evolução temporal até $t = 800$ (ver Figuras 6(c) e 6(d)), as soluções mantêm tal comportamento. Observando os planos de fase expostos na Figura 7, pode-se concluir que o método de Euler mudou o perfil da solução a partir do tempo $t = 100$, deixando de ser uma espiral que converge lentamente e passando a ser uma solução do tipo ciclo limite.

Ainda na Figura 6, em todos os gráficos, considerando os métodos de Euler Modificado e o método de Runge-Kutta, a partir do tempo $t \cong 300$ as soluções numéricas ficam muito próximas e ambas passam a ter um comportamento de ciclo limite, de acordo com as Figuras 7(a) e 7(c). Este comportamento de ciclo limite persiste à medida que o tempo final aumenta; neste exemplo aumentou-se até $t = 800$, ver Figuras 6(c) e 6(d), e Figuras 7(c) e 7(d).

Em contrapartida, os métodos de múltiplos passos continuam apresentando soluções similares, que convergem lentamente para um ponto de equilíbrio. Na Figura 6, em todos os gráficos, verifica-se que as amplitudes ficam cada vez menores e os planos de fase, Figuras 7(b) e 7(d), apresentam espirais convergindo.

Dessa forma, conclui-se que os métodos de passo simples conduzem à soluções numéricas do tipo ciclo limite, no caso do método de Euler para $t > 100$, enquanto que métodos de Euler Modificado e Runge-Kutta clássico para $t > 300$. Já os métodos de passos múltiplos apontam para soluções de espirais convergindo.

Com o objetivo de aprofundar a investigação, o espaçamento foi reduzido para $h = 0,025$ e o plano de fase do sistema de equações diferenciais (2) também foi analisado analiticamente, a fim de se obter mais esclarecimentos sobre o comportamento das soluções.

As soluções numéricas, ao adotar $h = 0,025$ e $t = 100$, são bem similares com exceção do método de Euler e isso pode ser visto nas Figuras 8(a) e 8(b). Entretanto, é possível observar a diminuição dos picos das populações em todos os métodos. Ao realizar a simulação computacional para $t = 1600$, nota-se que a partir de $t = 100$, as diferenças entre as soluções dos métodos de passo simples e os métodos de múltiplos passos aumentam, sendo que os métodos de Euler Modificado e Runge-Kutta clássico têm um decréscimo maior na amplitude do que o método de Euler, conforme mostram as Figuras 8(c) e 8(d). Além disso, ao observar os planos de fase para $t = 100$ e $t = 1600$, ver Figuras 9(a) e 9(b), e Figuras 9(c) e 9(d), respectivamente, o perfil das soluções são de espirais convergindo.

Ao considerar analiticamente as trajetórias das populações no plano de fase do Sistema (2), via software *Maxima*, obteve-se a Figura 10, que mostra o perfil da solução analítica na forma de espiral convergindo. Logo, espera-se o mesmo comportamento das soluções numéricas.

No entanto, as soluções de ciclo limite obtidas pelos métodos de passo simples não foram compatíveis com tal conclusão. Este comportamento adverso ocorre em razão do acúmulo de erros de truncamento local, por parte dos métodos de passo simples, fazendo com que a solução numérica altere seu comportamento, deixando de ser uma espiral convergindo e se tornando um ciclo limite no decorrer do tempo.

Ao alterar o espaçamento para $h = 0,025$, até o tempo final de $t_f = 1600$ não houve acúmulo de erro de truncamento local suficiente para mudar o comportamento das soluções dos métodos de passo simples. Neste caso, o método de Euler apresenta uma espiral convergindo mais lentamente do que os métodos de Euler Modificado e Runge-Kutta, por ser de ordem 1.

Os dois exemplos apresentados anteriormente foram desenvolvidos tomando-se parâmetros encontrados na literatura (GASULL; KOOIJ; TORREGROSA, 1997). Com o objetivo de explorar novos cenários, os autores elaboraram o próximo exemplo.

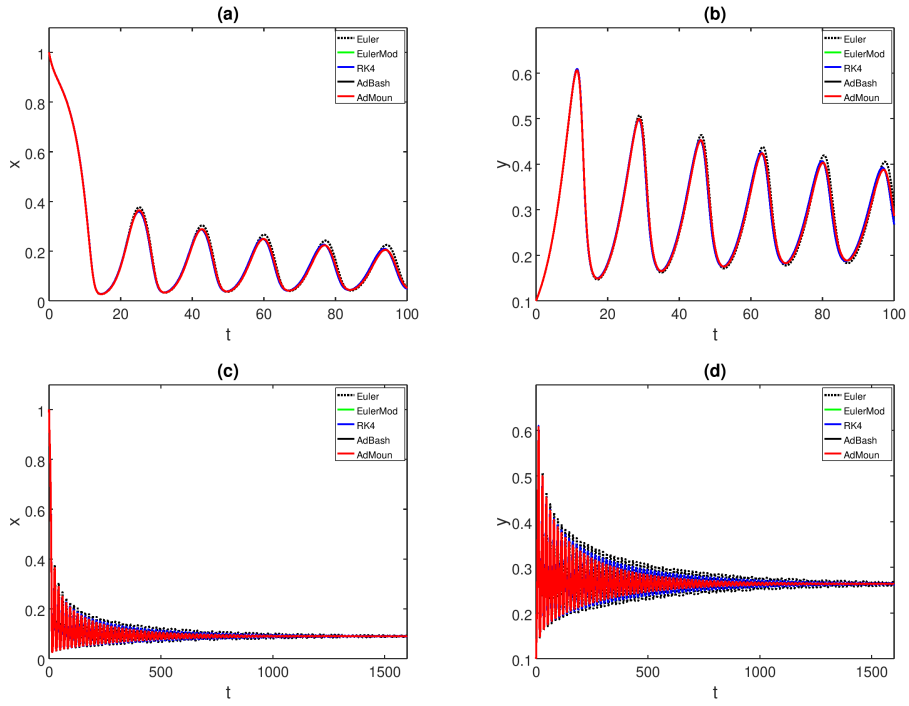

Figura 8: Evolução temporal das populações de presas e de predadores, com $h = 0,025$: para $t_f = 100$ em (a) e (b); para $t_f = 1600$ em (c) e (d).

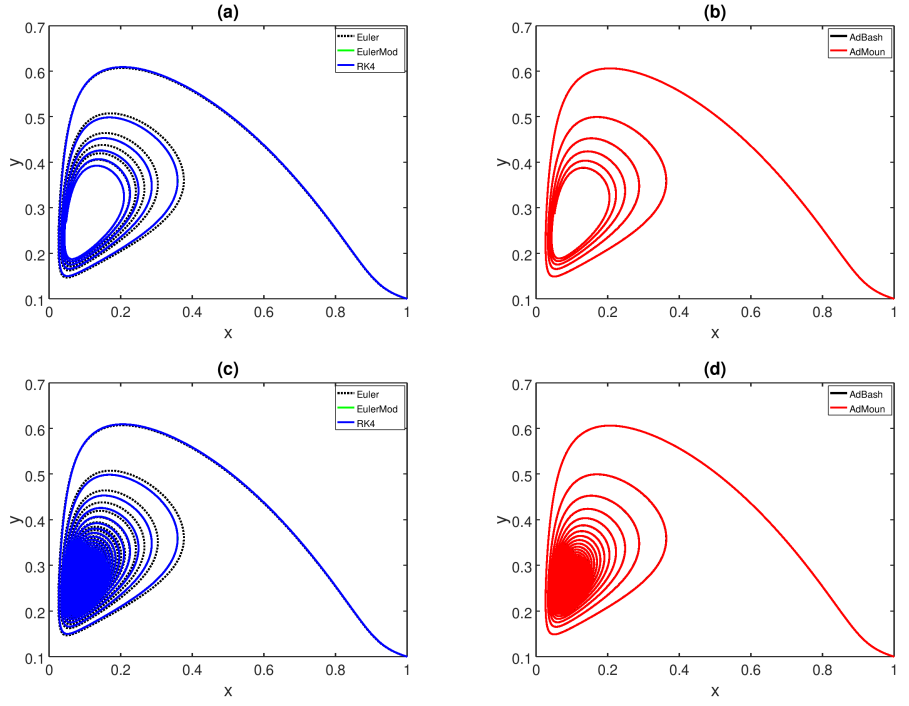

Figura 9: Plano de fase entre as populações de presas e predadores, com $h = 0,025$: para $t_f = 100$ em (a) e (b); $t_f = 1600$, em (c) e (d).

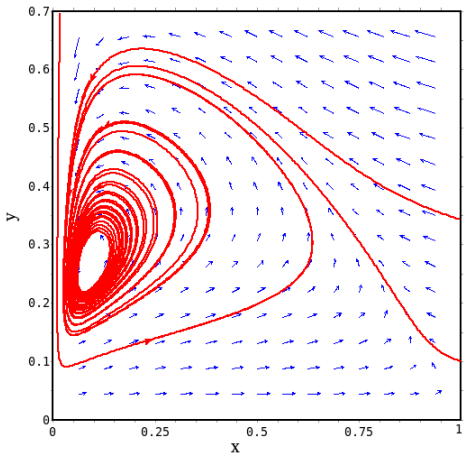

Figura 10: Plano de fase do sistema de equações diferencias (2), graficado com o auxílio do software Maxima e com os parâmetros do Exemplo 2.

4.3 Exemplo 3

Para esta dinâmica foram escolhidos os parâmetros $a = 0,3$, $b = 0,1$, $d = 0,1$, $t_0 = 0$, $t_f = 100$ e $h = 0,2$. Ao aumentar o valor do coeficiente a, em comparação às situações anteriores, considera-se que as presas possuem maior capacidade de evitar o ataque dos predadores e além disso, o parâmetro b também aumentado indica que menos presas estão disponíveis para os predadores.

Neste exemplo, as simulações numéricas indicam que as populações rapidamente se estabilizam tornando-se constantes, conforme pode ser observado na Figura 11, gráficos (a) e (b). Assim, no plano de fase há uma espiral convergindo rapidamente para o ponto de estabilidade das populações, Figura 11 (c). Para esta situação os métodos apresentaram praticamente o mesmo desempenho.

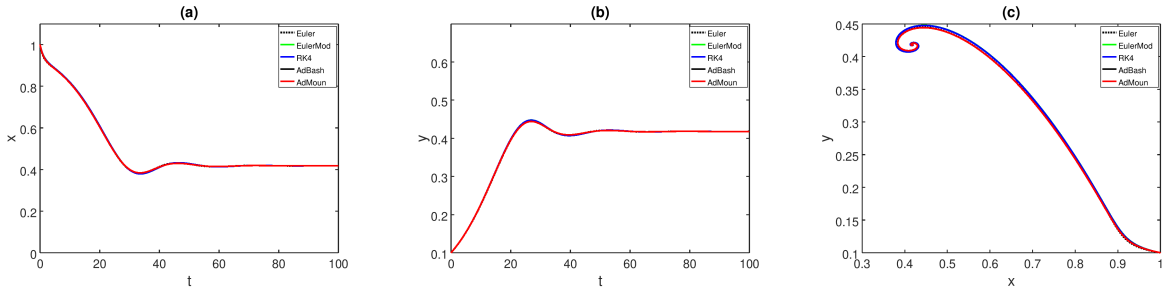

Figura 11: Populações de presa e predador, gráficos (a) e (b) respectivamente; em (c) tem-se o plano de fase da dinâmica.

Portanto, no primeiro exemplo as populações oscilaram em um ciclo limite, no segundo exemplo as populações oscilaram e decaíram lentamente para o ponto de equilíbrio, já no terceiro exemplo, houve uma convergência rápida para o ponto de equilíbrio.

5 Conclusões

Métodos numéricos distintos, para equações diferenciais ordinárias, foram aplicados no modelo do tipo presa-predador de Holling-Tanner. Simulações de três cenários distintos foram executadas, fazendo-se uso de parâmetros da literatura nos dois primeiros casos e o terceiro abrangendo uma situação criada pelos autores.

Os resultados mostraram que, dependendo da escolha dos parâmetros para o Sistema (2), a dinâmica das populações de presas e predadores têm diferentes comportamentos. No Exemplo 1 as soluções tiveram comportamento de ciclo limite para ambas as populações. No Exemplo 2, com o aumento do número de predadores, adotando $h = 0,2$ e $t_f = 100$, todos os métodos numéricos utilizados apresentaram soluções com dinâmica de uma espiral.

Ao estender t_f para 400 e posteriormente para 800, mantendo o mesmo espaçamento, a forma das soluções obtidas pelos métodos de múltiplos passos não foi alterada, isto é, permaneceu como espiral convergindo. Entretanto, as soluções numéricas implementadas via métodos de passo simples deixaram de ter comportamento de espiral e passaram a apresentar a forma de ciclo limite. Para aprofundar a pesquisa e investigar tal fato, decidiu-se pela diminuição do espaçamento h para $0,025$ e construção do plano de fase analítico do Sistema (2). Neste caso, as simulações explicitaram soluções numéricas na forma de espirais convergindo para um ponto de equilíbrio, compatíveis portanto, com o plano de fase analítico.

No Exemplo 3 foram estabelecidos parâmetros que representam um cenário onde tem-se presas com maior capacidade de evitar os predadores e menos presas disponíveis. As soluções numéricas alcançadas por todos os métodos ficaram suficientemente próximas entre si, conduzindo a uma convergência rápida para o ponto de equilíbrio.

No que diz respeito aos métodos numéricos, nota-se que apesar de uma diferença na solução numérica do método de Euler com relação aos demais, todos os métodos convergem para uma mesma solução à medida que se diminui o espaçamento h, Exemplos 1 e 2. No Exemplo 3, o espaçamento h usado inicialmente foi suficiente para que os métodos atingissem soluções aproximadas muito próximas entre si. Dessa forma, os cinco métodos numéricos apresentaram soluções satisfatórias para os exemplos propostos, referentes ao modelo presa-predador de Holling-Tanner, com a ressalva de que certos cuidados foram necessários, como no Exemplo 2, pois a depender dos parâmetros, soluções com comportamentos adversos podem surgir.

6 Referências Bibliográficas

BUCHANAN, J. L.; TURNER, P. R. **Numerical methods and analysis.** Singapore: MacGraw Hill, 1992.

CECCONELLO, M. S.; SILVA, J. D. M.; BASSANEZI, R. C. **Sistemas dinâmicos fuzzy**: modelagens alternativas para sistemas biológicos: São Carlos: SBMAC, 2012. (Notas em Matemática Aplicada; v. 50).

GARCIA, R. O.; SILVEIRA, G. P. Soluções numéricas de EDO's aplicadas no estudo de dinâmica populacional. **C.Q.D.- Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 13, p. 46-69, 2018. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/revista-cqd. Acesso em: 24 nov. 2019.

GASULL, A.; KOOIJ, R. E.; TORREGROSA, J. Limits cycles in the Holling-Tanner model. **Publicacions Matemàtiques**, v. 41, n. 1, p. 149-167, 1997.

QUARTERONI, A.; SALERI, F. **Cálculo científico com MATLAB e Octave.** Mailand: Springer-Verlag, 2017.

SILVEIRA, G. P.; GARCIA, R. O. Dinâmicas populacionais em um modelo presa-predador do tipo Holling-Tanner e suas soluções numéricas. *In*: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 6., 2019, Bauru. **Caderno de trabalhos completos e resumos** [...]. Bauru: Unesp, Faculdade de Ciências, 2019. p. 118-124. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/eventos2341/ermac-2019/caderno-de-trabalhos-e-resumos/. Acesso em: 24 nov. 2019.