

**Revista Eletrônica  
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664  
Volume 17, fev. 2020  
Edição Ermac

**Isidoro Rays Filho**

UNESP - Universidade Estadual  
Paulista “Júlio de Mesquita Filho”  
isidorofilhos@hotmail.com

**Amanda Silvieri Leite de Oliveira**

UNESP - Universidade Estadual  
Paulista “Júlio de Mesquita Filho”  
amandasilvieri@hotmail.com

**Fabiano Borges da Silva**

UNESP - Universidade Estadual  
Paulista “Júlio de Mesquita Filho”  
fabiano.borges@unesp.br

## **Uma introdução ao movimento browniano e as equações diferenciais estocásticas**

An introduction to Brownian motion and stochastic differential equations

### **Resumo**

Neste trabalho mostramos que o movimento browniano, também conhecido como processo estocástico de Wiener, é um processo de Markov, um martingale e usamos o passeio aleatório para explicar a propriedade gaussiana de suas trajetórias. Por fim, apresentamos a integração estocástica de Itô, as equações diferenciais estocásticas e algumas aplicações.

**Palavras-chave:** Movimento browniano. Processos de Markov. Martingale. Equações diferenciais estocásticas.

### **Abstract**

In this paper we show that Brownian motion, also known as Wiener stochastic process, is a Markov process, a martingale and we use the random walk to explain the Gaussian property of its trajectories. Finally, we present the stochastic integration of Itô, the stochastic differential equations and some applications.

**Keywords:** Brownian motion. Markov process. Martingale. Stochastic differential equations.

# 1 Introdução

Este artigo tem como objetivo principal introduzir as propriedades básicas do processo estocástico conhecido como movimento browniano e as equações diferenciais estocásticas (EDE), buscando um formato didático para leitores não familiarizados com o cálculo estocástico. Além disso, trata-se de uma extensão do trabalho apresentado no Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional (RAYS FILHO; SILVA, 2019), cujo estudo foi realizado no período de Iniciação Científica pelos dois primeiros autores.

Em 1828 o botânico Robert Brown descreveu o movimento de uma partícula de pólen suspensa em um fluido como sendo um movimento irregular e aleatório. Mais tarde, em 1905, Albert Einstein argumentou que este movimento era oriundo do bombardeamento de outras partículas do fluido e interpretou o movimento numa abordagem estatística, obtendo uma equação da difusão para a função de densidade de probabilidade que descreve a dinâmica da partícula que evolui com o passar do tempo.

Este trabalho tornou-se um dos pilares para o estudo da termodinâmica através de uma abordagem estatística, como é explicado em Renn (2005). Em 1900, Louis Bachelier utilizou o movimento browniano como modelo para interpretar as frequentes alterações nos valores das ações e desenvolveu a “teoria matemática da especulação”. Mas foi só em 1931 que Norbert Wiener apresentou uma fundamentação matemática que pudesse interpretar o movimento browniano como um processo estocástico, o qual passou a ser também chamado de processo de Wiener.

Este processo estocástico contínuo, que ao longo do texto chamaremos apenas de movimento browniano, tem a propriedade de Markov, é um martingale e possui distribuição gaussiana, como será discutido neste trabalho. Estas propriedades explicam a sua relevância em diversas aplicações nas áreas de engenharia, economia e biologia, como pode ser visto, entre outros, em Allen (2010), Evans (2012), Klebaner (2005), Oksendal (1998) e Ruffino (2009).

Em geral, esta abordagem probabilística é inserida em modelos matemáticos que descrevem a realização de um fenômeno (na natureza, numa fábrica, no mercado financeiro, etc) que evolui com o tempo, e no qual se deseja considerar uma perturbação aleatória. Dentre estes modelos, destacam-se as equações diferenciais estocásticas (EDE)

$$dx_t = f(x_t)dt + g(x_t)dB_t,$$

que podemos interpretar, a grosso modo, como uma equação diferencial ordinária (EDO),  $\dot{x}_t = f(x_t)$  acrescida de mais uma parte aleatória representada por  $g(x_t)dB_t$ . Uma EDE, apesar de ser escrita na forma diferencial, na verdade trata-se de uma equação integral, fundamentada na integração estocástica de Itô. É importante destacar que uma trajetória do movimento browniano não é diferenciável em nenhum ponto, logo não faz sentido o termo  $dB_t$  como uma derivada da trajetória realizada por  $B_t$ .

Neste trabalho primeiramente usamos o passeio aleatório (random walk) num reticulado e o Teorema Central do Limite para justificar que o movimento browniano possui uma distribuição gaussiana em cada tempo  $t \geq 0$ . Posteriormente, mostramos que o movimento browniano é um processo de Markov e um martingale. Além disso, introduzimos a integral estocástica de Itô, as equações diferenciais estocásticas (EDE) e apresentamos alguns exemplos de como as EDE podem modelar problemas de engenharia, biologia e finanças.

Por fim, em nossas considerações finais, mencionamos alguns livros e artigos recentes na área de sistemas dinâmicos estocásticos que podem auxiliar o leitor interessado em continuar seus estudos nesta área de pesquisa.

## 2 Movimento browniano: propriedade de Markov e martingale

Antes de definir o processo estocástico conhecido como movimento browniano e denotado por  $B_t$ , daremos algumas definições básicas de Probabilidade e Processos Estocásticos que podem ser vistas, por exemplo, no livro Brzezniak, Z; Zastawniak T. (1999).

Seja  $\Omega$  um conjunto não vazio. Uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  é uma família de subconjuntos em  $\Omega$  onde são válidas as seguintes condições:

- $\emptyset \in \mathcal{F}$ ;
- Se  $A \in \mathcal{F}$  então  $A^c \in \mathcal{F}$ ;
- Se  $A_1, A_2, \dots$  é uma sequência de conjuntos em  $\mathcal{F}$  então  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \in \mathcal{F}$ .

Uma probabilidade mensurável  $\mathbb{P}$  é uma função  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  em que são válidas:

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ;
- Se  $A_1, A_2, \dots$  são conjuntos disjuntos em pares, isto é,  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ , que pertencem a  $\mathcal{F}$  então  $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots$ .

A tripla  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  é chamada de espaço de probabilidade e os conjuntos que pertencem a  $\mathcal{F}$  são chamados de eventos.

Se  $\mathcal{F}$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $\Omega$ , então a função  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ser mensurável em  $\mathcal{F}$  se

$$\{\xi \in B\} = \{w \in \Omega : \xi(w) \in B\} \in \mathcal{F}$$

para todo boreliano  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  (menor  $\sigma$ -álgebra contendo todos abertos e fechados da reta). Se  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  é um espaço de probabilidade, então  $\xi$  é chamada de variável aleatória. A  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  consiste de todos os conjuntos  $\{\xi \in B\}$ , onde  $B$  são borelianos em  $\mathbb{R}$ . A  $\sigma$ -álgebra  $\sigma\{\xi_i : i \in I\}$  gerada pela família  $\{\xi_i : i \in I\}$  de variáveis aleatórias é definida como a menor  $\sigma$ -álgebra contendo todos os eventos da forma  $\{\xi_i \in B\}$ .

Uma variável aleatória  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ser integrável se

$$\int_{\Omega} |\xi| d\mathbb{P} < \infty.$$

Logo

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{\Omega} \xi d\mathbb{P}$$

existe e é chamada de esperança ou valor esperado de  $\xi$ .

Da mesma forma,  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ser quadrada integrável se

$$\int_{\Omega} |\xi|^2 d\mathbb{P} < \infty.$$

Então a variância de  $\xi$  pode ser definida como

$$Var(\xi) = \int_{\Omega} [\xi - \mathbb{E}(\xi)]^2 d\mathbb{P},$$

ou ainda,

$$Var(\xi) = \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}[\xi])^2] = \mathbb{E}[\xi^2] - (\mathbb{E}[\xi])^2.$$

A variância pode ser compreendida como uma medida de dispersão que nos permitem reconhecer quanto os dados estão dispersos ao redor da média.

Seja  $\xi$  uma variável aleatória integrável com o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  e seja  $\mathcal{G}$  uma  $\sigma$ -álgebra contida em  $\mathcal{F}$ . Então a esperança condicional de  $\xi$  dado  $\mathcal{G}$  é definida como uma variável aleatória  $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})$  tal que

- $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})$  é mensurável em  $\mathcal{G}$ ;
- $\int_A \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})d\mathbb{P} = \int_A \xi d\mathbb{P}, \quad \forall A \in \mathcal{G}$ .

A esperança condicional tem as seguintes propriedades:

1.  $\mathbb{E}(a\xi + b\vartheta|\mathcal{G}) = a\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}) + b\mathbb{E}(\vartheta|\mathcal{G})$ ;
2.  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})) = \mathbb{E}(\xi)$ ;
3.  $\mathbb{E}(\xi\vartheta|\mathcal{G}) = \xi\mathbb{E}(\vartheta|\mathcal{G})$  se  $\xi$  é mensurável em  $\mathcal{G}$ ;
4.  $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\xi)$  se  $\xi$  é independente de  $\mathcal{G}$ .

As demonstrações destas propriedades podem ser vista em Brzezniak, Z; Zastawniak T. (1999, p.29).

Considere as variáveis aleatórias  $X, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  e seja  $\sigma\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$  a notação para a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ . A esperança condicional de  $X$  dado  $\sigma\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$  é denotada por  $\mathbb{E}(X|Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ , ou seja,

$$\mathbb{E}(X|Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = \mathbb{E}(X|\sigma\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}).$$

Também usamos a notação  $\mathbb{E}(X|Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_n = y_n)$  para denotar

$$\mathbb{E}(X|Y_1, Y_2, \dots, Y_n)|_{Y_1=y_1, Y_2=y_2, \dots, Y_n=y_n}.$$

A probabilidade condicional de um evento  $A$  dado pela  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{G}$  é definida por

$$\mathbb{P}(A|\mathcal{G}) = \mathbb{E}[1_A|\mathcal{G}],$$

onde  $1_A$  é a função característica de  $A$ , isto é,

$$1_A = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A; \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Em particular temos,

$$\mathbb{P}(X \leq x|Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = \mathbb{E}\{1_{X \leq x}|Y_1, Y_2, \dots, Y_n\},$$

$$\mathbb{P}(X \leq x|Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_n = y_n) = \mathbb{E}\{1_{X \leq x}|Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_n = y_n\}.$$

Um processo estocástico contínuo indexado no parâmetro tempo  $t$  é uma família de variáveis aleatórias  $X_t : \Omega \rightarrow E$ , definidas num determinado espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , com o tempo  $t \in [0, +\infty)$ , e o espaço de estados  $E$  podendo ser um intervalo da reta real da forma  $(-\infty, +\infty)$ ,  $[0, +\infty)$  ou  $[0, \alpha]$  ( $\alpha > 0$ ). Para cada  $\omega \in \Omega$ , temos uma trajetória que é o gráfico da função  $X(\omega) : [0, +\infty) \rightarrow E$ . Dada uma variável aleatória contínua  $X_t$ , existe uma função de densidade  $\rho(x, t)$  que está associada, via integração, a medida de probabilidade  $\mathbb{P}$  (distribuição desta coleção de



partícula se movimentar para baixo, e 1 quando se movimentar para cima, em cada tempo  $k\Delta t$ , e considere  $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ .

Temos que a posição da partícula na parte vertical  $X_{n\Delta t}$  (ou simplesmente  $X_t$ ) é a soma de todas as variáveis  $Y_k$ , com  $k = 1, 2, \dots, n$ , assumidas pela partícula, multiplicadas pelo deslocamento  $\Delta x$ . Assim,

$$X_t = \left( \sum_{k=1}^n Y_k \right) \Delta x = S_n \Delta x.$$

Impondo ao nosso modelo  $(\Delta x)^2 = \Delta t$ , segue que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(a \leq X_t \leq b) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{a}{\sqrt{t}} \leq \frac{S_n \Delta x}{\sqrt{t}} \leq \frac{b}{\sqrt{t}}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{a}{\sqrt{t}} \leq \frac{S_n \sqrt{\Delta t}}{\sqrt{t}} \leq \frac{b}{\sqrt{t}}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{a}{\sqrt{t}} \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{b}{\sqrt{t}}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^{\frac{b}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (3)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^b e^{-\frac{u^2}{2t}} du. \quad (4)$$

De (2) para (3) utilizamos o Teorema Central do Limite pelo fato de  $S_n$  ser definida como a soma de  $n$  variáveis aleatórias de mesma média (igual a 0) e de mesma variância (igual a 1), para  $n$  suficientemente grande. O teorema estabelece que nestas condições  $S_n$  pode ser aproximada por uma normal  $N(0, n)$ . Pela propriedade da distribuição normal, temos que se multiplicarmos uma normal  $N(\mu, \sigma^2)$  por uma constante  $k$ , resulta em uma normal  $N(k \times \mu, k^2 \times \sigma^2)$ . Logo, por essa propriedade, temos que  $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$  continua sendo uma normal, mas com distribuição  $N(0, \frac{n}{n}) = N(0, 1)$ , para  $n$  suficientemente grande. E fazendo a substituição  $u = x\sqrt{t}$  em (3), obtemos novamente uma distribuição normal  $N(0, t)$  em (4).

**Definição 1** Formalmente, um processo estocástico  $B_t : \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  é um movimento browniano se

1. Possui trajetórias contínuas e inicializadas na origem:  $B_0(\omega) = 0$ , para quase todo  $\omega \in \Omega$ ;
2. Os incrementos  $B_t - B_s$  tem distribuição normal com média zero e variância  $t - s$  para  $0 \leq s \leq t$ , que denotamos por  $N(0, t - s)$ ;
3. Os incrementos  $B_v - B_u$  e  $B_t - B_s$  são independentes em intervalos de tempo disjuntos  $0 \leq s \leq t \leq u \leq v$ .

Logo, como o movimento browniano assume uma normal  $N(0, t)$ , temos que a esperança  $\mathbb{E}(B_t) = 0$  e ainda, como a variância  $Var(B_t) = t$ , obtemos que

$$\mathbb{E}(B_t^2) = t,$$

pois

$$t = Var(B_t) = \mathbb{E}(B_t^2) - [\mathbb{E}(B_t)]^2 = \mathbb{E}(B_t^2) - 0 = \mathbb{E}(B_t^2).$$

A independência entre os incrementos de  $B_t$  garante que temos um processo de Markov, isto é, a distribuição condicional de  $B_{t+s}$  dado que  $B_s = x$ , não depende dos valores passados do processo mas, sim, do valor presente  $x$ . De fato, tomando uma partição arbitrária  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$  e  $x \in \mathbb{R}$  temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_t \leq x | B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n}) &= \mathbb{P}((B_t - B_{t_n}) + B_{t_n} \leq x | B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n}) \\ &= \mathbb{P}((B_t - B_{t_n}) + B_{t_n} \leq x | B_{t_n}) \\ &= \mathbb{P}(B_t \leq x | B_{t_n}). \end{aligned}$$

Sabemos que o movimento browniano  $B_t$  tem distribuição  $N(0, t)$  e portanto, para  $t > 0$  e  $a \leq b$ ,

$$\mathbb{P}(a \leq B_t \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2t}} dx.$$

Considerando agora os tempos  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  e os números reais  $a_i \leq b_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ , distribuídos de acordo com a Figura 2, podemos determinar qual é a probabilidade de uma trajetória de  $B_t$  passar entre os valores  $a_i$  e  $b_i$  no tempo  $t_i$  para cada  $i = 1, \dots, n$ .

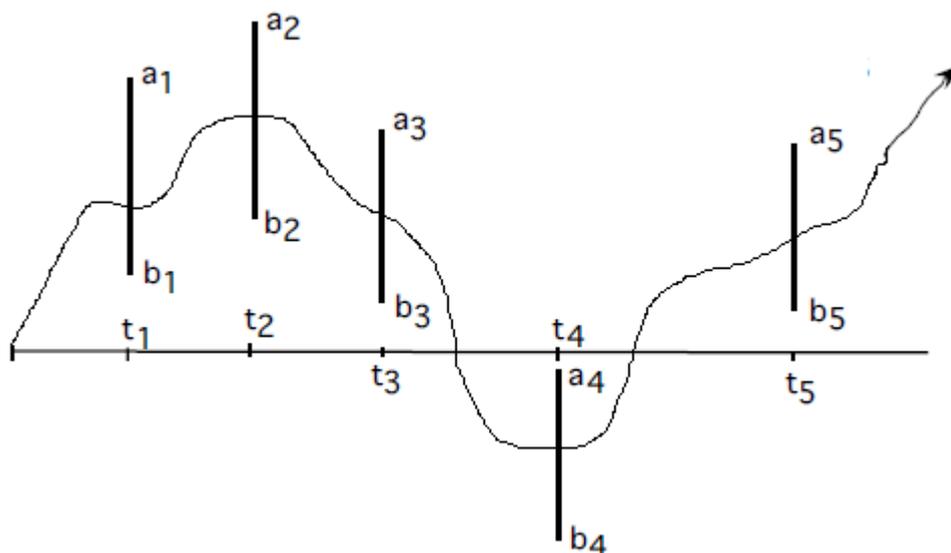


Figura 2: Possível trajetória do movimento

Para isso, notemos que

$$P(a_1 \leq B_{t_1} \leq b_1) = \int_{a_1}^{b_1} \frac{e^{-\frac{(x_1)^2}{2t_1}}}{\sqrt{2\pi t_1}} dx_1,$$

e admitindo  $B_{t_1} = x_1$ , para  $a_1 \leq x_1 \leq b_1$  e considerando que o processo que “seguirá” tem distribuição  $N(x_1, t_2 - t_1)$  no intervalo  $[t_1, t_2]$ , temos que a probabilidade de  $a_2 \leq B_{t_2} \leq b_2$ , dado que  $B_{t_1} = x_1$ , corresponde a equação

$$\int_{a_2}^{b_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} e^{-\frac{|x_2 - x_1|^2}{2(t_2 - t_1)}} dx_2.$$

Logo,

$$\mathbb{P}(a_1 \leq B_{t_1} \leq b_1, a_2 \leq B_{t_2} \leq b_2) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} g(x_1, t_1|0)g(x_2, t_2 - t_1|x_1)dx_2dx_1,$$

em que

$$g(x, t|y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}.$$

Em geral, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a_1 \leq B_{t_1} \leq b_1, \dots, a_n \leq B_{t_n} \leq b_n) = \\ = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} g(x_1, t_1|0)g(x_2, t_2 - t_1|x_1) \dots g(x_n, t_n - t_{n-1}|x_{n-1})dx_n \dots dx_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Para ilustrar como a equação (5) pode ser aplicada, segue um exemplo para o qual utilizamos ferramentas computacionais para auxiliar na resolução da integral.

**Exemplo 1** Qual a probabilidade que uma trajetória de  $B_t$  passe entre os intervalos  $[0.5, 1.5]$  em  $t_1 = 1$  e  $[1.2, 1.6]$  em  $t_2 = 2$ ?

Para resolvermos esta questão, tomaremos na Figura 2,  $a_1 = 0.5$ ,  $b_1 = 1.5$ ,  $a_2 = 1.2$ ,  $b_2 = 1.6$  e utilizaremos a expressão (5) para duas variáveis. Temos então que a probabilidade é dada por

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} g(x_1, t_1|0)g(x_2, t_2 - t_1|x_1)dx_2dx_1 &= \int_{0.5}^{1.5} \int_{1.2}^{1.6} g(x_1, 1|0)g(x_2, 2 - 1|x_1)dx_2dx_1 \\ &= \int_{0.5}^{1.5} \int_{1.2}^{1.6} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 1}}e^{-\frac{(x_1-0)^2}{2 \cdot 1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 1}}e^{-\frac{(x_2-x_1)^2}{2 \cdot 1}} dx_2dx_1 \\ &= \int_{0.5}^{1.5} \int_{1.2}^{1.6} \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x_1)^2}{2}}e^{-\frac{(x_2-x_1)^2}{2}} dx_2dx_1 \\ &= \int_{0.5}^{1.5} \int_{1.2}^{1.6} \frac{e^{-(x_1)^2}e^{-\frac{(x_2)^2}{2}}e^{x_2x_1}}{2\pi} dx_2dx_1 \\ &= 0.0331869. \end{aligned}$$

Podemos estender a equação (5) de acordo com o seguinte teorema, cuja demonstração pode ser vista em Evans (2012, p.39-40).

**Teorema 2** Seja  $B_t$  um movimento browniano uni-dimensional. Então, para todo  $n$  inteiro positivo, para todo tempo  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  e para cada função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})] &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n)g(x_1, t_1|0)g(x_2, t_2 - t_1|x_1) \\ &\quad \dots g(x_n, t_n - t_{n-1}|x_{n-1})dx_n \dots dx_1. \end{aligned}$$

Quando  $f(x_1, \dots, x_n) = \chi_{[a_1, b_1]}(x_1), \dots, \chi_{[a_n, b_n]}(x_n)$ , temos (5). Aqui  $\chi_{[a_i, b_i]}(x_i)$  é definido como

$$\chi_{[a_i, b_i]}(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_i \in [a_i, b_i] \\ 0, & \text{se } x_i \notin [a_i, b_i], \end{cases}$$

para  $i = 1, \dots, n$ .

Com o auxílio deste teorema, mostraremos que

$$\mathbb{E}(B_s B_t) = t \wedge s = \min\{s, t\}, \quad \forall t \geq 0, s \geq 0.$$

De fato, tomando  $0 \leq s \leq t$  e  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ , temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}f(B_s B_t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 g(x_1, s|0) g(x_1, t-s|x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 g(x_1, s|0) \left( \int_{-\infty}^{\infty} x_2 g(x_1, t-s|x_2) dx_2 \right) dx_1 \end{aligned} \quad (6)$$

Resolvendo  $\int_{-\infty}^{\infty} x_2 g(x_1, t-s|x_2) dx_2$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x_2 g(x_1, t-s|x_2) dx_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(x_1-x_2)^2}{2(t-s)}} dx_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1+u) e^{-\frac{u^2}{2(t-s)}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} x_1 e^{-\frac{u^2}{2(t-s)}} du + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u e^{-\frac{u^2}{2(t-s)}} du}_{=0} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \left( x_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2(t-s)}} du \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( x_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(t-s)}} e^{-\frac{u^2}{2(t-s)}} du \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( x_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x_1 \sqrt{2\pi} \\ &= x_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Em (7) e (8) consideramos  $x_2 = x_1 + u$  e  $z = \frac{u}{\sqrt{t-s}}$ .

Agora, voltando em (6) temos:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} x_1 g(x_1, s|0) \left( \int_{-\infty}^{\infty} x_2 g(x_1, t-s|x_2) dx_2 \right) dx_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 g(x_1, s|0) dx_1 \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 e^{-\frac{x_1^2}{2s}} dx_1 \tag{9} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \left( -x_1 s e^{-\frac{x_1^2}{2s}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + s \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_1^2}{2s}} dx_1 \right) \\
 &= \frac{s}{\sqrt{2\pi s}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_1^2}{2s}} dx_1 \\
 &= \frac{s}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_1^2}{2s}} dx_1 \\
 &= \frac{s}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{x_1^2}{2s}} dx_1 \\
 &= \frac{s}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{u^2}{2}} \sqrt{s} du \tag{10} \\
 &= \frac{s}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
 &= \frac{s}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} \\
 &= s.
 \end{aligned}$$

Em (9) usamos o método de integral por partes e em (10) consideramos a mudança de variável  $u = \frac{x_1}{\sqrt{s}}$ . Logo, temos que para arbitrários  $s, t \geq 0$ ,  $\mathbb{E}f(B_s B_t) = t \wedge s = \min\{s, t\}$ .

O resultado anterior pode ser mostrado ainda da seguinte forma alternativa. Considere  $0 \leq s \leq t$ , então

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(B_t B_s) &= \mathbb{E}((B_t)B_s) \\
 &= \mathbb{E}((B_t - B_s + B_s)B_s) \\
 &= \mathbb{E}([B_t - B_s] + B_s)B_s \\
 &= \mathbb{E}((B_t - B_s)B_s + B_s^2) \\
 &= \mathbb{E}((B_t - B_s)B_s) + \mathbb{E}(B_s^2) \tag{11} \\
 &= \mathbb{E}((B_t - B_s)B_s) + s \tag{12} \\
 &= s. \tag{13}
 \end{aligned}$$

De (11) para (12) utilizamos que  $\mathbb{E}(B_s^2) = s$ . Em (12) usamos que  $(B_t - B_s)$  e  $B_s$  são independentes e portanto

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s)B_s] = \mathbb{E}(B_t - B_s)\mathbb{E}(B_s) = 0.$$

Uma família  $\mathbb{F}_t$  de  $\sigma$ -álgebras em  $\Omega$  parametrizadas pelo tempo  $t \geq 0$ , é chamada de filtração se  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$  para todo  $s < t$ . Um exemplo de filtração é a gerada por um determinado processo estocástico  $X_t$ , denotada por  $\sigma(X_u : 0 \leq u \leq t)$ , que corresponde a informação obtida sobre o processo até o tempo  $t$ .

**Definição 3** Dizemos que um processo  $X_t$  ( $t \geq 0$ ) é um martingale com relação a filtração  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_u : 0 \leq u \leq t)$  se a esperança condicional

$$\mathbb{E}(X_{t+s}|\mathcal{F}_t) = X_t, \text{ quase sempre.}$$

Esta propriedade significa que se conhecemos os valores do processo até o tempo  $t$  e  $X_t = x$ , então o valor esperado do processo no tempo futuro é  $x$ .

**Proposição 4** Seja  $B_t$  o movimento browniano e considere a filtração  $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ . Então

- (1)  $B_t$  é um martingale;
- (2)  $B_t^2 - t$  é um martingale.

*Demonstração.*

(1) Como  $B_t$  é mensurável em  $\mathcal{F}_t$ , segue pela propriedade de esperança condicional que  $\mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_t) = B_t$ , e sendo  $B_{t+s} - B_t$  independente de  $\mathcal{F}_t$  segue que  $\mathbb{E}(B_{t+s} - B_t|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(B_{t+s} - B_t)$ . Assim sendo, temos que

$$\mathbb{E}(B_{t+s}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(B_{t+s} - B_t + B_t|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(B_{t+s} - B_t|\mathcal{F}_t) + \mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_t) = B_t.$$

(2) Usaremos para provar este item, que sendo  $(B_{t+s} - B_t)$  independente de  $\mathcal{F}_t$  e  $g$  uma função contínua, então  $g[B_{t+s} - B_t]$  também é independente de  $\mathcal{F}_t$ , ou seja,

$$\mathbb{E}(g[B_{t+s} - B_t]|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(g[B_{t+s} - B_t]). \quad (14)$$

Primeiramente, notemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_{t+s}^2|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}[(B_t + B_{t+s} - B_t)^2|\mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[B_t^2 + 2B_t(B_{t+s} - B_t) + (B_{t+s} - B_t)^2|\mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[B_t^2|\mathcal{F}_t] + \mathbb{E}[2B_t(B_{t+s} - B_t)|\mathcal{F}_t] + \mathbb{E}[(B_{t+s} - B_t)^2|\mathcal{F}_t]. \end{aligned}$$

E tais esperanças podem ser calculadas da seguinte forma:

- (a)  $\mathbb{E}[B_t^2|\mathcal{F}_t] = B_t^2$ , pois temos a informação até o tempo  $t$ , e sendo  $B_t$  mensurável em  $\mathcal{F}_t$ , sabemos quais valores de  $B_t$  tem ocorrido. Ou seja estamos tomando  $g(x) = x^2$  em (14).
- (b) Da independência de  $(B_{t+s} - B_t)$  com relação a  $\mathcal{F}_t$  e do fato que  $B_t$  é mensurável em  $\mathcal{F}_t$ , segue que

$$\begin{aligned} 2\mathbb{E}[B_t(B_{t+s} - B_t)|\mathcal{F}_t] &= B_t\mathbb{E}[B_{t+s} - B_t|\mathcal{F}_t] \\ &= B_t\mathbb{E}(B_{t+s} - B_t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

- (c) Usando  $g(x) = x^2$  em (14), e o fato que o incremento  $B_{t+s} - B_t$  tem distribuição  $N(0, s)$ ,

$$\mathbb{E}[(B_{t+s} - B_t)^2|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[(B_{t+s} - B_t)^2] = s.$$

De (a), (b) e (c), temos que

$$\mathbb{E}[B_{t+s}^2 | \mathcal{F}_t] = B_t^2 + s.$$

Logo,

$$\mathbb{E}[B_{t+s}^2 | \mathcal{F}_t] - (t + s) = B_t^2 - t,$$

e assim,

$$\mathbb{E}[B_{t+s}^2 - (t + s) | \mathcal{F}_t] = B_t^2 - t.$$

Portanto, o processo  $X_t = B_t^2 - t$  é um martingale, uma vez que

$$\mathbb{E}[X_{t+s} | \mathcal{F}_t] = X_t.$$

□

## 2.1 Movimento browniano no $\mathbb{R}^n$

Um processo estocástico  $\mathbf{B}(\cdot) = (B^1(\cdot), \dots, B^n(\cdot))$  com valores no  $\mathbb{R}^n$ , é um processo de Wiener (ou um movimento browniano)  $n$ -dimensional se

- (a) para cada  $k = 1, \dots, n$ ,  $B^k(\cdot)$  é um processo de Wiener unidimensional;
- (b) as  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{B}^k := \mathcal{U}(B^k(t) | t \geq 0)$  são independentes,  $k = 1, \dots, n$ .

Pelos argumentos acima, podemos construir um espaço de probabilidade, e neste  $n$  processos de Wiener unidimensionais independentes  $B^k(\cdot)$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Então  $\mathbf{B}(\cdot) = (B^1(\cdot), \dots, B^n(\cdot))$  é um movimento browniano  $n$ -dimensional. Em outras palavras, dizemos que  $\mathbf{B}_t = (B_t^1, \dots, B_t^n)$  é um processo de Wiener  $n$ -dimensional se  $B_t^1, \dots, B_t^n$  são processos de Wiener independentes. Desse modo, são válidas as seguintes propriedades:

- (i)  $\mathbb{E}(B_t^k B_s^l) = (t \wedge s) \lambda_{kl}$ , ( $k, l = 1, \dots, n$ ),
- (ii)  $\mathbb{E}((B_t^k - B_s^k)(B_t^l - B_s^l)) = (t - s) \lambda_{kl}$ , ( $k, l = 1, \dots, n$ ;  $t \geq s \geq 0$ ),

em que,

$$\lambda_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{se } k = l \\ 0, & \text{se } k \neq l. \end{cases}$$

De fato, no item (i), se  $k \neq l$ , então

$$\mathbb{E}(B_t^k B_s^l) = \mathbb{E}(B_t^k) \mathbb{E}(B_s^l) = 0,$$

por independência. Ainda em (i), se  $k = l$ , então para o movimento browniano  $B_t^k$ , temos que  $\mathbb{E}(B_t^k B_s^k) = t \wedge s$ , como mencionado anteriormente.

Agora, no item (ii), se  $k \neq l$ , então

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((B_t^k - B_s^k)(B_t^l - B_s^l)) &= \mathbb{E}((B_t^k B_t^l - B_t^k B_s^l - B_t^l B_s^k + B_s^k B_s^l)) \\ &= \mathbb{E}(B_t^k B_t^l) - \mathbb{E}(B_t^k B_s^l) - \mathbb{E}(B_s^k B_t^l) + \mathbb{E}(B_s^k B_s^l) \\ &= 0. \end{aligned}$$

E se  $k = l$ , então

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((B_t^k - B_s^k)(B_t^l - B_s^l)) &= \mathbb{E}((B_t^k - B_s^k)^2) \\ &= \mathbb{E}((B_t^k)^2 - 2B_t^k B_s^k + (B_s^k)^2) \\ &= \mathbb{E}((B_t^k)^2) - 2 \underbrace{\mathbb{E}(B_s^k B_t^k)}_{=s \wedge t} + \mathbb{E}((B_s^k)^2) \\ &= t - 2s + s \\ &= t - s.\end{aligned}$$

### 3 Integral estocástica e a Fórmula de Itô

Sendo  $X_t$  o número de bactérias ou montante no tempo  $t$ , considere a seguinte EDO

$$\frac{dX_t}{dt} = a(t)X_t,$$

que é utilizada, por exemplo, para modelar o crescimento de bactérias ou crescimento de um capital à capitalização contínua. Ao considerarmos  $a(t)$  sem uma aleatoriedade, não consideramos alguns ruídos aleatórios que ocorrem em nosso sistema, por exemplo, variações pequenas de temperatura dentre outros fatores incontroláveis, que refletem em oscilações aleatórias no crescimento de nossa população, podendo ser difícil sua mensuração.

A fim de modelarmos “corretamente ou melhor” nosso sistema, podemos introduzir uma aleatoriedade em  $a(t)$ . Logo,  $a(t) = r(t) +$  “ruído branco”, onde  $r(t)$  é uma função não aleatória. Assim sendo, a equação do crescimento da população de bactérias torna-se

$$\frac{dX_t}{dt} = (r(t) + \text{“ruído branco”})X_t = X_t r(t) + X_t \times \text{“ruído branco”}.$$

Fazendo  $b(t, X_t) = X_t r(t)$ ,  $f(t, X_t) = X_t$  e representando o “ruído branco” por  $W_t$ , temos

$$dX_t = b(t, X_t)dt + f(t, X_t)W_t dt. \quad (15)$$

Em muitas aplicações é interessante que  $W_t$  assuma, mesmo que aproximadamente, as seguintes propriedades:

- (1) Se  $t_1 \neq t_2 \Rightarrow W_{t_1}$  e  $W_{t_2}$  são independentes;
- (2)  $\{W_t\}$  seja estacionário, ou seja, a distribuição conjunta de  $\{W_{t_1+t}, \dots, W_{t_k+t}\}$  não depende do tempo  $t$ ;
- (3)  $\mathbb{E}(W_t) = 0$ .

Não há nenhum processo estocástico contínuo que satisfaça (1) e (2). Assim sendo, é usual tomarmos  $W_t dt$  como sendo  $dB_t$  na equação (15), ou seja, trabalharmos com a equação diferencial estocástica de Itô dada por

$$dX_t = b(t, X_t)dt + f(t, X_t)dB_t,$$

a qual é interpretada na forma integral por

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t f(s, X_s)dB_s.$$

A existência dessa integral pode ser obtida da seguinte forma. A primeira integral, sendo  $b$  uma função suficientemente comportada, se fixarmos o acaso ( $\omega = \omega_0$ ) a integral acima torna-se uma integral de Riemann-Stieljes (para maiores detalhes sobre essa integral consultar Klebaner (2005, p.10)). Para a segunda integral, o artifício utilizado anteriormente não é válido, pois a integral não existe como uma integral de Riemann-Stieljes, pelo fato de  $B_t$  não ser diferenciável em nenhum ponto e nem mesmo ter variação total finita (fatos que podem ser encontrados em Evans (2012, p.50-55)). Mas, podemos definir a integral  $\int_0^t f(s, X_s)dB_s$ , desde que  $f(t, X_t)$  satisfaça a seguinte condição: Seja  $f(t, X_t)$ , ou simplesmente  $f(t)$ , uma função da variável aleatória  $X_t$ , com  $t \in [a, b]$  e  $\{X_t : t \in [0, \infty)\}$  um processo estocástico, em que  $f$  satisfaça

$$\int_a^b \mathbb{E}(f^2(t))dt < \infty, \quad (16)$$

desde que a  $\mathbb{E}(f^2(t))$  exista. Logo, a integral (16) é uma integral de Riemann. Em tratamentos mais avançados de equações diferenciais estocásticas baseadas na teoria da medida,  $\mathbb{E}(f^2(t))$  é assumida como Lebesgue integrável.

**Definição 5** *Seja  $f(t)$  uma função aleatória que satisfaça (16). Tomando a partição  $a = t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} = b$ ,  $\Delta t = t_{i+1} - t_i = \frac{(b-a)}{k}$  e  $\Delta B(t_i) = B(t_{i+1}) - B(t_i)$ , onde  $B_t$  é o movimento browniano. Então, a integral estocástica de Itô é definida como*

$$\int_a^b f(t)dB_t = l.i.m.k \rightarrow \infty \sum_{i=1}^k f(t_i)\Delta B_{t_i}, \quad (17)$$

onde *l.i.m.* denota uma convergência em média quadrática. Se  $F_k = \sum_{i=1}^k f(t_i)\Delta B_{t_i}$  e  $I = \int_a^b f(t)dB_t$ , então *l.i.m.* $_{k \rightarrow \infty} F_k = I$  significa que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} [(F_k - I)^2] = 0.$$

O fato da função  $f(t)$  ter que satisfazer (16) não é evidente na definição, mas é necessário para que o limite em (17) exista.

A seguir daremos algumas propriedades da integral de Itô cuja as provas podem ser vistas em Oksendal (1998, pag. 29).

**Proposição 6** *Sejam  $f$  e  $g$  funções mensuráveis e adaptadas a informação gerada pelo movimento browniano,  $S \leq U \leq T$ ,  $c$  e  $a \in \mathbb{R}$  então*

1.  $\int_S^T f(t)dB_t = \int_S^U f(t)dB_t + \int_U^T f(t)dB_t$ ;
2.  $\int_S^T cf(t) + ag(t) dB_t = c \int_S^T f(t)dB_t + a \int_S^T g(t) dB_t$ ;
3.  $\mathbb{E}[\int_S^T f(t)dB_t] = 0$ ;
4.  $\mathbb{E} \left( \left( \int_S^T f(t)dB_t \right)^2 \right) = \mathbb{E} \left( \int_S^T f^2(t)dt \right)$ .

A propriedade 4 é conhecida como Isometria de Itô.

### 3.1 Fórmula de Itô unidimensional

Seja  $B_t$  o movimento browniano unidimensional em  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  e  $X_t$  um processo estocástico no mesmo espaço de probabilidade tal que

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, \omega) ds + \int_0^t f(s, \omega) dB_s, \quad (18)$$

que também pode ser representado na forma diferencial como

$$dX_t = b dt + f dB_t.$$

O processo  $X_t$  dado pelas integrais, é chamado processo estocástico de Itô. Considere  $g(t, x) \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$  (tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas) e o processo

$$Y_t = g(t, X_t).$$

**Teorema 7 (Fórmula de Itô)**  $Y_t$  é um processo estocástico de Itô e

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) (dX_t)^2, \quad (19)$$

onde é utilizada a regra dada por:

$$dt \times dt = dt \times dB_t = dB_t \times dt = 0,$$

e

$$(dB_t)^2 = dt.$$

A fórmula acima, a grosso modo, faz o papel da regra da cadeia para a derivada de uma composição de funções, a qual não tem o termo extra que aparece na fórmula de Itô. É possível dar uma explicação heurística e simples para este termo. De fato, considerando a fórmula de Taylor, temos

$$\begin{aligned} df(X_t) &= f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) (dX_t)^2 + \dots \\ &= f'(X_t) (F_t dt + G_t dB_t) + \frac{1}{2} f''(X_t) (F_t dt + G_t dB_t)^2 + \dots \\ &= f'(X_t) (F_t dt + G_t dB_t) + \frac{1}{2} f''(X_t) (F_t^2 dt^2 + 2F_t G_t dt dB_t + G_t^2 (dB_t)^2) + \dots \end{aligned}$$

Com relação a expressão obtida acima, apenas o primeiro termo é considerado no cálculo diferencial e integral (não estocástico), e todos os termos em que aparecem  $dt^2$  ou de ordem superior são insignificantes em comparação com  $dt$  (suficientemente pequeno). Mas acontece que  $dB_t$  “se comporta como”  $\sqrt{dt}$  de modo que o termo  $\frac{1}{2} f''(X_t) G_t^2 (dB_t)^2$  não é mais insignificante em relação a  $dt$ .

**Exemplo 2** A fim de ilustrar como (19) pode ser aplicado, consideremos  $X_t = B_t$ ,  $u(x) = x^m$ . Então  $dX_t = dB_t$  e então  $b = 0$  e  $f = 1$ .

Vamos tomar, inicialmente,  $m = 2$ , isto é,  $u(x) = x^2$ . Observe que a função  $u$  é tal que  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2.$$

Desse modo,  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , existem e são contínuas e  $Y_t = g(X_t) = u(B_t) = B_t^2$ . Logo,

$$\begin{aligned} dY_t &= \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}(X_t)dt}_{=0} + \frac{\partial u}{\partial x}(X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X_t) \underbrace{G_t^2}_{=1} dt \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X_t)dt \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(X_t) \left( \underbrace{F_t}_{=0} dt + \underbrace{G_t}_{=1} dB_t \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X_t)dt \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(X_t)dB_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X_t)dt \\ &= 2(B_t)dB_t + \frac{1}{2}2dt \\ &= 2(B_t)dB_t + dt. \end{aligned}$$

Integrando ambos os lados:

$$B_t^2 = B_0^2 + 2 \int_0^t B_s dB_s + \int_0^t dt = B_0^2 + 2 \int_0^t B_s dB_s + t. \quad (20)$$

E assim,

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{B_t^2 - t}{2}.$$

**Exemplo 3** Agora, considere  $m = 4$ , isto é,  $u(x) = x^4$ . Observe que a função  $u$  é tal que  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^2.$$

Desse modo,  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , existem e são contínuas e  $Y_t = g(X_t) = u(B_t) = B_t^4$ . Logo,

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\partial u}{\partial x}(X_t)dB_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X_t)dt \\ &= 4(B_t^3)dB_t + \frac{1}{2}12(B_t^2)dt \\ &= 4(B_t^3)dB_t + 6(B_t^2)dt. \end{aligned}$$

Integrando ambos os lados:

$$B_t^4 = B_0^4 + 4 \int_0^t B_s^3 dB_s + 6 \int_0^t B_s^2 ds. \quad (21)$$

De acordo com os processos calculados, percebemos que há uma regularidade nos processos desse tipo, dada por:

$$d(B_t^m) = mB_t^{m-1}dB_t + \frac{1}{2}m(m-1)B_t^{m-2}dt. \quad (22)$$

A equação (19) também pode ser usada para calcularmos a esperança de um processo, por exemplo, para  $B_t^2$  e  $B_t^4$  calcularemos  $\mathbb{E}[B_t^2]$  e  $\mathbb{E}[B_t^4]$ .

Para calcularmos  $\mathbb{E}[B_t^2]$  partiremos da equação (20) calculada anteriormente. Logo,

$$B_t^2 = \underbrace{B_0^2}_{=0} + 2 \int_0^t B_s dB_s + t,$$

e assim usando o item 3 da Proposição 6 temos que

$$\mathbb{E}[B_t^2] = \mathbb{E}\left(2 \int_0^t B_s dB_s\right) + \mathbb{E}[t] = t,$$

como já esperávamos.

Agora, para calcularmos  $\mathbb{E}[B_t^4]$  partiremos da equação (21) também calculada anteriormente. Sendo assim,

$$B_t^4 = \underbrace{B_0^4}_{=0} + 4 \int_0^t B_s^3 dB_s + 6 \int_0^t B_s^2 ds.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_t^4] &= \mathbb{E}\left(4 \int_0^t B_s^3 dB_s\right) + \mathbb{E}\left(6 \int_0^t B_s^2 ds\right) \\ &= 6 \int_0^t \underbrace{\mathbb{E}[B_s^2]}_{=s} ds \\ &= 6 \int_0^t s ds \\ &= 6 \left[ \frac{s^2}{2} \right]_0^t \\ &= 3t^2. \end{aligned}$$

De forma geral, podemos calcular  $\mathbb{E}(B_t^k)$  para  $k \geq 2$  utilizando a equação (22)

$$\mathbb{E}[B_t^k] = \frac{1}{2} k(k-1) \int_0^t \mathbb{E}[B_s^{k-2}] ds.$$

## 3.2 Modelagem de alguns problemas utilizando EDE

Após definirmos a integral estocástica de Itô, a fórmula de Itô e apresentarmos alguns exemplos, mostraremos a seguir modelagens utilizando EDE e a solução destas equações.

### 3.2.1 Crescimento populacional

Como vimos anteriormente, o crescimento de uma determinada população pode ser modelado por uma EDE da forma

$$dN_t = b(t, N_t) dt + f(t, N_t) dB_t,$$

em que temos que  $b(t, N_t) = N_t r(t)$  e  $f(t, N_t) = \alpha N_t$ , onde  $N_t$  representa o número de indivíduos da população no tempo  $t$  e  $\alpha$  representa a taxa relativa de crescimento no tempo  $t$ , ou seja,

$$dN_t = N_t r(t) dt + \alpha N_t dB_t,$$

ou ainda,

$$\frac{dN_t}{N_t} = r dt + \alpha dB_t.$$

Então,

$$\int_0^t \frac{dN_s}{N_s} = \int_0^t r dt + \int_0^t \alpha dB_s = rt + \alpha B_t. \quad (23)$$

Para avaliar a integral do lado esquerdo, usamos a fórmula de Itô para a função

$$g(x, t) = \ln x; \quad x > 0.$$

Assim, pela equação (19), temos que

$$\begin{aligned} d(\ln N_t) &= \frac{1}{N_t} dN_t + \frac{1}{2} \left( \frac{-1}{N_t^2} \right) (\alpha N_t)^2 dt \\ &= \frac{dN_t}{N_t} + \frac{1}{2} \left( \frac{-1}{N_t^2} \right) \alpha^2 N_t^2 dt \\ &= \frac{dN_t}{N_t} - \frac{\alpha^2}{2} dt. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{dN_t}{N_t} &= d(\ln N_t) + \frac{\alpha^2}{2} dt \\ \int_0^t \frac{dN_s}{N_s} &= \int_0^t d(\ln N_s) + \int_0^t \frac{1}{2} \alpha^2 ds \\ &= [\ln N_s]_0^t + \frac{1}{2} \alpha^2 t \\ &= \ln N_t - \ln N_0 + \frac{1}{2} \alpha^2 t \\ &= \ln \left( \frac{N_t}{N_0} \right) + \frac{1}{2} \alpha^2 t. \end{aligned} \quad (24)$$

De (23) e (24), segue que

$$\begin{aligned} rt + \alpha B_t &= \ln \left( \frac{N_t}{N_0} \right) + \frac{\alpha^2 t}{2} \\ \ln \left( \frac{N_t}{N_0} \right) &= \frac{-\alpha^2 t}{2} + rt + \alpha B_t \\ &= t \left( r - \frac{\alpha^2}{2} \right) + \alpha B_t. \end{aligned}$$

Exponenciando ambos os lados, temos que

$$\frac{N_t}{N_0} = e^{t(r-\frac{\alpha^2}{2})+\alpha B_t} \Rightarrow N_t = N_0 e^{t(r-\frac{\alpha^2}{2})+\alpha B_t}. \quad (25)$$

Parece razoável que, se o  $B_t$  for independente de  $N_0$ , devemos ter

$$\mathbb{E}[N_t] = \mathbb{E}[N_0]e^{rt}. \quad (26)$$

De fato, considerando  $Y_t = e^{\alpha B_t}$  onde  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que  $g(x) = e^{\alpha x}$  e aplicando a fórmula de Itô, temos

$$dY_t = \alpha e^{\alpha B_t} dB_t + \frac{1}{2}\alpha^2 e^{\alpha B_t} dt,$$

ou ainda,

$$Y_t = Y_0 + \alpha \int_0^t e^{\alpha B_s} dB_s + \frac{1}{2}\alpha^2 \int_0^t e^{\alpha B_s} ds.$$

Calculando a esperança de ambos os lados da igualdade acima e usando o item 3 da Proposição 6, segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_t] &= \underbrace{\mathbb{E}[Y_0]}_{1 \text{ (quase sempre)}} + \alpha \mathbb{E}\left(\int_0^t [Y_s] dB_s\right) + \frac{1}{2}\alpha^2 \int_0^t \mathbb{E}[Y_s] ds \\ &= 1 + 0 + \frac{1}{2}\alpha^2 \int_0^t \mathbb{E}[Y_s] ds. \end{aligned}$$

Com essas informações, conseguimos obter a seguinte equação diferencial ordinária (determinística):

$$\begin{cases} \mathbb{E}[Y_0] = 1, \\ \frac{d}{dt}\mathbb{E}[Y_t] = \frac{1}{2}\alpha^2\mathbb{E}[Y_t]. \end{cases}$$

Então,

$$\mathbb{E}[Y_t] = e^{\frac{1}{2}\alpha^2 t},$$

e como  $N_0$  é independente de  $B_t$ , calculando a esperança de ambos os lados da equação (25) temos:

$$\mathbb{E}[N_t] = \mathbb{E}[N_0]e^{(r-\frac{1}{2}\alpha^2)t}\underbrace{\mathbb{E}[e^{\alpha B_t}]}_{Y_t} = \mathbb{E}[N_0]e^{(r-\frac{1}{2}\alpha^2)t}e^{\frac{1}{2}\alpha^2 t} = \mathbb{E}[N_0]e^{rt-\frac{1}{2}\alpha^2 t+\frac{1}{2}\alpha^2 t} = \mathbb{E}[N_0]e^{rt}.$$

### 3.2.2 Valor de uma ação

Se  $X_t$  é o valor de uma ação no tempo  $t$ , é natural esperarmos que a taxa de crescimento seja proporcional ao seu valor, ou seja, de maneira simplista, dada uma certa oscilação na bolsa de valores  $u$ , essa oscilação afetará, de maneira absoluta, mais as ações com maior preço. Assim sendo, a taxa de crescimento pode ser modelado através de uma EDO semelhante a do crescimento de bactérias. Entretanto há alguns fatores externos que geram aleatoriedade no valor de uma determinada ação e que seria interessante levar em conta na escolha do modelo. Portanto, é bastante comum modelar o valor da ação com a equação

$$\frac{dX_t}{X_t} = udt + \sigma dB_t,$$

ou ainda, no formato das equações diferenciais estocásticas de Itô

$$dX_t = uX_t dt + \sigma X_t dB_t, \quad (27)$$

onde  $u$  é chamado de drift e  $\sigma$  de volatilidade da ação.

Utilizando o mesmo raciocínio do caso do crescimento populacional, temos que a média do valor da ação é dado por

$$\mathbb{E}(X_t) = X_0 e^{ut}, \quad t \geq 0,$$

ou seja, seu crescimento/decrescimento médio vai depender do valor do drift  $u$ .

### 3.2.3 Equação de Langevin

Esta equação é uma homenagem a Paul Langevin (1872-1946), um físico que desenvolveu uma equação que representa a velocidade de uma partícula browniana, como descreveremos a seguir. Considere uma partícula/objeto em movimento unidimensional sujeito a uma força de atrito e forças aleatórias que agem sobre ela, como pode ser observado através da análise de uma partícula browniana em movimento em um fluido (glicerina). Esta partícula tem uma certa velocidade  $X_t$  em um tempo  $t$ , e a tendência dessa partícula é de “parar”, devido a ação da força de atrito que é contrária ao movimento. Entretanto, devido ao choque das partículas do fluido com nossa partícula, temos a ação de uma força aleatória que exerce influência no movimento da partícula, logo podemos considerar a seguinte EDE

$$\frac{dX_t}{dt} = -bX_t + \sigma W_t,$$

onde  $W_t$  é o “ruído branco”,  $b > 0$  é o coeficiente de atrito,  $\sigma$  o coeficiente de difusão e  $\sigma W_t$  pode ser interpretada como uma força aleatória atuando em nossa partícula/objeto.

Ou ainda, escrevendo no formato convencional, temos a equação de Langevin

$$\begin{cases} dX_t = -bX_t dt + \sigma dB_t \\ X_{t_0} = X_0, \end{cases}$$

para alguma distribuição inicial  $X_0$  independente do movimento browniano. Para resolver esta EDE, tomemos o processo  $Y_t = X_t e^{bt}$  e assim temos

$$\begin{aligned} dY_t = d(X_t e^{bt}) &= b e^{bt} X_t dt + e^{bt} dX_t \\ &= b e^{bt} X_t dt + e^{bt} (-bX_t dt + \sigma dB_t) \\ &= b e^{bt} X_t dt - b e^{bt} X_t dt + e^{bt} \sigma dB_t \\ &= e^{bt} \sigma dB_t. \end{aligned}$$

Portanto,

$$X_t e^{bt} = X_0 + \int_0^t e^{bs} \sigma dB_s,$$

e multiplicando ambos os lados por  $e^{-bt}$ , obtemos que

$$X_t = X_0 e^{-bt} + \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)} dB_s.$$

E assim, em termos da média, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t) &= \mathbb{E}(X_0 e^{-bt} + \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)} dB_s) \\ &= \mathbb{E}(X_0 e^{-bt}) + \underbrace{\mathbb{E}\left(\int_0^t \sigma e^{-b(t-s)} dB_s\right)}_0 \\ &= e^{-bt} \mathbb{E}(X_0). \end{aligned}$$

Vamos agora determinar a variância de  $X_t$ , a qual pode ser obtida através da sua definição, isto é,  $Var(X_t) = \mathbb{E}(X_t^2) - [\mathbb{E}(X_t)]^2$ . Como temos o valor de  $\mathbb{E}(X_t)$ , basta determinarmos o valor de  $\mathbb{E}(X_t^2)$  para obtermos o valor da variância. Como  $X_0$  é independente do movimento browniano e  $(dB_t)^2 = dt$ , temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t^2) &= \mathbb{E}\left(\left[X_0 e^{-bt} + \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)} dB_s\right]^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\left(X_0 e^{-bt}\right)^2 + 2X_0 e^{-bt} \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)} dB_s + \left(\sigma \int_0^t e^{-b(t-s)} dB_s\right)^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\left(X_0 e^{-bt}\right)^2\right) + \mathbb{E}\left(2X_0 e^{-bt} \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)} dB_s\right) + \mathbb{E}\left(\left(\sigma \int_0^t e^{-b(t-s)} dB_s\right)^2\right) \\ &= e^{-2bt} \mathbb{E}(X_0^2) + 2\sigma e^{-bt} \mathbb{E}(X_0) \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{-b(t-s)} dB_s\right) + \sigma^2 \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{-2b(t-s)} ds\right) \\ &= e^{-2bt} \mathbb{E}(X_0^2) + 0 + \frac{-\sigma^2}{2b} (e^{-2bt} - 1) \\ &= e^{-2bt} \mathbb{E}(X_0^2) + \frac{\sigma^2}{2b} (1 - e^{-2bt}). \end{aligned}$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned} Var(X_t) &= e^{-2bt} \mathbb{E}(X_0^2) + \frac{\sigma^2}{2b} (1 - e^{-2bt}) - (e^{-bt} \mathbb{E}(X_0))^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{2b} (1 - e^{-2bt}) + e^{-2bt} (\mathbb{E}(X_0^2) - \mathbb{E}^2(X_0)) \\ &= \frac{\sigma^2}{2b} (1 - e^{-2bt}) + e^{-2bt} Var(X_0). \end{aligned}$$

Logo,

$$Var(X_t) = \frac{\sigma^2}{2b} (1 - e^{-2bt}) + e^{-2bt} Var(X_0),$$

assumindo que  $Var(X_0) < \infty$ .

Para uma dada condição inicial  $X_0$ , temos que para  $t \rightarrow \infty$ ,

$$\mathbb{E}(X_t) \rightarrow 0 \text{ e } V(X_t) \rightarrow \frac{\sigma^2}{2b}.$$

Portanto, para um tempo suficientemente grande, como  $X_t$  representa a velocidade da partícula, a esperança é de que a partícula “pare” (tenha velocidade zero), mesmo com a ação dos impactos aleatórios das partículas do fluido, pois como são um número muito grande de impactos e de mesma magnitude, espera-se que a influência dos mesmo se “anule”, mesmo que aproximadamente. E a variabilidade dessa velocidade, para um tempo suficientemente grande, é dada por  $\frac{\sigma^2}{2b}$ , ou seja, quanto maior for a relação entre o coeficiente de difusão  $\sigma$  e o coeficiente de atrito  $b$ , maior será a variabilidade. Portanto, para  $b$  estritamente maior que  $\sigma$ , ou seja, para fluidos com alto coeficiente de atrito a  $Var(X_t) \rightarrow 0$ .



## 4 Considerações finais

Neste artigo, procuramos apresentar algumas propriedades e noções básicas sobre o movimento browniano e as equações diferenciais estocásticas, omitindo alguns detalhes, a fim de facilitar o primeiro contato do leitor não familiarizado com o assunto. De acordo com os exemplos apresentados e discutidos neste artigo, notamos que, em geral, o movimento browniano pode ser aplicado em modelos que descrevem algum fenômeno que evolui com o tempo e sofre perturbações aleatórios, cuja distribuição de probabilidades seja gaussiana.

Vale destacar que este assunto também se estende para variedades diferenciáveis, como pode ser visto em Elworthy (1983), Emery (1990), Hsu (2002) e Kunita (1981), o que pode ser uma boa opção para os leitores familiarizados com tópicos mais avançados de matemática e interessados em continuar seus estudos com as equações diferenciais estocásticas. A pesquisa na área de sistemas dinâmicos estocásticos pode tomar diferentes direções dentro das diversas áreas da matemática, dependendo do problema em que se deseja resolver, podendo este ser de aspecto mais analítico, dinâmico, probabilístico ou até mesmo geométrico. Alguns trabalhos recentes, que exploram não apenas as propriedades dinâmicas de um determinado fluxo estocástico (solução de uma EDE), mas também as propriedades geométricas da variedade diferenciável no qual o processo está inserido, podem ser vistos, por exemplo, em Justo, C. L.; Ledesma, D. S.; Silva, F. B. (2019), Ledesma, D. S.; Silva, F. B. (2018), Gonzales-Gargate, I. I.; Ruffino, P. R. (2016) e Catuogno, P. J.; Silva, F. B.; Ruffino, P. R. (2013).

## Agradecimentos

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro através da bolsa de iniciação científica (processo n. 2017/26054-0), bolsa de mestrado (processo n. 2019/08076-2) e projeto de pesquisa regular (processo n. 2018/16568-0). Além disso, agradecem ao(à) parecerista anônimo(a) pelas sugestões.

## 5 Referências Bibliográficas

ALLEN, L. J. S. **An introduction to stochastic processes with applications to biology**. 2nd ed. Texas: CRC Press, 2010.

BRZEZNIAK, Z.; ZASTAWIAK, T. **Basic stochastic processes: a course through exercises**. London: Springer, 1999. (Undergraduate Mathematics Series).

CATUOGNO, P. J.; SILVA, F. B.; RUFFINO, P. R. Decomposition of stochastic flows in manifolds with complementary distributions. **Stochastics and Dynamics**, Nova Jersey, v. 13, n. 04, p. 1350009, 2013.

EVANS, L. C. **An introduction to stochastic differential equations**. Berkeley: American Mathematical Society, 2012.

ELWORTHY, D. **Stochastic calculus on manifolds**. New York: Cambridge University Press, 1982.



EMERY, M. **Stochastic calculus in manifolds**. Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1989

GONZALES-GARGATE, I. I.; RUFFINO, P. R. An averaging principle for diffusions in foliated spaces. **The Annals of Probability**, Shaker Heights, v. 44, n. 1, p. 567-588, 2016.

HSU, E. P. **Stochastic analysis on manifolds**. Graduate Studies in Mathematics, Providence: American Mathematical Society, 2002.

JUSTO, C. L.; LEDESMA, D. S.; SILVA, F. B. An isometric embedding of the  $g(t)$ -Brownian motion with application in stability and homotopy group. **Stochastics and Dynamics**, Nova Jersey, v. 19, n. 06, p. 1950045, 2019.

KLEBANER, F. C. **Introduction to stochastic calculus with applications**. 2nd ed. London: Imperial College Press, 2005.

KUNITA, H. On the decomposition of solutions of stochastic differential equations. *In*: Williams, D. (ed). **Stochastic Integrals**. Berlin: Springer, 1981, p. 213-255.

LEDESMA, D. S.; SILVA, F. B. A stochastic approach to the closure of accessible sets of control systems with application on homogeneous spaces. **Dynamical Systems**, Oxfordshire, v. 33, n. 3, p. 519-535, 2018.

MISTURINI, R. **Movimento browniano, integral de Itô e introdução às equações diferenciais estocásticas**. 2010. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

OKSENDAL, B. **Stochastic differential equations: an introduction with applications**. 5th ed. New York: Springer-Verlag, 1998.

RAYS FILHO, I.; SILVA, F. B. Movimento browniano: propriedades e aplicações. *In*: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 6., 2019, Bauru. **Caderno de trabalhos completos e resumos [...]**. Bauru: Unesp, Faculdade de Ciências, 2019, p. 482-483. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/eventos2341/ermac-2019/caderno-de-trabalhos-e-resumos/>. Acesso em: 10 set. 2019.

RENN, J. Einstein's invention of Brownian motion. **Annalen der Physik**. Berlim, v. 14, n. S1, p. 23-37, fev. 2005.

RUFFINO, P. R. C. **Uma iniciação aos sistemas dinâmicos estocásticos**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.