

**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 17, fev. 2020
Edição Ermac

Leticia Braga Berlandi

Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade Estadual Paulista Júlio
de Mesquita Filho
leticiaberlandi@gmail.com

Wallace Correa de Oliveira Casaca

Câmpus Experimental de Rosana
Universidade Estadual Paulista Júlio
de Mesquita Filho
wallace.casaca@unesp.br

Comparação entre diferentes métodos numéricos na solução da equação de Poisson bidimensional: Gauss-Seidel, FAS e SPH

Comparison between different numerical methods in the solution of the two-dimensional Poisson equation:
Gauss-Seidel, FAS and SPH

Resumo

O presente trabalho consiste na resolução da equação diferencial parcial elíptica de Poisson, onde foi considerada a condição de contorno do tipo Dirichlet para a obtenção da solução numérica do problema bidimensional, considerando um domínio quadrado. Na obtenção da solução numérica foram utilizados dois métodos iterativos e um método de partículas: o método de Gauss-Seidel, o método multigrid FAS (esquema de aproximação total) e o método SPH, respectivamente. Tais métodos foram implementados no software *Matlab* e os resultados obtidos foram comparados com a solução analítica disponível na literatura. Dessa forma, foi verificado se os métodos numéricos utilizados são eficientes na solução desse tipo de problema.

Palavras-chave: Métodos Numéricos e Aplicações. Método de Diferenças Finitas. Método Multigrid. Método de Partículas.

Abstract

The present work consists in solving the Poisson partial elliptical differential equation, where the Dirichlet boundary condition was considered to obtain the numerical solution of the two-dimensional problem, considering a square domain. To obtain the numerical solution, two iterative methods and one particle method were used: the Gauss-Seidel method, the multigrid method FAS (full approximation scheme) and the SPH method, respectively. These methods were implemented in the Matlab software and the results obtained were compared with the analytical solution available in the literature. Thus, it was verified if the numerical methods used are efficient in solving this type of problem.

Keywords: Numerical Methods and Applications. Finite Differences Method. Multigrid Method. Method of Particles.

1 Introdução

As equações elípticas estão relacionadas com problemas de equilíbrio, que não dependem, em geral, do tempo. “Como exemplos de equações elípticas tem-se as equações que descrevem problemas de pressão, problemas em elasticidade, problemas de camada limite, problemas de vibração em membranas e problemas de difusão” (FORTUNA, 2012). De maneira simplificada, problemas elípticos caracterizam-se pela propagação das propriedades físicas desses fenômenos em todas as direções coordenadas indistintamente, ao contrário das equações parabólicas e hiperbólicas onde essas propriedades propagam-se em direções preferenciais. Desta forma as condições de fronteira de um problema elíptico são normalmente especificadas ao longo de toda a fronteira.

Neste trabalho, o interesse está em resolver uma equação diferencial parcial elíptica com condições de contorno do tipo Dirichlet por toda a fronteira. Além disso, estuda-se dois métodos numéricos iterativos e um método de partículas na resolução do problema bidimensional. A implementação do algoritmo foi através do software *Matlab*, em que uma análise do erro, comparações entre os métodos numéricos e a solução analítica, conhecida da literatura, foram realizadas.

2 Formulação matemática

A equação de Poisson bidimensional é uma equação elíptica de segunda ordem dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y). \quad (1)$$

O domínio de integração de uma equação elíptica bidimensional é uma área limitada pela fronteira $\partial\Omega$. Em particular, considera-se neste trabalho uma região quadrada $\Omega = \{(x, y) : a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$ com condição de contorno $u(x, y) = g(x, y)$ em $\partial\Omega$.

3 Formulação numérica

Nesta seção, são apresentados os métodos numéricos para a resolução do problema. O método multigrid utilizado neste trabalho foi um esquema de aproximação total (FAS, do inglês *Full Approximation Scheme*) (ROGENSKI, 2011). Ainda, utilizou-se o método de Gauss-Seidel e o método SPH, que se trata de um método de partículas. Uma breve descrição de tais métodos segue abaixo.

3.1 Método de Gauss-Seidel

Quando se trata de solução de sistemas lineares, em certos casos, os métodos iterativos são melhores que os métodos exatos, por exemplo quando a matriz dos coeficientes é esparsa. Esses métodos também são mais eficientes, pois requerem um gasto computacional menor. Além disso, são capazes de se autocorrigirem, isto é, em geral sua convergência não depende da aproximação inicial.

Para resolver iterativamente um sistema linear da forma $Ax = b$, onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

primeiramente decompõe-se a matriz A de tal forma que

$$A = L + D + U, \quad (2)$$

em que L é a matriz triangular estritamente inferior, D é a matriz diagonal e U é a matriz triangular estritamente superior:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

A partir disso, a matriz A é decomposta na soma

$$A = M + N, \quad (3)$$

e escreve-se o sistema na forma $Mx = b - Nx$.

A matriz M é escolhida propositalmente de maneira que seja invertível facilitando a resolução do sistema. Por exemplo, M pode ser diagonal, triangular ou tridiagonal. O método iterativo, então, é definido por

$$Mx^{(k)} = b - Nx^{(k-1)}, \quad (4)$$

sendo $x^{(0)}$ uma aproximação inicial qualquer e k o número de iterações, e então $x^{(k)}$ e $x^{(k-1)}$ são vetores de n componentes avaliados na iteração k e na iteração anterior, respectivamente.

Dessa forma, o método de Gauss-Seidel considera

$$M = L + D \quad \text{e} \quad N = U.$$

Isso permite escrever

$$Ax = b \Leftrightarrow (M + N)x = b \Leftrightarrow (L + D)x = b - Ux.$$

Portanto, escrito na forma matricial o método de Gauss-Seidel consiste em

$$Dx^{(k)} = b - Lx^{(k)} - Ux^{(k-1)},$$

ou ainda,

$$(L + D)x^{(k)} = b - Ux^{(k-1)},$$

$$x^{(k)} = (L + D)^{-1}b - (L + D)^{-1}Ux^{(k-1)}. \quad (5)$$

Onde a equação (5) representa o método de Gauss-Seidel na forma matricial. E, consequentemente, na forma pontual pode ser escrito como

$$x_i^{(k)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)}}{a_{ii}}, \quad (6)$$

com $i = 1, 2, \dots, n$.

3.2 Sobre-relaxação Sucessiva (SOR)

O processo de corrigir uma equação através da modificação de uma variável é às vezes chamado de relaxamento. Antes da correção, a equação não é verdadeira; como um conjunto de partes que não se ajustam, ela está em estado de tensão. A correção de uma variável relaxa a tensão. O método de Gauss-Seidel efetua relaxamento sucessivo, ou seja, passa de equação para equação, relaxando uma depois da outra (WATKINS, 2002).

Por este motivo, o método de Gauss-Seidel também é chamado de método de relaxamento. Em muitos casos, a convergência pode ser substancialmente acelerada através de sobrelaxamento. Isso significa que ao invés de fazer uma correção para a qual a equação é satisfeita exatamente, faz-se uma correção maior. No caso mais simples, escolhe-se um fator de relaxamento $\omega > 1$ que sobrecorre por aquele fator em cada passo (se mover um passo na direção de x^k para x^{k+1} é bom, mover naquela direção $\omega > 1$ passos é melhor). Este é o chamado método de Sobre-relaxação sucessiva ou *Successive Over Relaxation* (SOR). Usando o método de Gauss-Seidel obtém-se

$$\hat{x}_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k \right).$$

Diante disso, toma-se

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \omega(\hat{x}_i^{k+1} - x_i^k).$$

Isso se resume em

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \omega \left[\frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k \right) - x_i^k \right]. \quad (7)$$

Quando $\omega = 1$, o método SOR é exatamente o método de Gauss-Seidel. Um fator $0 < \omega < 1$ (sub-relaxamento) normalmente diminui a velocidade de convergência.

Para a maioria dos problemas, o melhor valor para o fator de relaxamento é desconhecido. Para a matriz de discretização obtida a partir da fórmula de cinco pontos (expressão de discretização da equação de Poisson pelo método de diferenças finitas), é notório que o valor ótimo de ω é dado por

$$\omega = \frac{1}{1 + \text{sen}(\pi\Delta x)}. \quad (8)$$

Em forma matricial, o método SOR pode ser descrito da seguinte forma: escrevendo o algoritmo SOR como abaixo

$$a_{ii}x_i^{k+1} = a_{ii}x_i^k + \omega \left[\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k \right) - a_{ii}x_i^k \right],$$

tem-se

$$Dx^{k+1} = Dx^k + \omega[(b - Lx^{k+1} - Ux^k) - Dx^k], \quad (9)$$

ou

$$\left(\frac{1}{\omega}D + L \right) x^{k+1} = \left[\left(\frac{1-\omega}{\omega} \right) D - U \right] x^k + b,$$

ou ainda pode ser escrito como

$$x^{k+1} = \left(\frac{1}{\omega} D + L \right)^{-1} \left[\left(\frac{1-\omega}{\omega} D - U \right) x^k + b \right]. \quad (10)$$

3.3 Esquema de aproximação total (FAS)

Considere a equação de Poisson bidimensional dada por (1), em que u representa a solução do problema e f o termo fonte da equação. O sistema linear associado à discretização dessa equação em cada malha de um ciclo V, composto por quatro níveis e representado pela Figura 1, é resolvido por meio de métodos iterativos. As constantes N_1 , N_2 e N_3 representam o número de iterações aplicado em um determinado nível. Para resolver a determinada equação, utiliza-se apenas o método de Gauss-Seidel em todos os níveis de malha, onde o fator de relaxação utilizado é dado por $\omega = 1,9$.

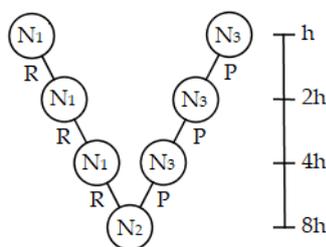


Figura 1: Esquema de aproximação total – Ciclo V.

Tendo como referência as informações apresentadas, o algoritmo associado ao esquema de aproximação total pode ser descrito da seguinte forma:

Partindo da malha mais refinada são realizadas N_1 iterações visando a solução da equação de Poisson

$$\nabla^2 u_h = f_h. \quad (11)$$

De posse do valor obtido após essas N_1 iterações, obtém-se o resíduo (s_h), por meio de:

$$s_h = f_h - \nabla^2 u_h. \quad (12)$$

A transição de valores de um nível mais refinado (h) para outro menos refinado ($2h$), é dada pela operação de restrição, em que o resíduo é transmitido por meio de uma ponderação completa (FW, do inglês *Full Weight*). A expressão abaixo exprime essa operação, a qual é ilustrada pela Figura 2.

$$s_h \Rightarrow s_{2h} \quad (FW). \quad (13)$$

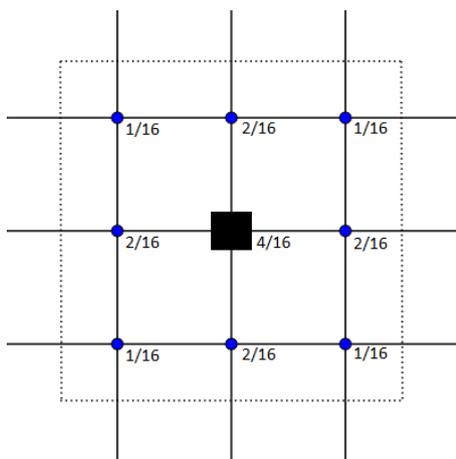


Figura 2: Operação FW.

Tendo como referência a Figura 2, observa-se que apenas o elemento identificado pelo retângulo central é transmitido, de forma ponderada, para a malha menos refinada. E, a contribuição de cada ponto é apresentada ao lado do mesmo.

Porém, faz-se também necessário transmitir os valores associados à solução intermediária para a malha mais grossa. Nestes casos, não há aplicação de nenhum tipo de ponderação e os valores são transmitidos diretamente da malha mais fina para a mais grossa. Essa operação, representada pela Figura 3, é denominada restrição por injeção direta (SI, do inglês *Straight Injection*). A expressão abaixo explicita essa operação.

$$u_h \Rightarrow u_{2h} \quad (SI). \quad (14)$$

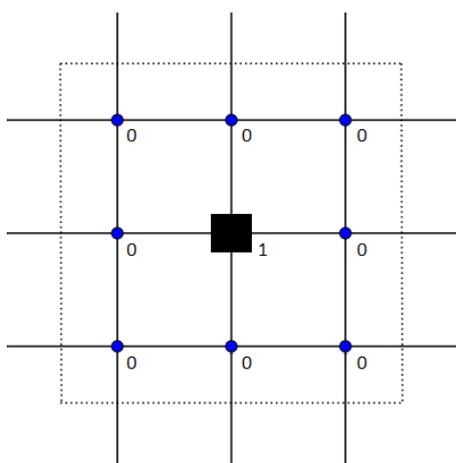


Figura 3: Operação SI.

Tomando como referência os valores transmitidos, o termo fonte é tomado como:

$$f_{2h} = s_{2h} + \nabla^2 u_{2h}. \quad (15)$$

Considerando a malha representada por $(2h)$, faz-se novamente N_1 iterações, sendo:

$$\nabla^2 u_{2h} = f_{2h}. \quad (16)$$

Neste caso, o resultado obtido leva em consideração além do erro associado a malha (h), a solução do problema de Poisson na malha ($2h$). Isso se dá uma vez que o termo fonte referente à malha ($2h$) é obtido considerando informações obtidas por meio das operações SI e FW. O valor inicial adotado, neste sentido, provém diretamente da operação SI. Estima-se o valor do resíduo s_{2h} como:

$$s_{2h} = f_{2h} - \nabla^2 u_{2h}. \quad (17)$$

Realiza-se sucessivamente os passos apresentados até que se alcance o nível menos refinado ($8h$). Nessa malha, especificamente, são realizadas N_2 iterações.

Na sequência, gera-se a correção referente à malha mais grossa, dada por:

$$corr_{8h} = u_{8h}^n - u'_{8h}, \quad (18)$$

em que u' representa a aproximação gerada por meio da operação de restrição e u^n a aproximação mais recentemente calculada. O retorno à um nível mais refinado dá-se através de uma interpolação bilinear, onde:

$$corr_{4h} \Rightarrow corr_{8h}, \quad (19)$$

$$u_{4h} \Leftarrow u_{4h} + corr_{4h}. \quad (20)$$

Finalmente, realiza-se mais N_3 iterações, aplicando-se o método de Gauss-Seidel:

$$\nabla^2 u_{4h} = f_{4h}. \quad (21)$$

O ciclo é finalizado após a aplicação da interpolação bilinear referente à malha com espaçamento ($2h$). O número de ciclos necessários para que a solução da equação seja obtida está associado ao resíduo obtido na malha mais fina. Se o valor obtido for menor do que uma dada tolerância de referência, o algoritmo é finalizado.

3.4 *Smoothed particle hydrodynamics (SPH)*

O método SPH é um método sem malha e a sua discretização se dá através de um conjunto de partículas, que também estão associadas a outras propriedades individuais relacionadas à física do fenômeno simulado como, por exemplo, temperatura, densidade e massa. Ainda, como o método é discretizado por um conjunto de partículas, as partículas da discretização não possuem conectividade entre si. Dessa forma, para obter uma solução aproximada para a equação de Poisson é preciso aproximar alguns operadores: o divergente, o gradiente e o laplaciano (CARMO, 2008). E, para determinar o padrão da aproximação e definir a dimensão do suporte de influência, a consistência e a precisão, são utilizadas funções núcleo. No presente trabalho, a função núcleo utilizada foi baseada na spline cúbica (MONAGHAN; LATTANZIO, 1985).

Para maiores detalhes sobre o método SPH, tendo se interessado pelo assunto a partir da leitura da breve descrição do método, aconselha-se que o leitor consulte o trabalho realizado por Takata, intitulado “Aspectos teórico-numéricos dos métodos SPH e MPS” (TAKATA, 2015).

4 Resultados numéricos

Problema: Considere a equação de Poisson bidimensional dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \left[(1 - 6x^2) y^2 (1 - y^2) + (1 - 6y^2) x^2 (1 - x^2) \right], \quad (22)$$

pertencente ao domínio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$ e com condição de Dirichlet $u = u(x, y)$ (a solução exata é conhecida em cada ponto de $\partial\Omega$) na fronteira (OLIVEIRA, 2010), cuja solução analítica é dada por

$$u(x, y) = (x^2 - x^4)(y^4 - y^2). \quad (23)$$

O problema descrito foi simulado para diferentes refinamentos de malha, onde as malhas utilizadas são regulares e, adota-se aqui, Δx para descrever o espaçamento. A princípio, inicia-se com uma malha mais grossa e, a partir de então, começa a refiná-la objetivando analisar o comportamento da solução numérica do problema diante dessas modificações. As malhas utilizadas foram: $\Delta x = 0,125$, $\Delta x = 0,0625$, $\Delta x = 0,03125$ e $\Delta x = 0,015625$. Neste caso, a comparação foi realizada entre os métodos de Gauss-Seidel, FAS e SPH.

Em relação aos métodos iterativos que foram testados, pode-se analisar a quantidade de iterações e o tempo de processamento que cada método realizou até convergir para a solução. Os resultados avaliados nas malhas utilizadas são mostrados nas tabelas 1 e 2.

Tabela 1: Número de iterações realizadas por cada método numérico iterativo em diferentes espaçamentos.

	Gauss-Seidel	FAS
$\Delta x = 0,125$	79	22
$\Delta x = 0,0625$	314	89
$\Delta x = 0,03125$	1252	355
$\Delta x = 0,015625$	2000	1416

Tabela 2: Tempo de execução de cada método numérico em diferentes espaçamentos (em segundos).

	Gauss-Seidel	FAS
$\Delta x = 0,125$	0,06	0,15
$\Delta x = 0,0625$	1,22	1,59
$\Delta x = 0,03125$	115,576	21,23
$\Delta x = 0,015625$	4.501,03	366,52

Observa-se nas tabelas 1 e 2 que o número de iterações realizadas pelo esquema FAS com o método multigrid foi menor. Além disso, o método atingiu uma solução aceitável com um bom tempo de processamento, o que comprova a superioridade do método para esse problema em questão.

Para melhor avaliar os resultados numéricos, é importante comparar o desempenho dos métodos no problema em questão. O erro máximo absoluto foi utilizado para realizar essa comparação, considerando uma tolerância de 10^{-6} e um número de iterações máximo igual a 2000. Sendo assim,

a Tabela 3 é composta pelos valores do erro máximo absoluto (E_{max}) em cada malha computacional utilizada, sendo

$$E_{max} = \max_{1 \leq i, j \leq N-1} |u(x_i, y_j) - u_{i,j}|, \quad (24)$$

onde $u(x_i, y_j)$ representa a solução exata do problema, enquanto $u_{i,j}$ a solução aproximada, de acordo com o método numérico utilizado.

Para todos os métodos testados, os resultados foram satisfatórios. Porém, a Figura 4 mostra o erro numérico cometido pelo método de Gauss-Seidel em diferentes espaçamentos.

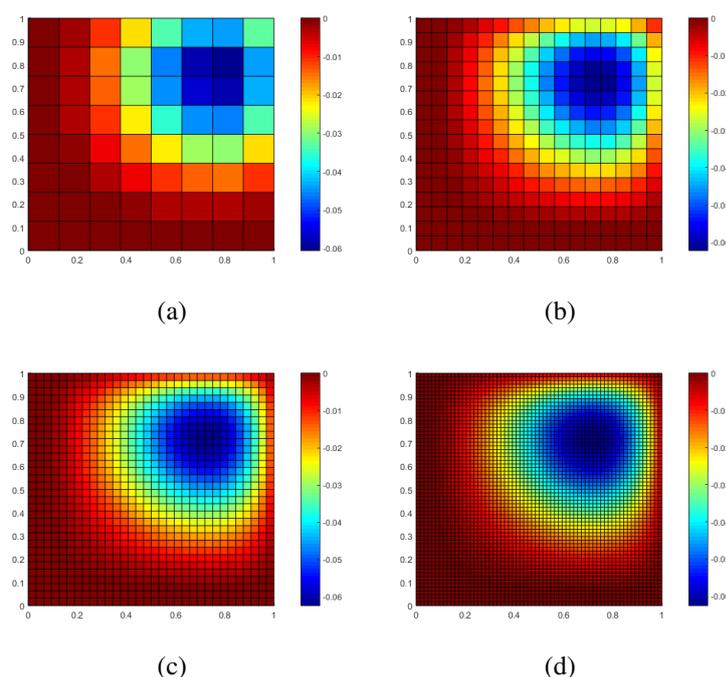


Figura 4: Distribuição do erro para (a) $\Delta x = 0,125$, (b) $\Delta x = 0,0625$, (c) $\Delta x = 0,03125$ e (d) $\Delta x = 0,015625$, utilizando o método de diferenças finitas.

Tabela 3: Comparação entre os valores do E_{max} para cada método numérico em diferentes espaçamentos.

	Gauss-Seidel	FAS	SPH
$\Delta x = 0,125$	7,6403e-04	7,6391e-04	0,0087
$\Delta x = 0,0625$	1,9695e-04	1,9677e-04	0,0059
$\Delta x = 0,03125$	4,9405e-05	4,9218e-05	0,0041
$\Delta x = 0,015625$	3,5340e-04	1,2340e-05	0,0031

Uma síntese do erro máximo absoluto em quatro malhas diferentes é apresentada na Tabela 3. Nota-se que o método SPH apresenta um erro maior que os demais métodos apresentados, para todos os espaçamentos testados. Dessa forma, para o problema em questão esse método foi o menos eficaz.



5 Conclusões

O presente trabalho teve por objetivo estudar a equação de Poisson em um domínio bidimensional. O método de diferenças finitas foi utilizado para aproximar as derivadas do problema aqui apresentado e, além disso, foram estudados o esquema FAS com o método multigrid e o método de partículas SPH. Esses foram utilizados no cálculo da solução aproximada do sistema linear obtido através da discretização da equação de Poisson, com condição de contorno do tipo Dirichlet. Para a obtenção de soluções aproximadas, diferentes espaçamentos foram considerados e o esquema de aproximação total FAS foi o método que mais se mostrou eficaz na solução da equação. Isso decorre do fato de que a solução numérica se deu de maneira próxima quanto à solução analítica do problema, resultando em um erro que pode ser considerado desprezível.

6 Referências bibliográficas

- BERLANDI, L. B.; CASACA, W. C. O. Comparação entre diferentes esquemas numéricos na solução da equação de Poisson bidimensional: diferenças finitas, multigrid e partículas. *In: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL*, 6., 2019, Bauru. **Caderno de trabalhos completos e resumos** [. . .]. Bauru: Unesp, Faculdade de Ciências, 2019. p. 98-104. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/eventos2341/ermac-2019/caderno-de-trabalhos-e-resumos/>. Acesso em: 11 set. 2019.
- CARMO, F. P. **A equação de Poisson e a decomposição de Helmholtz-Hodge com operadores SPH**. 2008. 132 f. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – PUC, Rio de Janeiro, 2008.
- FORTUNA, A. O. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações**. 2. ed. São Paulo: Edusp, 2012.
- MONAGHAN, J. J.; LATTANZIO, J. C. A refined particle method for astrophysical problems. **Astronomy and Astrophysics**, v. 149, p. 135-143, 1985.
- OLIVEIRA, F. **Efeito de malhas anisotrópicas bidimensionais sobre o desempenho do método multigrid geométrico**. 2010. 204 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2010.
- ROGENSKI, J. K. **Desenvolvimento e otimização de um código paralelizado para simulação de escoamentos incompressíveis**. 2011. 87 f. Dissertação (Mestrado em Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.
- TAKATA, A. S. **Aspectos teórico-numéricos dos métodos SPH e MPS**. 2015. 117 p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, 2015.
- WATKINS, D. S. **Fundamentals of matrix computations**. 2nd ed. New York: Wiley-Interscience, c2002.