Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 16, dez. 2019

Um problema de valor inicial fuzzy em fundos de pensão

A fuzzy initial value problem in pension funds

Letícia Félix Jerônimo
Universidade Federal de Alfenas
lefelix406@gmail.com

Sílvio Antonio Bueno Salgado
Universidade Federal de Alfenas
silvio.salgado@unifal-mg.edu.br

Resumo

O segmento de previdência complementar vem crescendo nos últimos anos no Brasil, o número de participantes ativos das Entidades Fechadas de Previdência Complementar (EFPC) cresceu cerca de 5% entre 2016 e 2017. Os fundos de pensão, que compõem este segmento, representam 13,4% do Produto Interno Bruto (PIB) do país, e são instituições que estão expostas à diversos riscos. O objetivo deste trabalho é analisar a incerteza presente no período de acumulação dos planos de contribuição definida oferecidos por fundos de pensão, utilizando conjuntos fuzzy. A análise do problema será feita por meio de um Problema de Valor Inicial Fuzzy (PVIF) no qual a noção de diferenciabilidade adotada é a derivada fuzzy linearmente correlacionada (L-derivada). A solução encontrada para o PVIF demonstra ser uma boa ferramenta para a análise do valor a ser acumulado por um fundo de pensão.
Palavras-chave: Gestão de Risco. Fundos de Pensão. Conjuntos Fuzzy. Derivada Fuzzy Linearmente Correlacionada.

Abstract

The private pension segment has been growing in recent years in Brazil, the number of active participants of the Closed Supplementary Pension Entities (EFPC) grew by about 5% between 2016 and 2017. Pension funds, which make up this segment, represent 13.4 % of the country's Gross Domestic Product (GDP), and are institutions that are exposed to various risks. The objective of this paper is to analyze the uncertainty present in the accumulation period of defined contribution plans offered by pension funds, using fuzzy sets. The problem analysis will be done through a Fuzzy Initial Value Problem (PVIF) in which the notion of differentiability adopted is the linearly correlated fuzzy derivative (L-derivative). The solution found for PVIF proves to be a good tool for analyzing the amount to be accumulated by a pension fund.
Keywords: Risk Management. Pension Funds. Fuzzy Sets. Linearly Correlated Fuzzy Derivative.

Artigo recebido em ago. 2019 e aceito em dez. 2019

1 Introdução

Segundo um levantamento realizado pela Associação Brasileira das Entidades Fechadas de Previdência Complementar (Abrapp), referente ao mês de novembro de 2018, os ativos dos fundos de pensão atingiram R$ 901 bilhões passando a representar 13,4% do PIB brasileiro [1], mostrando a grande representatividade desse segmento na economia brasileira. Os fundos de pensão fazem parte do Regime de Previdência Complementar (RPC) e têm por finalidade “proporcionar ao trabalhador uma proteção previdenciária adicional àquela oferecida pelo Regime Geral de Previdência Social (RGPS) ou pelo Regime Próprio de Previdência Social (RPPS)"[2].

Pode-se dividir a atuação dos participantes dos fundos de pensão em duas fases: a de acumulação e a de pagamento. A primeira fase, é o período que vai da adesão ao plano até a aposentadoria, e é nessa fase que será acumulada a poupança suficiente para que o participante receba o benefício contratado. Já a segunda fase, compreende o período que vai da aposentadoria até o fim da cobertura do plano [3]. Nessa fase, o fundo de pensão empenha-se em cumprir com a obrigação de pagar o benefício ao participante ou ao beneficiário.

A forma de pagamento irá depender do tipo de plano contratado, que são divididos basicamente em dois tipos: plano de benefício definido (BD) e plano de contribuição definida (CD). No primeiro, as parcelas que serão pagas pelo plano, e o valor do benefício que será recebido, são previamente estabelecidos. No segundo, apenas as parcelas pagas na fase de acumulação são previamente definidas, sendo que o montante acumulado é incerto, pois ele dependerá de determinadas variáveis, como a rentabilidade dos investimentos em que foram aplicadas as parcelas e da taxa de inflação no período considerado.

A previsão do montante acumulado por fundos de pensões foi objeto de estudo de Oliveira [4], que utilizou modelos econométricos para a análise de séries temporais referentes à dados de rentabilidade de um fundo de pensão. O problema de capitalização para planos CD foi abordado por Penna & Moraes [5], que desenvolveram um modelo de matemática financeira que busca fornecer o saldo final do fundo de investimento, considerando alguns parâmetros como o tempo de contribuição e a taxa de investimento. Em busca de um modelo que forneça o equilíbrio financeiro e atuarial entre o ativo e o passivo, Motta & Rocha [6] analisaram um modelo estocástico para o passivo atuarial de um fundo de pensão, utilizando o método Simulação de Monte-Carlo.

Diante da importância dos fundos de pensão para a economia, e também da necessidade do aprimoramento dos regimes de financiamento previdenciário, o objetivo deste trabalho é analisar a incerteza presente no período de acumulação dos planos de contribuição definida, oferecidos por fundos de pensão, aplicando conjuntos fuzzy. Com a Teoria de conjuntos fuzzy, surge a lógica fuzzy que pode ser vista como uma extensão da lógica clássica à medida que possibilita dar um tratamento matemático à termos linguísticos subjetivos. Utilizando-a, pode-se estabelecer que objetos pertencem à determinada classe por meio de graus de pertinência que variam de 0 a 1, sendo que 0 indica que o objeto não pertence à classe, e 1 indica pertinência total do objeto à classe.

A análise do problema proposto será feita por meio da aplicação da derivada fuzzy linearmente correlacionada (L-derivada), para obter-se a solução de um Problema de Valor Inicial Fuzzy (PVIF), com a condição inicial dada por um número fuzzy. O modelo utilizado é o de capitalização contínua, que representará a variação do capital acumulado em relação ao tempo, por meio de uma função diretamente proporcional à taxa que incide sobre as parcelas pagas pelo plano [7].

Este trabalho apresenta somente uma análise de ordem financeira do processo de acumulação de capital pelo fundo de pensão. No entanto, reconhece-se que a dinâmica e o funcionamento de um fundo de pensão é influenciado não somente por fatores financeiros, como a taxa de juros, mas também por premissas atuariais, como probabilidades de vida e de morte do contribuinte ou beneficiário do plano.

A L-derivada apresentada por Barros & Simões [8] é uma noção de diferenciabilidade que é indicada para processos fuzzy autocorrelacionados, ou seja, para funções a fuzzy que relacionam determinado valor futuro com um certo valor presente.

O trabalho está dividido em quatro seções, na seção 1 são apresentados alguns dos conceitos fundamentais de conjuntos fuzzy que serão necessários para o entendimento deste trabalho. Na seção 2 são apresentados os conceitos relativos aos fundos de pensões, como os principais tipos de planos de benefícios oferecidos por essas instituições, e o processo de geração do montante à ser recebido pelos participantes do plano. Na seção 3 utiliza-se a L-derivada no modelo de capitalização contínua, para se obter uma solução que permita modelar o período de acumulação dos planos de contribuição definida de fundos de pensão. E na seção 4 são apresentadas as considerações finais sobre o problema analisado.

2 Conceitos fundamentais

As definições de número fuzzy, o princípio de extensão e aritmética para números fuzzy foram extraídos de [9] e das referências nele contidas.

Definição 2.1 *Seja U um espaço topológico. Um subconjunto fuzzy A de U é caracterizado por uma função $\mu_A : U \to [0,1]$, em que $\mu_A(x)$ denota o grau com que o elemento x pertence ao subconjunto A.*

Observe que um subconjunto clássico A de U, pode ser associado a um subconjunto fuzzy cuja função de pertinência é dada pela função característica $\chi_A(x)$. Por conveniência de notação, podemos usar o símbolo $A(x)$ em vez de $\mu_A(x)$.

Definição 2.2 *Os α-níveis de um subconjunto fuzzy A são definidos por*

$$[A]^\alpha = \begin{cases} \{x \in U; A(x) \geq \alpha\} & se\ \ 0 < \alpha \leq 1 \\ \overline{\{x \in U; A(x) > 0\}} & se\ \ \alpha = 0, \end{cases} \tag{1}$$

em que $\overline{X}$ denota o fecho do suporte do subconjunto X de U.

Definição 2.3 *Um subconjunto fuzzy A de $\mathbb{R}$ é um número fuzzy se satizfazer as seguintes propriedades:*

i) todos α-níveis de A são intervalos fechados e não vazios de $\mathbb{R}$.

ii) o conjunto $\{x\,;\, A(x) > 0\}$ é um conjunto limitado de $\mathbb{R}$.

Da Definição (2.3), os α-níveis de um número fuzzy A serão denotados por

$$[A]^\alpha = \left[a_-^\alpha, a_+^\alpha\right], \tag{2}$$

para todo $\alpha \in [0,1]$.

Usamos o símbolo $\mathcal{F}(X)$ para denotar os subconjuntos fuzzy de X e $\mathbb{R}_\mathcal{F}$ para denotar o conjunto de todos os números fuzzy. Um exemplo de número fuzzy é o número fuzzy triangular, cujos α-níveis são dados por $[A]^\alpha = [(m - a_-^0)\alpha + a_-^0, (m - a_+^0)\alpha + a_+^0]$, para todo $\alpha \in [0, 1]$, em que $[A]^0 = [a_-^0, a_+^0]$ e $\{m\} = [A]^1$ (um número real). Um número fuzzy triangular é denotado pela tripla $(a_-^0; m; a_+^0)$.

O diâmetro do número fuzzy A é dado pelo fecho de seu suporte, isto é

$$diam(A) := diam([A]^0) = a_+^0 - a_-^0\,, \tag{3}$$

assim, quanto maior o diâmetro de $A \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$ mais fuzzy ele é [8].

O Princípio de extensão do Zadeh é um método matemático para estender funções clássicas para lidar com conjuntos fuzzy como argumentos de entrada.

Definição 2.4 [10] *Sejam $f : X \times Y \longrightarrow Z$ uma função clássica e $(A, B) \in \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(Y)$. A extensão de Zadeh $\widehat{f}$ de f, aplicada em (A, B), é o subconjunto fuzzy $\widehat{f}(A, B)$ de Z, cuja função de pertinência é dada por*

$$\widehat{f}(A,B)(z) = \begin{cases} \sup\limits_{(x,y)\in f^{-1}(z)} \min\{A(x), B(y)\}\,, & \text{se} \quad f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se} \quad f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases} \tag{4}$$

em que $f^{-1}(z) = \{(x, y) : f(x, y) = z\}$.

No caso de números fuzzy, operações aritméticas são casos particulares do princípio de extensão Zadeh, no qual as funções estendidas são as operações tradicionais de números reais [10].

Definição 2.5 [10] *Sejam A e B dois números fuzzy. Se $\otimes$ denota um operador binário em $\mathbb{R}$, então*

$$(A \otimes B)(z) = \begin{cases} \sup\limits_{(x,y)\in\theta(z)} \min\{A(x), B(y)\} & , \text{ se } \theta(z) \neq \emptyset \\ 0 & , \text{ se } \theta(z) = \emptyset \end{cases}$$

em que $\theta(z) = \{(x, y) : x \otimes y = z\}$.

O Teorema (2.6) generaliza, por meio dos α-níveis, as operações aritméticas para números fuzzy. Além disso, garante que o resultado das operações aritméticas entre números fuzzy seja um número fuzzy [9].

Teorema 2.6 [9] *Sejam $A, B \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$. Os α-níveis do conjunto fuzzy $A \otimes B$, para todo $\alpha \in [0, 1]$, em que $\otimes$ são algumas das operações aritméticas clássicas para intervalos, são dados por*

$$[A \otimes B]^\alpha = [A]^\alpha \otimes [B]^\alpha\,.$$

Sejam $A, B \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$, números fuzzy com α-níveis dados por $[A]^\alpha = [a_-^\alpha, a_+^\alpha]$ e $[B]^\alpha = [b_-^\alpha, b_+^\alpha]$. Então, as seguintes propriedades são válidas:

a) A soma entre A e B é o número fuzzy $A \oplus B$ cujos α-níveis são

$$[A \oplus B]^\alpha = [A]^\alpha \oplus [B]^\alpha = [a_-^\alpha + b_-^\alpha, a_+^\alpha + b_+^\alpha] \,. \tag{5}$$

b) A diferença entre A e B é o número fuzzy $A \ominus B$ cujos α-níveis são

$$[A \ominus B]^\alpha = [A]^\alpha \ominus [B]^\alpha = [a_-^\alpha - b_+^\alpha, a_+^\alpha - b_-^\alpha] \,. \tag{6}$$

c) A multiplicação $k \in \mathbb{R}$ e A é o número fuzzy $k \odot A$ cujos α-níveis são

$$[k \odot A]^\alpha = k \odot [A]^\alpha = \begin{cases} [ka_-^\alpha, ka_+^\alpha]\,, & \text{se} \quad k \geq 0\,, \\ [ka_+^\alpha, ka_-^\alpha]\,, & \text{se} \quad k < 0\,. \end{cases} \tag{7}$$

Definição 2.7 [11] *Sejam $A, B \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$, a função $D_\infty : \mathbb{R}_\mathcal{F} \times \mathbb{R}_\mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty[$ definida por*

$$D_\infty(A, B) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max \left\{ \mid a_-^\alpha - b_-^\alpha \mid, \mid a_+^\alpha - b_+^\alpha \mid \right\} \tag{8}$$

é chamada distância de Pompeiu-Hausdorff entre os números fuzzy A e B.

Teorema 2.8 [11] *Sejam $A, B, C, D \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$ e $k \in \mathbb{R}$, então*

(i) O par $(\mathbb{R}_\mathcal{F}, D_\infty)$ é um espaço métrico;
(ii) $D_\infty(A \oplus C, B \oplus C) = D_\infty(A, B)$;
(iii) $D_\infty(k \odot A, k \odot B) = \mid k \mid D_\infty(A, B)$;
(iv) $D_\infty(A \oplus B, C \oplus D) \leq D_\infty(A, C) + D_\infty(B, D)$.

Como na Equação (6) existem outras maneiras de definir a diferença entre números fuzzy. Neste trabalho, consideramos a diferença entre números fuzzy linearmente correlacionados ou L-diferença.

Definição 2.9 [12] *Dois números fuzzy A e B são linearmente correlacionados se existir $q, r \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$, de tal modo que $[B]^\alpha = q\,[A]^\alpha + r$ para cada $\alpha \in [0, 1]$. Neste caso, escreve-se $B = qA + r$.*

Definição 2.10 [12] *Se A e B são números fuzzy linearmente correlacionados, então*

i) $A +_L B = \{x + y; x \in A, y = qx + r$ e $q, r \in \mathbb{R}\}$,

ii) $A -_L B = \{x - y; x \in A, y = qx + r$ e $q, r \in \mathbb{R}\}$.

Teorema 2.11 [12] *Sejam A e B números fuzzy linearmente correlacionados, então*

i) $[B +_L A]^\alpha = (q + 1)[A]^\alpha + r$,

ii) $[B -_L A]^\alpha = (q - 1)[A]^\alpha + r$,

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Observação 2.12 *Seja* $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \backslash \mathbb{R}$. *Observe que* $B +_L A = 0$ *se e somente se* $q = -1$ *e* $r = 0$.

Definição 2.13 [11] *Uma função a valores fuzzy, ou simplesmente uma função fuzzy,* $F : \Omega \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, *é uma regra que associa a cada* $t \in \Omega$ *a um unico número fuzzy* $F(t) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Para cada $t \in \Omega$, denotaremos os α-níveis da função fuzzy $F(t)$ por

$$[F(t)]^{\alpha} = [f_{-}^{\alpha}(t), f_{+}^{\alpha}(t)],$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

A noção de L-diferenciabilidade é dada para funções fuzzy, com a seguinte propriedade: para cada $h \in \mathbb{R}$ com valor absoluto suficientemente pequeno, existem $q(\cdot), r(\cdot) \in \mathbb{R}$, tal que

$$F(t+h) = q(h)F(t) + r(h). \tag{9}$$

Em outras palavras, na Equação (9) o valor futuro $F(t+h)$ é linearmente correlacionado com o valor presente $F(t)$, para cada $h \in \mathbb{R}$ cujo valor absoluto é suficientemente pequeno.

Definição 2.14 [10] *Seja* $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ *uma função fuzzy e para cada h, com valor absoluto suficientemente pequeno, sejam* $F(t_0 + h)$ *e* $F(t_0)$ *com* $t_0 \in [a, b]$ *números fuzzy linearmente correlacionados. A função F é dita ser L-diferenciável em* t_0 *se existir um número fuzzy* $D_L F(t_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ *tal que o limite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(t_0 + h) -_L F(t_0)}{h} \tag{10}$$

exista e seja igual a $D_L F(t_0)$. *O número fuzzy* $D_L F(t_0)$ *é chamado derivada fuzzy linearmente correlacionada de F em* t_0, *ou L-derivada.*

Teorema 2.15 [10] *Seja* $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ *uma função L-diferenciável no ponto* $t_0 \in [a, b]$ *com* $[F(t_0)]^{\alpha} = [f_{-}^{\alpha}(t_0), f_{+}^{\alpha}(t_0)]$, *para todo* $\alpha \in [0, 1]$. *Então, as funções* $f_{-}^{\alpha}(t)$ *e* $f_{+}^{\alpha}(t)$ *são diferenciáveis no ponto* t_0 *e, para todo h com valor absoluto suficientemente pequeno, temos*

$$D_L F(t_0) = \begin{cases} \left[(f_{-}^{\alpha})'(t_0), (f_{+}^{\alpha})'(t_0)\right] & \text{se } q(h) \geq 1 \\ \left[(f_{+}^{\alpha})'(t_0), (f_{-}^{\alpha})'(t_0)\right] & \text{se } 0 < q(h) < 1 \\ \left[(f_{-}^{\alpha})'(t_0), (f_{-}^{\alpha})'(t_0)\right] & \text{se } q(h) \leq 0\,, \end{cases} \tag{11}$$

em que $D_L F(t_0)$ *é a L-derivada da função F em* t_0.

Observação 2.16 [10] *Se* $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ *é L-diferenciável em* $[a, b]$, *então para cada* $\alpha \in [0, 1]$, *temos:*

1. *Se* $q > 1$, *o diam*(F) *é uma função crescente (F é expansiva);*

2. *Se* $0 < q \leq 1$, *o diam*(F) *é uma função decrescente (F é contrativa);*

3. *Se* $q < 0$, *o diam*(F) *é uma função constante.*

A função $F : [a, b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ linearmente correlacionada pode ser expansiva (contrativa) à direita (esquerda) de um ponto $t = t_0$. O ponto em que esse fenômeno ocorre é chamado de ponto de troca.

Geometricamente, a igualdade dada pela Equação (11) indica que F não apresenta pontos de troca em cada uma das situações descritas.

3 Dinâmica dos fundos de pensão

De acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) [13], importantes mudanças na estrutura demográfica da população brasileira têm ocorrido nos últimos anos. O Brasil está em uma fase da transição demográfica, em que são observadas baixas taxas de fecundidade e mortalidade, ou seja, as pessoas estão passando a ter uma maior expectativa de vida e, em contrapartida, a proporção de idosos na população está aumentando, o que pode trazer problemas ao sistema previdenciário vigente. O sistema previdenciário brasileiro é baseado no regime de repartição simples, que consiste na ideia de que os trabalhadores ativos financiam a aposentadoria dos atuais aposentados. Como a proporção de idosos está cada vez maior, a previdência tende a ter uma sobrecarga de benefícios à pagar, e a quantidade de trabalhadores ativos pode não conseguir financiar as aposentadorias, pelo regime de repartição simples.

Esse cenário apresentado justifica o crescimento da previdência complementar no país, pois os trabalhadores passam a buscar formas de garantir um valor de aposentadoria mais confortável ao fim de sua vida laboral. As entidades de previdência complementar fazem parte do setor de previdência privada e podem ser divididas em fechadas ou abertas, sendo que a principal diferença entre elas diz respeito à quem pode adquirir e participar do planos de benefícios oferecidos. Qualquer pessoa pode contratar um plano de benefício oferecido por uma entidade aberta de previdência complementar.Para a adesão à planos por meio de entidades fechadas, deve-se existir algum vínculo empregatício ou associativo entre o indivíduo e determinada empresa ou associação, para a constituição de um fundo de pensão. Os fundos de pensão são caracterizados por ser entidades fechadas de previdência complementar, cujo objetivo é proporcionar ao trabalhador, no fim de sua vida laboral, um complemento à renda obtida com sua aposentadoria.

Os fundos são geridos por instituições que estão expostas à diversos riscos e incertezas em todo o processo de gestão dos recursos. O principal risco enfrentado por essas instituições é o risco de mercado, ou seja, a possibilidade de perda devido a mudanças nos preços ou parâmetros de mercado. Referindo-se aos fundos de pensões, o risco de mercado se torna visível quando existe a “impossibilidade de acumular e/ou manter recursos compatíveis com os compromissos assumidos para com os seus participantes"[3].

Como apresentado por Pinheiro [14], as variáveis que influenciam a situação financeira e atuarial dos planos de benefícios, oferecidos pelos fundos de pensão, podem ser de ordem econômica, demográfica, dentre outras. Este trabalho trata-se de uma análise financeira do problema considerando apenas variáveis econômicas, como a taxa de juros e inflação, que influenciam os ganhos com os investimentos. Esses investimentos dizem respeito à aplicação das parcelas pagas pelos participantes dos planos do fundo de pensão, em certos segmentos de aplicação como, em títulos de renda variável ou títulos de renda fixa.

A atuação dos fundos de pensão pode ser dividida em dois períodos: o de acumulação e o de pagamento. O primeiro inicia-se com a adesão do indivíduo ao plano e vai até a aposentadoria (ou até a geração de pensão por morte), e é durante este período que é acumulado o valor para o pagamento do plano benefício, por meio dos investimentos. Já o segundo, é a fase de pagamento do plano benefício, e vai da aposentadoria até o falecimento do participante ou de seu beneficiário.

Os tipos de planos de benefícios oferecidos são divididos, basicamente, em dois: plano de benefício definido (BD) e plano de contribuição definida (CD). No primeiro, as parcelas que serão pagas pelo plano e o valor do benefício que será recebido são previamente estabelecidos, sendo que as parcelas sofrem reajustes anuais. No segundo, apenas as parcelas pagas na fase de acumulação são previamente definidas, sendo que o montante acumulado é incerto [3]. Os fundos de pensão podem utilizar dois métodos de acumulação, para conseguir as provisões necessárias para o pagamento dos planos de benefícios: o regime de repartição simples ou de capitalização.

A Figura (1) ilustra a forma de constituição de reservas em planos CD, em que os contribuintes, formados por trabalhadores e empresários, fazem contribuições ao fundo por intermédio das entidades fechadas de previdência complementar. Essas entidades gestoras do fundo de pensão ficam responsáveis por investir os recursos de forma a garantir a melhor rentabilidade possível, e os ganhos obtidos são depositados em contas individuais dos participantes do fundo.

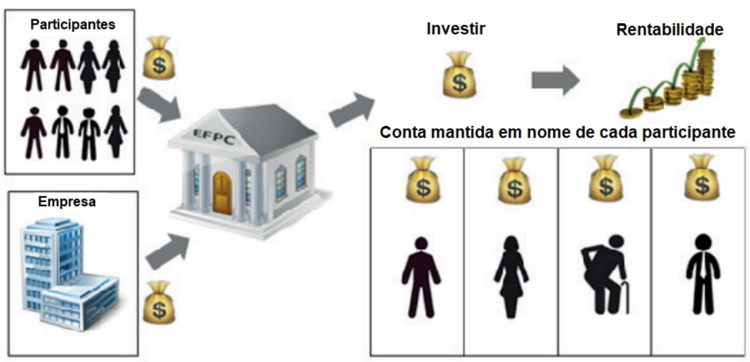

Figura 1: Constituição de reservas em planos CD. Fonte: ABRAPP (2018, p.14).

Como apresentado anteriormente, um fundo de pensão lida diretamente com diversos riscos, que consistem na probabilidade de perda de recursos, em todo seu processo de gestão. O investimento no desenvolvimento de técnicas que permitam melhorar a dinâmica e o funcionamento dessas instituições tende a ser de grande importância e interesse para o mercado. Diversos trabalhos são desenvolvidos tentando contribuir de diferentes formas com o aperfeiçoamento da gestão de recursos dos fundos de pensão.

Nesse sentido Motta & Rocha [6], consideraram alguns parâmetros de risco como, a taxa de inflação e de crescimento salarial, com o objetivo de obter um modelo estocástico, que estime o valor a ser acumulado por um fundo de pensão, para que se estabeleça o equilíbrio financeiro e atuarial. Para atingir tal objetivo utilizaram o método de simulação Monte Carlo, por meio do qual consegue-se avaliar o problema considerando-se diferentes cenários. A principal conclusão obtida nesse estudo foi que a escolha dos parâmetros a serem considerados no modelo, e as características de cada plano, são fatores de grande influência na formação das reservas matemáticas para o pagamento dos benefícios. Com o mesmo objetivo, Oliveira [4], desenvolve uma análise econométrica utilizando dados de rentabilidade de determinado fundo de pensão. Essa análise consiste em obter uma previsão da rentabilidade do fundo que é utilizada para estimar o valor do fundo de pensão em determinado tempo.

Percebe-se por meio desses trabalhos que existem pelo menos dois pontos importantes que são fontes de estudo relativos à previsão do valor acumulado por um fundo de pensão, sob a ótica financeira. Um diz respeito a necessidade de se manter o equilíbrio entre os ativos e as obrigações assumidas, outro é em relação ao valor do rendimento obtido com a aplicação dos recursos, que é determinado pelo valor da taxa de rendimento dos investimentos.

Como apresentado por Penna & Moraes [5], deve-se procurar estabelecer “taxas justas"de contribuição, no sentido de não gerar déficit nem mesmo superavit de reserva matemática acumulada. Este trabalho tem por objetivo, analisar o período de acumulação para planos CD, considerando o regime de capitalização, por meio do modelo de capitalização contínua. A análise será feita utilizando a teoria de conjuntos fuzzy, permitindo-se assim, incorporar ao problema parte da incerteza presente no processo de acumulação.

A poupança gerada em determinado instante $\hat{t}$ do período de acumulação é dependente de muitas variáveis, como as citadas anteriormente. Essa poupança é formada pelo pagamento de valores fixos (parcelas) em planos CD, e também pela rentabilidade dos investimentos que depende de variáveis incertas como as taxas de juros e de inflação. Portanto, analisando a situação no presente, tem-se um processo de geração de poupança que fornecerá uma capital incerto, e é este montante incerto que assumiremos como a condição inicial incerta para um problema de valor inicial fuzzy.

4 Fundos de pensão e modelagem fuzzy

O problema de valor inicial (PVI) para o modelo de capitalização contínua permite-nos modelar o processo de incorporação de juros ao capital C, considerando uma taxa de correção contínua para o juros λ e uma condição inicial C_0, por determinado período de tempo, ou seja

$$\begin{cases} \dfrac{dC}{dt} = \lambda C \\ \\ C(0) = C_0 \end{cases} . \tag{12}$$

4.1 Condição inicial clássica

A solução do Problema (12) é dada por

$$C(t) = C_0 e^{\lambda t}. \tag{13}$$

A Figura 2 ilustra a solução clássica para o PVI do modelo de capitalização contínua. Considerando λ como a taxa anual de rendimento dos investimentos e fazendo a condição inicial $C_0 = C_{\hat{t}}$, que é o capital acumulado em determinado instante $\hat{t}$ do período de acumulação, obtém-se uma curva exponencial demonstrando o aumento cresencente de capital ao longo do período.

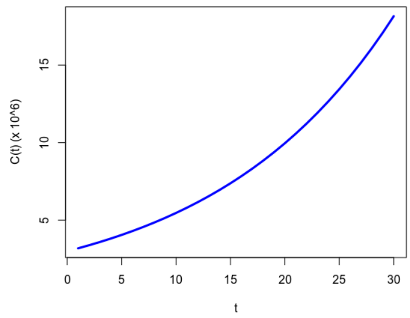

Figura 2: Representação gráfica da solução $C(t)$ do PVI da Equação (12) com $\lambda = 0,06$ e condição inicial $C_{\hat{t}} = 3 \times 10^6$.

A condição inicial do PVI, que neste estudo é o valor acumulado pelo fundo em um instante $\hat{t}$, é uma variável que depende de muitos fatores como apresentado anteriormente. Portanto, a realização da análise por meio da teoria de conjuntos fuzzy pode permitir a incorporação dessas incertezas ao modelo de capitalização contínua, para a obtenção de uma solução mais abrangente e que se ajuste às necessidades e características do fundo de pensão.

4.2 Taxa instantânea de capitalização

A taxa λ considerada no Problema (12) é a taxa instantânea de capitalização, que pode ser obtida por meio da relação entre taxa de juros nominal e taxa efetiva de juros [15]. Uma taxa é considerada efetiva quando o período de formação e incorporação dos juros ao capital coincide com aquele à que a taxa está referida, e é nominal quando estão em diferentes unidades de tempo.

Considerando-se n o número de capitalizações no período e uma taxa nominal i_n, a taxa efetiva anual i é dada por

$$i = \left(1 + \frac{i_n}{n}\right)^n - 1. \tag{14}$$

Para a obtenção da taxa instantânea de juros, que será utilizada no modelo de capitalização contínua, consideram-se períodos infinitos de capitalização, pois essas capitalizações são realizada a cada instante t. Se n $\longrightarrow +\infty$, temos

$$i = e^{\lambda} - 1, \tag{15}$$

ou seja,

$$\lambda = ln(1 + i), \tag{16}$$

em que λ, é a taxa instantânea de juros.

Para a análise do valor acumulado pelo fundo de pensão considera-se que o rendimento dos investimentos é dado por essa taxa instantânea de juros. São incorporados às parcelas pagas pelo participante do fundo, os rendimentos obtidos nas aplicações, formando a poupança necessária para pagamento do plano de benefício.

4.3 Condição inicial fuzzy

Iremos considerar que o Problema (12) modele o período de acumulação para os planos de benefícios CD, sendo que a condição inicial C_0 será substituída por $C_{\hat{t}}$ que representará o valor que é acumulado pelo fundo em determinado tempo $\hat{t}$, para o pagamento do benefício ao participante. A taxa de correção λ, representará o rendimento do investimento, ou seja, a taxa de juros que incide sobre as contribuições do beneficiário do plano. Como o montante no instante $\hat{t}$ do período de acumulação é uma variável com certo grau de incerteza, iremos fazer esta análise via teoria de conjuntos fuzzy, utilizando o seguinte PVIF

$$\begin{cases} \dfrac{dC}{dt} = \lambda C, \ \ \lambda > 0 \\ \\ C(\hat{t}) = C_{\hat{t}} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \end{cases} . \tag{17}$$

O coeficiente λ é um número real positivo e representa a taxa de rentabilidade do investimento em que são aplicadas as contribuições dos participantes do plano, e a condição inicial representa o montante obtido no instante $\hat{t}$ do período de acumulação do plano CD. Para a análise do Problema (17) a condição inicial será considerada incerta, sendo modelada por um número fuzzy. O coeficiente que representa a taxa de rentabilidade será dado pela taxa instantânea de capitalização, que será apresentada a seguir.

Ao assumirmos que a condição inicial será modelada por um número fuzzy estamos considerando que o processo de obtenção do montante para o instante $\hat{t}$ do período de acumulação é permeado de incertezas. Parte-se do pressuposto de que esse montante é composto pelas parcelas fixas pagas pelos participantes do fundo de pensão, e também pelo ganho incerto obtido nos investimentos que são incorporados ao capital inicial.

Para a análise do modelo aplica-se o conceito de derivada fuzzy linearmente correlacionada, que é indicada para processos fuzzy autocorrelacionados. Além disso, para todo h cujo valor absoluto é suficientemente pequeno, temos:

$$[C(t+h)]^\alpha = q(t)[C(t)]^\alpha + r(h). \tag{18}$$

Isso significa que o montante C em um instante $t+h$ está relacionado com o montante C em um instante anterior t. Denotaremos os α-níveis da função C(t) por $[C(t)]^\alpha = [C_-^\alpha(t), C_+^\alpha(t)]$, para $\alpha \in [0,1]$.

Admitindo que a solução é um processo fuzzy linearmente correlacionado, e que a Equação (18) seja satisfeita para um valor $q(h) > 1$, temos que $C(t+h) > C(t)$, ou seja, o valor futuro acumulado por um fundo de pensão aumenta com o passar do tempo. Utilizando o Teorema (11), temos que, para cada $\alpha \in [0,1]$ devemos resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} [C_-^\alpha(t), C_+^\alpha(t)]' = & \lambda[C_-^\alpha(t), C_+^\alpha(t)] \\ \quad C_{\hat{t}} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \quad e & \qquad \lambda > 0 \end{cases} . \tag{19}$$

ou seja,

$$\begin{cases} (C_-^\alpha)'(t) = \lambda C_-^\alpha(t), \ com \quad C_-^\alpha(\hat{t}) = C_{\hat{t}-}^\alpha \\ (C_+^\alpha)'(t) = \lambda C_+^\alpha(t), \ com \quad C_+^\alpha(\hat{t}) = C_{\hat{t}+}^\alpha \end{cases} , \tag{20}$$

que para cada $\alpha \in [0,1]$, obtêm-se como solução

$$\begin{cases} C_{-}^{\alpha}(t) = C_{\hat{t}-}^{\alpha} e^{\lambda t} \\ C_{+}^{\alpha}(t) = C_{\hat{t}+}^{\alpha} e^{\lambda t} \end{cases} . \quad (21)$$

Observa-se que para cada valor de t fixo, obtém-se um número fuzzy diferente, e cada número fuzzy representa o valor acumulado pelo fundo de pensão naquele instante $t > 0$. Além disso, o diâmetro de C(t) dado por

$$diam(C) = C_{\hat{t}+}^{0} e^{\lambda t} - C_{\hat{t}-}^{0} e^{\lambda t} = e^{\lambda t}(C_{\hat{t}+}^{0} - C_{\hat{t}-}^{0})$$

é crescente para todo $\lambda > 0$ e $t > 0$, o que apresenta concordância com o problema estudado. O valor acumulado por fundos de pensão tende a ser maior, quanto maior o tempo de contribuição ao plano de benefício, pois mais juros serão reincididos sobre as parcelas pagas.

Para a obtenção da condição inicial e da taxa de rendimento, foram utilizados dados de um consolidado histórico de fundos de investimento [16]. A condição inicial foi obtida com base no valor do patrimônio líquido de fundos de investimento dos últimos dez anos, que em média foi de, aproximadamente, $R\$3$ milhões de reais. Utilizando o desvio padrão entre os valores da amostra de dados, que foi cerca de $R\$1,2$ milhões de reais, obtém-se o seguinte número fuzzy triangular:

$$[C_{\hat{t}}]^{\alpha} = [1200000\alpha + 1800000, -1200000\alpha + 4200000], \quad (22)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

O valor para a taxa λ foi obtido por meio de uma média ponderada entre a rentabilidade de fundos de investimento de renda fixa e de ações de índice ativo, considerando os pesos de 80% e 20%, respectivamente. A Figura (3) ilustra o comportamento geométrico da Equação (21) considerando $\lambda = 0,06$ e condição inicial dada pelo número fuzzy triangular 22.

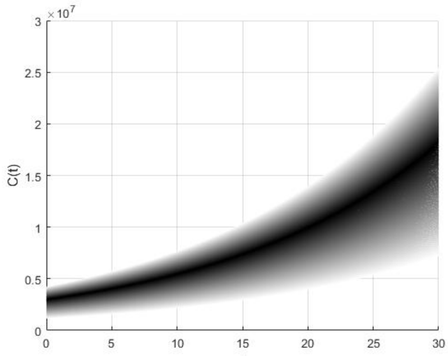

Figura 3: Representação gráfica da solução fuzzy do PVIF (17) no plano Ct com $q(h) > 1$, $\lambda = 0,06$ e condição inicial $[C_{\hat{t}}]^{\alpha} = [1200000\alpha + 1800000, -1200000\alpha + 4200000]$.

Nota-se que, se a condição inicial for dada por um número real, isto é, $C_{\hat{t}-}^{\alpha} = C_{\hat{t}+}^{\alpha} = C_0$, para todo $\alpha \in [0, 1]$, então a Solução (21) coincide com a solução clássica, ou seja, $C(t) = C_0 e^{\lambda t}$.

Além disso, essa solução é preferida no sentido de que para cada $t > 0$, ela pertence a solução dada por (21) com grau de pertinência igual a 1. A Figura (4) ilustra a representação gráfica da solução (21) no espaço-$Ct\alpha$.

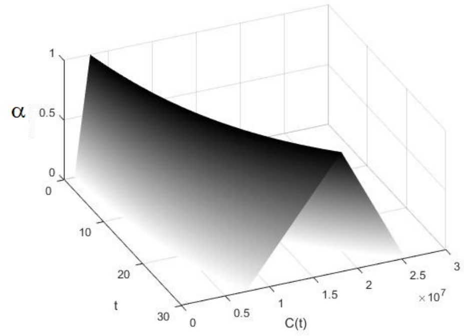

Figura 4: Representação gráfica da solução do Problema (17) no espaço-$Ct\alpha$ com $q(h) > 1$, $\lambda = 0,06$ e condição inicial $[C_{\hat{t}}]^{\alpha} = [1200000\alpha + 1800000, -1200000\alpha + 4200000]$, para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Em ambas as figuras os maiores e menores valores de associação são representados respectivamente pelas cores preto e branco. A forma do gráfico na Figura 3 é justificada pelo aumento do diâmetro da solução ao longo do tempo.

Nota-se ainda que, para diferentes valores de tempo $t > 0$ de aplicação do capital (que seriam as parcelas pagas pelos participantes do plano), obtém-se um número fuzzy triangular diferente, que por sua vez fornece um subconjunto fuzzy de valores de C(t) para todo grau de pertinência $\alpha \in [0, 1]$. Portanto, para a obtenção de um capital de interesse a ser acumulado por um fundo de pensão, deve-se determinar o instante t, e também fixar um valor para $\alpha \in [0, 1]$. De acordo com a escolha destes valores, juntamente com a escolha da taxa λ e da condição inicial $C_{\hat{t}}$, obtém-se uma solução que represente o valor que deve ser acumulado pelo fundo de pensão.

5 Considerações finais

Como apresentado inicialmente, os fundos de pensão são de grande importância para a economia brasileira, contribuindo com cerca de 13% do PIB do país. Entretanto, essas instituições estão expostas à diversos tipos de riscos que podem torná-las incapazes de cumprir com sua principal obrigação: pagar os planos de benefícios contratados por meio do acúmulo de uma reserva financeira e atuarial equilibrada.

O objetivo deste trabalho foi apresentar uma análise acerca da incerteza presente na fase de acumulação dos planos de contribuição definida, utilizando conjuntos fuzzy. Para a análise, utilizou-se um PVIF adotando o modelo de capitalização contínua e a condição inicial incerta, sendo modelada por um número fuzzy. Considerou-se ainda que o coeficiente λ do modelo de capitalização contínua representasse a variável rentabilidade dos investimentos.

A solução do PVIF foi obtida pela aplicação da L-derivada, uma derivada fuzzy indicada para processos fuzzy autocorrelacionados. A solução obtida na Equação (21), apresenta diâmetro crescente ao longo do tempo. Para cada valor de t fixo, obtém-se um número fuzzy diferente, e cada número fuzzy representa o valor acumulado pelo fundo naquele instante t. Portanto, para a obtenção de um capital de interesse a ser acumulado, deve-se determinar o instante t, e também fixar um valor para α.

Este trabalho limitou-se à exploração financeira do problema do valor acumulado por fundos de pensão, por meio de uma análise determinística, incluindo a teoria de conjuntos fuzzy. Reconhece-se o fato de que a adoção de premissas atuariais é de grande importância para problemas como este, pois envolvem expectativas de vida e probabilidades diversas. Como propostas de complementar tal estudo, pode-se ser adicionada ao modelo variáveis de premissas atuariais que possam trazer cada vez mais o problema analisado para a realidade enfrentada no gerenciamento dos fundos de pensão.

6 Referências Bibliográficas

1 ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS ENTIDADES FECHADAS DE PREVIDÊNCIA COMPLEMENTAR. 2019. **Consolidado Estatístico**. Disponível em: http://www.abrapp.org.br Acesso em: 06 abr. 2019.

2 BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil.** 1988. Disponível em: https://www.senado.leg.br Acesso em: 30 mar. 2019.

3 RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial**. São Paulo: Saraiva, 2008.

4 OLIVEIRA, M. A. A. **Análise e previsão do valor acumulado de um fundo de pensões**. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática Financeira) – Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2014.

5 PENNA, A. F. S; MORAES, M. A. S. Um modelo quantitativo de um fundo de capitalização. **Revista de Administração**, v. 36, n. 1, p. 46-56, 2001.

6 BASSANEZI, R. C.; FERREIRA JR, W. C. **Equações diferenciais com aplicações**. São Paulo: Harbra, 1988.

7 MOTTA, L. F. J.; ROCHA, C. B. Passivo atuarial estocástico de fundos de pensão: uma ferramenta necessária ao equilíbrio de longo prazo entre ativos/investimentos e passivos. In:**Congresso BALAS**, Rio de Janeiro. 2002.

8 BARROS, L. C.; SANTO PEDRO, F. Fuzzy differential equations with interactive derivative. **Fuzzy sets and systems**, v. 309, p. 64-80, 2017.

9 BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. **Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática**. 3. ed. Campinas: UNICAMP/IMECC, 2015.

10 SIMÕES, F. S. P. **Sobre equações diferenciais para processos fuzzy linearmente correlacionados:** aplicações em dinâmica de população. 2017. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada)-Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2017.

11 PURI, M. L.; RALESCU, D. A. Differentials of fuzzy functions. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 91, n. 2, p. 552–558, 1983.

12 BARROS, L. C.; SANTO PEDRO, F.; ESMI, E. Modelos de dinâmica populacional para processos fuzzy autocorrelacionados. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 6, n. 1, p. 1-7, 2018.

13 ERVATTI, L. R.; BORGES, G. M.; JARDIM, A. de P. (org.). **Mudança demográfica no Brasil no início do século XXI**. Rio de Janeiro: IBGE. 2015. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv93322.pdf. Acesso em: 21 jun. 2019.

14 PINHEIRO, R. P. **A demografia dos fundos de pensão**. Brasília: Ministério da Previdência Social, Secretaria de Políticas de Previdência Social, 2007.

15 GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática actuarial:** vida e pensões. Coimbra: Almedina, 2010.

16 ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS ENTIDADES DOS MERCADOS FINANCEIRO E DE CAPITAIS. **Consolidado histórico de fundos de investimento**. 2019. Disponível em: http://www.anbima.com.br Acesso em: 02 jun. 2019.