



Revista Eletrônica  
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664  
Volume 16, dez. 2019

**Rudimar Luiz Nos**  
Câmpus Curitiba  
UTFPR  
rudimarnos@utfpr.edu.br

**Victoria Mazotti Rodrigues da  
Silva**  
Câmpus Curitiba  
UTFPR  
victoriamazotti@gmail.com

## Radicais duplos no cálculo do volume de poliedros convexos

Double radicals in convex polyhedra's volume calculation

### Resumo

Apresentamos neste trabalho o cálculo do volume em função da medida da aresta dos seguintes poliedros convexos: icosaedro regular, icosaedro truncado, icosaedro triakis e pirâmide pentagonal giroalongada. Empregamos o aplicativo gratuito de geometria dinâmica GeoGebra 3D para compor/decompor os poliedros e, no cálculo do volume, utilizamos a conversão de radicais duplos em radicais simples. Concluímos que a conversão simplifica as relações para o volume e que a composição/decomposição dos poliedros no GeoGebra 3D facilita o desenvolvimento de estratégias para o cálculo do volume.

**Palavras-chave:** Icosaedro regular. Icosaedro truncado. Icosaedro triakis. Pirâmide pentagonal giroalongada. Volume da pirâmide. GeoGebra 3D.

### Abstract

We present in this work the volume calculation as a function of the edge measurement of the following convex polyhedra: regular icosahedron, truncated icosahedron, triakis icosahedron and gyroelongated pentagonal pyramid. We use the free GeoGebra 3D dynamic geometry application to compose/decompose polyhedra and, in volume calculation, we use the conversion of double radicals to single radicals. We conclude that the conversion simplifies the relations to volume and that the composition/decomposition of polyhedra in GeoGebra 3D facilitates the development of strategies for volume calculation.

**Keywords:** Regular icosahedron. Truncated icosahedron. Triakis icosahedron. Gyroelongated pentagonal pyramid. Pyramid volume. GeoGebra 3D.

## 1 Introdução

Segundo Saito, Nós e Santos (2017), podemos transformar, sob certas condições, o radical duplo  $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$  nos radicais simples  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$  através da relação

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}. \quad (1)$$

A relação (1) foi empregada por Nós, Saito e Santos (2017) para simplificar o cálculo da medida de um diedro e da diagonal do pentágono regular. Neste trabalho, estendemos a aplicação da relação (1) ao cálculo do volume (COXETER, 1973; LIMA, 2011) dos seguintes poliedros convexos: icosaedro regular, icosaedro truncado, icosaedro triakis e pirâmide pentagonal giroalongada. O volume dos dois primeiros poliedros é discutido em Silva e Nós (2018), com uma aplicação em Nós e Silva (2019). Neste trabalho, apresentamos dois poliedros convexos, o icosaedro triakis e a pirâmide pentagonal giroalongada, não abordados nos trabalhos anteriores.

Ao estabelecer estratégias para o cálculo do volume, empregamos o GeoGebra 3D (GEOGEBRA, 2018). Utilizamos essencialmente dois métodos no GeoGebra 3D: decompor o poliedro em poliedros de volume conhecido, como pirâmides por exemplo; retirar de um poliedro de volume conhecido outros poliedros de volume também conhecido.

Para Silva e Nós (2018, p. 17):

O cálculo do volume de um poliedro convexo é um tema pertinente à formação geométrica do professor de Matemática. A escassez de referências bibliográficas em português justifica a elaboração de material didático sobre o tema. Além disso, há na natureza cristais e organismos vivos com formatos poliédricos. O volume de uma pedra preciosa e de uma massa viral, por exemplo, são medidas que devem, sob certas circunstâncias, ser calculadas.

## 2 Volume do icosaedro regular

O icosaedro regular é um poliedro de Platão (SILVA;NÓS, 2018), composto por 12 vértices, 30 arestas e 20 faces triangulares regulares, como ilustra a Figura 1(a). A Figura 1(b) mostra um vírus com formato icosaédrico.

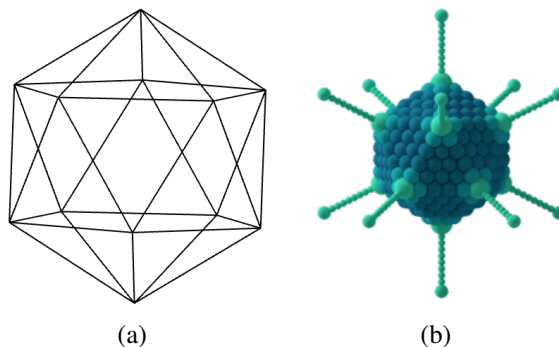


Figura 1: Icosaedro regular: (a) esqueleto do sólido; (b) adenovírus (WIKIPEDIA, 2018).

Podemos decompor o icosaedro regular em 20 pirâmides cujas bases são as faces do icosaedro e a aresta lateral é o raio da esfera circunscrita ao icosaedro, como ilustra a Figura 2. Dessa forma, o volume do icosaedro regular é dado por

$$\mathcal{V}(\text{icosaedro regular}) = 20\mathcal{V}(\text{pirâmide triangular}). \quad (2)$$

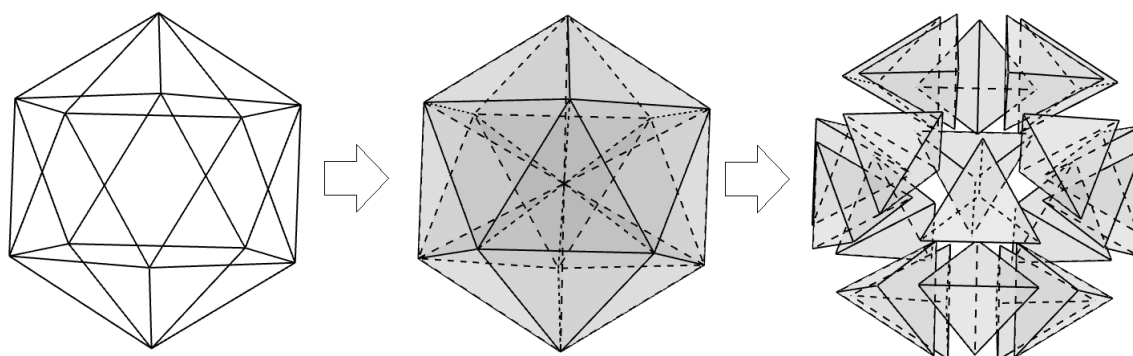


Figura 2: Decomposição do icosaedro regular em vinte pirâmides triangulares equivalentes.

Para determinarmos a medida da aresta lateral de cada pirâmide em função da medida da aresta do icosaedro regular, devemos calcular o raio da esfera circunscrita ao icosaedro regular. Para tanto, seccionamos o icosaedro segundo um plano que passa pelo centro e por dois pares de vértices opostos, determinando assim o hexágono pontilhado da Figura 3(a).

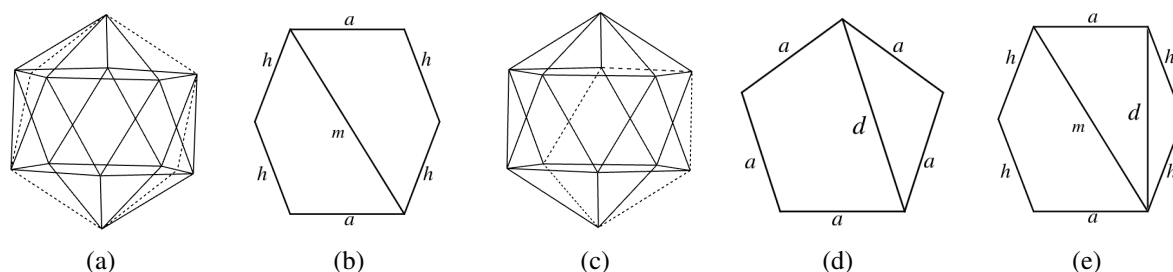


Figura 3: Icosaedro regular: (a)-(b) seção que passa pelo centro e por dois pares de vértices opostos; (c)-(d) seção que passa por cinco vértices que determinam um pentágono regular; (e) composição das duas seções.

Denotando a aresta do icosaedro regular por  $a$ , temos que a altura  $h$  do triângulo equilátero que forma a face do icosaedro define quatro dos seis lados do hexágono - Figura 3(b). Precisamos determinar a diagonal  $m$  do hexágono não regular porque esta equivale ao diâmetro da esfera circunscrita ou ao dobro da medida da aresta lateral das pirâmides triangulares provenientes da decomposição do icosaedro.

Como o hexágono é não regular e não possuímos informações acerca dos ângulos, precisamos seccionar o icosaedro regular por outro plano, como na Figura 3(c). A intersecção do icosaedro regular com esse plano é um pentágono regular de diagonal  $d$ , como ilustra a Figura 3(d).

Considerando a diagonal  $m$  do retângulo de lados  $a$  e  $d$ , conforme a Figura 3(e), e sabendo que  $d = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}a$  (NÓS;SAITO;SANTOS, 2017), ao aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo

retângulo de hipotenusa  $m$  e catetos  $a$  e  $d$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
 m^2 &= d^2 + a^2; \\
 m^2 &= \left( \frac{a(\sqrt{5} + 1)}{2} \right)^2 + a^2; \\
 m^2 &= \frac{a^2}{4} (6 + 2\sqrt{5}) + a^2; \\
 m^2 &= \frac{a^2}{4} (10 + 2\sqrt{5}); \\
 m &= \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2} a. \tag{3}
 \end{aligned}$$

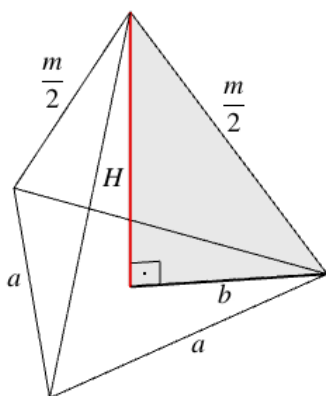


Figura 4: Pirâmide triangular proveniente da decomposição do icosaedro regular.

Sendo  $m$  o dobro da medida da aresta lateral, temos que as pirâmides que compõem o icosaedro regular têm dimensões como na Figura 4. Nesta, a medida  $b$  equivale a  $\frac{2}{3}$  da altura do triângulo equilátero de lado  $a$ , ou seja,  $b = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ . Assim, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de hipotenusa  $\frac{m}{2}$  e catetos  $H$  e  $b$ , concluímos, usando (3), que:

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{m}{2} \right)^2 &= H^2 + b^2; \\
 \frac{a^2}{16} (10 + 2\sqrt{5}) &= H^2 + \frac{a^2}{3}; \\
 H^2 &= \frac{a^2 (30 + 6\sqrt{5} - 16)}{48}; \\
 H^2 &= \frac{a^2 (7 + 3\sqrt{5})}{24}; \\
 H &= \frac{a}{2\sqrt{6}} \sqrt{7 + 3\sqrt{5}}; \\
 H &= \frac{\sqrt{42 + 18\sqrt{5}}}{12} a. \tag{4}
 \end{aligned}$$

Temos um radical duplo em (4), o qual pode ser escrito como  $\sqrt{42 + 18\sqrt{5}} = \sqrt{42 + \sqrt{1620}}$ . Aplicando a transformação (1), com  $A = 42$  e  $B = 1620$ , obtemos:

$$\sqrt{42 + \sqrt{1620}} = \sqrt{\frac{42 + \sqrt{42^2 - 1620}}{2}} + \sqrt{\frac{42 - \sqrt{42^2 - 1620}}{2}};$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{42 + \sqrt{1620}} &= \sqrt{\frac{42 + \sqrt{144}}{2}} + \sqrt{\frac{42 - \sqrt{144}}{2}}; \\
 \sqrt{42 + \sqrt{1620}} &= \sqrt{\frac{42 + 12}{2}} + \sqrt{\frac{42 - 12}{2}}; \\
 \sqrt{342 + \sqrt{1620}} &= \sqrt{\frac{54}{2}} + \sqrt{\frac{30}{2}}; \\
 \sqrt{42 + \sqrt{1620}} &= \sqrt{27} + \sqrt{15}; \\
 \sqrt{42 + \sqrt{1620}} &= 3\sqrt{3} + \sqrt{15}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Substituindo (5) em (4), temos que a altura da pirâmide é igual a

$$H = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12}a. \tag{6}$$

Como a base da pirâmide é um triângulo equilátero, a área desse triângulo é dada por  $\mathcal{A}(\Delta_{\text{equilátero}}) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ . Assim, empregando (6), o volume da pirâmide pode ser expresso por:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}(\text{pirâmide triangular}) &= \frac{1}{3}\mathcal{A}(\Delta_{\text{equilátero}})H \\
 &= \frac{1}{3} \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \frac{a}{12} (3\sqrt{3} + \sqrt{15}) \\
 &= \frac{a^3}{144} (9 + 3\sqrt{5}) \\
 &= \frac{\sqrt{5} + 3}{48}a^3.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Substituindo (7) em (2), concluímos que o volume do icosaedro regular é igual a:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}(\text{icosaedro regular}) &= 20\mathcal{V}(\text{pirâmide triangular}) \\
 &= 20 \frac{a^3}{48} (3 + \sqrt{5}) \\
 &= \frac{5(\sqrt{5} + 3)}{12}a^3.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Logo, o volume do icosaedro regular é dado por

$$\mathcal{V}(\text{icosaedro regular}) = \frac{5(\sqrt{5} + 3)}{12}a^3,$$

onde  $a$  é a medida da aresta do poliedro.

### 3 Volume do icosaedro truncado

O icosaedro truncado é um poliedro Arquimediano (SILVA;NÓS, 2018), composto por 60 vértices, 90 arestas e 32 faces regulares, sendo 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais, todas regulares, como ilustra a Figura 5(a). A Figura 5(b) mostra uma bola de futebol e a Figura 5(c) o formato de uma molécula de carbono, ambas representativas do icosaedro truncado.



Figura 5: Icosaedro truncado: (a) esqueleto do sólido; (b) bola de futebol; (c) estrutura da molécula de carbono (TURBOSQUID, 2019).

No processo de truncamento do icosaedro regular, são removidas, a partir de cada um dos 12 vértices, pirâmides regulares congruentes de base pentagonal, como mostra a Figura 6.

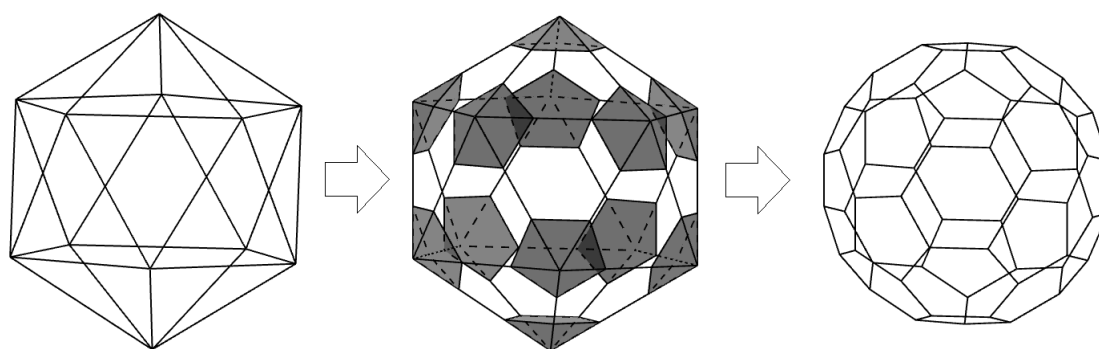


Figura 6: Truncamento do icosaedro regular.

Dessa forma, o volume do icosaedro truncado é dado por

$$\mathcal{V}(\text{icosaedro truncado}) = \mathcal{V}(\text{icosaedro regular}) - 12\mathcal{V}(\text{pirâmide pentagonal}). \quad (9)$$

Para estabelecer as dimensões das pirâmides retiradas, consideramos inicialmente o triângulo equilátero das faces do icosaedro regular. Assim, quando truncamos o icosaedro regular, a face hexagonal do icosaedro truncado é definida como na Figura 7(a), onde as partes sombreadas são as partes removidas. Calculando a medida de  $x$  e dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , ilustrados na Figura 7(b), concluímos que as arestas laterais das pirâmides removidas têm a mesma medida  $a$  das arestas do icosaedro truncado (SILVA;NÓS, 2018). Portanto, a pirâmide removida é a pirâmide da Figura 8.

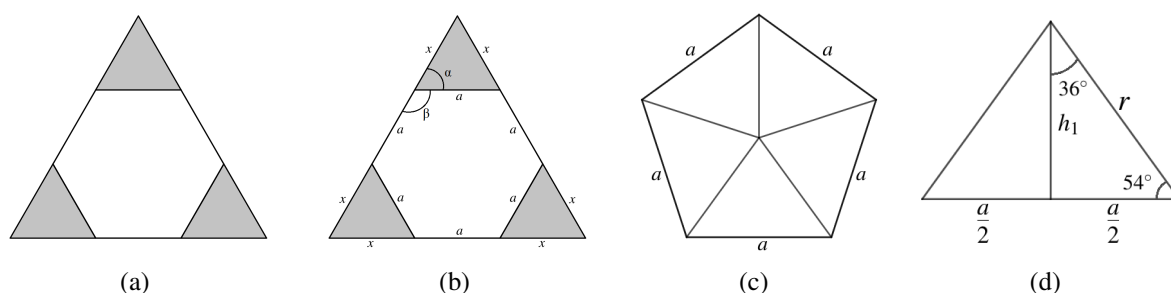


Figura 7: Icosaedro truncado: (a) face hexagonal a partir da face triangular do icosaedro regular; (b) ângulos e medidas na face triangular do icosaedro regular e na face hexagonal do icosaedro truncado; (c) base da pirâmide removida do icosaedro regular; (d) triângulo isósceles que compõe a base da pirâmide removida do icosaedro regular.

Para calcular o volume dessa pirâmide, temos que calcular primeiramente a área do pentágono regular. Para tanto, dividimos o pentágono regular, a partir do centro, em 5 triângulos isósceles congruentes, ilustrados na Figura 7(c). No cálculo da área desse triângulo isósceles, precisamos determinar a medida da altura  $h_1$ , ilustrada na Figura 7(d). No cálculo de  $h_1$ , podemos utilizar  $tg(36^\circ)$  ou  $cos(54^\circ)$ .

Empregando os resultados deduzidos em Nós, Saito e Santos (2017), temos que

$$\cos(36^\circ) = \frac{\sqrt{5} + 1}{4},$$

e, como  $\sin^2(36^\circ) + \cos^2(36^\circ) = 1$ ,

$$\sin(36^\circ) = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}.$$

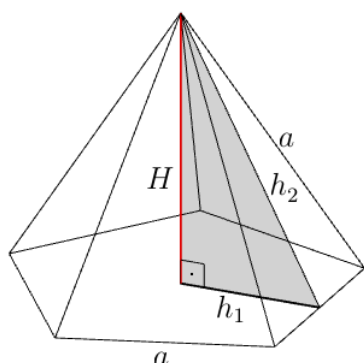


Figura 8: Pirâmide pentagonal removida a partir dos vértices do icosaedro regular.

Assim:

$$tg(36^\circ) = \frac{\sin(36^\circ)}{\cos(36^\circ)} = \frac{\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}}{\frac{1 + \sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} \frac{4}{1 + \sqrt{5}};$$

$$tg(36^\circ) = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{4}{6 + 2\sqrt{5}} \frac{5 - \sqrt{5}}{2}};$$

$$tg(36^\circ) = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \frac{3 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}};$$

$$tg(36^\circ) = \sqrt{\frac{20 - 8\sqrt{5}}{4}};$$

$$\operatorname{tg}(36^\circ) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}. \quad (10)$$

Empregando (10), obtemos para  $h_1$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(36^\circ) &= \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{h_1}; \\ \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} &= \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{h_1}; \\ h_1 &= \frac{a}{2\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}; \\ h_1 &= \frac{a}{2\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}} \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}; \\ h_1 &= \frac{a\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2\sqrt{25 - 20}}; \\ h_1 &= \frac{a\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}; \\ h_1 &= \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{10} a. \end{aligned} \quad (11)$$

Dessa forma, a área do pentágono regular, base da pirâmide removida dos vértices do icosaedro regular, é dada, com o uso de (11), por:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\text{pentágono regular}) &= 5 \frac{1}{2} a h_1 \\ &= 5 \frac{1}{2} a \frac{a\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{10} \\ &= \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{4} a^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Falta-nos ainda determinar a altura  $H$  da pirâmide. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de catetos  $H$  e  $h_1$  e cuja hipotenusa  $h_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$  é a altura da face lateral da pirâmide - Figura 8, temos, utilizando (11), que:

$$\begin{aligned} h_2^2 &= H^2 + h_1^2; \\ \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 &= H^2 + \left(\frac{a\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{10}\right)^2; \\ H^2 &= \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2(25 + 10\sqrt{5})}{100}; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 H^2 &= \frac{a^2 (75 - 25 - 10\sqrt{5})}{100}; \\
 H^2 &= \frac{a^2 (50 - 10\sqrt{5})}{100}; \\
 H &= \frac{\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}{10} a.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Agora, podemos determinar com (12) e (13) o volume da pirâmide. Logo:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}(\text{pirâmide pentagonal}) &= \frac{1}{3} \mathcal{A}(\text{pentágono regular}) H \\
 &= \frac{1}{3} \frac{a^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{4} \frac{a \sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}{10} \\
 &= \frac{a^3 \sqrt{(25 + 10\sqrt{5})(50 - 10\sqrt{5})}}{120} \\
 &= \frac{a^3 \sqrt{750 + 250\sqrt{5}}}{120} \\
 &= \frac{5a^3 \sqrt{30 + 10\sqrt{5}}}{120} \\
 &= \frac{\sqrt{30 + 10\sqrt{5}}}{24} a^3.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Temos um radical duplo em (14), o qual pode ser escrito como  $\sqrt{30 + 10\sqrt{5}} = \sqrt{30 + \sqrt{500}}$ . Aplicando a transformação (1), com  $A = 30$  e  $B = 500$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{30 + \sqrt{500}} &= \sqrt{\frac{30 + \sqrt{30^2 - 500}}{2}} + \sqrt{\frac{30 - \sqrt{30^2 - 500}}{2}}; \\
 \sqrt{30 + \sqrt{500}} &= \sqrt{\frac{30 + \sqrt{400}}{2}} + \sqrt{\frac{30 - \sqrt{400}}{2}}; \\
 \sqrt{30 + \sqrt{500}} &= \sqrt{\frac{30 + 20}{2}} + \sqrt{\frac{30 - 20}{2}}; \\
 \sqrt{30 + \sqrt{500}} &= \sqrt{\frac{50}{2}} + \sqrt{\frac{10}{2}}; \\
 \sqrt{30 + \sqrt{500}} &= \sqrt{25} + \sqrt{5}; \\
 \sqrt{30 + \sqrt{500}} &= 5 + \sqrt{5}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Substituindo (15) em (14), temos que o volume da pirâmide removida é dado por

$$\mathcal{V}(\text{pirâmide pentagonal}) = \frac{\sqrt{5} + 5}{24} a^3. \quad (16)$$

Para calcularmos o volume do icosaedro truncado, devemos determinar o volume do icosaedro regular. Como as arestas do icosaedro truncado têm medida  $a$  e as arestas das pirâmides removidas também medem  $a$ , então a aresta do icosaedro regular tem medida  $3a$  e, por (8), o volume do icosaedro regular é igual a:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\text{icosaedro regular}) &= \frac{5(3a)^3}{12} (3 + \sqrt{5}) \\ &= \frac{45(3 + \sqrt{5})}{4} a^3. \end{aligned} \quad (17)$$

Assim, substituindo (16) e (17) em (9), podemos finalmente deduzir o volume do icosaedro truncado:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\text{icosaedro truncado}) &= \mathcal{V}(\text{icosaedro regular}) - 12\mathcal{V}(\text{pirâmide pentagonal}) \\ &= \frac{45a^3}{4} (3 + \sqrt{5}) - 12 \frac{a^3}{24} (5 + \sqrt{5}) \\ &= \frac{a^3}{4} (135 + 45\sqrt{5}) - \frac{a^3}{2} (5 + \sqrt{5}) \\ &= \frac{a^3 (135 + 45\sqrt{5} - 10 - 2\sqrt{5})}{4} \\ &= \frac{43\sqrt{5} + 125}{4} a^3. \end{aligned}$$

Portanto, o volume do icosaedro truncado é dado por

$$\mathcal{V}(\text{icosaedro truncado}) = \frac{43\sqrt{5} + 125}{4} a^3,$$

onde  $a$  é a medida da aresta do poliedro.

## 4 Volume do icosaedro triakis

O icosaedro triakis pode ser obtido por acumulação (SILVA;NÓS, 2018) do icosaedro regular ao acoplarmos uma pirâmide triangular em cada face, como na Figura 9. Dessa forma, o volume do icosaedro triakis é dado por

$$\mathcal{V}(\text{icosaedro triakis}) = \mathcal{V}(\text{icosaedro regular}) + 20\mathcal{V}(\text{pirâmide triangular}). \quad (18)$$

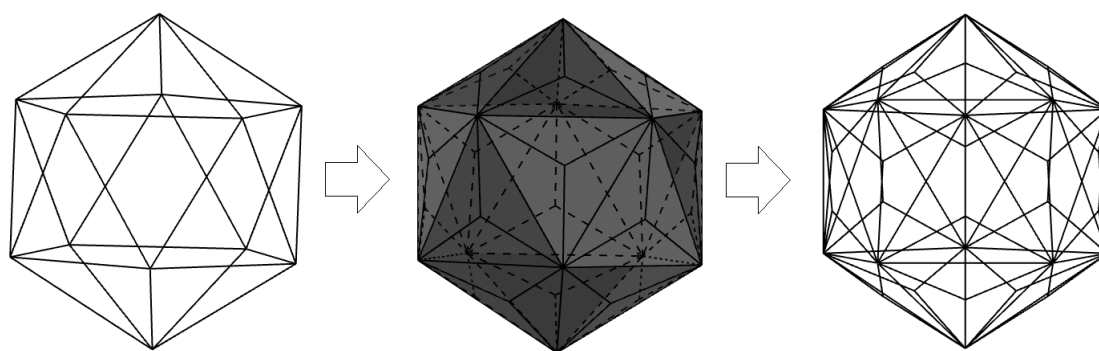


Figura 9: Icosaedro triakis obtido por acumulação do icosaedro regular.

O icosaedro triakis é um poliedro de Catalan (SILVA;NÓS, 2018), composto por 60 faces, 90 arestas e 32 vértices. As faces do icosaedro triakis são triângulos isósceles e as arestas têm dois comprimentos:

1. as 30 maiores são as arestas do icosaedro regular sobre cujas faces se faz a acumulação;
2. as 60 menores são as arestas laterais das pirâmides triangulares acopladas às faces do icosaedro regular na acumulação.

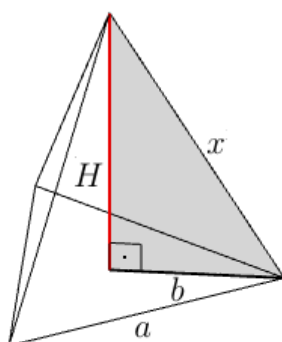


Figura 10: Pirâmide triangular da acumulação do icosaedro regular.

A pirâmide triangular da acumulação tem a forma e as dimensões da pirâmide ilustrada na Figura 10, onde  $a$  é a medida da aresta do icosaedro regular e  $x$  é a medida da aresta lateral da pirâmide acoplada. Para calcular o volume dessa pirâmide, precisamos estabelecer uma relação entre as arestas curtas e as arestas longas. De acordo com Wolfram MathWorld (2019), ao formarmos o icosaedro triakis a partir do seu dual (SILVA;NÓS, 2018), o dodecaedro truncado, com aresta unitária, obtemos um icosaedro triakis com a maior aresta e a menor aresta medindo, respectivamente,  $\frac{5 + \sqrt{5}}{2}$  e

$$\frac{5(7 + \sqrt{5})}{22}.$$

Considerando a aresta maior com medida arbitrária  $a$ , temos, por semelhança de triângulos, que:

$$\frac{a}{x} = \frac{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}{\frac{5(7 + \sqrt{5})}{22}} = \frac{11(5 + \sqrt{5})7 - \sqrt{5}}{5(7 + \sqrt{5})7 - \sqrt{5}};$$

$$\frac{a}{x} = \frac{11(30 + 2\sqrt{5})}{5 \cdot 44} = \frac{15 + \sqrt{5}}{10};$$

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{10a}{15 + \sqrt{5}} \frac{15 - \sqrt{5}}{15 - \sqrt{5}}; \\
 x &= \frac{10(15 - \sqrt{5})}{220} a; \\
 x &= \frac{15 - \sqrt{5}}{22} a.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Sabemos que a base da pirâmide triangular acoplada é um triângulo equilátero. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo da Figura 10, de hipotenusa  $x$  e catetos  $b = \frac{\sqrt{3}}{3}a$  e  $H$ , obtemos, usando (19):

$$\begin{aligned}
 x^2 &= H^2 + b^2; \\
 \left(\frac{15 - \sqrt{5}}{22} a\right)^2 &= H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2; \\
 H^2 &= \frac{230 - 30\sqrt{5}}{484} a^2 - \frac{a^2}{3}; \\
 H^2 &= \frac{206 - 90\sqrt{5}}{484.3} a^2; \\
 H &= \frac{\sqrt{206 - 90\sqrt{5}}}{22\sqrt{3}} a \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}; \\
 H &= \frac{\sqrt{618 - 270\sqrt{5}}}{66} a.
 \end{aligned} \tag{20}$$

O radical duplo em (20) pode ser escrito como

$$\sqrt{618 - 270\sqrt{5}} = \sqrt{618 - \sqrt{364500}}. \tag{21}$$

Empregando a relação (1) para transformar o radical duplo (21), com  $A = 618$  e  $B = 364500$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{618 - \sqrt{364500}} &= \sqrt{\frac{618 + \sqrt{618^2 - 364500}}{2}} - \sqrt{\frac{618 - \sqrt{618^2 - 364500}}{2}}; \\
 \sqrt{618 - \sqrt{364500}} &= \sqrt{\frac{618 + \sqrt{17424}}{2}} - \sqrt{\frac{618 - \sqrt{17424}}{2}}; \\
 \sqrt{618 - \sqrt{364500}} &= \sqrt{\frac{618 + 132}{2}} - \sqrt{\frac{618 - 132}{2}}; \\
 \sqrt{618 - \sqrt{364500}} &= \sqrt{\frac{750}{2}} - \sqrt{\frac{486}{2}}; \\
 \sqrt{618 - \sqrt{364500}} &= \sqrt{375} - \sqrt{243};
 \end{aligned}$$

$$\sqrt{618 - \sqrt{364500}} = 5\sqrt{15} - 9\sqrt{3}. \quad (22)$$

Substituindo (22) em (20), temos que:

$$H = \frac{5\sqrt{15} - 9\sqrt{3}}{66}a. \quad (23)$$

A base da pirâmide acoplada ao icosaedro regular é um triângulo equilátero. Assim, usando (23), temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\text{pirâmide triangular}) &= \frac{1}{3} \mathcal{A}(\Delta \text{ equilátero})H \\ &= \frac{1}{3} \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \frac{5\sqrt{15} - 9\sqrt{3}}{66} a \\ &= \frac{a^3}{792} (5\sqrt{45} - 27) \\ &= \frac{5\sqrt{5} - 9}{264} a^3. \end{aligned} \quad (24)$$

O volume do icosaedro regular de aresta  $a$  é dado por (8). Substituindo (8) e (24) em (18), concluímos que o volume do icosaedro triakis é igual a:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\text{icosaedro triakis}) &= \mathcal{V}(\text{icosaedro regular}) + 20\mathcal{V}(\text{pirâmide triangular}) \\ &= \frac{5(\sqrt{5} + 3)}{12} a^3 + 20 \frac{5\sqrt{5} - 9}{264} a^3 \\ &= \frac{5(\sqrt{5} + 3)}{12} a^3 + \frac{5(5\sqrt{5} - 9)}{66} a^3 \\ &= \frac{105\sqrt{5} + 75}{132} a^3 = \frac{5(7\sqrt{5} + 5)}{44} a^3. \end{aligned} \quad (25)$$

Logo, o volume do icosaedro triakis é dado por

$$\mathcal{V}(\text{icosaedro triakis}) = \frac{5(7\sqrt{5} + 5)}{44} a^3,$$

onde  $a$  é a medida da maior aresta do poliedro (ou a medida da aresta do icosaedro regular).

Podemos também determinar o volume do icosaedro triakis a partir da medida de sua menor aresta  $x$ . Para tal, expressamos  $a$  em função de  $x$ . De (19), temos que:

$$a = \frac{\sqrt{5} + 15}{10}x. \quad (26)$$

Substituindo (26) em (25), obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\text{icosaedro triakis}) &= \frac{35\sqrt{5} + 25}{44} \left( \frac{\sqrt{5} + 15}{10}x \right)^3 \\ &= \frac{35\sqrt{5} + 25}{44} \frac{230 + 30\sqrt{5}}{100} \frac{\sqrt{5} + 15}{10}x^3 \\ &= \frac{35\sqrt{5} + 25}{44} \frac{90 + 17\sqrt{5}}{25}x^3 \\ &= \frac{143\sqrt{5} + 209}{44}x^3 \\ &= \frac{13\sqrt{5} + 19}{4}x^3. \end{aligned} \quad (27)$$

Logo, o volume do icosaedro triakis é dado por

$$\mathcal{V}(\text{icosaedro triakis}) = \frac{13\sqrt{5} + 19}{4}x^3,$$

onde  $x$  é a medida da menor aresta do poliedro (ou a aresta lateral da pirâmide triangular acoplada na acumulação do icosaedro regular).

## 5 Volume da pirâmide pentagonal giroalongada

A pirâmide pentagonal giroalongada (J11) é um poliedro de Johnson (SILVA;NÓS, 2018), composto por 16 faces, 25 arestas e 11 vértices, sendo 15 faces triangulares e uma face pentagonal, todas regulares, como ilustra a Figura 11.

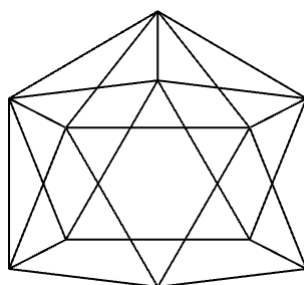


Figura 11: Pirâmide pentagonal giroalongada (J11).

Podemos decompor a pirâmide pentagonal giroalongada em dois poliedros: uma pirâmide pentagonal e um antiprisma ou prismatóide pentagonal, como mostra a Figura 12.

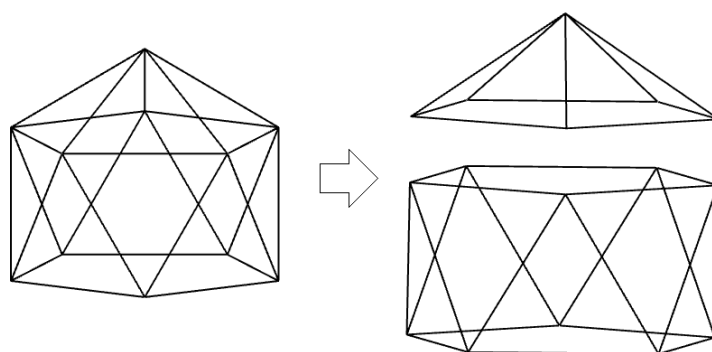


Figura 12: Decomposição da pirâmide pentagonal giroalongada em um antiprisma pentagonal e uma pirâmide pentagonal.

Contudo, nesta decomposição temos que calcular o volume de um antiprisma (WOLFRAM MATHWORLD, 2019), o que é uma tarefa complexa. Porém, a pirâmide pentagonal giroalongada também pode ser obtida retirando-se uma pirâmide pentagonal regular de um icosaedro regular, como ilustra a Figura 13.

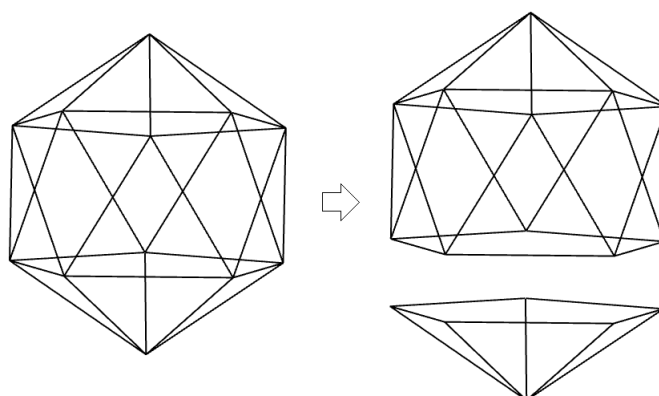


Figura 13: Decomposição do icosaedro regular em uma pirâmide pentagonal giroalongada e uma pirâmide pentagonal.

Dessa forma, o volume da pirâmide pentagonal giroalongada é dado por:

$$\mathcal{V}(\text{pirâmide pentagonal giroalongada}) = \mathcal{V}(\text{icosaedro regular}) - \mathcal{V}(\text{pirâmide pentagonal}). \quad (28)$$

Na segunda decomposição, a pirâmide pentagonal é a pirâmide ilustrada na Figura 8, cujo volume é dado por (16). Como também já calculamos o volume do icosaedro regular em (8), concluímos que o volume da pirâmide pentagonal giroalongada de aresta  $a$  é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\text{pirâmide pentagonal giroalongada}) &= \mathcal{V}(\text{icosaedro regular}) - \mathcal{V}(\text{pirâmide pentagonal}) \\ &= \frac{5(\sqrt{5} + 3)}{12}a^3 - \frac{\sqrt{5} + 5}{24}a^3 \\ &= \frac{9\sqrt{5} + 25}{24}a^3. \end{aligned} \quad (29)$$

Portanto, o volume da pirâmide pentagonal giroalongada é dado por

$$\mathcal{V}(\text{pirâmide pentagonal giroalongada}) = \frac{9\sqrt{5} + 25}{24}a^3,$$

onde  $a$  é a medida da aresta do poliedro.

Subtraindo de (29) o volume da pirâmide pentagonal determinado em (16), obtemos o volume do antiprisma pentagonal. Dessa forma, o volume do antiprisma pentagonal de aresta  $a$  é dado por

$$\mathcal{V}(\text{antiprisma pentagonal}) = \frac{2\sqrt{5} + 5}{6}a^3.$$

## 6 Volume do icosaedro tridiminuído

O icosaedro tridiminuído (J63) é um poliedro de Johnson (SILVA;NÓS, 2018), composto por 8 faces, 15 arestas e 9 vértices, sendo 5 faces triangulares e 3 faces pentagonais, todas regulares. O icosaedro tridiminuído pode ser obtido retirando-se três pirâmides pentagonais regulares de um icosaedro regular, como ilustra a Figura 14.

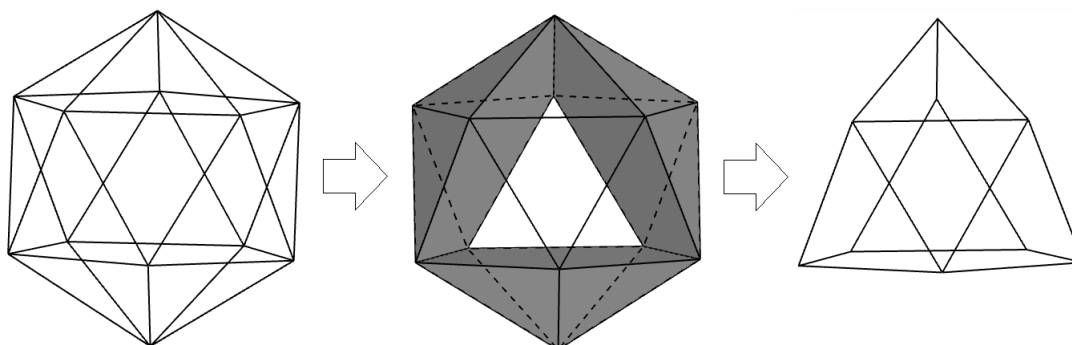


Figura 14: Icosaedro tridiminuído (J63) obtido a partir da decomposição do icosaedro regular.

Assim, o volume do icosaedro tridiminuído é dado por:

$$\mathcal{V}(\text{icosaedro tridiminuído}) = \mathcal{V}(\text{icosaedro regular}) - 3\mathcal{V}(\text{pirâmide pentagonal}). \quad (30)$$

A pirâmide pentagonal é a pirâmide ilustrada na Figura 8, cujo volume é dado por (16), enquanto que o volume do icosaedro regular é dado por (8). Logo, concluímos que o volume do icosaedro tridiminuído de aresta  $a$  é igual a:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\text{icosaedro tridiminuído}) &= \mathcal{V}(\text{icosaedro regular}) - 3\mathcal{V}(\text{pirâmide pentagonal}) \\ &= \frac{5(\sqrt{5} + 3)}{12}a^3 - 3\frac{\sqrt{5} + 5}{24}a^3 \\ &= \frac{7\sqrt{5} + 15}{24}a^3. \end{aligned}$$





Portanto, o volume do icosaedro tridiminuído é dado por

$$\mathcal{V}(\text{icosaedro tridiminuído}) = \frac{7\sqrt{5} + 15}{24}a^3,$$

onde  $a$  é a medida da aresta do poliedro.

## 7 Conclusões

Aplicamos neste trabalho a conversão de radicais duplos em radicais simples no cálculo do volume dos poliedros convexos icosaedro regular, icosaedro truncado, icosaedro triakis e pirâmide pentagonal giroalongada, representativos, respectivamente, das seguintes classes de poliedros convexos: poliedros de Platão, poliedros Arquimedianos, poliedros de Catalan e poliedros de Johnson. Empregamos também o GeoGebra 3D para compor e decompor poliedros convexos, estabelecendo assim estratégias para o cálculo do volume. Evidenciamos que a conversão de radicais simplifica as expressões para o volume e complementamos, dessa forma, o trabalho de Nós, Saito e Santos (2017) e de Silva e Nós (2018).

Ressaltamos que todos os volumes calculados conferem com a escassa literatura sobre o tema, exceto o volume do icosaedro triakis. O volume desse poliedro em função da maior aresta (25) confere com Rechneronline (2019), enquanto que o volume em função da menor aresta (27) confere com Wolfram Alpha (2019) e difere do apresentado em Wolfram MathWorld (2019).

O presente trabalho contribui às referências em Língua Portuguesa sobre o tema e esperamos que o mesmo motive os professores de matemática da Educação Básica e do Ensino Superior a explorar o cálculo do volume de poliedros convexos empregando um aplicativo de geometria dinâmica.

## Referências bibliográficas

COXETER, H. S. M. **Regular polytopes**. 3rd. ed. New York: Dover, 1973.

GEOGEBRA. **GeoGebra 3D graphing calculator**. 2018. Disponível em: <https://www.geogebra.org/3d?lang=pt-BR>. Acesso em: 29 jul. 2019.

LIMA, E. L. **Medida e forma em geometria**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

NÓS, R. L.; SAITO, O. H.; SANTOS, M. A. dos. Geometria, radicais duplos e a raiz quadrada de números complexos. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 11, p. 48-64, 2017.

NÓS, R. L.; SILVA, V. M. R. da. **Compondo/decompondo poliedros convexos com o GeoGebra 3D**. Trabalho apresentado ao 39<sup>o</sup> Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Uberlândia, 2019.

RECHNERONLINE. **Triakis icosahedron calculator**. 2019. Disponível em: <https://rechneronline.de/pi/triakis-icosahedron.php>. Acesso em: 12 ago. 2019.



---

SAITO, O. H.; NÓS, R. L.; SANTOS, M. A. dos. Radicais duplos e a raiz quadrada de um número complexo. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics**, v. 5, n. 1, p. 1-7, 2017.

SILVA, V. M. R. da; NÓS, R. L. **Calculando o volume de poliedros convexos**. Curitiba: CRV, 2018.

TURBOSQUID. **Carbon structures graphene collection**. 2019. Disponível em: <https://www.turbosquid.com/3d-models/nanotechnology-atom-carbon-graphene-3d-model/806317>. Acesso em: 9 ago. 2019.

WIKIPEDIA. **Capsomere**. 2018. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Capsomere>. Acesso em: 9 ago. 2019.

WOLFRAM ALPHA. **Triakis icosahedron**. 2019. Disponível em: <https://www.wolframalpha.com/input/?i=triakisicosahedron>. Acesso em: 23 ago. 2019.

WOLFRAM MATHWORLD. **Triakis icosahedron**. 2019. Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/TriakisIcosahedron.html>. Acesso em: 12 ago. 2019.