



Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 13, dez. 2018
Iniciação Científica

Micaeli Mendola Theodoro

UNESP - Universidade Estadual
Paulista "Júlio de Mesquita
Filho"
michaeltheodoro@gmail.com

Tiago de Carvalho

USP – Universidade de São
Paulo
tiagocarvalho@usp.br

Análise de retratos de fase

Analysis of phase portraits

Resumo

Apresentamos aqui como podem ser obtidos retratos de fase de campos vetoriais bidimensionais lineares e aplicaremos estes conceitos na obtenção do retrato de fase de um modelo não-linear tridimensional utilizado na modelagem do vírus HIV.

Palavras-chave: Retratos de fase. Sistemas dinâmicos. HIV.

Abstract

We present how are obtained phase portraits of linear two-dimensional vector fields and we apply these concepts in obtaining the phase portrait of a three-dimensional nonlinear model used in the modeling of the HIV virus

Keywords: Phase portrait. Dynamic systems. HIV.

1 Introdução

O objetivo principal deste trabalho é estudar a dinâmica de um sistema de equações diferenciais ordinárias modelando a evolução do vírus HIV. Embora o sistema em questão não seja linear, este irá satisfazer as hipóteses do Teorema de Grobman-Hartman 3.1 e desta forma a dinâmica do modelo não-linear será dada por aquela obtida através de sua linearização (isso numa vizinhança dos seus pontos de equilíbrio).

Para o entendimento do modelo linear tridimensional, podemos primeiro estudar sistemas lineares bidimensionais pois as propriedades dinâmicas dos modelos bidimensionais são análogas àquelas observadas em sistemas lineares de ordem superior.

Sendo assim, considere a equação diferencial

$$\frac{dX}{dt} = AX \quad (1)$$

onde A é uma matriz quadrada de ordem 2 e $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Definição 1.1 (Plano e retrato de fase). *Uma solução para (1) é uma função vetorial $X = \phi(t)$ que satisfaz a equação diferencial. Tal função pode ser considerada como uma representação paramétrica de uma curva no plano. Podemos olhar essa curva como um caminho ou trajetória, percorrida por uma partícula em movimento cuja velocidade $\frac{dX}{dt}$ é especificada pela equação diferencial. O plano \mathbb{R}^2 é chamado de **plano de fase** e um conjunto representativo de trajetórias é chamado de **retrato de fase** [1].*

Newton chamou a solução $X(t)$ de fluxo. Ele visualizava a solução de um sistema dinâmico como um fluxo no respectivo espaço de fases (plano de fase) [2].

A Equação (1) pode ser escrita na forma do sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy \end{aligned}$$

e reescrita na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

de modo que:

$$X' = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Nossa análise partirá dos autovalores obtidos a partir do polinômio característico da matriz A .

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc$$

Definição 1.2. *Seja um sistema linear homogêneo de primeira ordem com coeficientes constantes na forma matricial. Os pontos (x, y) do \mathbb{R}^2 que satisfazem $AX = 0$ são chamados de pontos críticos do sistema.*

Considerando $\det A \neq 0$, temos que $(0, 0)$ é o único ponto crítico. Sendo assim, vamos analisar os possíveis casos de raízes do polinômio característico da matriz A , já que nossos retratos de fase dependem diretamente de tais raízes.

2 Retratos de fase de EDOs com duas variáveis

2.1 Autovalores reais, distintos e de mesmo sinal

Neste caso temos dois autovalores λ_1 e λ_2 com v_1 e v_2 seus autovetores, satisfazendo a seguinte equação:

$$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$$

- Se λ_1 e λ_2 forem positivos, quando $t \rightarrow \infty$ teremos $x(t) \rightarrow \infty$. As trajetórias estarão divergindo do ponto crítico (nó repulsor);
- Se λ_1 e λ_2 forem negativos, quando $t \rightarrow \infty$ teremos $x(t) \rightarrow 0$. Neste caso, as trajetórias estarão convergindo para o ponto crítico (nó atrator).

Exemplo 2.1.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x \\ \frac{dy}{dt} &= 2y \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Polinômio característico:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

Logo, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$, conseqüentemente, $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (0, 1)$.

Como os dois autovalores são positivos e reais e os autoespaços são os eixos x e y , o ponto crítico é um nó repulsor. Tendo então o retrato de fase apresentado na Figura (1)

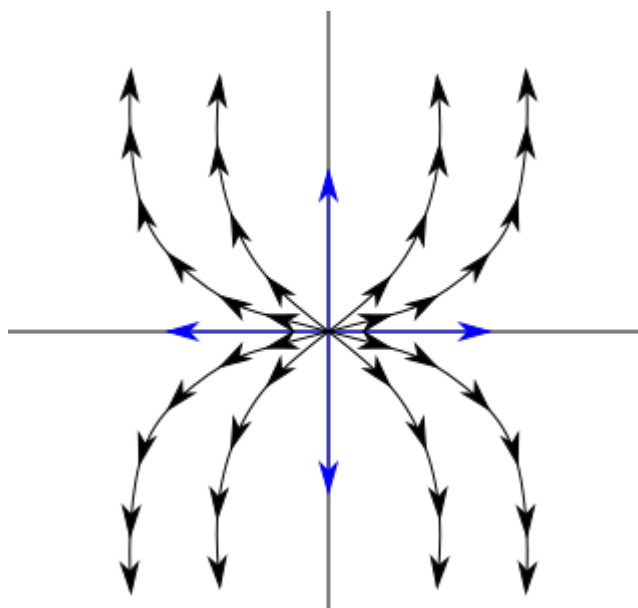


Figura 1: Nó repulsor

Exemplo 2.2.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 3x - y \\ \frac{dy}{dt} &= -2x + 2y\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Polinômio característico:

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

Logo, $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 1$, conseqüentemente, $v_1 = (1, -1)$ e $v_2 = (1, 2)$.

Os autoespaços são gerados pelos autovetores. O ponto crítico aqui é um nó repulsor. Observe ainda que a trajetória sempre vai tangenciar o autoespaço gerado pelo autovalor de menor módulo, como mostra a Figura (2)

Exemplo 2.3.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -3x + 2y \\ \frac{dy}{dt} &= -y\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

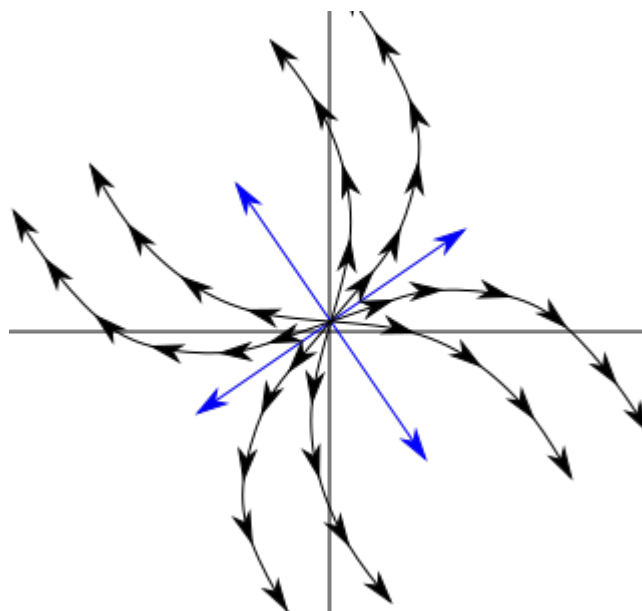


Figura 2: Nó repulsor com trajetórias tangenciando o autoespaço gerado pelo autovalor de menor módulo, no caso λ_2

Polinômio característico:

$$\begin{vmatrix} -3 - \lambda & 2 \\ 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3$$

Logo, $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -1$, conseqüentemente, $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (1, 1)$.

Os autoespaços serão retas passando pela origem com vetores diretores v_1 e v_2 . Então temos um nó atrator como vemos na Figura (3)

2.2 Autovalores reais com sinais opostos

Novamente a solução é dada por:

$$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$$

O ponto crítico é chamado de ponto de sela. A órbita no autoespaço gerado por λ_1 converge para a origem, enquanto a órbita do autoespaço gerado por λ_2 converge para longe da origem. As trajetórias fora dos autoespaços são hipérbolas.

Exemplo 2.4.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x \\ \frac{dy}{dt} &= 2y \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

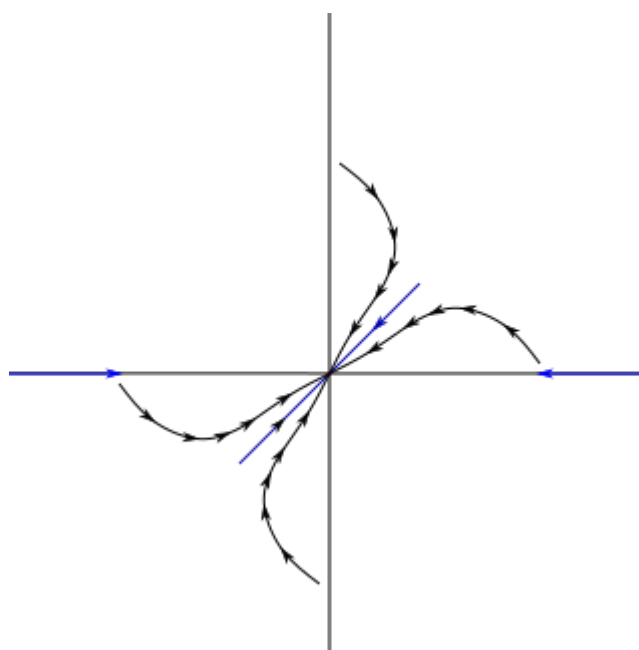


Figura 3: Ponto nó atrator

Polinômio característico:

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2$$

Logo, $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$, conseqüentemente, $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (0, 1)$.

Como v_1 está associado ao valor negativo a trajetória sobre o eixo x irá convergir para a origem, já como v_2 está associado ao valor positivo a trajetória no eixo y irá divergir da origem, como mostra a Figura (4)

Exemplo 2.5.

$$\frac{dx}{dt} = 3x - 2y$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x - 2y$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Polinômio característico:

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2$$

Logo, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$, conseqüentemente, $v_1 = (2, 1)$ e $v_2 = (1, 2)$.

Temos que os autoespaços serão retas passando pela origem com vetores diretores v_1 e v_2 . Então, o retrato de fase será como o apresentado na Figura (5).

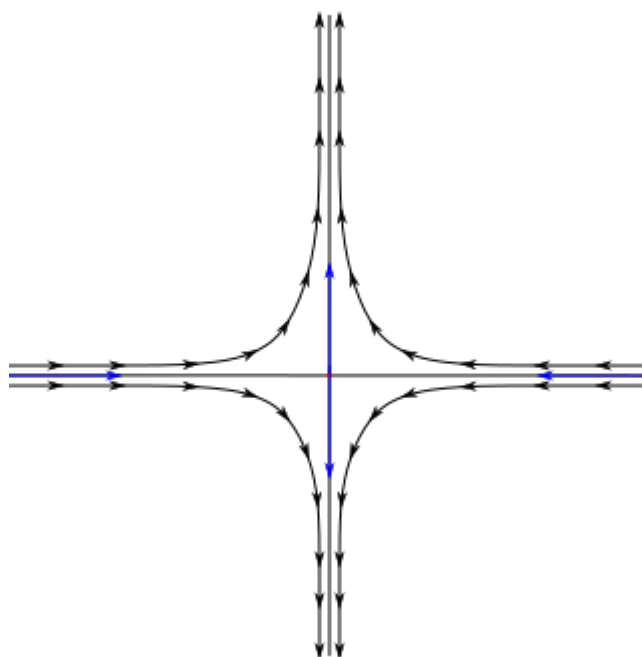


Figura 4: Ponto de sela

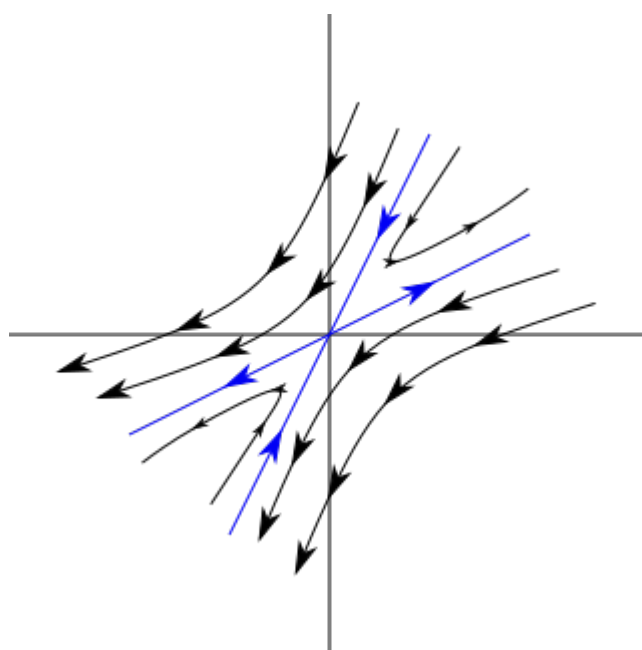


Figura 5: Ponto de sela

2.3 Autovalores reais e iguais

Sendo $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, temos dois casos:

- Dois autovetores independentes, a solução é dada por:

$$x(t) = v_1 c_1 e^{\lambda t} + v_2 c_2 e^{\lambda t},$$

onde λ é o autovalor e v_1 e v_2 são os autovetores independentes. A trajetória é uma reta que passa pela origem. Além disso, se $\lambda < 0$ a solução converge para $(0,0)$ quando $t \rightarrow \infty$ e se $\lambda > 0$ as soluções se afastam de $(0, 0)$ quando $t \rightarrow \infty$. Para este caso, o ponto crítico é chamado de nó próprio.

Exemplo 2.6.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x \\ \frac{dy}{dt} &= y\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Polinômio característico:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

Logo, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 1$. Como qualquer par de vetores v_1 e v_2 satisfaz a equação, temos o seguinte retrato de fase, já que λ é real e positivo (veja a Figura (6))

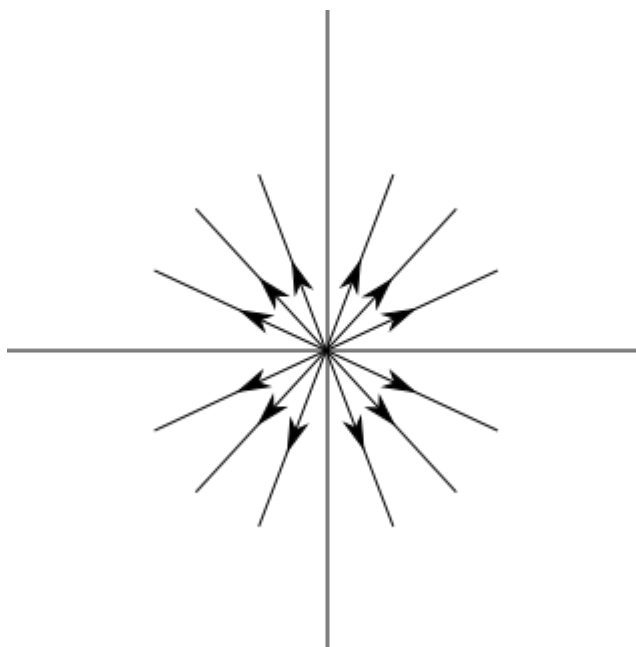


Figura 6: Trajetórias divergindo da origem

- Um autovalor independente. A solução é dada por:

$$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda t} + c_2 (v_1 t e^{\lambda t} + v_2 e^{\lambda t})$$

Com $(A - \lambda I)v_1 = v_2$. Independentemente de $t \rightarrow \infty$ ou $t \rightarrow -\infty$, o termo dominante da equação é $c_2 v_1 t e^{\lambda t}$. Porém, para valores positivos de t , todas as trajetórias tendem a origem tangenciando v_1 . Já para valores negativos de t , cada trajetória assíntota uma reta paralela a v_1 . Portanto, temos que as trajetórias dependem da posição de v_1 . Neste caso, o ponto crítico é chamado de nó impróprio.

Exemplo 2.7.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x + y \\ \frac{dy}{dt} &= y\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Polinômio característico:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

Temos, então, $\lambda_1 = 1$ e $v_1 = (1, 0)$. Assim quando $t \rightarrow \infty$ as trajetórias vão tangenciar v . Como verificamos na figura (7)

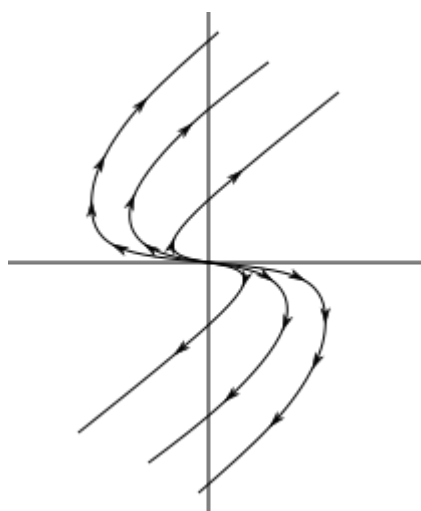


Figura 7: Nó impróprio

2.4 Autovalores Complexos

Considerando o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - by \\ \frac{dy}{dt} &= bx + ay\end{aligned}$$

Sendo $\lambda_1 = a + bi$ e $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = a - bi$, sabemos que em coordenadas polares $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$.

Derivando, temos:

$$x' = r'\cos\theta - r\sin\theta$$

$$y' = r'\sin\theta + r\cos\theta$$

Substituindo com a informação anterior de x' e y' , e os valores de x e y em coordenadas polares, temos:

$$r'\cos\theta - r\sin\theta = ar\cos\theta - br\sin\theta$$

$$r'\sin\theta + r\cos\theta = ar\sin\theta + br\cos\theta$$

Multiplicando a primeira por $\cos\theta$ e a segunda por $\sin\theta$, depois somando as duas obtemos:

$$r' = ar$$

Multiplicando a primeira por $-\sin\theta$ e a segunda por $\cos\theta$, depois somando-se as duas encontramos:

$$\theta' = b$$

Rearranjando e integrando dos dois lado, chegamos em:

$$r(t) = c_0 e^{at}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + bt$$

Observa-se que a é responsável pelo crescimento ou decrescimento do raio, enquanto b é responsável pela rotação das soluções em torno da origem. Constata-se que:

- $a = 0$, as órbitas podem ser circunferências;
- $a \neq 0$, as órbitas são espirais, se $a > 0$, as soluções espiralam para longe e se $a < 0$, elas espiralam para a origem;
- $b > 0$ a rotação é anti-horária e $b < 0$ rotação é horária;
- Seja $v_1 = \alpha + \beta i$ o vetor associado a $\lambda_1 = a + bi$, temos que:

$$x(t) = (\alpha + \beta i)e^{(a+bi)t} = (\alpha + \beta i)e^{at}(\cos bt + i\sin bt)$$

Exemplo 2.8.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{2} + y$$

$$\frac{dy}{dt} = -x - \frac{y}{2}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Polinômio característico:

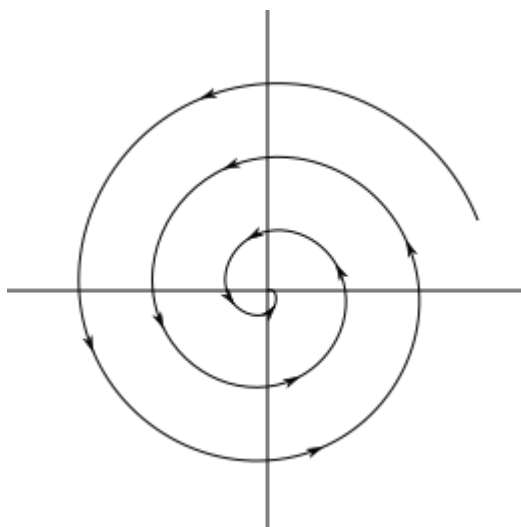


Figura 8: Espiral convergindo para a origem

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + \frac{5}{4},$$

ou seja, $\lambda_1 = -\frac{1}{2} - i$ $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + i$, então, $a = -\frac{1}{2}$ e $b = -1$, portanto $a < 0$ e $b < 0$ e as trajetórias serão espirais convergindo para a origem, como observamos na Figura (8).

Exemplo 2.9.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y \\ \frac{dy}{dt} &= x \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Polinômio característico:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

ou seja, $\lambda_1 = i$ $\lambda_2 = -i$, Como $a = 0$ e $b = 1 > 0$, temos que as órbitas serão elipses com centro na origem, com rotação no sentido anti-horário, como vemos na Figura(9).

Exemplo 2.10.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -4x \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

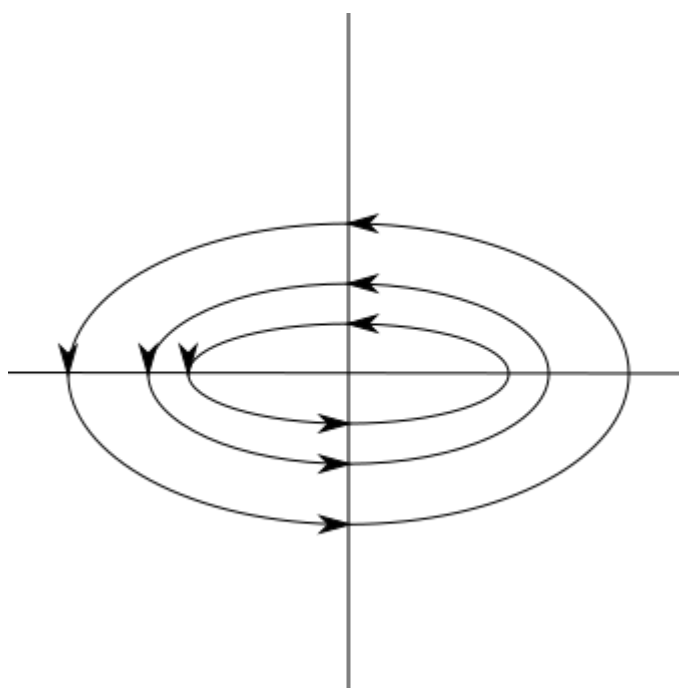


Figura 9: Elipses com rotação anti-horário

Polinômio característico:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

ou seja, $\lambda_1 = 2i$ $\lambda_2 = -2i$, temos que as órbitas serão elipses com centro na origem, com rotação no sentido horário, como vemos na Figura (10). Os autovetores são $v_1 = (1, \pm 2i)$.

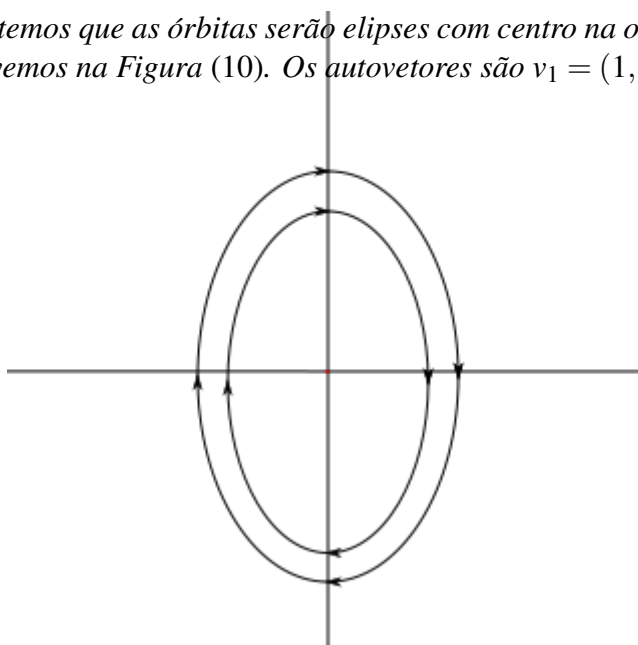


Figura 10: Elipses com rotação no sentido horário

2.5 Resultados obtidos

Para finalizar esta seção, temos abaixo uma tabela resumindo o que aqui foi descrito. Considerando $a > 0$ e $b > 0$.

Autovalores	Tipo de ponto crítico
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Nó repulsor
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Nó atrator
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Ponto de sela
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Nó próprio ou impróprio divergindo da origem
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Nó próprio ou impróprio convergindo para a origem
$\lambda_1 = a + bi, \lambda_2 = -a + bi$	Espiral divergindo da origem
$\lambda_1 = -a + bi, \lambda_2 = -a - bi$	Espiral convergindo para a origem
$\lambda_1 = bi, \lambda_2 = -bi$	Elipses de centro na origem

Tabela 1: Resumo de retratos de fase

2.5.1 Retratos de fase sob o ponto de vista do traço e determinante

Vamos chamar T de traço e Δ de determinante da matriz A , já mencionada anteriormente.

- Se $\Delta < 0$, então $\lambda_{1,2}$ são reais e de sinais opostos, o ponto de equilíbrio é uma sela.
- Se $\Delta > 0$ e $T^2 - 4\Delta > 0$, então $\lambda_{1,2}$ são reais e com mesmo sinal. Se $T > 0$ o ponto de equilíbrio é um nó instável. Se $T < 0$, então temos um nó estável.
- Se $\Delta > 0$ e $T^2 - 4\Delta < 0$, então $\lambda_{1,2}$ são complexos conjugados. Se $T > 0$ é um foco instável, se $T < 0$ é um foco assintoticamente estável e se $T = 0$ é um centro estável.
- Se $T^2 - 4\Delta = 0$ estão os nós impróprios.

3 Modelagem matemática aplicada ao HIV

3.1 Introdução

A modelagem matemática no caso de doenças, epidemias, vêm sendo utilizada com intuito de descrever a dinâmica do sistema da forma mais clara possível e condizente com a realidade, para poder prever como o sistema irá se comportar ao longo do tempo. Por exemplo, modelos matemáticos que buscam auxiliar no tratamento do câncer, para que médicos tenham um maior controle sobre a doença que segundo dados do INCA- Instituto Nacional de Câncer, leva 8.2 milhões de pessoas por ano a óbito.

Como em modelagem matemática basta trocar o pano de fundo, mas os problemas acabam sendo bem parecidos, nosso estudo inicial foi sobre modelos matemáticos que descrevem a dinâmica do HIV, encontramos modelos que tratam da dinâmica do HIV no nosso organismo e suas interações com as nossas células, e também foi encontrado um modelo que descreve a dinâmica populacional da epidemia do HIV.

Inicialmente precisamos compreender do que se trata o HIV, como veremos a seguir.

3.2 Teorema de Hartman-Grobman

Dada uma equação na forma:

$$x' = f(x), \quad (2)$$

os pontos onde $f(x) = 0$ são chamados de **pontos críticos** do sistema autônomo (2). [1]

Utilizamos como base para as nossas análises qualitativas o Teorema (3.1), que é de grande relevância para os estudos de sistemas de EDOs.

Teorema 3.1. [Hartman-Grobman para fluxos] "Seja $p \in \mathcal{U}$ um ponto estacionário hiperbólico de um campo de vetores $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^1 . Então existem vizinhanças \mathcal{V} de p e \mathcal{W} da origem e existe um homeomorfismo $H : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ que envia p em 0 e conjuga o fluxo de F restrito a \mathcal{V} ao fluxo do campo linear $A = DF(p)$ restrito a \mathcal{W} ." [3]

3.3 Por que o HIV assombra tanto a população?

O HIV se tornou uma pandemia global desde as notificações de seus primeiros casos em 1981. A transmissão viral se dá por [4]:

1. Uso de produtos ou seringas com sangue contaminado
2. Transmissão sexual
3. Mãe para o filho durante a gestação, nascimento ou durante a amamentação

HIV significa vírus da imunodeficiência humana, é um retrovírus (vírus com genoma de RNA), por isso ele sofre diversas mudanças genéticas. O HIV¹ é o causador da epidemia mundial da AIDS podendo ser dividido em três grupos: M, O e N. O grupo M é visto em larga escala e tem subtipos de A a J. No Brasil temos o subtipo B em abundância (80% das infecções), seguidos dos subtipos F e C (predominantes na região Sul). O HIV² ocorre na África Subsaariana região onde a doença evolui mais rapidamente.

No nosso sistema imunológico temos o sistema inato, em que o corpo reconhece algumas infecções e busca exterminá-las. Temos também o sistema adaptativo onde temos os anticorpos têm papel fundamental, a imunidade inata não reconhece todos os tipos de infecções, o adaptativo habilita o organismo a reconhecer e responder contra qualquer micróbio, mesmo que nunca tenha tido contato. Temos neste últimos linfócitos originados no timo, por isso, células T que são T-CD4 e T-CD8, estas últimas destroem as células infectadas e são fundamentais para combater infecções virais.

Quando o indivíduo é contaminado por HIV em concentração acima do que o sistema imunológico inato suporta, o vírus vai parar na corrente sanguínea, onde estão os linfócitos, células de defesa de nosso organismo.

A T-CD4 tem em sua superfície receptores para o HIV é por aí que o vírus penetra, se multiplicando e depois sendo responsável pela morte celular.

O sistema imunológico responde a esta infecção onde as T-CD4 são estimuladas por células que apresentam o antígeno que ativam as células B, que produzem e liberam anticorpos na corrente sanguínea para neutralizar o HIV.

O problema maior do HIV é que sua célula-alvo é justamente a responsável pela ativação de células B(para produzir anticorpos) e das células T-CD8 (responsáveis pela destruição das células infectadas).

Com o avanço da doença algumas infecções que aparentemente podem parecer inofensivas para uma pessoa não portadora do vírus HIV, faz com que o indivíduo soropositivo morra. [5]

Essas são as fases da infecção pelo vírus HIV:

1. Fase inicial de elevada viremia (presença do vírus no sangue) são os seis primeiros meses após a infecção.
2. Fase assintomática de baixa viremia e dura alguns anos
3. Vírus vence o sistema imunológico manifestando o comprometimento da resposta imunológica (fase sintomática)

O HIV se encaixa como uma chave na fechadura nos receptores das células T-CD4, injetando seu DNA viral e se reproduzindo até certo ponto onde há a quebra(lise) da células liberando mais vírus na corrente sanguínea.

A síndrome da imunodeficiência adquirida (AIDS) é uma das doenças infecciosas que mais mata no mundo segundo a OMS. A AIDS é mais comum onde a infraestrutura para prevenção e tratamento são precárias.

3.4 Modelo proposto por [6]

Em [6] observamos **modelos determinísticos** descrevendo a dinâmica do HIV. Em geral, um sistema determinístico é modelado analiticamente, isto só não ocorre quando o modelo se torna muito complexo envolvendo um grande número de variáveis ou de relações.

Os modelos determinísticos da dinâmica do HIV representam de forma satisfatória o período de estabilidade da infecção. Faremos a análise sobre dois modelos: com e sem a utilização de droga-terapia.

3.4.1 Construção do modelo básico

Em todos os modelos apresentados em [6] temos sempre presente três populações: a das células T-CD4 não infectadas, a das células T-CD4 infectadas e a de vírus livres. Essas três populações serão representadas, respectivamente, pelas variáveis T , T^* e V .

Parâmetros utilizados:

- s é um fator positivo pois representa a taxa de crescimento de células T-CD4+ a partir do timo ou da medula óssea. Se uma célula T-CD4 encontra um antígeno ao qual é específica, ela pode ser estimulada a proliferar. Para este modelo assume-se que todas as células T são específicas ao HIV.
- p é a taxa de crescimento das células T-CD4.
- d_T é a taxa de mortalidade natural das T-CD4.
- k é a taxa pela qual as células T CD4+ são infectadas pelo vírus.

- δ é a taxa de mortalidade das células infectadas após a replicação de novos vírus, onde novos vírus são introduzidos no sistema por meio da quebra das células T^* .
- k representa a taxa pela qual as células T-CD4 são infectadas por vírus livres, portanto envolve as populações V e T .
- c é a taxa de mortalidade do vírus.
- N é a quantidade vírus introduzidos por meio da quebra de células T^* .

Portanto, o modelo básico pode ser representado por esse sistema de EDOs:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = s + pT - d_T T - kVT \\ \frac{dT^*}{dt} = kVT - \delta T^* \\ \frac{dV}{dt} = N\delta T^* - cV \end{cases} \quad (3)$$

As condições iniciais, $T(0)$, $T^*(0)$ e $V(0)$, são usualmente tomadas próximas ao ponto de equilíbrio.

Utilizando o software Mathematica e os parâmetros contidos em [6], com os valores $c = 2,4$; $\delta = 0,24$, $d_T = 0,02$; $k = 2,4 \times 10^5$; $N = 1000$; $p = 0,03$; $s = 10$. Os pontos de equilíbrio são $P_0 = (-1000, 0, 0)$, o qual iremos desconsiderar, pois não existem populações negativas, e $P_* = (100, 45.8333, 4583.33)$ em que iremos analisar. Analisando a jacobiana no ponto P_* obtemos os autovalores: $\lambda_1 = -2,64938$, $\lambda_2 = -0,0453096 + 0,147858i$ e $\lambda_3 = -0,0453096 - 0,147858i$.

A partir do Teorema de Hartman-Grobman, como todos autovalores têm parte real negativa o ponto é localmente assintoticamente estável nesse caso.

Os autoespaços gerados são uma reta por λ_1 e um plano contendo um foco estável por λ_2 e λ_3 .

Tomando o autovetor $v_0 = (0,000941404, -0,00103909, 0,999999)$ associado ao autovalor puramente real, $v_1 = (-0,0105609, 0,0196192, 1,99967)$ e $v_2 = (0,0285519, 0,00123195, 0)$ associados aos autovalores complexos, supomos que o retrato de fase nas proximidades do ponto de equilíbrio seja como na Figura (11).

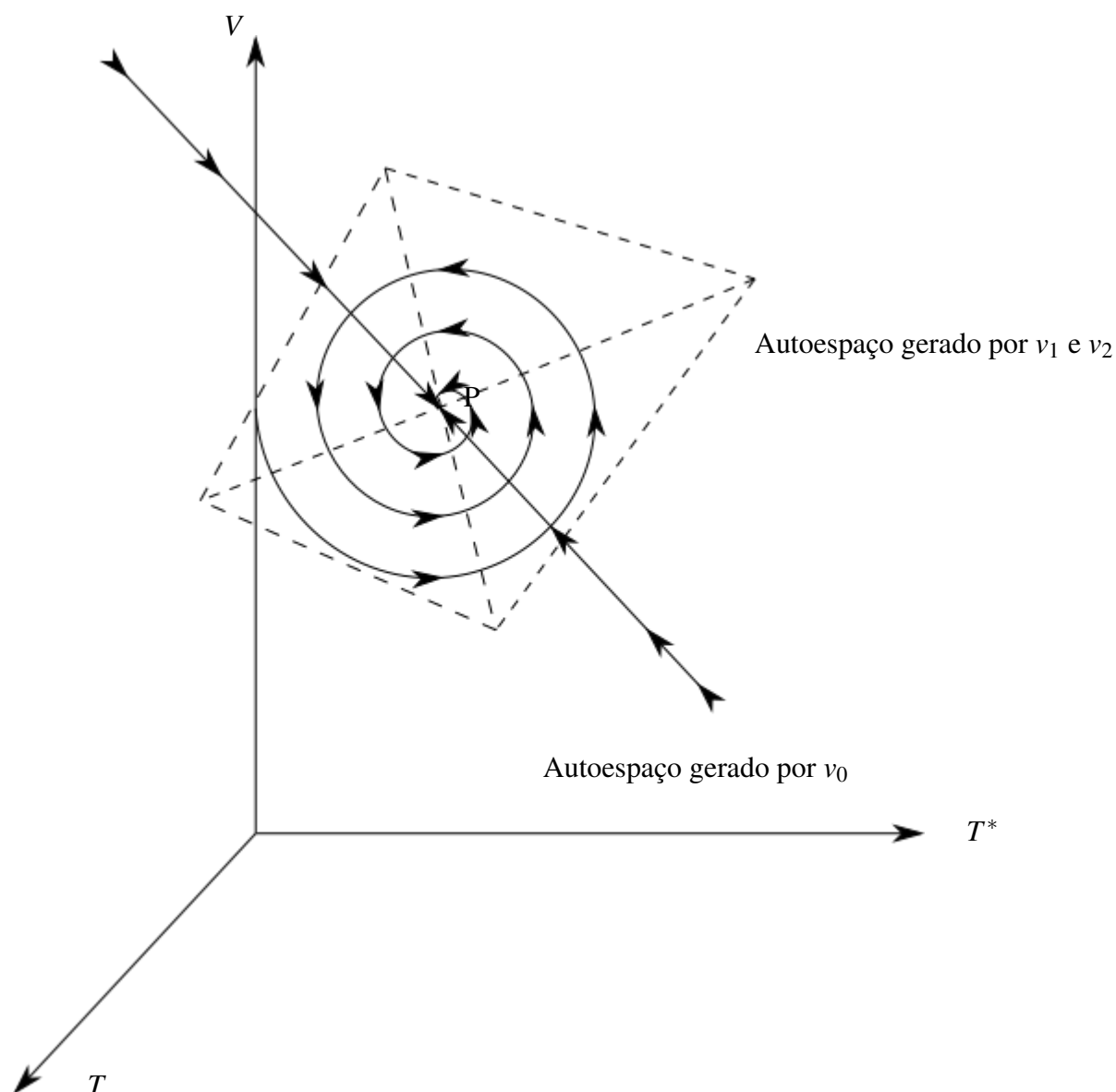


Figura 11: Possível retrato de fase do sistema (3)

4 Conclusão

Analisando a linearização do modelo para o vírus HIV (3), dada pelo Teorema de Grobman-Hartman 3.1, podemos utilizar os retratos de fase exibidos na Seção 2 para obtermos propriedades qualitativas a respeito do comportamento das trajetórias no modelo (3). Com as escolhas de valores dos parâmetros que fizemos, dada qualquer condição inicial nas células V , T e T^* , podemos concluir que, com o passar do tempo, a quantidade destas células irá convergir para um equilíbrio de co-existência em P_* .



Referências

- [1] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- [2] MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas dinâmicos**. 3. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.
- [3] ESPINAR, J.; VIANA, M.; **Equações diferenciais: teoria e prática**. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. Disponível em: <<http://edoimpa.br/Livro>>. Acesso em: 10 jun. 2018.
- [4] CAI, L. et al. Stability analysis of an HIV/AIDS epidemic model with treatment. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 229, n. 1, p. 313-323, 2009.
- [5] POLI, G. I.; YANG, H. M. Modelo matemático aplicado para imunologia de HIV. **Tema Tend. Mat. Apl. Comput.**, v. 7, n. 2, p. 327-335, 2006.
- [6] SILVA, L. B. **Estudo dos pontos de equilíbrio em modelos determinísticos da dinâmica do HIV**. 2005. 58 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharel em Matemática Aplicada e Computacional)- Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 2005.