



Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 13, dez. 2018

**Wedson Francelino Ribeiro
Noronha**

Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do
Ceará-IFCE
tadpnrdd@gmail.com.br

Francisco Régis Vieira Alves

Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do
Ceará-IFCE
fregis@gmx.fr

Sequência de Pell: propriedades e considerações epistemológicas

Pell sequence: Properties and epistemology considerations

Resumo

Exibimos no presente texto algumas possibilidades para formalização matemática da sequência numérica conhecida como *sequência de Pell*, bem como seu contexto histórico, intimamente relacionado com aproximações a $\sqrt{2}$. Ao longo do texto discutimos possíveis definições, tanto via recorrência linear, quanto a abordagem matricial, acompanhadas sempre de propriedades imediatas das mesmas. Apresentamos sempre que possível, extensões convenientes dos índices de que indexam a sequência, normalmente apresentados somente no campo dos naturais, para os inteiros. O viés epistemológico repousa na preocupação em explorar de forma explícita possíveis caminhos para a formalização dedutiva dos assuntos discutidos, conservando uma intenção exploratória, de inspiração heurística, sem, no entanto, descuidar do rigor matemático.

Palavras-chave: Sequência de Pell. Matrizes de Pell. Fórmula de Binet. Escada de Theon. Equação de Pell.

Abstract

We present in this paper some possibilities for mathematical formalization of the numerical sequence known as *Pell sequence*, as well as its historical context, closely related to approximations to $\sqrt{2}$. Throughout the text we discuss possible definitions, both via linear recurrence and matrix approach, always accompanied by their immediate properties. We present, whenever possible, convenient extensions of indexes that index the sequence, usually presented only in the field of natural, to integers. The epistemological bias rests on the concern to explicitly explore possible ways for the deductive formalization of the subjects discussed, retaining an exploratory intention, of heuristic inspiration, without, however, neglecting the mathematical rigor.

Keywords: Pell sequence. Pell's matrices. Binet's formula. Theon ladder. Pell's equation.



1 Introdução

A sequência de Pell, lembrada pelos termos $0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, \dots$ (sequência A000129 na OEIS¹) e pela equação de recorrência $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$ possui origens históricas muito antigas, relacionadas ao problema da aproximação de raízes e estreita aproximação com o objeto matemático conhecido como *equação de Pell*: $x^2 - dy^2 = \pm 1$.

A discutida sequência possui diversas propriedades similares as manifestadas por outras sequências definidas via recorrência linear de 2ª ordem (LIMA, 2016). Portanto, por vezes utilizaremos por vezes procedimentos inspirados em outras sequências de mesma natureza, como a *sequência de Fibonacci*, para resgatar e demonstrar propriedades pertinentes ao assunto discutido.², conhecida pela recorrência $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, tal que $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

Neste artigo, exibimos os aspectos históricos relacionados com a *sequência de Pell*, bem como propriedades de convergência relacionadas a tal sequência. Exibiremos também uma fórmula explícita para geração dos termos dessa sequência, sua relação com a convergência discutida e algumas manifestações matriciais capazes de substituir a definição original.

2 Primeiras definições e contexto histórico

Antes de mais nada, precisamos definir do que se trata a *sequência de Pell*, segundo Horadam (1965, 1971).

Definição 1. Dado $n \in \mathbb{N}$, chamamos de *sequência de Pell* a *sequência numérica obtida através da recorrência*:

$$\begin{cases} P_0 = 0; \\ P_1 = 1; \\ P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}; \end{cases}$$

A recorrência acima gera a solução $(0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, \dots)$ chamada de *sequência de Pell*, abreviadamente (P_n) , e o conjunto dos números que compõem tal sequência são chamados de *números de Pell*, denotados apenas por P_n . Utilizaremos indistintamente a terminologia *sequência de Pell* e a notação (P_n) , alternando-as no texto de modo conveniente, representando sempre a mesma sequência.

No momento, adotaremos a definição de sequência de Pell restrita para $n \in \mathbb{N}$, seguindo a tendência de outros autores, como Ercolano (1979), Horadam (1994), Voll (2010), Koshy (2014), Almeida (2014), Lima (2016), em considerar sequências/recorrências apenas em índices naturais. Horadam (1965) aborda recorrências lineares de 2ª ordem sob um ponto de vista geral, iniciando a discursão para índices naturais e extendendo em momento oportuno para $n \in \mathbb{Z}$. Já em Horadam (1971), a discursão admite logo de início uma definição para a (P_n) para índices inteiros. Por simplicidade de exposição, faremos tal como Horadam (1965), iniciando a discursão para $n \in \mathbb{N}$ e expandindo para $n \in \mathbb{Z}$ mais adiante, admitindo a partir daí a definição dada em Horadam (1971).

Koshy (2014) define essa mesma sequência utilizando $P_1 = 1$, $P_2 = 2$ e $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$, $n \in \mathbb{N}$. As duas definições são equivalentes, apenas observando que $P_2 = 2P_1 + P_0 \implies P_0 =$

¹On-Line Encyclopedia of Integer Sequences

²OEIS A000045

$P_2 - 2P_1 = 2 - 2 \cdot 1 = 0$. No entanto, como veremos posteriormente, é bastante conveniente definir a sequência a partir de P_0 . Isso simplifica certas extensões da definição da (P_n) , que faremos mais a frente, para $n \in \mathbb{Z}$ (HORADAM, 1965, 1971).

O nome Pell veio em atribuição ao matemático inglês John Pell (1611 - 1685), cuja imagem é lembrada na Figura 1, conhecido por sua natureza extremamente reservada, com pouca inclinação em comunicar seus métodos particulares (MALCOLM, 2000).

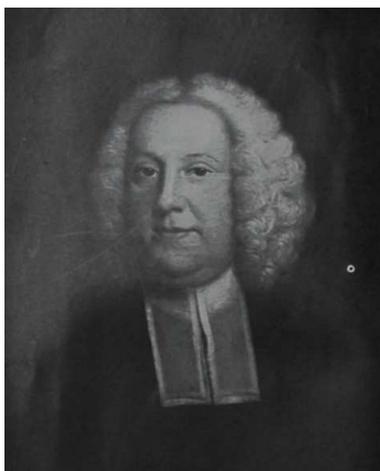


Figura 1 – John Pell (1611-1685)

Fonte: Google Imagens

John Pell publicou muito pouco. Apesar disso, era respeitado como um matemático competente e se tornou conhecido muito mais por correspondências com outros sábios europeus e atividades de naturezas diversas. As quase inexistentes publicações, os relatos acerca de sua competência e sua vasta correspondência tornam difícil determinar ao certo quais contribuições são genuinamente suas. Malcolm (2000) pontua que John Pell vivia em condições difíceis, constantemente sem dinheiro e recursos, sendo preso duas vezes por dívidas não quitadas. Isso seria uma possível explicação para tão poucas publicações em seu nome, apesar do reconhecimento da comunidade de matemáticos da época.

Na verdade, a história de como o sobrenome Pell chegou até a *sequência de Pell* é bastante instrutiva e está relacionada tanto a $\sqrt{2}$ como com a *equação de Pell*.

2.1 Origens Gregas, $\sqrt{2}$ e um acidente histórico

A explicação de como o sobrenome Pell nomeou a sequência definida mais acima está relacionada com a constatação de que, os números derivados dessa sequência são conhecidos desde a antiguidade, como parte de um antigo algoritmo para criar sucessivas aproximações a raiz de 2, conhecido como *escada de Theon*. Campos (2014) em sua dissertação, nos fornece a seguinte definição, de natureza recursiva:

Definição 2. Dadas as sequências v_n e q_n , com $n \geq 1$, chamamos de **escada de Theon** a recursão:³

³Campos (2014) utiliza y_n e x_n como notação para as sequências que aqui nomeamos respectivamente de q_n e v_n . Fizemos essa mudança de notação para manter a coerência e clareza entre os elementos matemáticos presentes no texto, de variadas origens, no entanto, conservando a concordância com o texto do citado autor.



$$v_n = v_{n-1} + q_{n-1} \quad (1)$$

$$q_n = v_{n-1} + v_n \quad (2)$$

com $v_1 = q_1 = 1$.

O objetivo de tal procedimento é encontrar razões que sirvam como boas aproximações ao valor de $\sqrt{2}$, tema de interesse da matemática do mundo antigo. De passagem, lembramos que Theon de Alexandria foi um matemático grego, nascido e membro da Biblioteca de Alexandria, pai de Hipácia, também matemática. Nós, os autores, não temos certeza se a *escada de Theon* foi uma contribuição original de Theon de Alexandria ou se o mesmo apenas compilou e formalizou conhecimentos já existentes na época.

Para ilustrar o procedimento, calculamos v_n e q_n para $2 \leq n \leq 8$. Esses valores, junto com os valores iniciais, estão dispostos na Tabela 1.

Tabela 1 – Os 8 primeiros valores para v_n e q_n

$n = 1$	$v_1 = 1$	$q_1 = 1$
$n = 2$	$v_2 = v_1 + q_1 = 1 + 1 = 2$	$q_2 = v_1 + v_2 = 1 + 2 = 3$
$n = 3$	$v_3 = v_2 + q_2 = 2 + 3 = 5$	$q_3 = v_2 + v_3 = 2 + 5 = 7$
$n = 4$	$v_4 = v_3 + q_3 = 5 + 7 = 12$	$q_4 = v_3 + v_4 = 5 + 12 = 17$
$n = 5$	$v_5 = v_4 + q_4 = 12 + 17 = 29$	$q_5 = v_4 + v_5 = 12 + 29 = 41$
$n = 6$	$v_6 = v_5 + q_5 = 29 + 41 = 70$	$q_6 = v_5 + v_6 = 29 + 70 = 99$
$n = 7$	$v_7 = v_6 + q_6 = 70 + 99 = 169$	$q_7 = v_6 + v_7 = 70 + 169 = 239$
$n = 8$	$v_8 = v_7 + q_7 = 169 + 239 = 408$	$q_8 = v_7 + v_8 = 169 + 408 = 577$

As aproximações a $\sqrt{2}$ são obtidas mediante o quociente $t_n = \frac{q_n}{v_n}$, conforme exibimos na Tabela 2:

Tabela 2 – Valores para a razão $t_n = q_n/v_n$

n	q_n	v_n	t_n
1	1	1	1
2	3	2	1,5
3	7	5	1,4
4	17	12	1,41 $\bar{6}$...
5	41	29	1,41379310...
6	99	70	1,41428571...
7	239	169	1,41420118...
8	577	408	1,41421568...

Onde observamos que, no 6^o passo, já obtemos uma aproximação de 4 dígitos para a $\sqrt{2} \approx 1,414213562... .$ Observe que os valores de v_n correspondem a (P_n) , para os valores calculados. De fato, observando a definição recursiva para a Escada de Theon, podemos reescrever as sequências q_n e v_n da seguinte maneira:

$$v_n = v_{n-1} + q_{n-1} \implies \text{Substituindo (2) em (1)}$$

$$v_n = v_{n-1} + v_{n-1} + v_{n-2} \implies$$

$$v_n = 2v_{n-1} + v_{n-2} \quad (3)$$

Da mesma forma, para q_n , podemos obter:

$$q_n = v_n + v_{n-1} \implies$$

$$q_n = v_n + v_{n-2} + q_{n-2} \implies$$

$$q_n = 2v_{n-1} + v_{n-2} + v_{n-2} + q_{n-2} \implies$$

$$q_n = 2v_{n-1} + 2v_{n-2} + q_{n-2} \implies$$

$$q_n = 2(v_{n-1} + v_{n-2}) + q_{n-2} \implies$$

$$q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2} \quad (4)$$

Ou seja, podemos reescrever as duas sequências v_n e q_n da *escada de Theon* segundo duas relações de recorrência independentes:

$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_2 = 2 \\ v_n = 2v_{n-1} + v_{n-2} \end{cases} \quad \begin{cases} q_1 = 1 \\ q_2 = 3 \\ q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases}$$

Como já havíamos notado, sequência v_n corresponde a *sequência de Pell*, pois $v_2 = 2v_1 + v_0 \Rightarrow 2 = 2 \cdot 1 + v_0 \therefore v_0 = 0$. Já q_n é definida por Koshy (2014) como *sequência de Pell-Lucas*, sendo chamada pelo autor de sequência irmã da (P_n) .

Detalhe interessante é que, em outros autores, como por exemplo Horadam (1994), Čerin (2006), Dasdemir (2011), Gulec (2012) e Catarino (2013) definem a *sequência de Pell-Lucas* como:

$$\begin{cases} Q_0 = 2 \\ Q_1 = 2 \\ Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{cases}$$

Gerando a sequência $(2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, \dots)$. Na verdade a maioria dos autores define esta última como *sequência de Pell-Lucas*, reservando para a sequência q_n a nomenclatura *sequência de Pell-Lucas modificada*. Horadam (1994) oferece a seguinte explicação: Édouard Lucas (1842-1891), em *Théorie des Nombres* (1861) não faz referência explícita a q_n , mas usa os termos da sequência $2q_n$ em conjunto com os termos gerados pela (P_n) . Aparentemente a expressão *sequência de Pell-Lucas modificada* tornou-se conhecida através de Horadam (1994), que aceita a nomenclatura dada por Bruckman, para q_n , conforme texto de Whitney (1985).

Observando a notação proposta por estes autores, temos então que, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} P_0 = 0 \\ P_1 = 1 \\ P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \end{cases} \quad \begin{cases} Q_0 = 2 \\ Q_1 = 2 \\ Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{cases} \quad \begin{cases} q_0 = 1 \\ q_1 = 1 \\ q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases}$$

Definem respectivamente as *sequência de Pell*, *sequência de Pell-Lucas* e a *sequência de Pell-Lucas modificada*.

Perceba que $q_n = v_n + v_{n-1} = P_n + P_{n-1}$ nos permite reescrever $t_n = q_n/v_n = (P_n + P_{n-1})/P_n$, fazendo a razão t_n depender somente de P_n .

Agora devemos esclarecer o mistério do sobrenome Pell.

A associação de John Pell a sequência de Pell parece ter ocorrido através da equação di-
ofantina conhecida como *equação de Pell*: $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, $x, y \in \mathbb{Z}$ atribuída a John Pell por
Leonard Euler anos depois da morte de Pell. Sabemos por Malcolm (2000) que provavelmente
Pell não trabalhou com essa equação. A confusão provavelmente ocorreu pela existência de uma
outra equação cognata, mencionada em um trabalho que recebeu contribuições de Pell.

De qualquer forma, Euler insistia que Pell era a origem da mesma e assim seu nome foi asso-
ciado permanentemente a equação (CURD, 2014). Koshy (2014) apresenta uma generalização de
tal equação: $x^2 - dy^2 = \pm 1$, onde discute brevemente o caso particular $x^2 - 2y^2 = (-1)^n$, em que
(q_n, P_n) é o conjunto das soluções dessa última equação. A forma generalizada $x^2 - dy^2 = \pm 1$
também pode ser resolvida em termos similares, geralmente sendo representada pela equação
 $x^2 - dy^2 = (-1)^n$ e suas soluções geram aproximações do tipo $\sqrt{d} \approx y_n/x_n$.

Equações desse tipo já eram discutidas no tempo de Pell, na forma de diversos casos particu-
lares (CURD, 2014). Fermat, Wallis e Brouncker⁴, contemporâneos de Pell, já haviam resolvido
variadas versões dessa equação. Até mesmo Bramagupta (598 - 668) havia se dedicado ao estudo
das soluções dessa equação.

Na Tabela 3, a título de ilustração, exibimos a correspondência dos primeiros valores de P_n e
 q_n com a *equação de Pell* $x^2 - 2y^2 = (-1)^n$.

Tabela 3 – Primeiros valores de v_n e q_n e sua correspondência com a *equação de Pell*.

n	q_n	P_n	$x^2 - 2y^2 = (-1)^n$; com $(x; y) = (q_n; P_n)$
1	1	1	$1^2 - 2 \cdot 1^2 = (-1)^1 = -1$
2	3	2	$3^2 - 2 \cdot 2^2 = (-1)^2 = 1$
3	7	5	$7^2 - 2 \cdot 5^2 = (-1)^3 = -1$
4	17	12	$17^2 - 2 \cdot 12^2 = (-1)^4 = 1$
5	41	29	$41^2 - 2 \cdot 29^2 = (-1)^5 = -1$
6	99	70	$99^2 - 2 \cdot 70^2 = (-1)^6 = 1$
7	239	169	$239^2 - 2 \cdot 169^2 = (-1)^7 = -1$
8	577	408	$577^2 - 2 \cdot 408^2 = (-1)^8 = 1$

Curd (2014) lembra que variações dessa equação já eram conhecidas na Grécia antiga, visto
que muitos sábios da época sugeriam boas aproximações a \sqrt{d} , d inteiro, utilizando valores do
tipo $t_n = y_n/x_n$, oriundos das soluções de *equações tipo Pell*. Curd (2014) cita, por exemplo,
o grego Eutocius (480 ac - 540 ac) como autor de uma sugestão de aproximação a $\sqrt{3}$, tendo
justificado tal sugestão escrevendo o equivalente em notação moderna: $1351^2 - 3 \cdot 780^2 = 1$. Isso
coincide com o caso particular para a Equação de Pell $x^2 - 3y^2 = (-1)^n$. Perceba também que
 $\frac{1351}{780} = 1,73205 \approx \sqrt{3}$. Não ficou claro se foi o conhecimento dessas equações que sugeriu as
aproximações ou se o oposto é verdadeiro.

Dessa forma, a sequência (P_n) já conhecida por gerar soluções para a equação $x^2 - 2y^2 =$
 $(-1)^n$ através do par $(q_n, P_n) = (P_n + P_{n-1}, P_n)$, também acabou no decurso da história, associada
igualmente a Pell.

⁴Fermat (1601 - 1665), Wallis(1616 - 1703), Brouncker (1620 - 1684)

2.2 Extensão de (P_n) para $n \in \mathbb{Z}$

Na verdade, Horadam (1971) define logo de início a sequência (P_n) para $n \in \mathbb{Z}$. No entanto, o citado autor justifica a coerência de sua definição para índices inteiros em Horadam (1965), frente a definição clássica para índices naturais, como oferecida por Koshy (2014). Gostaríamos de explorar com cuidado os caminhos que levam a definição dada por Horadam (1971), tal como o mesmo fez para justificar sua definição.

A definição de Horadam (1971) é mostrada na Figura 2.

Recent issues of this Journal have contained several interesting special results involving Pell numbers. Allowing for extension to the usual Pell numbers to negative subscripts, we define the Pell numbers by the Pell sequence $\{P_n\}$ thus:

$$(1) \quad \{P_n\}: \begin{matrix} \cdots & P_{-4} & P_{-3} & P_{-2} & P_{-1} & P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & \cdots \\ \cdots & -12 & 5 & -2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 5 & 12 & 29 & \cdots \end{matrix}$$

in which

$$(2) \quad P_0 = 0, \quad P_1 = 1, \quad P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$$

and

$$(2') \quad P_{-n} = (-1)^{n+1} P_n.$$

Figura 2 – Definição de Horadam (1971) para $(P_n)_{n \in \mathbb{Z}}$
 Fonte: Horadam (1971), p. 245

A extensão para $n \in \mathbb{Z}$ deve, obviamente, conservar a recorrência $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$. Assim, suponha que podemos escrever $P_1 = 2P_0 + P_{-1}$. Isso resulta em $P_{-1} = P_1 - 2P_0 = 1$. Seguindo com esse processo, obtemos:

$$\begin{aligned} P_0 = 2P_{-1} + P_{-2} &\implies P_{-2} = P_0 - 2P_{-1} = -2 \\ P_{-1} = 2P_{-2} + P_{-3} &\implies P_{-3} = P_{-1} - 2P_{-2} = 5 \\ P_{-2} = 2P_{-3} + P_{-4} &\implies P_{-4} = P_{-2} - 2P_{-3} = -12 \\ P_{-3} = 2P_{-4} + P_{-5} &\implies P_{-5} = P_{-3} - 2P_{-4} = 29 \end{aligned}$$

Que sugere naturalmente a sequência numérica oferecida por Horadam (1971) mais acima. Observando os valores calculados acima, percebemos facilmente que:

$$\begin{aligned} P_{-1} = 1 &= P_1 \\ P_{-2} = -2 &= (-1) \cdot P_2 \\ P_{-3} = 5 &= P_3 \\ P_{-4} = -12 &= (-1) \cdot P_4 \end{aligned}$$

Observando os índices pares, como na definição de Horadam que:

$$P_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot P_n \quad (5)$$

De fato, considerando (5), observe que:

$$\begin{aligned} P_{-n+1} = P_{-(n-1)} &= (-1)^n \cdot P_{n-1} = (-1)^n \cdot [P_{n+1} - 2P_n] \implies \\ P_{-n+1} &= (-1)^n \cdot P_{n+1} - 2(-1)^n \cdot P_n = (-1)^n \cdot P_{n+1} + 2(-1)^{n+1} \cdot P_n \implies \\ P_{-n+1} &= 2(-1)^{n+1} \cdot P_n + (-1)^{n+2} \cdot P_{n+1} = 2P_{-n} + P_{-(n+1)} \implies \end{aligned}$$

$$P_{-n+1} = 2P_{-n} + P_{-(n+1)} \quad (6)$$

Ou seja (5) é compatível com a definição dada anteriormente para (P_n) , permitindo redefinir (P_n) :

Definição 3. Dado $n \in \mathbb{Z}$, chamamos de *Sequência de Pell* a sequência numérica obtida através da recorrência:

$$\begin{cases} P_0 = 0; \\ P_1 = 1; \\ P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}; \end{cases}$$

Onde

$$P_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot P_n$$

O cálculo realizado em (6) não constitui uma demonstração, em seu sentido estrito, pois partiu de uma conjectura surgida da extrapolação da definição original. Além do mais, a definição original é estritamente crescente em seus termos P_n , necessitando de uma ferramenta capaz de retornar termos cada vez mais anteriores.

Perceba também a conveniência da definição utilizar como termos iniciais em P_0 e P_1 . Essa é uma escolha muito confortável, já que, observando a lista de *números de Pell*, ordenados em n , fica claro que P_0 representa um eixo de simetria, auxiliando a visualização e a investigação de padrões. A escolha de Koshy (2014) e Lima (2016) para termos iniciais P_1 e P_2 não apresentam a mesma facilidade.

3 Convergência, número de prata e fórmulas explícitas

Discutiremos agora as propriedades de convergência exibidas nos comentários históricos do início do presente texto, bem como a existência de uma fórmula explícita para a descrição de (P_n) .

3.1 Convergência de P_{n+1}/P_n

A *sequência de Fibonacci*, célebre sequência numérica introduzida pela primeira vez por Leonardo de Pisa (1175 - 1250), é famosa por estar relacionada com o *número de ouro*, ϕ , famosa constante matemática usada desde a antiguidade na arquitetura por causa de sua presença recorrente em diversas estruturas simétricas tanto em geometria quanto na natureza (BELINI, 2015).

O irracional $\phi \approx 1,6180339\dots$, que também é chamada de proporção áurea, pode ser encontrada tomando a *sequência de Fibonacci*, $F_n = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots)$, definida por $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ e fazendo $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{F_{n+1}}{F_n} \right)$. Curiosamente, Belini (2015) nos diz que foi Kepler (1571-1630) que notou pela primeira vez esse fato.

Assim, vamos explorar a convergência de $t_n = P_{n+1}/P_n$.

Lembrando que, a *sequência de Pell* possui como alguns de seus termos os valores exibidos na Tabela 4:

Tabela 4 – Valores de P_n para $-10 < n < 9$

n	P_n	n	P_n
-1	1	8	408
-2	-2	7	169
-3	5	6	70
-4	-12	5	29
-5	29	4	12
-6	-70	3	5
-7	-169	2	2
-8	408	1	1
-9	-985	0	0

Assim, por exemplo, $t_1 = \frac{P_2}{P_1} = \frac{2}{1} = 2$, $t_2 = \frac{P_3}{P_2} = \frac{5}{2} = 2,5$, $t_3 = \frac{P_4}{P_3} = \frac{12}{5} = 2,4$. Obviamente, $\nexists t_0$, pois $t_0 = \frac{P_1}{P_0} = \frac{1}{0}$. Por outro lado, $t_{-1} = \frac{P_0}{P_{-1}} = \frac{0}{1} = 0$, $t_{-2} = \frac{P_{-1}}{P_{-2}} = \frac{1}{-2} = -0,5$, $t_{-3} = \frac{P_{-2}}{P_{-3}} = \frac{-2}{5} = -0,4$.

Para determinar a convergência, nos inspiraremos nos procedimentos exibidos por Pereira e Ferreira (2008), repetidos por Almeida (2014), usados para determinar a convergência de (F_{n+1}/F_n) , para o caso da *sequência de Fibonacci*.

Pretendemos utilizar o seguinte resultado sobre convergência de sequências, presente em Lima (2007):

Teorema 1. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Trataremos de examinar a convergência da sequência $t_n = \frac{P_{n+1}}{P_n}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^*$.

Inicialmente vamos determinar limites superiores e inferiores para t_n .

Na Tabela 5, calculamos os 10 primeiros termos de t_n , para $n \geq 0$:

Tabela 5 – Valores de t_n para $n \geq 0$

n	t_n	n	t_n
1	2	2	2,5
3	2,4	4	2,41 $\bar{6}$
5	2,4137931...	6	2,414285714...
7	2,414201183...	8	2,414215686...
9	2,414213198...	10	2,414213625...

Como podemos observar t_n é crescente para n ímpar e decrescente para n par. Assim, podemos separar t_n em duas subsequências: t_{2k} e t_{2k-1} , para todo $k \in \mathbb{N}^*$. Essa fato será importante para a convergência de t_n .

Complementarmente, 10 primeiros termos de t_n , para $n \leq 0$ são mostradas na Tabela 6.

Nesse caso t_n é decrescente para n ímpar e crescente para n par. Novamente, podemos separar t_n em duas subsequências: t_{2k} e t_{2k+1} , para todo $k \in -\mathbb{N}^*$.

Tabela 6 – Valores de t_n para $n \leq 0$

n	t_n	n	t_n
-1	0	-2	-0,5
-3	-0,4	-4	-0,41 $\bar{6}$
-5	-0,4137931...	-6	-0,414285714...
-7	-0,414201183...	-8	-0,414215686...
-9	-0,414213198...	-10	-0,414213625...

Podemos representar genericamente as subsequências mencionadas como:

$$t_n = \begin{cases} t_{2k-2}, t_{2k}, t_{2k+2}, t_{2k+4}, \dots \\ t_{2k-3}, t_{2k-1}, t_{2k+1}, t_{2k+3}, \dots \end{cases}$$

Tanto para k como $-k$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Observando que $\sqrt{2} \approx 1,414213562\dots$, os valores calculados de t_n nos permite conjecturar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n) = 1 + \sqrt{2}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} (t_n) = 1 - \sqrt{2}$$

Vamos mostrar que t_n é limitada e que as subsequências acima são convergentes. Trataremos os casos $n > 0$ e $n < 0$ separadamente.

Primeiramente, como $0 < P_n < P_{n+1}$ para $n > 0$, então $0 < t_n = \frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{2P_n + P_{n-1}}{P_n} = 2 + \frac{P_{n-1}}{P_n} < 3$. Por outro lado:

$$t_{-n} = \frac{P_{-n+1}}{P_{-n}} = \frac{P_{-(n-1)}}{P_{-n}} = \frac{(-1)^n P_{n-1}}{(-1)^{n+1} \cdot P_n} = -\frac{P_{n-1}}{P_n} = -\frac{P_{n-1}}{2P_{n-1} + P_{n-2}} > -\frac{P_{n-1}}{2P_{n-1}} = -0,5$$

Ou seja $-0,5 < t_{-n} < 0$. Assim $t_n \in (-\frac{1}{2}, 3)$, para todo $n \in \mathbb{Z}^*$.

Agora, vamos trabalhar nas subsequências.

Para isso, vamos determinar fórmulas de recorrência para as sequências t_n , t_{2k} e t_{2k-1} . Podemos reescrever t_n da seguinte maneira:

$$t_n = \frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{2P_n + P_{n-1}}{P_n} = 2 + \frac{1}{\frac{P_n}{P_{n-1}}} = 2 + \frac{1}{t_{n-1}} \quad (7)$$

Note também que:

$$\begin{cases} t_{n+1} = 2 + \frac{1}{t_n} \\ t_n = 2 + \frac{1}{t_{n-1}} \end{cases}$$

De onde obtemos:

$$\begin{aligned} \Rightarrow t_{n+1} &= \frac{2t_n + 1}{t_n} \Rightarrow t_{n+1} = \frac{2 \left(\frac{2t_{(n-1)} + 1}{t_{(n-1)}} \right) + 1}{\frac{2t_{(n-1)} + 1}{t_{(n-1)}}} \Rightarrow t_{n+1} = \left(\frac{4t_{(n-1)} + 2 + t_{(n-1)}}{t_{(n-1)}} \right) \cdot \frac{t_{(n-1)}}{2t_{(n-1)} + 1} \Rightarrow \\ \Rightarrow t_{n+1} &= \left(\frac{4t_{(n-1)} + 2 + t_{(n-1)}}{2t_{(n-1)} + 1} \right) \Rightarrow t_{n+1} = \left(\frac{4t_{(n-1)} + 2}{2t_{(n-1)} + 1} \right) + \left(\frac{t_{(n-1)}}{2t_{(n-1)} + 1} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow t_{n+1} &= 2 + \left(\frac{t_{(n-1)}}{2t_{(n-1)} + 1} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Essa última equação constitui uma fórmula recursiva adequada para tratar as subsequências separadamente, pois:

$$\begin{cases} t_{2k+2} = 2 + \left(\frac{t_{(2k)}}{2t_{(2k)} + 1} \right) \\ t_{2k+1} = 2 + \left(\frac{t_{(2k-1)}}{2t_{(2k-1)} + 1} \right) \end{cases}$$

Baseado nesses resultados, faz-se conveniente definir a função auxiliar $f(x) = 2 + \frac{x}{2x+1}$. Essa função possui assíntota vertical em $x = -0,5$, pois $(2x+1) \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow -0,5$. Note também que $-0,5 < x \Rightarrow 0 < (2x+1)$. Isso implica imediatamente que a função $f(x)$ é sempre crescente em $(-0,5; \infty)^5$. Não vamos considerar o caso $x < -0,5$, pois $-0,5 < t_n, \forall n \in \mathbb{Z}^*$.

Para (t_{2k}) , $k \in \mathbb{N}^*$ temos a seguinte lista de termos, exibida na Tabela 7:

Tabela 7 – t_n para n positivo, par

t_2	2,5
t_4	2,41 $\bar{6}$
t_6	2,414285714...
t_8	2,414215686...
t_{10}	2,414213625...

Vamos proceder o argumento por indução. Para $k = 1$, temos que $t_{2 \cdot 1} = t_2 > t_4 = t_{2 \cdot 2}$. Supondo que, para todo $1, 2, 3, \dots, k$, vale:

$$t_{2k} > t_{2k+2} = t_{2(k+1)} \quad (9)$$

aplicamos $f(x)$ a ambos os membros de (9):

⁵Suponha que há $x_0 < x_1$ tais que $f(x_0) \geq f(x_1)$. Assim $2 + \frac{x_0}{2x_0+1} \geq 2 + \frac{x_1}{2x_1+1} \Rightarrow x_0(2x_1+1) \geq x_1(2x_0+1) \Rightarrow 2x_0x_1 + x_0 \geq 2x_0x_1 + x_1 \Rightarrow x_0 \geq x_1$. Absurdo.

$$t_{2k} > t_{2k+2} \implies f(t_{2k}) > f(t_{2k+2}) \implies \frac{t_{2k}}{2t_{2k}+1} > \frac{t_{2k+2}}{2t_{2k+2}+1} \implies t_{2k+2} > t_{2k+4}$$

que resulta em t_{2k} monótona decrescente, ou seja, a subsequência (t_{2k}) é convergente. Já para (t_{2k-1}) , temos a seguinte lista de termos mostrados na Tabela 8:

Tabela 8 – t_n para n positivo, ímpar

t_1	2
t_3	2,4
t_5	2,4137931...
t_7	2,414201183...
t_9	2,414213198...

Por indução, para $k = 1$, temos que $t_{2 \cdot 1 - 1} = t_1 < t_3 = t_{2 \cdot 2 - 1}$.
Supondo que, para todo $1, 2, 3, \dots, k$, vale:

$$t_{2k-1} < t_{2k+1} \tag{10}$$

aplicamos $f(x)$ a ambos os membros de (10):

$$t_{2k-1} < t_{2k+1} \implies f(t_{2k-1}) < f(t_{2k+1}) \implies \frac{t_{2k-1}}{2t_{2k-1}+1} < \frac{t_{2k+1}}{2t_{2k+1}+1} \implies t_{2k+1} < t_{2k+3}$$

que resulta em t_{2k-1} monótona crescente, ou seja, a subsequência limitada (t_{2k-1}) também é convergente.

Suponha então que:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} (t_{2n}) = L_1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (t_{2n-1}) = L_2 \end{cases}$$

Assim:

$$\begin{cases} t_{2k+1} = 2 + \frac{1}{t_{2k}} \\ t_{2k} = 2 + \frac{1}{t_{2k-1}} \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} L_2 = 2 + \frac{1}{L_1} \\ L_1 = 2 + \frac{1}{L_2} \end{cases} \implies L_1 = L = L_2$$

Ambas subsequências são convergentes para L , de tal forma que $(t_{2k}) \cup (t_{2k-1}) = t_n, n \in \mathbb{N}^*$. Assim qualquer outra subsequência convergente será obtida através do destacamento de termos de umas dessas subsequências. Disso, qualquer subsequência de $(t_n), n > 0$ deverá convergir para L , onde concluímos que $(t_n) \rightarrow L, \forall n > 0$. Note que $L > 0$, pois $0 < t_n < 3$ sempre que $n \in \mathbb{N}^*$.

Agora, tomando os índices negativos, ou seja $t_{-n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Perceba que:

$$t_{-n} = \frac{P_{-n+1}}{P_{-n}} = \frac{P_{-(n-1)}}{P_{-n}} = \frac{(-1)^n P_{n-1}}{(-1)^{n+1} P_n} = -\frac{1}{t_n}$$

Já determinamos que $(t_n) \rightarrow L$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto $(t_{-n}) \rightarrow -\frac{1}{L} = l$, quando $n \rightarrow \infty$, que equivale dizer que $-n \rightarrow -\infty$.

Agora nos resta apenas determinar os valores exatos.

Inicialmente, perceba que $l = -\frac{1}{L} \implies L \cdot l = -1$

Também, de posse da informação da convergência, lembremos da Definição 2 onde $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$. Podemos fazer algumas transformações sobre esta equação:

$$P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1} \implies \frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{2P_n + P_{n-1}}{P_n} \implies$$

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = 2 + \frac{P_{n-1}}{P_n} \implies$$

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = 2 + \frac{P_{n-1}}{P_n} \implies$$

e fazendo $n \rightarrow \infty$

$$L = 2 + \frac{1}{L} \implies L = 2 - l \implies L + l = 2$$

Resumidamente:

$$\begin{cases} L \cdot l = -1 \\ L + l = 2 \end{cases}$$

Ou seja, L e l são raízes da equação $x^2 - (L+l)x + (L \cdot l) = 0 \implies$

$$x^2 - 2x + -1 = 0 \tag{11}$$

Que nos retorna como raízes $L = 1 + \sqrt{2}$ e $l = 1 - \sqrt{2}$. Ou seja:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n) = 1 + \sqrt{2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (t_{-n}) = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

O número $1 + \sqrt{2}$ é chamado de *número de prata*, que denotaremos por δ . O número $1 - \sqrt{2}$ é o inverso de δ , que denotaremos por δ'

Boyer (1996), Almeida (2014), Belini (2015) lembram da *razão áurea*, ou *número de ouro*, como uma proporção privilegiada e conhecida desde a antiguidade, dotada de propriedades matemáticas e estéticas incomuns e observada na natureza e replicada nas artes e arquitetura. O *número de prata*, possui propriedades similares e faz parte, juntamente com o *número de ouro* de um conjunto numérico especial chamado de *números metálicos*. Uma exposição pormenorizada desse conjunto e suas possíveis propriedades e aplicações pode ser encontrado em Vinagre (2016).

Um argumento muito utilizado para encontrar os números δ e δ' , sugerido por Primo Ramos e Reyes Iglesias (2018) e Koshy (2014), é partir da recorrência $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$ e dividindo ambos os membros desta equação de recorrência por P_n obtemos:

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = 2 + \frac{P_{n-1}}{P_n}$$



Onde se parte do presuposto da convergência, somente para $n \in \mathbb{N}$, obtendo: $L = 2 + \frac{1}{L} \implies L^2 - 2L - 1 = 0$, que equivale essencialmente a equação 11. Chamaremos a equação 11 de *equação característica* para a recorrência, no caso, a que define (P_n) .

Aliás, esse último procedimento possuiu o inconveniente de deixar mal explicado a relação de δ' e a convergência de P_{n+1}/P_n , dado somente como muito provável.

Existem algumas relações interessantes oriundas dos números δ e δ' .

Teorema 2. *Dados $\delta = 1 + \sqrt{2}$ e $\delta' = 1 - \sqrt{2}$, valem as seguintes igualdades:*

$$(i) \quad \delta \cdot \delta' = -1$$

$$(ii) \quad \delta - \delta' = 2\sqrt{2}$$

$$(iii) \quad \delta + \delta' = 2$$

$$(iv) \quad \delta^2 = 2\delta + 1 \text{ e } (\delta')^2 = 2\delta' + 1$$

$$(v) \quad \delta^n = P_n \cdot \delta + P_{n-1} \text{ e } (\delta')^n = P_n \cdot \delta' + P_{n-1}, n \in \mathbb{Z}$$

Demonstraremos somente (iv) e (v).

Demonstração (iv): Por álgebra elementar, obtemos:

$$\begin{aligned} \delta^2 &= (1 + \sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 1 + 2(\sqrt{2} + 1) = 2\delta + 1 \\ (\delta')^2 &= (1 - \sqrt{2})^2 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 1 + 2(1 - \sqrt{2}) = 2\delta' + 1 \end{aligned}$$

□

Demonstração (v): Inicialmente, analisaremos o caso $n \in \mathbb{N}$.

Faremos uma indução sobre n , note que:

$$\delta^0 = 1 = P_0 \cdot \delta + P_{-1}$$

Suponha que, para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, k$ temos que:

$$\delta^n = P_n \cdot \delta + P_{n-1}$$

Ou seja, valem:

$$\begin{aligned} \delta^0 &= P_0 \cdot \delta + P_{-1} \\ \delta^1 &= P_1 \cdot \delta + P_0 \\ \delta^2 &= P_2 \cdot \delta + P_1 \\ \delta^3 &= P_3 \cdot \delta + P_2 \\ \delta^4 &= P_4 \cdot \delta + P_3 \\ &\vdots \\ \delta^k &= P_k \cdot \delta + P_{k-1} \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \delta^{k+1} &= \delta \cdot \delta^k = \delta \cdot (P_k \cdot \delta + P_{k-1}) \implies \\ \delta^{k+1} &= \delta^2 \cdot P_k + \delta P_{k-1} = (2\delta + 1) \cdot P_k + \delta P_{k-1} \implies \\ 2\delta^{k+1} &= \delta \cdot P_k + P_k + \delta P_{k-1} = (2\delta \cdot P_k + \delta P_{k-1}) + P_k \implies \\ \delta^{k+1} &= \delta(2P_k + P_{k-1}) + P_k = P_{k+1} \delta + P_k \end{aligned}$$

Da mesma forma, conseguimos $(\delta')^n = P_n \cdot \delta' + P_{n-1}$, para $n \in \mathbb{N}$

□

Observe também que

$$\delta^{-n} = \frac{1}{\delta^n} = (-\delta')^n = (-1)^n \cdot (P_n \cdot \delta' + P_{n-1}) \implies$$

$$\delta^{-n} = (-1)^n \cdot [(-1)^{n+1} P_{-n} \cdot \delta' + (-1)^n P_{-n+1}] \implies$$

$$\delta^{-n} = (-1)^{2n} (-P_{-n} \cdot \delta' + P_{-n+1}) =$$

$$\delta^{-n} = -P_{-n} \cdot \delta' + P_{-n+1}$$

da mesma forma:

$$(\delta')^{-n} = -P_{-n} \cdot \delta + P_{-n+1}$$

Essas propriedades serão fundamentais para a próxima seção.

3.2 Fórmula de Binet

Agora vamos explorar a existência de uma fórmula explícita para o cálculo de P_n , sem depender da recorrência. Examinaremos três caminhos possíveis para determinar tal fórmula explícita para os termos de (P_n) :

1. Explorando propriedades de δ e δ' ;
2. Via indução;
3. Teoria das recorrências lineares;

Uma fórmula tipo Binet (*Binet like*, na literatura inglesa) é uma função $f(n)$ que fornece o n -ésimo termo de uma sequência gerada por uma recorrência linear de 2^a ordem, sem necessariamente passar pelo cálculo do $(n-1)$ termos anteriores.

Por exemplo, para a *sequência de Fibonacci*, temos que a fórmula de Binet correspondente é:

$$F_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{\sqrt{5}}$$

exibida em Santos e Alves (2017).

Para a *sequência de Pell*, Koshy (2014) e Alves (2016) exibem a seguinte versão para fórmula de Binet:

$$P_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} \quad (12)$$

Essa terminologia, como lembra Koshy (2014), surgiu a partir do matemático francês Jacques Philippe Marie Binet (1788–1865), que demonstrou tal fórmula para a *sequência de Fibonacci*, via princípio de indução. Outras sequências definidas via recorrências lineares de 2^a ordem, como a *sequência de Lucas*, *sequência de Jacobsthal* e a *sequência de Pell*, lembradas em Alves (2016), Bilgici (2014), Koshy (2014), Horadam (1965, 1971, 1994, 1996), possuem fórmulas de natureza similar, cujo formato geral: $X_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ tem existência garantida via teoria das recorrências, em particular, alguns teoremas que descrevem o comportamento geral das recorrências lineares de 2^a ordem (LIMA, 2016).

O nosso objetivo nessa seção final é explorar os diferentes caminhos para demonstrar essa última equação (12), para (P_n) .

Teorema 3. Dada (P_n) , tal como definida em (5), vale:

$$P_n = \frac{\delta^n - (\delta')^n}{\delta - \delta'} = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$$

Para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração via Teorema 2: Lembrando que o Teorema (2) nos retorna as seguintes propriedades:

$$\delta^n = P_n \cdot \delta + P_{n-1}$$

e

$$(\delta')^n = P_n \cdot \delta' + P_{n-1}$$

Onde $n \in \mathbb{N}$

Perceba que:

$$\delta^n - (\delta')^n = (P_n \cdot \delta + P_{n-1}) - (P_n \cdot \delta' + P_{n-1}) \implies$$

$$\delta^n - (\delta')^n = P_n \cdot \delta - P_n \cdot \delta' \implies$$

$$\delta^n - (\delta')^n = P_n(\delta - \delta') \implies$$

$$P_n = \frac{\delta^n - (\delta')^n}{\delta - \delta'}$$

A demonstração da fórmula acima fica completa verificando que:

$$\delta^{-n} - (\delta')^{-n} = (-P_{-n} \cdot \delta' + P_{-n+1}) - (-P_{-n} \cdot \delta + P_{-n+1}) \implies$$

$$\delta^{-n} - (\delta')^{-n} = P_{-n}(\delta - \delta') \implies$$

$$P_{-n} = \frac{\delta^{-n} - (\delta')^{-n}}{\delta - \delta'}$$

ou seja, vale:

$$P_n = \frac{\delta^n - (\delta')^n}{\delta - \delta'}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

Finalmente, lembrando que $\delta = 1 + \sqrt{2}$ e $\delta' = 1 - \sqrt{2}$, obtemos:

$$P_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{(1 + \sqrt{2}) - (1 - \sqrt{2})} = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \quad \square$$

Demonstração via Princípio de Indução: Tomando $n = 0$, constatamos que:

$$\frac{\delta^0 - (\delta')^0}{\delta - \delta'} = \frac{(1 + \sqrt{2})^0 - (1 - \sqrt{2})^0}{2\sqrt{2}} = 0 = P_0$$

Supondo que para todo $n = 1, 2, 3, \dots, k$ vale:

$$P_n = \frac{\delta^n - (\delta')^n}{\delta - \delta'} = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$$

Temos que:

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= 2P_k + P_{k-1} = 2 \frac{\delta^k - (\delta')^k}{\delta - \delta'} + \frac{\delta^{k-1} - (\delta')^{k-1}}{\delta - \delta'} \implies \\ P_{k+1} &= 2 \frac{(1 + \sqrt{2})^k - (1 - \sqrt{2})^k}{2\sqrt{2}} + \frac{(1 + \sqrt{2})^{k-1} - (1 - \sqrt{2})^{k-1}}{2\sqrt{2}} \implies \\ P_{k+1} &= \frac{[2(1 + \sqrt{2})^k + (1 + \sqrt{2})^{k-1}] - [2(1 - \sqrt{2})^k + (1 - \sqrt{2})^{k-1}]}{2\sqrt{2}} \implies \\ P_{k+1} &= \frac{(1 + \sqrt{2})^{k-1} \cdot (1 + \sqrt{2})^2 - (1 - \sqrt{2})^{k-1} \cdot (1 - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{2})^{k+1} - (1 - \sqrt{2})^{k+1}}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Que é suficiente para concluir a demonstração para o caso $n \in \mathbb{N}$. Para estender a demonstração para índices inteiros, lembre inicialmente que $P_{-n} = (-1)^{n+1}P_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Isso resulta em:

$$\begin{aligned} P_{-n} &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{\delta^n - (\delta')^n}{\delta - \delta'} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(\frac{1}{\delta})^{-n} - (\frac{1}{\delta'})^{-n}}{\delta - \delta'} \implies \\ P_{-n} &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{(-\delta')^{-n} - (-\delta)^{-n}}{\delta - \delta'} = (-1)^{n+1} \cdot (-1)^{-n} \frac{(\delta')^{-n} - (\delta)^{-n}}{\delta - \delta'} = -\frac{(\delta')^{-n} - (\delta)^{-n}}{\delta - \delta'} \implies \\ P_{-n} &= \frac{(\delta)^{-n} - (\delta')^{-n}}{\delta - \delta'} \end{aligned}$$

O que completa novamente a demonstração para índices inteiros. \square

Note que o ponto surpreendente consiste no fato que esta última equação é composta por números irracionais ($\delta, \delta', 2\sqrt{2}$) e, no entanto, resulta em números inteiros para qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}$.

A literatura consultada não exhibe nenhuma das demonstrações anteriores. A primeira demonstração é apenas sugerida por Koshy (2014), em notação ligeiramente diferente enquanto a segunda demonstração, via indução, é uma fácil adaptação de demonstrações dessa mesma fórmula, via indução, para a *sequência de Fibonacci*.

Em geral, a literatura utiliza, ou simplesmente referencia o teorema abaixo, presente em Lima (2016):

Teorema 4. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2 , com $r_1 \neq r_2$, então, todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$, C_1 e C_2 constantes.*

A demonstração desse resultado pode ser consultada em Lima (2016). Tal teorema também pode ser encontrado em Koshy (2014), variando apenas a notação.

Na literatura consultada, tal teorema sempre é demonstrado (quando demonstrado) apenas para $n \in \mathbb{N}$, ficando subentendido a possibilidade de extensão para $n \in \mathbb{Z}$ através do uso de alguma identidade conveniente, mas isso nunca é executado. Em Horadam (1965, 1971) encontramos passagens que podem nos ajudar a pensar em como estender tal demonstração para índices inteiros, mas novamente nada de explícito é feito.

Estudando a demonstração oferecida por Lima (2016) para o Teorema (4), existe uma indução, sugerida implicitamente ao final do argumento, indicando que essa demonstração torna o teorema válido somente para $n \in \mathbb{N}$. Para utilizar o teorema anterior na composição de uma *Fórmula de Binet* para índices inteiros, precisamos estender a demonstração oferecida por Lima(2016) para $n \in \mathbb{Z}$.

Vamos examinar tal demonstração. Mas antes, é necessário enunciar outro resultado auxiliar, exibido e demonstrado por Lima (2016) para o demonstração do Teorema (4):

Lema 1. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2 , então $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2 .*

Lima (2016) exhibe esse resultado como teorema, mas como nosso foco é o Teorema (4), trataremos esse resultado como lema, sem nenhum prejuízo à exposição.

Faremos a seguir a demonstração do Lema 1. Chamamos novamente a atenção para o fato de que Lima (2016), em sua exposição, define e discute recorrências lineares de 1ª e 2ª ordem apenas para $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração do Lema 1: Lima (2016) em sua demonstração procede simplesmente substituindo $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ em $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ e realizando agrupamentos convenientes:

$$\begin{aligned}x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n &= \\&= C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2} + p(C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1}) + q(C_1 r_1^n + C_2 r_2^n) = \\&= C_1 r_1^{n+2} + pC_1 r_1^{n+1} + qC_1 r_1^n + C_2 r_2^{n+2} + pC_2 r_2^{n+1} + qC_2 r_2^n \\&= C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) \\&C_1 r_1^n (0) + C_2 r_2^n (0) = 0\end{aligned}$$

pois r_1 e r_2 são raízes de $r^2 + pr + q$ □

Note que todos os passos anteriores são válidos mesmo se $n \in \mathbb{Z}$, sendo válida a demonstração (e o Lema 1) para índices negativos.

Agora vamos examinar a desmonstração do Teorema 4. Novamente, seguiremos os mesmos argumentos de Lima (2016).

Demonstração do Teorema 4. Seja y_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Devemos determinar constantes C_1 e C_2 que sejam soluções do sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = y_0 \\ C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1 \end{cases}$$

De onde obtemos⁶:

⁶Lima (2016) utiliza $\begin{cases} C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1 \\ C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2 \end{cases}$ pois costuma tratar recorrências indexando a partir de $n = 1$, ao contrário do costume adotado aqui de indexar a partir de $n = 0$. Adaptamos a notação, sem prejuízos do argumento fundamental do autor citado.

$$C_1 = \frac{y_1 + r_2 y_0}{(r_2 - r_1)} \text{ e } C_2 = \frac{r_1 y_0 - y_1}{(r_1 - r_2)}$$

Soluções perfeitamente viáveis, pois $r_1 \neq r_2$, por hipótese. Ou seja, estão bem definidos y_0 , y_1 .

Lima (2016) afirma que $y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ para todo natural n .

De fato, seja $z_n = y_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n$. Mostraremos que $z_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Perceba que:

$$\begin{aligned} z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n &= \\ &= (y_{n+2} - C_1 r_1^{n+2} - C_2 r_2^{n+2}) + p(y_{n+1} - C_1 r_1^{n+1} - C_2 r_2^{n+1}) + q(y_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n) = \\ &= (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - (C_1 r_1^{n+2} + pC_1 r_1^{n+1} + qC_1 r_1^n) - (C_2 r_2^{n+2} + pC_2 r_2^{n+1} + qC_2 r_2^n) = \\ &= (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) - C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) = 0 \end{aligned}$$

pois $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$ e r_1, r_2 são raízes de $r^2 + pr + q = 0$.

Agora procedemos com a indução, ainda seguindo Lima (2016). $C_1 + C_2 = y_0$ e $C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1$, portanto $z_0 = z_1 = 0$

Suponha que, para todo $n = 1, 2, 3, \dots, k$, vale $z_n = 0$. Assim:

$$z_{k+1} + pz_k + qz_{k-1} = 0 \implies z_{k+1} = 0$$

Onde concluímos que qualquer solução y_n é tal que:

$$z_n = y_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n = 0 \implies y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$$

Demonstrando assim o teorema para $n \in \mathbb{N}$.

Para tratar o caso de $n \in -\mathbb{N}$, lembre que a demonstração do Lema 1 apesar de anunciada para $n \in \mathbb{N}$, pode ser interpretada naturalmente para $n \in \mathbb{Z}$. Assim $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ mesmo que $n < 0$.

Assim, dado $n \in \mathbb{N}$, faz sentido escrever $z_{-n} = y_{-n} - C_1 r_1^{-n} - C_2 r_2^{-n}$, com y_{-n} uma solução qualquer de $x_{-(n+2)} + px_{-(n+1)} + qx_{-n} = 0$.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = y_0 \\ \frac{C_1}{r_1} + \frac{C_2}{r_2} = y_{-1} \end{cases} \implies C_1 = \frac{r_1(r_2 y_1 - y_0)}{(r_2 - r_1)} \text{ e } C_2 = \frac{r_2(y_0 - r_1 y_1)}{(r_2 - r_1)}$$

Novamente soluções perfeitamente viáveis, pois $r_1 \neq r_2$, por hipótese. Ficam bem definidos y_0 e y_{-1} .

Como o Lema (1) dá sentido a expressão $z_{-(n+2)} + pz_{-(n+1)} + qz_{-n} = z_{-n-2} + pz_{-n-1} + qz_{-n}$, para $n \in \mathbb{N}$, podemos proceder da mesma e concluir que:

$$z_{-n-2} + pz_{-n-1} + qz_{-n} = 0$$

E podemos proceder com o mesmo processo de indução anterior, porém sobre $z_{-(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, concluindo novamente que $z_{-(n)} = 0$ e toda solução de:

$$x_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$$

é dada por:

$$a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$

□

Estabelecido o resultado, no caso da *Sequência de Pell*, a sua recorrência pode ser reescrita como $P_{n+2} - 2P_{n+1} - P_n = 0$, que nos fornece $p = -2$ e $q = -1$, resultando na equação correspondente ao Teorema (4) $r^2 - 2r - 1 = 0$, equivalente a equação (11) vista anteriormente e chamada de *equação característica*. Na verdade, já temos ciência de que as raízes dessa equação são $r_1 = \delta$ e $r_2 = \delta'$. Assim, pelo teorema que acabamos de enunciar, a solução geral da recorrência deve ser:

$$P_n = C_1 \delta^n + C_2 (\delta')^n$$

Onde devemos calcular as constantes C_1 e C_2 para os valores iniciais $P_0 = 0$ e $P_1 = 1$:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 \delta + C_2 (\delta') = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -C_1 - \frac{C_2}{\delta} (\delta') = -\frac{1}{\delta} \end{cases} \implies$$

$$\frac{C_2 \delta - C_2 \delta'}{\delta} = -\frac{1}{\delta} \implies \frac{C_2 (\delta - \delta')}{\delta} = -\frac{1}{\delta} \implies$$

$$C_2 = -\frac{1}{\delta - \delta'} \implies C_1 = \frac{1}{\delta - \delta'}$$

Que finalmente resulta em:

$$P_n = \frac{1}{\delta - \delta'} \delta^n - \frac{1}{\delta - \delta'} (\delta')^n = \frac{\delta^n - (\delta')^n}{\delta - \delta'}$$

Apresentaremos a seguir uma abordagem diferente a *Sequência de Pell*, via recurso matricial, que nos fornecerá não somente uma visão diferente dessa sequência, mas também facilitará a demonstração de algumas propriedades.

4 Abordagens matriciais

Existe uma abordagem matricial para a *Sequência de Pell*, capaz de substituir a definição original. Bicknell (1975) e Ercolano (1979) afirmam que os *Números de Pell* podem ser gerados também através da recorrência a seguir:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_n = M^n = \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix}. \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (13)$$

De fato, calculando até o $n = 4$:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = M_1 \cdot M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 & P_2 \\ P_2 & P_1 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = M_1 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 5 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_4 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = M_1 \cdot M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 12 + 1 \cdot 5 & 2 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 12 + 0 \cdot 5 & 1 \cdot 5 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_5 & P_4 \\ P_4 & P_3 \end{pmatrix}$$

Percebemos a coerência da colocação de Ercolano (1979). No entanto, o próprio Ercolano apenas diz ser de fácil verificação o resultado acima, deixando a demonstração a cargo do leitor.

Teorema 5. Dada (P_n) e a matriz $M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Vale a propriedade:

$$M_n = M^n = \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Demonstração. Para $n = 1$ temos:

$$M^1 = M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 \end{pmatrix}$$

supondo que o resultado segue para $1, 2, 3, \dots, k \in \mathbb{N}^*$, ou seja:

$$M^n = M_n = \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix} \quad n \leq k.$$

temos que:

$$M^{n+1} = M_{n+1} = M_1 \cdot M_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2P_{n+1} + 1P_n & 2P_n + 1P_{n-1} \\ 1P_{n+1} + 0P_n & 1P_n + 0P_{n-1} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$M_{n+1} = \begin{pmatrix} P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_n \end{pmatrix}$$

□

Na verdade, a recorrência matricial 13 pode substituir perfeitamente a Definição 1. (P_n) seria obtido simplesmente destacando os termos calculados e ordenando segundo os índices, obtendo assim a sequência numérica $(0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, \dots)$.

Caso substituíssemos a Definição 1 pela equação 13, poderíamos igualmente conseguir a definição original como resultado demonstrado. De fato, tomando:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_n = M^n = \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Basta escrever

$$\begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix} = M_n = M_{n-1} \cdot M_1 = \begin{pmatrix} P_n & P_{n-1} \\ P_{n-1} & P_{n-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2P_n + P_{n-1} & P_n \\ 2P_{n-1} + P_{n-2} & P_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2P_n + P_{n-1} & 2P_{n-1} + P_{n-2} \\ 2P_{n-1} + P_{n-2} & 2P_{n-2} + P_{n-3} \end{pmatrix}$$

O que resulta em:

$$\begin{cases} P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1} \\ P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \\ P_{n-1} = 2P_{n-2} + P_{n-3} \end{cases} \quad \text{Onde } P_0 = 0 \text{ e } P_1 = 1$$

Repare também que podemos escrever uma definição matricial utilizando uma recorrência linear de 2ª ordem, tal como foi oferecida originalmente. O teorema a seguir fornece tal caracterização:

Teorema 6. Dada (P_n) e a matriz $M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Vale a propriedade:

$$M_{n+1} = 2M_n + M_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}, n > 2$$

Demonstração. Tomando $M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e fazendo:

Supondo que para todo $n \leq k \in \mathbb{N}^*$, vale:

$$M_n = 2M_{n-1} + M_{n-2}$$

calculamos:

$$\begin{aligned} 2M_k + M_{k-1} &= 2 \begin{pmatrix} P_{k+1} & P_k \\ P_k & P_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_k & P_{k-1} \\ P_{k-1} & P_{k-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2P_{k+1} + P_k & 2P_k + P_{k-1} \\ 2P_k + P_{k-1} & 2P_{k-1} + P_{k-2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} P_{k+2} & P_{k+1} \\ P_{k+1} & P_k \end{pmatrix} = M_{k+1} \quad \square \end{aligned}$$

O que torna a recorrência matricial do Teorema (6) válida para todo $n \in \mathbb{N}^*$, gerando uma sequência de Matrizes (M_n) , com todas as propriedades que a recorrência do tipo $x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}$, similar a recorrência que define (P_n) . Exibimos a seguir, somente a título de apreciação, M_3, M_4, M_5 e M_6 :

$$\begin{aligned} M_3 &= 2M_2 + M_1 = 2 \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_4 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{pmatrix} \\ M_4 &= 2M_3 + M_2 = 2 \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_5 & P_4 \\ P_4 & P_3 \end{pmatrix} \\ M_5 &= 2M_4 + M_3 = 2 \begin{pmatrix} 29 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 & 29 \\ 29 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_6 & P_5 \\ P_5 & P_4 \end{pmatrix} \\ M_6 &= 2M_5 + M_4 = 2 \begin{pmatrix} 70 & 29 \\ 29 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 29 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 169 & 70 \\ 70 & 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_7 & P_6 \\ P_6 & P_5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Uma pergunta natural que surge aqui é, sobre a consistência dessas propriedades/definições matriciais para $n \in \mathbb{Z}$. Para discutirmos isso, vamos precisar do próximo resultado:

Teorema 7. Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $\det(M_n) = (-1)^n$.

Demonstração. $\det(M_1) = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$. Como $\det(A^n) = \det(A)^n$, para qualquer matriz A quadrada, então $\det(M_n) = \det(M_1^n) = \det(M_1)^n = (-1)^n$ \square

Queremos saber se é possível conceber a ideia de matrizes do tipo M_{-n} . Perceba que, como $\det(M_n) = (-1)^n \neq 0$, então sempre temos disponível a inversa M_n^{-1} . Tomando $M_{-n} = (M_n^{-1})^{-1}$, façamos uma extrapolação heurística de M_{-n} :

$$M_{-n} = (M_n^{-1})^{-1} = M_n = \frac{1}{(-1)^n} \begin{pmatrix} P_{n-1} & -P_n \\ -P_n & P_{n+1} \end{pmatrix} \implies$$

$$M_{-n} = (-1)^n \cdot (M_n)^{-1} \implies \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} (-1)^n P_{n-1} & (-1)^{n+1} P_n \\ (-1)^{n+1} P_n & (-1)^n P_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{-(n-1)} & P_{-n} \\ P_{-n} & (-1)^{n+2} P_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{-(n-1)} & P_{-n} \\ P_{-n} & P_{-(n+1)} \end{pmatrix} \implies$$

$$M_{-n} = \begin{pmatrix} P_{(-n)+1} & P_{-n} \\ P_{-n} & P_{(-n)-1} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Deixando claro em (15) que a definição (13) pode ser estendida naturalmente para $n \in \mathbb{Z}$, sem nenhuma modificação importante. Perceba também que o Teorema 7 pode ser naturalmente estendido para $n \in \mathbb{Z}$, pois:

$$\det(M_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

e

$$\det(M_{-n}) = \det[(-1)^n \cdot (M_n)^{-1}] = (-1)^{2n} \det[(M_n)^{-1}] = 1 \cdot \frac{1}{\det(M_n)} = (-1)^{-n} = (-1)^n.$$

Garantindo assim $\det(M_n) = (-1)^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Uma curiosidade aqui é que, nesse caso, temos $M_0 = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 \\ P_0 & P_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, que é a matriz identidade. Assim, não podemos definir a recorrência $M_n = \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix}$ com base em M_0 , já que isso iria gerar apenas uma sequência de matrizes iguais a identidade.

Tabela 9 – Algumas matrizes M_n

M_{-4}	M_{-3}	M_{-2}	M_{-1}	M_0
$\begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -12 & 29 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 29 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 70 & 29 \\ 29 & 12 \end{pmatrix}$

Da mesma forma, podemos estender de modo natural a recorrência matricial:

$$\begin{cases} M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ M_{n+1} = 2M_n + M_{n-1} \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > 2$$

Para $n \in \mathbb{Z}$. Observe que:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2M_1 + M_0$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 2M_0 + M_{-1}$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = 2M_{-1} + M_{-2}$$

$$M_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -12 \end{pmatrix} = 2M_{-2} + M_{-3}$$

$$M_{-2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 5 & 2 \cdot (-12) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -12 & 29 \end{pmatrix} = 2M_{-3} + M_{-4}$$

Comportamento muito similar a recorrência que usamos para definir (P_n) inicialmente.

Da mesma forma que encontramos uma relação entre P_n e P_{-n} , podemos utilizar a relação 14 para completar esta extensão em particular.

Agora que apresentamos os principais caminhos para definir os termos P_n da *Sequência de Pell*, na próxima seção vamos nos deter na descrição de algumas propriedades existentes entre os termos da sequência $(P_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

5 Algumas propriedades particulares de $(P_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

Discutiremos algumas propriedades clássicas da *Sequência de Pell*. Bicknell (1975), Koshy (2014), Bilgici (2014) citam diversas propriedades para Fibonacci, Lucas e Pell, indicando similaridades de propriedades entre tais sequências.

Teorema 8. (*Identidade de Cassini*): Dada $(P_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, é válida a equação:

$$P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{Z}$$

Demonstração. Lembre que, pelo Teorema 7, $\det(M_n) = (-1)^n$. Assim:

$$\begin{vmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{vmatrix} = P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n$$

□

Como corolário interessante temos que:

Corolário 1. $P_{n+1}P_{n-1} = (-1)^n + P_n^2$, para todo $n \in \mathbb{Z}$

Tabela 10 – Exemplo numérico do Corolário 1.

$$\begin{array}{l|l}
 P_{-4}P_{-6} = (-1)^{-5}P_{-5} & P_{-3}P_{-5} = (-1)^{-4}P_{-4} \\
 P_{-2}P_{-4} = (-1)^{-3}P_{-3} & P_{-1}P_{-3} = (-1)^{-2}P_{-2} \\
 P_0P_{-2} = (-1)^{-1}P_{-1} & P_1P_{-1} = (-1)^0P_0 \\
 P_2P_0 = (-1)^1P_1 & P_3P_1 = (1)^2P_2 \\
 P_4P_2 = (-1)^3P_3 & P_5P_3 = (-1)^4P_4 \\
 P_6P_4 = (-1)^5P_5 & P_7P_5 = (-1)^6P_6
 \end{array}$$

Ou seja, temos como expressar facilmente o produto de dois números de Pell com índice de mesma paridade, atribuindo um aspecto de simetria dotado de apelo estético. Abaixo alguns valores numéricos exibida na Tabela 10:

Voll (2010), partindo de uma perspectiva mais geral, trabalha com recorrências lineares de ordem 2 em representação genérica $X_n = \alpha X_{n-1} + \beta X_{n-2}$ e encontra diversas versões e manifestações dessa identidade.

O teorema a seguir nos fornece mais algumas interessantes identidades:

Teorema 9. *Dada $(P_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, valem as seguintes identidades:*

- (i): $P_{n+m} = P_n P_{m+1} + P_m P_{n-1}$
- (ii): $P_{n-m} = (-1)^m (P_n P_{m-1} - P_m P_{n-1})$
- (iii): $P_n^2 - P_{n-1}^2 = 2P_n P_{n-1} + (-1)^{n+1}$
- (iv): $P_n^2 + P_{n-1}^2 = P_{2n-1}$

Para todo $n, m \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. (i): Recordando o Teorema (5), em conjunto com propriedades elementares para aritmética matricial, obtemos:

$$\begin{aligned}
 M_{n+m} &= \begin{pmatrix} P_{n+m+1} & P_{n+m} \\ P_{n+m} & P_{n+m-1} \end{pmatrix} = M^n \cdot M^m = \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{m+1} & P_m \\ P_m & P_{m-1} \end{pmatrix} \implies \\
 &\begin{pmatrix} P_{n+m+1} & P_{n+m} \\ P_{n+m} & P_{n+m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{n+1}P_{m+1} + P_n P_m & P_{n+1}P_m + P_n P_{m-1} \\ P_n P_{m+1} + P_{n-1} P_m & P_n P_m + P_{n-1} P_{m-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Que nos fornece imediatamente $P_{n+m} = P_n P_{m+1} + P_m P_{n-1}$, por mera inspeção da última igualdade.

(ii): Tomando (i) e escrevendo P_{-m} ao invés de P_m , obtemos:

$$\begin{aligned}
 P_{n+(-m)} &= P_n P_{-m+1} + P_{-m} P_{n-1} = P_n P_{-(m-1)} + P_{-m} P_{n-1} = (-1)^m P_n P_{m-1} + (-1)^{m+1} P_m P_{n-1} \implies \\
 P_{n-m} &= (-1)^m (P_n P_{m-1} - P_m P_{n-1})
 \end{aligned}$$

(iii): Pelo Corolário (1):

$$\begin{aligned}
 P_{n+1}P_{n-1} &= (2P_n + P_{n-1})P_{n-1} = 2P_n P_{n-1} + P_{n-1}^2 = (-1)^n + P_n^2 \implies \\
 P_n^2 - P_{n-1}^2 &= 2P_n P_{n-1} + (-1)^{n+1}
 \end{aligned}$$

(iv): Pelo item (i):

$$P_{2n-1} = P_{n+(n-1)} = P_n P_{(n-1)+1} + P_{n-1} P_{n-1} = P_n^2 + P_{n-1}^2$$

□

Uma generalização para a *Identidade de Cassini* é dada pelo teorema abaixo:

Teorema 10. (*Identidade de Catalan*): Dada $(P_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, é válida a equação:

$$P_n^2 - P_{n+r} P_{n-r} = (-1)^{n-r} P_r, \forall n, r \in \mathbb{Z}$$

Como preparação para a demonstração deste teorema, devemos inicialmente verificar as seguintes igualdades, baseadas no item (i) do Teorema (9):

$$P_n = P_{r+(n-r)} = P_r P_{n-r+1} + P_{n-r} P_{r-1}$$

e

$$\begin{aligned} P_{n+r} &= P_{2r+n-r} = \\ &= P_{2r} P_{n-r+1} + P_{n-r} P_{2r-1} = \\ &= (P_r P_{r+1} + P_r P_{r-1}) P_{n-r+1} + P_{n-r} (P_r^2 + P_{r-1}^2) = \\ &= P_r (P_{r+1} + P_{r-1}) P_{n-r+1} + P_{n-r} (P_r^2 + P_{r-1}^2) = \\ &= P_r (2P_r + P_{r-1} + P_{r-1}) P_{n-r+1} + P_{n-r} (P_r^2 + P_{r-1}^2) = \\ &= 2(P_r^2 + P_r P_{r-1}) P_{n-r+1} + P_{n-r} (P_r^2 + P_{r-1}^2) \end{aligned}$$

ou seja:

$$P_n = P_r P_{n-r+1} + P_{n-r} P_{r-1} \quad (16)$$

e

$$P_{n+r} = 2(P_r^2 + P_r P_{r-1}) P_{n-r+1} + P_{n-r} (P_r^2 + P_{r-1}^2) \quad (17)$$

essas duas equações, aparentemente desajeitadas nos ajudarão na demonstração que se segue:

Demonstração. (Teorema 10):

$$\begin{aligned} P_n^2 - P_{n+r} P_{n-r} &= \\ &= (P_r P_{n-r+1} + P_{n-r} P_{r-1})^2 - P_{n-r} [2(P_r^2 + P_r P_{r-1}) P_{n-r+1} + P_{n-r} (P_r^2 + P_{r-1}^2)] = \\ &= P_r^2 P_{n-r+1}^2 + 2P_r P_{n-r+1} P_{n-r} P_{r-1} + P_{n-r}^2 P_{r-1}^2 \\ &\quad - 2P_r^2 P_{n-r+1} P_{n-r} - 2P_r P_{r-1} P_{n-r+1} P_{n-r} - P_r^2 P_{n-r}^2 - P_{n-r}^2 P_{r-1}^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= P_r^2 P_{n-r+1}^2 - 2P_r^2 P_{n-r+1} P_{n-r} - P_r^2 P_{n-r}^2 = \\
 &= P_r^2 (P_{n-r+1}^2 - 2P_{n-r+1} P_{n-r} - P_{n-r}^2) = \\
 &= P_r^2 (P_{n-r+1} (P_{n-r+1} - 2P_{n-r}) - P_{n-r}^2) = \\
 &= P_r^2 (P_{n-r+1} P_{n-r-1} - P_{n-r}^2) = \\
 &= P_r^2 (-1)^{n-r} \quad \square
 \end{aligned}$$

Catarino (2014), demonstra a *Identidade de Cassini* e a *Identidade de Catalan* para a Sequência de *k-Fibonacci*, uma generalização da *sequência de Fibonacci* via fórmula de Binet correspondente. Podemos fazer o mesmo nesse contexto:

Demonstração 2, Teorema (10): Lembrando da *Fórmula de Binet*:

$$\begin{aligned}
 P_n^2 - P_{n+r} P_{n-r} &= \\
 &= \left(\frac{\delta^n - (\delta')^n}{\delta - \delta'} \right)^2 - \left(\frac{\delta^{n+r} - (\delta')^{n+r}}{\delta - \delta'} \right) \left(\frac{\delta^{n-r} - (\delta')^{n-r}}{\delta - \delta'} \right) = \\
 &= \frac{\delta^{2n} + (\delta')^{2n} - 2(\delta\delta')^n - [\delta^{n+r}\delta^{n-r} - \delta^{n+r}(\delta')^{n-r} - (\delta')^{n+r}\delta^{n-r} + (\delta')^{n+r}(\delta')^{n-r}]}{(\delta - \delta')^2} =
 \end{aligned}$$

Recordando também que $\delta\delta' = -1$ e reorganizando os termos:

$$\begin{aligned}
 P_n^2 - P_{n+r} P_{n-r} &= \\
 &= \frac{\delta^{2n} + (\delta')^{2n} - 2(-1)^n - [\delta^{2n} + (\delta')^{2n} - (-1)^{(-n+r)}\delta^{2r} - (-1)^{(-n+r)}(\delta')^{2r}]}{(\delta - \delta')^2} = \\
 &= \frac{-2(-1)^n + (-1)^{(-n+r)}\delta^{2r} + (-1)^{(-n+r)}(\delta')^{2r}}{(\delta - \delta')^2} = \\
 &= \frac{-2(-1)^n + (-1)^{(-n+r)}\delta^{2r} + (-1)^{(-n+r)}(\delta')^{2r}}{(\delta - \delta')^2} = \frac{-2(-1)^n + (-1)^{(n-r)}\delta^{2r} + (-1)^{(n-r)}(\delta')^{2r}}{(\delta - \delta')^2} = \\
 &= \frac{(-1)^{n-r}(-2(-1)^r + \delta^{2r} + (\delta')^{2r})}{(\delta - \delta')^2} = \frac{(-1)^{n-r}(\delta^{2r} - 2(\delta\delta')^r + (\delta')^{2r})}{(\delta - \delta')^2} = \\
 &= (-1)^{n-r} \frac{(\delta^r - (\delta')^r)^2}{(\delta - \delta')^2} = (-1)^{n-r} P_r^2 \quad \square
 \end{aligned}$$

6 Considerações finais

Neste artigo apreciamos diversas possibilidades para a definição da *Sequência de Pell* com a existência de inúmeras propriedades correlatas com outras sequências definidas via recorrências lineares de 2ª ordem. Além disso, a propriedade de convergência exibida sugere um forte apelo estético, reforçada pela sua referência histórica para os problemas clássicos de aproximação de raízes.



Em relação aos modelos de extensão para índices negativos (tanto na representação termo a termo quanto na representação matricial), existem outras direções complementares a exibida aqui, ora expandindo o conjunto ao qual pertencem os índices (\mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , etc...), ora incrementando a lei de formação da recorrência, tal como as sequências de k -Fibonacci, k -Lucas, k -Pell ou os polinômios de Fibonacci, Lucas e Pell ($F_n(x)$, $L_n(x)$ e $P_n(x)$, respectivamente). Os autores do presente texto abordarão tais temas, especificamente para a *sequência de Pell* em estudos futuros.

Acreditamos ter oferecido um panorama adequado a fundamentação para $(P_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, reunindo diversas fontes e referências dispersas, organizando-as e materializando em um texto em língua portuguesa.

7 Referências bibliográficas

ALMEIDA, E. G. S. **Propriedades e generalizações dos números de Fibonacci**. 2014. 41 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)- Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2014.

ALVES, F.R.V. Sequência generalizada de Pell (SGP): aspectos históricos e epistemológicos sobre a evolução de um modelo. **Thema**, v. 13, n. 2, p. 27-41, 2016.

BELINI, M. M. **A razão áurea e a sequência de Fibonacci**. 2015. 67 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

BICKNELL, M. A primer on the Pell sequence and related sequences. **The Fibonacci Quarterly**, Halifax, v. 13, n. 4, p. 345-349, Dec. 1975.

BILGICI, G. New generalizations of Fibonacci and Lucas sequences. **Applied Mathematical Sciences**, Viterbo, v. 8, n. 29, p. 1429-1437, 2014.

BOYER, C. B. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

CAMPOS, D. A. **Algoritmos de aproximação de raízes quadradas**. 2014. 60 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2014.

CATARINO, P. On some Identities for k-Fibonacci sequence. **International Journal of Contemporary Mathematical Sciences**, v. 9, n. 1, p. 37-42, 2014.

ČERIN, Z. GIANELLA, G. M. On sums of squares of pell-lucas numbers. **Integers: electronic journal of combinatorial number theory**. v. 6, 2006. Disponível em: <<https://www.emis.de/journals/INTEGERS/papers/g15/g15.pdf>>. Acesso em: 18 set. 2018.

CURD, D. **Pell's equations: history, methods, and number theory**. 2014. 47 f. [Tese]. Department of Mathematics, Texas Christian University Fort Worth, Texas, 2014.

DASDEMIR, A. On the Pell, Pell-Lucas and modified Pell numbers by matrix method. **Ap-**



plied Mathematical Sciences, Viterbo, v. 5, n. 64, p. 3173-3181, 2011.

ERCOLANO, J. Matrix generators of Pell sequences. **The Fibonacci Quartely**, Halifax, v. 17, n. 1, p. 71-77, Feb. 1979.

GULEC, H. H. TASKARA, N. On the (s,t)-Pell and (s,t)-Pell-Lucas sequences and their matrix representations. **Applied Mathematics Letters**. v. 25, n. 10, p. 1554–1559, 2012.

HORADAM, A. F. Basic properties of a certain generalized sequence of numbers. **The Fibonacci Quartely**, Halifax, v. 3, n. 3, p. 161-176, Oct. 1965.

HORADAM, A. F. Pell identities. **The Fibonacci Quartely**, Halifax, v. 9, n. 3, p. 245-263, May 1971.

HORADAM, A. F. Applications of modified pell numbers to representations. **Ulam Quartely**, Gainesville, v. 3, n. 1, p. 34-53, 1994.

HORADAM, A. F. Jacobsthal representation numbers. **The Fibonacci Quarterly**, Halifax, v. 34, n. 1, p. 40-54, Feb. 1996.

KOSHY, T. **Pell and Pell–Lucas numbers with applications**. New York: Springer, 2014.

KOSHY, T. **Elementary number theory with applications**. 2. ed. Burlington: Elsevier, 2007.

LIMA, E. L. **Curso de análise**. 12. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2007. v. 1.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. 7. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

LUCAS, E. **Théorie des nombres**. Paris: Gauthier-Villars, 1891.

MALCOLM, N. The publications of John Pell, F. R.S (1611 – 1685): some new light and some old confusions. **Notes and Records of the Royal Society of London**, v. 54, n. 3, p. 275-292, 2000. Disponível em: <<http://rsnr.royalsocietypublishing.org/content/roynotesrec/54/3/275.full.pdf>>. Acesso em: 18 set. 2018.

PEREIRA, L. C.; FERREIRA, M. V. Sequência de Fibonacci: história, propriedades e relações com a razão áurea. **Disciplinarum Scientia Ciências Naturais e Tecnológicas**, S. Maria, v. 9, n. 1, p. 67-81, 2008.

PRIMO RAMOS, A.; REYES IGLESIAS, E. **Some algebraic and geometric properties of the Silver number**. [2007?]. Disponível em: <http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/aprimo/PrimoReyes.pdf>. Acesso em: 23 mai. 2018.

SANTOS, A. A.; ALVES, F. R. V. A fórmula de Binet como modelo de generalização e extensão da sequência de Fibonacci a outros conceitos matemáticos. **C.Q.D.– Revista Eletrônica**



Paulista de Matemática, Bauru, v. 9, p. 4-22, jul. 2017.

THE OEIS FOUNDATION. The on-line encyclopedia of integer sequences. Highland Park, 2018. Disponível em: <<https://oeis.org/?language=portuguese>>. Acesso em: 12 jun. 2018.

VINAGRE, F. Quase-cristais e números metálicos. **Gazeta de Matemática**, n. 179, p. 14-25, jul. 2016.

VOLL, N. G. The Cassini identity and its relatives. **The Fibonacci Quartely**, Halifax, v. 48, n. 3, p. 197-201, Aug. 2010.

WHITNEY, R. E. Advanced problems and solutions. **The Fibonacci Quarterly**, v. 23, n. 1, p. 89-96, Feb, 1985. Disponível em <<https://www.fq.math.ca/Scanned/23-1/advanced23-1.pdf>>. Acesso em: 17 set. 2018.