



Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664

Volume 11, dez. 2017

Edição Iniciação Científica

Otávio Henrique Perez

UNESP - Universidade Estadual
Paulista “Júlio de Mesquita
Filho”
otavio_perez@hotmail.com

Tiago de Carvalho

UNESP - Universidade Estadual
Paulista “Júlio de Mesquita
Filho”
tcarvalho@fc.unesp.br

Bifurcações de singularidade dobra-dobra em campos de vetores suaves por partes

Fold-fold singularity bifurcations on piecewise smooth vector fields

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar aspectos qualitativos e geométricos de bifurcações de campos de vetores suaves por partes definidos no plano. Em particular, abordaremos bifurcações a um parâmetro envolvendo a singularidade dobra-dobra, onde ambas as dobras são invisíveis. Introduziremos, entre outros conceitos, algumas relações de equivalência entre campos suaves por partes e definiremos o conceito de estabilidade estrutural, que nos levará ao estudo de bifurcações. Para cada bifurcação estudada, exibiremos a forma canônica do campo e também analisaremos o diagrama de bifurcação. Por fim, mostraremos que um Σ -centro não-degenerado (um caso particular da singularidade dobra-dobra) é uma bifurcação de codimensão k e portanto podemos concluir que esta singularidade é de codimensão infinita.

Palavras-chave: Campos de vetores suaves por partes. Bifurcações. Filippov. Singularidade dobra-dobra.

Abstract

In this work we will study some qualitative and geometric aspects of piecewise smooth vector fields defined on plane and its bifurcations. In particular, our focus is to study one parameter bifurcations involving the fold-fold singularity, where both folds are invisible. We will introduce, among other concepts, some equivalence relations between piecewise smooth vector fields and we will define structural stability, which will lead us to the study of bifurcations. For each bifurcation, we will exhibit the vector field's canonic form and we will analyze the bifurcation diagram also. Finally, we will show that a nondegenerate Σ -center (a particular case of the fold-fold singularity) is a codimension k bifurcation and therefore we can conclude that this singularity has infinite codimension.

Keywords: Piecewise smooth vector fields. Bifurcations. Filippov. Fold-fold singularity.

1 Introdução

Em sistemas dinâmicos, uma nova classe de campos de vetores tem ganhado grande destaque, que são os Campos de Vetores Suaves por Partes (ou CVSP's). A grosso modo, um CVSP é um campo cujo domínio de definição é dividido em regiões, sendo que em cada uma destas regiões atua um campo vetorial distinto. A fronteira destas regiões é limitada por curvas, suaves ou não. Em particular, ao longo deste trabalho iremos estudar CVSP's planares cujo domínio é dividido em duas regiões separadas por uma curva suave, que chamaremos de curva de descontinuidade.

Essa classe de campo possui um comportamento muito rico e tem chamado a atenção de pesquisadores por sua complexidade, vasta aplicabilidade em outras áreas da ciência e pela beleza dos problemas que surgem a partir de sua análise. Dentre tais problemas, podemos citar o estudo bifurcações, que é o escopo deste trabalho. Em poucas palavras, abordaremos o que ocorre com um campo de vetores suaves por partes quando aplicamos pequenas perturbações.

Inicialmente, iremos apresentar algumas definições na Seção 2 e estabelecer algumas notações que usaremos ao longo deste trabalho. Dentre as noções apresentadas, podemos citar o conceito de equivalência entre campos de vetores, que será crucial para definirmos estabilidade estrutural e bifurcações. Todas as definições apresentadas nesta seção podem ser encontradas em [1].

Em seguida, na Seção 3 estudaremos campos de vetores suaves por partes que são estruturalmente estáveis, isto é, campos de vetores que não são sensíveis a pequenas perturbações. Veremos também que é possível caracterizar o conjunto de todos os campos estruturalmente estáveis. Novamente, o conteúdo desta seção segue de perto resultados apresentados em [1].

O estudo de bifurcações se inicia na Seção 4. Aqui, vamos estudar bifurcações envolvendo a singularidade dobra-dobra, isto é, quando ambos os campos tangenciam a curva de descontinuidade no mesmo ponto, onde esta tangência é de ordem 2. Em particular, iremos analisar o que acontece quando ambas as dobras são invisíveis. Para isso, seguiremos de perto as referências [2] e [1], além de adotarmos algumas definições presentes em [3].

Por fim, iremos verificar que um Σ -centro não-degenerado (um caso particular da singularidade dobra-dobra invisível-invisível) é uma bifurcação de codimensão k , onde k é um número inteiro positivo. Assim, iremos concluir que esta é uma bifurcação de codimensão infinita. Para atingirmos este objetivo, seguiremos a referência [3].

2 Preliminares

Vamos introduzir algumas definições a respeito de campos de vetores suaves por partes e estabelecer algumas notações que adotaremos ao longo deste trabalho. Todos os conceitos apresentados a seguir também podem ser encontrados em [1].

Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ vizinhança aberta de $(0,0)$ e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^r tal que $(0,0)$ é valor regular de f , isto é, $\nabla f(0,0) \neq 0$. Defina os conjuntos:

$$\Sigma = f^{-1}(0) \cap U, \Sigma^+ = \{(x,y) \in U \mid f(x,y) \geq 0\}, \text{ e } \Sigma^- = \{(x,y) \in U \mid f(x,y) \leq 0\}.$$

Definição 1 *Nas condições acima, um Campo de Vetores Suave por Partes (ou Campo de Filippov) é um campo $Z : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que*

$$Z(x,y) = \begin{cases} X(x,y), & \text{se } (x,y) \in \Sigma^+, \\ Y(x,y), & \text{se } (x,y) \in \Sigma^-, \end{cases} \quad (1)$$

onde X e Y são campos de vetores suaves.

Observação 2 1. Por simplicidade, consideraremos apenas campos definidos em uma vizinhança de $(0,0)$.

2. Denotaremos $Z = (X, Y)$ para indicar a dependência de Z em relação aos campos X e Y . Quando necessário, denotaremos $Z = (X, Y, f)$ para indicar a dependência em relação à f .

3. Denotaremos por Ω o conjunto de todos os campos de Filippov.

Definição 3 A *Derivada de Lie* de f em relação ao campo vetorial X é dada por $Xf(p) = \langle X(p), \nabla f(p) \rangle$ e $X^i f(p) = \langle X(p), \nabla X^{i-1} f(p) \rangle$ para $i \geq 2$ inteiro.

Definição 4 Considere o campo (1). Definimos as seguintes regiões em Σ :

1. **Região de Costura:** $\Sigma^c = \{p \in \Sigma \mid (Xf(p)) \cdot (Yf(p)) > 0\}$,
2. **Região de Deslize:** $\Sigma^s = \{p \in \Sigma \mid (Xf(p)) < 0 \text{ e } (Yf(p)) > 0\}$,
3. **Região de Escape:** $\Sigma^e = \{p \in \Sigma \mid (Xf(p)) > 0 \text{ e } (Yf(p)) < 0\}$.

Veja a Figura 1.

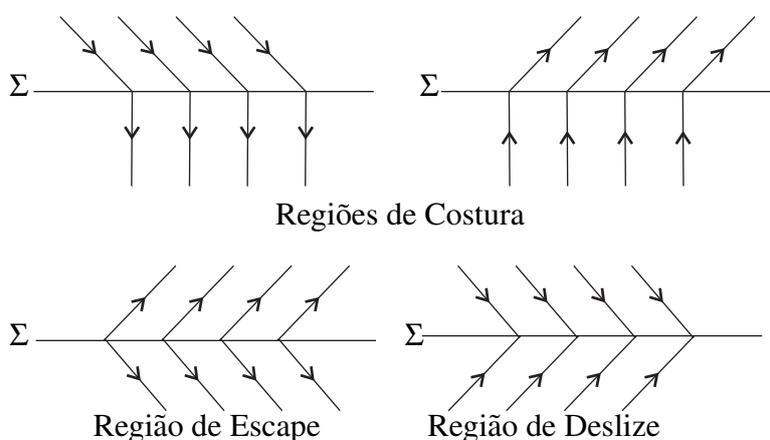


Figura 1: Regiões em Σ .

Observação 5 1. As três regiões definidas acima são abertas em Σ . De fato, como $Xf : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, se $Xf(p)$ é positivo (ou negativo) então Xf continuará assumindo valores positivos (ou negativos) numa vizinhança suficientemente pequena de p . Além disso, essas regiões podem ter algumas componentes conexas.

2. Temos que $Xf(p) = \langle X(p), \nabla f(p) \rangle = \|X(p)\| \|\nabla f(p)\| \cos \theta$, onde θ é o ângulo entre os vetores $X(p)$ e $\nabla f(p)$. Assim, o sinal de Xf depende desse ângulo.



Figura 2: Tangência quadrática (à esquerda) e tangência cúbica (à direita).

Definição 6 Um ponto $p \in \Sigma$ é **ponto de tangência** se $Xf(p) = 0$ ou $Yf(p) = 0$. Dizemos que $p \in \Sigma$ é **ponto de dobra de X** (ou que X tem **tangência quadrática** com Σ) se $Xf(p) = 0$ e $X^2f(p) \neq 0$. Dizemos que X tem **tangência cúbica** com Σ no ponto p se $Xf(p) = 0$, $X^2f(p) = 0$ e $X^3f(p) \neq 0$. Veja a Figura 2.

Definição 7 Seja $p \in \Sigma$ ponto de tangência. Se existe uma órbita γ do campo X (respectivamente Y) que passa por p após um tempo finito t_0 de tal forma que γ permanece em Σ^+ (respectivamente Σ^-) para $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, esta tangência é chamada de **tangência visível de X** (respectivamente de Y). Analogamente, se $\gamma \subset \Sigma^-$ (respectivamente $\gamma \subset \Sigma^+$) para $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, dizemos que p é **tangência invisível de X** (respectivamente de Y).

Observação 8 Se $(0,0)$ é uma dobra do campo X , se $X^2f(0,0) > 0$ a dobra é visível e se $X^2f(0,0) < 0$ a dobra é invisível. Analogamente, se $(0,0)$ é dobra do campo Y , $Y^2f(0,0) > 0$ implica que a dobra é invisível e $Y^2f(0,0) < 0$ implica que a dobra é visível.

Definição 9 O campo $Z^s : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$Z^s(p) = \frac{1}{Yf(p) - Xf(p)} F_Z(p) = \frac{1}{Yf(p) - Xf(p)} (Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p)),$$

é chamado de **Campo Deslizante**.

Note que, se $p \in \Sigma^s$, então $p \in \Sigma^e$ para o campo $(-Z)$. Assim, definimos o **Campo de Escape** $Z^e : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $Z^e(p) = -(-Z)^s(p)$. Denotaremos por Z^Σ tanto o campo deslizante quanto o campo de escape. Veja a Figura 3.

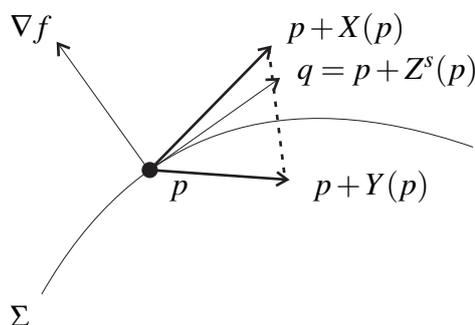


Figura 3: Campo Deslizante Z^s .

Definição 10 Seja $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$. Se $Z^\Sigma(p) = 0$, dizemos que p é ponto de **pseudo-equilíbrio** de Z .

Note que, em um ponto de pseudo-equilíbrio, os campos X e Y são colineares. De fato, se $Z^s(p) = 0$, então

$$\frac{1}{Yf(p) - Xf(p)}(Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p)) = 0,$$

donde $(Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p)) = 0$ e portanto $X(p) = \frac{Xf(p)}{Yf(p)}Y(p)$. Lembre que como $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$, então $Xf(p), Yf(p) \neq 0$.

Definição 11 *Seja $p \in \Sigma^s$. Então p é **pseudo-nó atrator** se $Z^s(p) = 0$ e $(Z^s)'(p) < 0$. Se $p \in \Sigma^e$, então p é **pseudo-nó repulsor** se $Z^e(p) = 0$ e $(Z^e)'(p) > 0$.*

Definição 12 *Dizemos que $p \in \Sigma$ é um ponto de **pseudo-sela** se*

- $p \in \Sigma^s$ tal que $Z^s(p) = 0$ e $(Z^s)'(p) > 0$,
- $p \in \Sigma^e$ tal que $Z^e(p) = 0$ e $(Z^e)'(p) < 0$.

Veja a Figura 4.

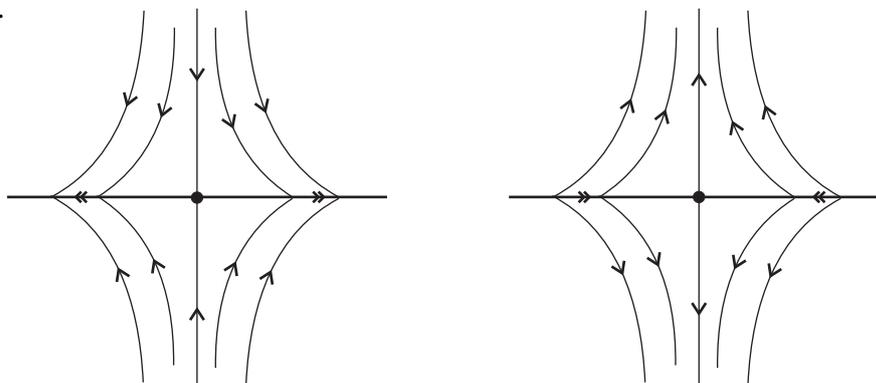


Figura 4: Pseudo-sela repulsora (à esquerda) e atratora (à direita).

Os campos suaves X e Y que compõem o campo $Z = (X, Y, f)$ estão definidos numa vizinhança aberta da origem que contém Σ^+ e Σ^- , respectivamente. Porém, o campo X pode possuir pontos críticos pertencentes à Σ^- (respectivamente, o campo Y pode possuir pontos críticos em Σ^+). Chamaremos esses pontos de **pontos de equilíbrio virtuais**. Os pontos críticos do campo X que estão em Σ^+ (respectivamente, pontos críticos do campo Y que estão em Σ^-) são chamados de **pontos de equilíbrio reais**.

A seguir, vamos introduzir duas noções de equivalência para campos de vetores suaves por partes que nos levarão ao estudo de bifurcações. Todas as definições e exemplos apresentados a seguir também podem ser encontrados em [1].

Definição 13 *Sejam $Z : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\tilde{Z} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ Campos de Filippov, onde $U, \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ são abertos e $\Sigma \subset U$ e $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{U}$ são as curvas de descontinuidade. Dizemos que Z e \tilde{Z} são **Σ -equivalentes** se existe um homeomorfismo $h : U \rightarrow \tilde{U}$ que preserva orientação, leva órbitas de Z em órbitas de \tilde{Z} e leva Σ em $\tilde{\Sigma}$.*

Segue da definição anterior que toda Σ -equivalência leva órbitas regulares em órbitas regulares e singularidades em singularidades. Além disso, as regiões Σ^c , Σ^s e Σ^e são preservadas, logo os campos deslizante e de escape também são preservados. Também são preservadas as separatrizes, conexões de separatrizes, órbitas periódicas e ciclos.

A definição acima é natural pois em algumas aplicações é necessário que a curva de descontinuidade Σ seja preservada. Entretanto, em alguns casos ela se torna uma definição muito restrita. Por exemplo, não é necessário que a região de costura seja preservada. Do ponto de vista topológico, o comportamento de uma trajetória numa vizinhança da região de costura é o mesmo comportamento de uma trajetória que passa por um ponto $p \in \Sigma^\pm$, onde o campo Z é suave.

Dessa forma, neste trabalho consideraremos, quando conveniente, a noção de equivalência topológica.

Definição 14 *Sejam $Z : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\tilde{Z} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ Campos de Filippov, onde $U, \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ são abertos e $\Sigma \subset U$ e $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{U}$ são as curvas de descontinuidade. Dizemos que Z e \tilde{Z} são topologicamente equivalentes se existe um homeomorfismo $h : U \rightarrow \tilde{U}$ que preserva orientação e leva órbitas de Z em órbitas de \tilde{Z} .*

É fácil ver que toda Σ -equivalência é uma equivalência topológica, entretanto a recíproca não é verdadeira (ver Exemplo 16). Vale destacar também que o conceito de Σ -equivalência é mais utilizado na literatura.

Definição 15 *Sejam X, \tilde{X} campos suaves e $\varphi_X(t, p)$, $\varphi_{\tilde{X}}(t, h(p))$ suas respectivas trajetórias. Dizemos que os campos X e \tilde{X} são C^r -conjugados se existe um homeomorfismo h de classe C^r tal que $h(\varphi_X(t, p)) = \varphi_{\tilde{X}}(t, h(p))$. Veja a Figura 5.*

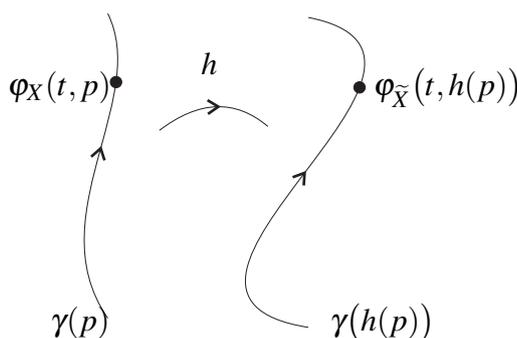


Figura 5: Campos C^r -conjugados.

Exemplo 16 *Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto contendo a origem. Considere $\Sigma = \{(x, y) \in U \mid y = 0\}$ e defina os campos descontínuos $Z, \tilde{Z} : U \rightarrow U$ por*

$$Z(x,y) = \begin{cases} X(x,y) = (0, -1), & y \geq 0, \\ Y(x,y) = (0, 1), & y \leq 0, \end{cases}$$

$$\tilde{Z}(x,y) = \begin{cases} \tilde{X}(x,y) = (-1, -1), & y \geq 0, \\ \tilde{Y}(x,y) = (-1, 1), & y \leq 0. \end{cases}$$

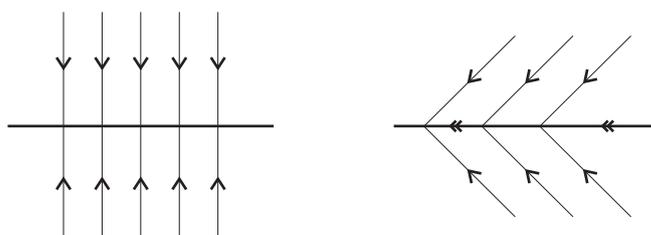


Figura 6: Campos Z (à esquerda) e \tilde{Z} (à direita).

Note que $Xf(x,y) = \tilde{X}f(x,y) = -1$ e $Yf(x,y) = \tilde{Y}f(x,y) = 1$. Além disso, $\Sigma^s = \Sigma = \tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}^s$. Assim, temos que o homeomorfismo $h : U \rightarrow U$ dado por

$$h(x,y) = \begin{cases} (x-y, y), & y \geq 0, \\ (x, y), & y = 0, \\ (x+y, y), & y \leq 0; \end{cases}$$

leva Σ^+ em $\tilde{\Sigma}^+$ e leva Σ^- em $\tilde{\Sigma}^-$. Observe que h não é de classe C^1 .

Agora, note que $Z^s(x,y) = (0,0)$ e que $\tilde{Z}^s(x,y) = (-1,0)$. Isso quer dizer que todos os pontos de Σ são pontos críticos de Z^s , enquanto \tilde{Z}^s não possui nenhum ponto crítico. Logo h não é uma Σ -equivalência.

Definição 17 Um campo suave por partes $Z_0 : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ é **localmente estruturalmente estável** se existe uma vizinhança $V \subset \Omega$ de Z_0 tal que todo campo $Z \in V$ é topologicamente equivalente à Z_0 .

De maneira análoga, definimos o conceito de Σ -estabilidade estrutural local.

Definição 18 Uma **forma canônica de um campo de Filippov** Z é um campo de vetores suave por partes cuja expressão é suficientemente simples e que é localmente equivalente à Z .

3 Campos de vetores estruturalmente estáveis

Vamos estudar campos suaves por partes que são Σ -estruturalmente estáveis, seguindo de perto a referência [1]. Se $p \in (\Sigma^+ \cup \Sigma^-) - \Sigma$, podemos aplicar o Teorema do Fluxo Tubular ou o Teorema de Grobman-Hartman (cujas demonstrações podem ser encontradas em [4] e [5], respectivamente) para estudar a estabilidade dos campos em torno desses pontos. Sendo assim, nosso foco é analisar o que acontece quando $p \in \Sigma$. Nossa estratégia é construir Σ -equivalências

para poder caracterizar o conjunto dos campos estruturalmente estáveis (que denotaremos por Ω_0).

Em [1] foi provado que os campos estruturalmente estáveis são campos cujos pontos são

1. Pontos regulares de Z em $\Sigma^c \cup \Sigma^s \cup \Sigma^e$.
2. Singularidades genéricas de Z (dobra regular ou ponto crítico hiperbólico de Z^Σ).

Construiremos uma Σ -equivalência para o caso em que p é uma dobra regular de Z . Os outros casos são demonstrados com técnicas análogas, conforme [1].

Proposição 19 *Seja $(0,0) \in \Sigma$ um ponto de dobra regular do campo descontínuo $Z = (X, Y, f)$. Então existe uma vizinhança U de $(0,0)$ tal que Z é Σ -equivalente à forma canônica*

$$\tilde{Z}(x,y) = \begin{cases} \tilde{X}(x,y) = (b, ax), & y \geq 0, \\ \tilde{Y}(x,y) = (0, c), & y \leq 0, \end{cases}$$

onde $a = \text{sgn}(X^2 f(0,0))$, $b = \text{sgn}(\pi_1(X(0,0)))$, $c = \text{sgn}(Y f(0,0))$ e π_1 é a projeção na primeira coordenada.

Demonstração. Primeiramente, note que $a > 0$ indica que a origem é dobra visível, enquanto $a < 0$ indica que a origem é dobra invisível. Já os sinais de b e c indicam a direção do fluxo dos campos X e Y , respectivamente.

Considere sem perda de generalidade que $b = c = 1$. Assim, dividiremos a demonstração em dois casos.

Se $a < 0$, podemos descrever a curva de descontinuidade por $\Sigma = \bar{\Sigma}^c \cup \bar{\Sigma}^s$, e portanto o campo Z^s está bem definido em Σ^s .

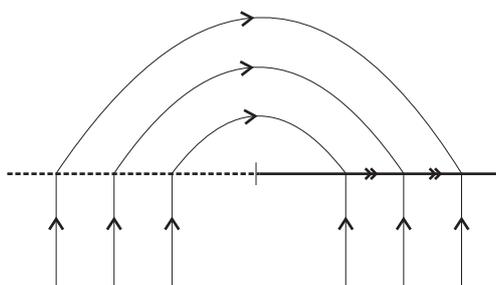


Figura 7: Forma canônica da Proposição 19, quando a dobra é invisível.

Agora, note que $\tilde{Z}^s(x,y) = (1,0)$, logo pelo Teorema do Fluxo Tubular existe um homeomorfismo $\tilde{h} : \Sigma^s \rightarrow \tilde{\Sigma}^s$ que conjuga os campos Z^s e \tilde{Z}^s .

Observe também que Σ^s atua como uma espécie de “atrator global”. Segue do Teorema da Função Implícita que existe uma vizinhança U de $(0,0)$ e uma aplicação contínua $t : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi_Z(t(p), p) \in \Sigma^s$, para todo $p \in U$. Assim, defina a aplicação $h : U \rightarrow h(U)$ por

$$h(p) = \begin{cases} \varphi_{\tilde{Z}}(-t(p), \tilde{h}(\varphi_Z(t(p), p))), & p \in (\Sigma^+ \cup \Sigma^- \cup \bar{\Sigma}^c) \cap U, \\ \tilde{h}(p), & p \in \Sigma^s \cap U. \end{cases}$$

Esta aplicação é contínua pois as aplicações que definem h são contínuas e coincidem em Σ . Além disso, pela forma como foi definida, h é um homeomorfismo que leva Σ em $\tilde{\Sigma}$, leva órbitas de Z em órbitas de \tilde{Z} e preserva orientação. Assim, os campos Z e \tilde{Z} são Σ -equivalentes.

Agora, suponha que $a > 0$, isto é, que $(0, 0)$ é uma dobra regular visível. Não podemos usar os mesmos argumentos do caso anterior pois a região delimitada pelas separatrizes $W_+^s(0, 0)$ e $W_+^u(0, 0)$ possui trajetórias que não interceptam a descontinuidade Σ (lembre-se que $a = b = c = 1$).

Para resolver este problema, considere π e $\tilde{\pi}$ seções transversais às curvas de descontinuidade Σ e $\tilde{\Sigma}$ em $(0, 0)$, respectivamente. Como estas seções transversais são homeomorfas à \mathbb{R} , logo π e $\tilde{\pi}$ são homeomorfos. Assim, considere $g : \pi \rightarrow \tilde{\pi}$ homeomorfismo tal que $g(0) = 0$.

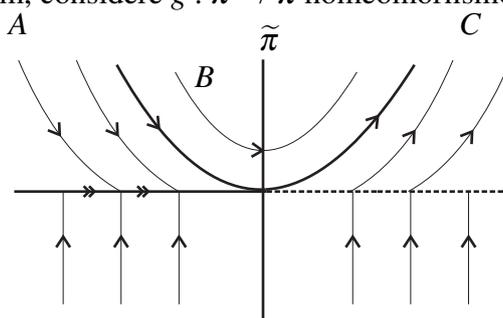


Figura 8: Forma canônica da Proposição 19, quando a dobra é visível.

Defina A como sendo a região à esquerda de $W_+^s(0, 0) \cup W_-^s(0, 0)$, B como sendo a região acima de $W_+^s(0, 0) \cup W_+^u(0, 0)$ e C como sendo a região à direita de $W_+^u(0, 0) \cup W_-^s(0, 0)$. Denote $U = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$.

Note que o campo Z^s está bem definido pois há região de deslize (já que $a = b = c = 1$). Como $\tilde{Z}^s(x, y) = (1, 0)$, pelo Teorema do Fluxo Tubular existe um homeomorfismo $\tilde{h} : \Sigma^s \rightarrow \tilde{\Sigma}^s$ que conjuga os campos Z^s e \tilde{Z}^s .

Dado $p \in A$, segue do Teorema da Função Implícita que existe um único tempo $t(p)$ tal que $\varphi_X(t(p), p) \in \Sigma^s$ (ou $\varphi_Y(t(p), p) \in \Sigma^s$). Portanto tome

$$h(p) = \begin{cases} \varphi_{\tilde{X}}(-t(p), \tilde{h}(\varphi_X(t(p), p))), & p \in \Sigma^+ \cap A, \\ \tilde{h}(p), & p \in \Sigma \cap A, \\ \varphi_{\tilde{Y}}(-t(p), \tilde{h}(\varphi_Y(t(p), p))), & p \in \Sigma^- \cap A. \end{cases}$$

Para $p \in \bar{B}$, existe um único tempo $t(p)$ tal que $\varphi_X(t(p), p) \in \pi$. Defina

$$h(p) = \varphi_{\tilde{X}}(-t(p), g(\varphi_X(t(p), p))), p \in \Sigma^+ \cap \bar{B}.$$

Por fim, para $p \in C$, existe um único tempo $t(p)$ tal que $\varphi_X(t(p), p) \in \Sigma^c$ (ou $\varphi_Y(t(p), p) \in \Sigma^c$). Assim, tome

$$h(p) = \begin{cases} \varphi_{\tilde{X}}(-t(p), \varphi_X(t(p), p)), & p \in \Sigma^+ \cap C, \\ p, & p \in \Sigma \cap C, \\ \varphi_{\tilde{Y}}(-t(p), \varphi_Y(t(p), p)), & p \in \Sigma^- \cap C. \end{cases}$$

A aplicação h é contínua pois as aplicações que definem h são contínuas e coincidem em Σ . Além disso, pela forma como foi definida, h é um homeomorfismo que leva Σ em $\tilde{\Sigma}$, leva órbitas de Z em órbitas de \tilde{Z} e preserva orientação. Assim, os campos Z e \tilde{Z} são Σ -equivalentes. \square

O Teorema a seguir caracteriza os campos suaves por partes que são Σ -estruturalmente estáveis e pode ser encontrado em [1], página 16.

Teorema 20 *Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega$ definido em uma vizinhança da origem e seja $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ a curva de descontinuidade. Se $(0, 0) \in \Sigma$ é um ponto regular ou uma singularidade genérica de Z_0 , então Z_0 é Σ -estruturalmente estável.*

Demonstração: Para cada tipo de ponto regular e de singularidade genérica, devemos mostrar que existe uma vizinhança $V \in \Omega$ de Z_0 tal que todo $Z \in V$ é Σ -equivalente ao campo Z_0 . Assim, dividiremos nossa demonstração em quatro casos:

1. $(0, 0) \in \Sigma^c$,
2. $(0, 0) \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$,
3. $(0, 0)$ é dobra regular de Z_0 ,
4. $(0, 0)$ é ponto crítico hiperbólico de Z_0^Σ .

Vamos estudar o terceiro caso. Os outros são demonstrados usando técnicas semelhantes.

Suponha que $(0, 0) \in \Sigma$ é um ponto de dobra regular de Z_0 . Podemos supor sem perda de generalidade que $X_0 f(0, 0) = 0$, $X_0^2 f(0, 0) \neq 0$ e $Y_0 f(0, 0) \neq 0$.

Defina a aplicação $\psi : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $\psi(Z, x) = Xf(x, 0)$. Temos que ψ é aplicação contínua (pois Xf é contínua) e $\psi(Z_0, 0) = X_0 f(0, 0) = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \psi}{\partial x}(Z, x) \right|_{(Z_0, 0)} &= \left. \frac{\partial}{\partial x}(Xf(x, 0)) \right|_{(Z_0, 0)} = \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(\langle X(x, 0), (0, 1) \rangle \right) \right|_{(Z_0, 0)} = \\ &= \left\langle \frac{d}{dx} X(x, 0), (0, 1) \right\rangle \Big|_{(Z_0, 0)} = \left\langle \left(\frac{\partial X_1}{\partial x}(x, 0), \frac{\partial X_2}{\partial x}(x, 0) \right), (0, 1) \right\rangle \Big|_{(Z_0, 0)} = \\ &= \left. \frac{\partial X_2}{\partial x}(x, 0) \right|_{(Z_0, 0)} \neq 0, \end{aligned}$$

pois por hipótese $X_0 f(0, 0) = 0$ e $X_0^2 f(0, 0) \neq 0$.

Como ψ é de classe C^1 e $\det \left[\frac{\partial \psi}{\partial x}(Z_0, 0) \right] \neq 0$, podemos aplicar o Teorema da Função Implícita. Assim, existe uma vizinhança $V_0 \subset \Omega$ de Z_0 e uma aplicação contínua $g : V_0 \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que $g(Z_0) = 0$ e $\psi(Z, g(Z)) = 0$, para todo $Z \in V_0$. Em outras palavras, o ponto $(g(Z), 0)$ é ponto de tangência para X .

Além disso, como a função $X_0^2 f$ é contínua e $X_0^2 f(g(Z_0), 0) \neq 0$, existe uma vizinhança $V_1 \subset \Omega$ de Z_0 tal que $X_1^2 f(g(Z_1), 0) \neq 0$, para todo $Z_1 \in V_1$. Analogamente, existe uma vizinhança $V_2 \subset \Omega$ de Z_0 tal que $Y_2 f(g(Z_2), 0) \neq 0$, para todo $Z_2 \in V_2$.

Tomando $V = V_0 \cap V_1 \cap V_2$, temos que $(g(Z), 0)$ é ponto de dobra regular de Z , para todo $Z \in V$. Como todo $Z \in V$ é Σ -equivalente ao campo \tilde{Z} da Proposição 19, segue que Z_0 é Σ -estruturalmente estável. \square

4 Bifurcação dobra-dobra a um parâmetro

Nosso objetivo agora é estudar o conjunto $\Omega_1 = \Omega - \Omega_0$, que é o conjunto das bifurcações. Para isso, precisaremos estabelecer algumas definições que podem ser encontradas no apêndice A da referência [3]. Tais definições podem ser vistas como generalizações diretas das definições envolvendo campos suaves encontradas em [6].

Definição 21 *Seja Z_ε uma família de campos suaves por partes que depende do parâmetro $\varepsilon \in \mathbb{R}^m$. Dizemos que a família Z_ε tem uma **bifurcação em ε_0** se para toda vizinhança $U \subset \mathbb{R}^m$ de ε_0 existe um $\varepsilon \in U$ tal que Z_{ε_0} e Z_ε não são topologicamente equivalentes.*

Definição 22 *Qualquer família Z_ε de perturbações de Z_0 é dita **desdobramento** do campo suave por partes Z_0 .*

Definição 23 *Duas famílias Z_ε e \tilde{Z}_ε de campos suaves por partes são **equivalentes** se para cada ε existe um homeomorfismo h_ε que é uma equivalência topológica entre Z_ε e \tilde{Z}_ε .*

Definição 24 *A família Z_ε é **induzida** pela família \tilde{Z}_ε se existe uma aplicação contínua $\xi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ com $\xi(0) = 0$ e $Z_\mu = \tilde{Z}_{\xi(\mu)}$.*

Definição 25 *Seja Z_ε uma família de campos suaves por partes. O desdobramento induzido Z_ε de Z_0 é dito **desdobramento versal** se todo desdobramento de Z_0 é equivalente à Z_ε . O **desdobramento mini-versal** de Z_0 é o desdobramento versal que depende do menor número de parâmetros, isto é, Z_ε tal que $\varepsilon \in \mathbb{R}^m$ com m sendo o menor inteiro possível.*

Definição 26 *A **codimensão** de uma bifurcação é o número de parâmetros do desdobramento mini-versal.*

Seja $\Omega_0 \subset \Omega$ o conjunto dos campos suaves por partes cujos pontos são todos regulares ou singularidades genéricas. Vimos na Seção anterior que os campos pertencentes a esse conjunto são estruturalmente estáveis.

Denote agora $\Omega_1 = \Omega - \Omega_0$ e $\Sigma_1 = \{Z \in \Omega_1 \mid Z \text{ é estruturalmente estável em } \Omega_1\}$. O conjunto Σ_1 será chamado de Conjunto das Bifurcações de Codimensão 1.

4.1 Bifurcação dobra-dobra invisível-invisível

Agora, estamos aptos a estudar bifurcações de campos de vetores suaves por partes que dependem de um parâmetro. Em particular, vamos estudar o caso onde a origem é uma dobra para os campos X e Y simultaneamente. Vale destacar que podemos obter bifurcações que dependem de um parâmetro a partir de outras singularidades, tais como: tangência cúbica, sela-nó para o campo deslizante, ponto crítico hiperbólico para o campo X (ou Y). O estudo de bifurcações envolvendo todas essas singularidades (e também da singularidade dobra-dobra) é feito em [2].

Suponha que a origem é uma dobra para X e Y simultaneamente, onde $Z = (X, Y)$ é campo suave por partes. Teremos três casos para analisar, a depender da visibilidade das dobras, conforme mostra a Figura 9:

1. Visível-visível,

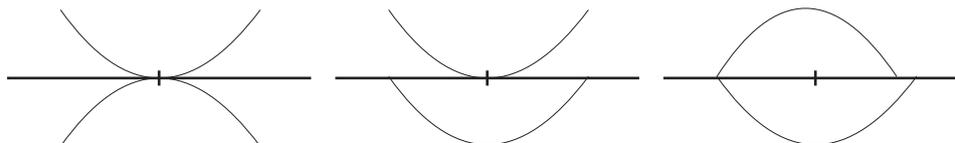


Figura 9: Casos possíveis para a singularidade dobra-dobra.

2. Visível-invisível,

3. Invisível-invisível.

Vamos considerar o caso onde $(0,0)$ é uma dobra invisível para X e Y . Assim, seja $Z = (X, Y) \in \Omega$ tal que $Xf(0,0) = Yf(0,0) = 0$, $X^2f(0,0) < 0$ e $Y^2f(0,0) > 0$. Aqui, teremos três casos genéricos para analisar: um caso quando $\pi_1(X(0,0))\pi_1(Y(0,0)) > 0$ e dois casos quando $\pi_1(X(0,0))\pi_1(Y(0,0)) < 0$. Geometricamente, essas duas condições nos dizem se os vetores $X(0,0)$ e $Y(0,0)$ possuem a mesma orientação (se positivo) ou se possuem orientações opostas (se negativo).

Quando $\pi_1(X(0,0))\pi_1(Y(0,0)) < 0$, os dois casos serão diferenciados quando a origem atua como uma espécie foco atrator ou repulsor. Para analisar esses casos genéricos, primeiramente devemos definir a Aplicação de Primeiro Retorno para Z .

Suponha sem perda de generalidade que $\pi_1(X(0,0)) > 0$ e $\pi_1(Y(0,0)) < 0$ (o caso oposto é estudado de maneira análoga). Seja φ_X o fluxo do campo X e $p_0 = (x_0, 0) \in \Sigma$. Então existe um tempo $t_0 \neq 0$ tal que $\varphi_X(t_0, p_0) \in \Sigma$ e $Xf(\varphi_X(t_0, p_0)) \neq 0$, pois estamos assumindo que $(0,0) \in \Sigma$ é uma dobra isolada de X .

Seja θ a projeção na segunda coordenada e defina a aplicação $\psi: \mathbb{R}^* \times \Sigma^c \rightarrow \Sigma^c$ por $\psi(t, p) = \theta(\varphi_X(t, p))$. Assim, temos que $\psi(t_0, p_0) = 0$ e

$$\frac{\partial}{\partial x}(\psi(t_0, p_0)) = \theta(X(\varphi_X(t_0, p_0))) \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Implícita, existem vizinhanças U_{p_0} e V_{t_0} e uma aplicação diferenciável $t: U_{p_0} \rightarrow V_{t_0}$ tal que $\psi(t(p), p) = 0$, isto é, $\varphi_X(t(p), p) \in \Sigma$. Em outras palavras, dado $p \in \Sigma$ sempre irá existir um tempo $t(p)$ não nulo tal que $\varphi_X(t(p), p) \in \Sigma$.

Defina agora a aplicação $\phi_X: \Sigma^c \rightarrow \Sigma^c$ por $\phi_X(p) = \pi_1(\varphi_X(t(p), p))$. Chamaremos ϕ_X de **aplicação de primeiro retorno**. Note que ϕ_X é diferenciável e $\phi_X^2 = Id$.

Podemos escrever $\phi_X(x) = -x + a_1x^2 - a_2x^3 + \mathcal{O}(x^4)$. Analogamente, definimos a aplicação de primeiro retorno ϕ_Y para o campo Y e podemos escrever $\phi_Y(x) = -x + b_1x^2 - b_2x^3 + \mathcal{O}(x^4)$. Dado o conjunto $\Sigma_- = \{(x, 0) \in \Sigma \mid x < 0\}$, definimos a aplicação de primeiro retorno ϕ para o campo Z e escrevemos $\phi(x) = \varphi_Y \circ \varphi_X(x) = x + (b_1 - a_1)x^2 + \mathcal{O}(x^3)$. Veja a Figura 10.

Se $\phi = Id$, a origem é uma espécie de centro para o campo Z . Caso $b_1 - a_1 = 0$, teremos uma bifurcação que depende de mais de um parâmetro, a qual estudaremos posteriormente (Σ -centro não-degenerado). Se $b_1 - a_1 \neq 0$, dizemos que a origem é uma dobra-dobra atratora genérica se $b_1 - a_1 > 0$ e uma dobra-dobra repulsora genérica se $b_1 - a_1 < 0$. Veja a Figura 11.

Feitas estas observações, podemos estudar os casos genéricos.

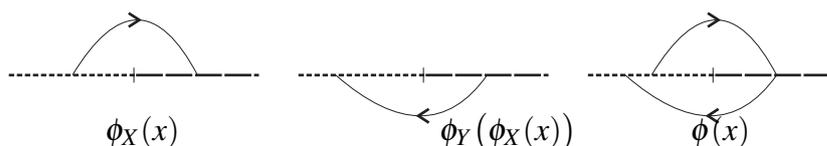


Figura 10: Aplicações de primeiro retorno de X , Y e Z .

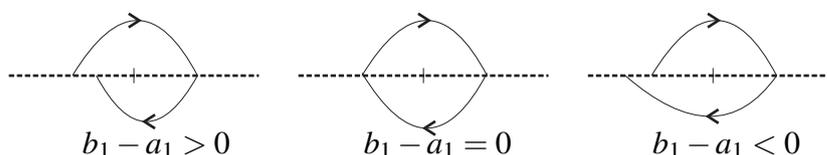


Figura 11: Casos genéricos quando $\pi_1(X(0,0))\pi_1(Y(0,0)) < 0$.

Proposição 27 *Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$. Suponha que $(0,0) \in \Sigma$ é uma dobra invisível de X e Y simultaneamente e que $\pi_1(X(0,0))\pi_1(Y(0,0)) > 0$. Então o desdobramento de Z que depende de um parâmetro é Σ -equivalente ao desdobramento de Z_α , onde*

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = (a, -ax + \alpha), & \text{se } y \geq 0, \\ Y(x, y) = (a, ax), & \text{se } y \leq 0, \end{cases}$$

onde $a = \text{sgn}(\pi_1(X(0,0)))$.

Vamos esboçar o retrato de fase de Z_0 e de seus desdobramentos para $a = 1$. Temos que $X_\alpha f(x, y) = -x + \alpha$ e $X_\alpha^2 f(x, y) = -1$, logo $(\alpha, 0)$ é uma dobra invisível de X . Analogamente, $Y f(x, y) = x$ e $Y^2 f(x, y) = 1$, portanto $(0, 0)$ é dobra invisível de Y . Além disso, como $X_\alpha f \cdot Y f > 0$ para x variando entre 0 e α , essas tangências delimitam uma região de costura em Σ . Temos também que o campo $Z_\alpha^\Sigma(x, y) = (1, 0)$ não possui pontos críticos. Veja a Figura 12.

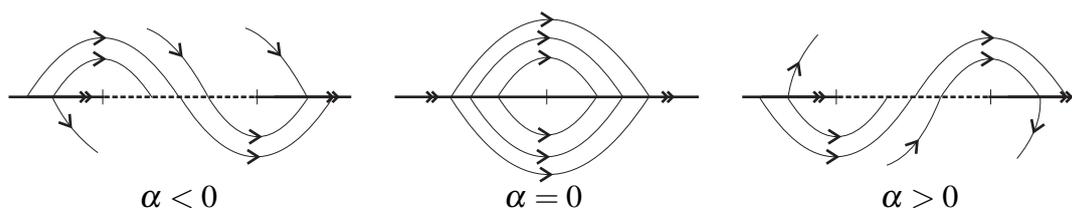


Figura 12: Forma canônica da Proposição 27.

Proposição 28 *Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$. Suponha que $(0,0) \in \Sigma$ é uma dobra invisível de X e Y simultaneamente e que $\pi_1(X(0,0))\pi_1(Y(0,0)) < 0$. Então, numa vizinhança próxima de $(0,0)$, vale:*

a) *Se a origem é uma dobra-dobra repulsora genérica, então o desdobramento de Z que depende de um parâmetro é Σ -equivalente ao desdobramento de Z_α , onde*

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = (-1, x + \alpha), & \text{se } y \geq 0, \\ Y(x, y) = (1, x - x^2), & \text{se } y \leq 0, \end{cases}$$

b) Se a origem é uma dobra-dobra atratora genérica, então o desdobramento de Z que depende de um parâmetro é Σ -equivalente ao desdobramento de Z_α , onde

$$Z_\alpha(x,y) = \begin{cases} X_\alpha(x,y) = (1, -x + \alpha), & \text{se } y \geq 0, \\ Y(x,y) = (-1, -x + x^2), & \text{se } y \leq 0. \end{cases}$$

A seguir, esboçaremos o diagrama de bifurcação de Z_α para o caso onde a origem é uma dobra-dobra atratora genérica.

Primeiramente, note que X_α possui uma dobra invisível $T_\alpha = (\alpha, 0)$ e o campo Y possui duas dobras: uma invisível $T_1 = (0, 0)$ e outra visível $T_2 = (1, 0)$. Vamos analisar o comportamento do campo apenas numa vizinhança da origem.

Para $\alpha = 0$, temos que $\Sigma^c = \Sigma - \{(0, 0)\}$. Se $\alpha < 0$ temos o surgimento de uma região de deslizamento entre T_α e T_1 e se $\alpha > 0$ temos o surgimento de uma região de escape entre T_1 e T_α .

Note também que $Z_\alpha^\Sigma(x,y) = \left(\frac{x^2 - 2x + \alpha}{x^2 - \alpha}, 0\right)$, cujo ponto crítico é um pseudo-nó dado por $P_\alpha = (1 - \sqrt{1 - \alpha}, 0)$. Para $\alpha < 0$, este ponto é atrator e para $\alpha > 0$ este ponto é repulsor.

Resolvendo os seguintes sistemas de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 1, \\ \dot{y}(t) = -x + \alpha \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -1, \\ \dot{y}(t) = -x + x^2, \end{cases}$$

obtemos que as aplicações de primeiro retorno de X_α e Y são dadas por

$$\phi_{X_\alpha}(x) = 2\alpha - x \quad \text{e} \quad \phi_Y(x) = \left(\frac{1}{4}\right) \left(3 - 2x - \sqrt{9 + 12x - 12x^2}\right).$$

Daí, segue que a aplicação de primeiro retorno do campo Z_α é dada pela expressão

$$\phi(x) = \phi_{X_\alpha} \circ \phi_Y(x) = 2\alpha + \left(\frac{1}{4}\right) \left(2x - 3 + \sqrt{9 + 12x - 12x^2}\right).$$

Calculando a expansão de Taylor da função acima em torno de $(0, 0)$, temos que

$$\phi(x) = 2\alpha + x - \frac{2x^2}{3} + \mathcal{O}(x^3),$$

e portanto a origem atua como uma espécie de foco atrator.

Resolvendo a equação $\phi(x) = x$, concluímos que para $\alpha > 0$ existe uma órbita periódica passando pelos pontos $C_1 = \left(\alpha - \sqrt{3\alpha(1 - \alpha)}, 0\right)$ e $C_2 = \left(\alpha + \sqrt{3\alpha(1 - \alpha)}, 0\right)$. Por conta disso, esta bifurcação também é chamada de Pseudo-Hopf. Veja a Figura 13.

5 O caso do Σ -centro não-degenerado

Um dos problemas mais difíceis que encontramos ao estudar bifurcações em campos de vetores suaves por partes é determinar a codimensão das singularidades. Na seção anterior, impomos algumas condições para que a bifurcação dobra-dobra invisível-invisível não dependesse de mais de um parâmetro. Uma dessas condições era que a singularidade não poderia se comportar como uma espécie de centro. Este caso é estudado no artigo [3], onde este ponto é chamado de Σ -centro não degenerado.

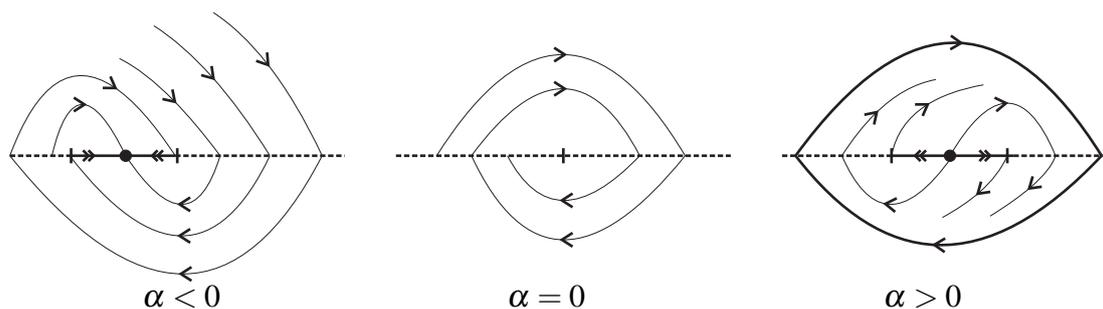


Figura 13: Forma canônica da Proposição 28 para o caso atrator.

Nesta seção iremos estudar uma série de resultados e definições com a finalidade de mostrar que esta singularidade é de codimensão k , para qualquer k inteiro positivo. Assim, iremos concluir que o Σ -centro não-degenerado é uma bifurcação de codimensão infinita. Todas as definições e demonstrações aqui expostas podem ser encontradas em [3].

Definição 29 Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$ de tal forma que a origem é uma dobra invisível para X e Y simultaneamente. Dizemos que $(0, 0) \in \Sigma$ é um Σ -centro não degenerado se existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^2$ contendo uma família γ_s de órbitas fechadas de Z de tal maneira que a orientação é preservada. Veja a Figura 14.

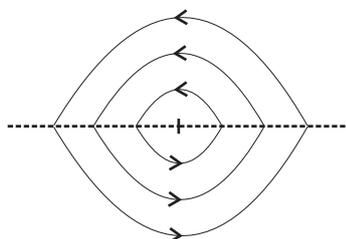


Figura 14: Σ -Centro não-degenerado.

Iremos denotar por ϕ_X , ϕ_Y e ϕ_Z as aplicações de primeiro retorno dos campos X , Y e Z respectivamente.

Proposição 30 Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$ tal que a origem é um Σ -centro não degenerado de Z . Então Z é Σ -equivalente à Z_0 , onde

$$Z_0(x, y) = \begin{cases} X_0(x, y) = (-1, 2x), & y \geq 0, \\ Y_0(x, y) = (1, 2x), & y \leq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Demonstração: Sem perda de generalidade, suponha que as órbitas de Z estejam orientadas no sentido anti-horário. Defina os conjuntos

$$\Sigma(+) = \{x \in \Sigma \mid x > 0\},$$

$$\Sigma(-) = \{x \in \Sigma \mid x < 0\}.$$

Vamos construir um homeomorfismo que leva órbitas de Z em órbitas de Z_0 , preservando o Σ -centro não degenerado. Primeiramente, vamos supor que tal homeomorfismo satisfaça $h(0,0) = (0,0)$. Por parametrização por comprimento de arco, também podemos tomar $h(\Sigma(+)) = \Sigma_0(+)$.

Considere $p \in \Sigma(+)$. Pelo Teorema da Função Implícita, existe um tempo $t(p) > 0$ tal que $\varphi_X(t(p), p) = p_1 \in \Sigma(-)$. Analogamente, tomando $q = h(p)$ existe $t(q) > 0$ tal que $\varphi_{X_0}(t(q), q) = q_1 \in \Sigma_0(-)$. Dessa forma, identificamos a órbita $\gamma_p^{p_1}(X)$ de X partindo de p e chegando em p_1 com a órbita $\gamma_{q_1}^{q_1}(X_0)$ de X_0 partindo de q e chegando em q_1 .

Tome novamente $p_1 = \varphi_X(t(p), p)$. Então existe um tempo $t(p_1) > 0$ tal que $\varphi_Y(t(p_1), p_1) = p \in \Sigma(+)$. De forma análoga, tomando $q_1 = \varphi_{X_0}(t(q), q)$ existe um tempo $t(q_1) > 0$ tal que $\varphi_{Y_0}(t(q_1), q_1) = q \in \Sigma_0(+)$. Dessa forma podemos identificar a órbita $\gamma_{p_1}^p(Y)$ de Y com a órbita $\gamma_{q_1}^q(Y_0)$ de Y_0 .

Repita o processo para todos os pontos de $\Sigma(+)$ e teremos $h(\Sigma(-)) = \Sigma_0(-)$, $h(\Sigma^+) = \Sigma_0^+$, $h(\Sigma^-) = \Sigma_0^-$ e que o homeomorfismo preserva Σ e leva órbitas de Z em órbitas de Z_0 . \square

Observe que os campos X_0 e Y_0 da forma canônica (2) podem ser escritos da forma $W(x, y) = (\pm 1, g(x))$ (em particular, $g(x) = 2x$). O Lema a seguir nos diz como são as trajetórias de tais sistemas.

Lema 31 *As trajetórias de um campo suave $W(x, y) = (1, g(x))$ é obtido por translações verticais do gráfico de $G(x)$, onde $G(x)$ é a primitiva de $g(x)$.*

Demonstração: Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, \\ \dot{y} = g(x), \end{cases}$$

obtido a partir do campo W , obtemos

$$x(t) = t + c \text{ e } y(t) = \int g(t + c) dt = G(t + c) + K,$$

onde $c, K \in \mathbb{R}$ e G é a primitiva de g . Tomando $u = t + c$, segue que as trajetórias de $W(x, y)$ são dadas por $(u, G(u) + K)$, que são translações verticais do gráfico de $G(u)$. \square

A seguir, iremos introduzir algumas definições e resultados que podem ser encontrados no Apêndice A do artigo [3].

Definição 32 *Sejam f_1 e f_2 duas aplicações definidas nos abertos V_1 e V_2 respectivamente. Uma conjugação topológica entre f_1 e f_2 é um homeomorfismo $g : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $g \circ f_1 = f_2 \circ g$.*

Se considerarmos uma família f_ε de aplicações dependendo do parâmetro $\varepsilon \in \mathbb{R}^m$, podemos definir de forma análoga ao que foi feito anteriormente os conceitos de conjugação topológica de famílias de aplicações, aplicações induzidas e desdobramentos (mini) versais de aplicações.

Definição 33 *Sejam $\dot{x} = f_1(x)$ e $\dot{x} = f_2(x)$ dois campos de vetores suaves definidos nas vizinhanças V_1 e V_2 respectivamente. Uma **conjugação topológica entre os campos** f_1 e f_2 é um homeomorfismo $g : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $g \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ g$, onde φ_1 e φ_2 são as trajetórias de f_1 e f_2 respectivamente.*

Proposição 34 *Sejam $Z_1 = (X_1, Y_1)$ e $Z_2 = (X_2, Y_2)$ campos de vetores suaves por partes. Então Z_1 e Z_2 são Σ -equivalentes se, e somente se, as aplicações de primeiro retorno ϕ_{Z_1} e ϕ_{Z_2} são topologicamente conjugadas.*

Demonstração: (\Rightarrow) Seja H a Σ -equivalência entre Z_1 e Z_2 . Vamos mostrar que $H|_\Sigma$ é uma conjugação topológica entre ϕ_{Z_1} e ϕ_{Z_2} .

Seja $\rho \in \Sigma$ em uma vizinhança onde ϕ_{Z_1} está bem definida. Como H é uma Σ -equivalência, então $H(\rho) \in \Sigma$.

Agora, denote por Γ_{X_1} (respectivamente Γ_{X_2}) a órbita de X_1 (respectivamente X_2) passando por ρ (respectivamente $H(\rho)$). Novamente, como H é uma Σ -equivalência temos $H(\Gamma_{X_1}) = \Gamma_{X_2}$. Note que o ponto na qual Γ_{X_1} (respectivamente Γ_{X_2}) intercepta Σ é $\phi_{X_1}(\rho)$ (respectivamente $\phi_{X_2}(H(\rho))$).

Usando mais uma vez o fato de H ser Σ -equivalência, temos $H(\phi_{X_1}(\rho)) = \phi_{X_2}(H(\rho))$. Como ρ é um ponto arbitrário de Σ , segue que $H \circ \phi_{X_1} = \phi_{X_2} \circ H$. Com um raciocínio análogo, obtemos $H \circ \phi_{Y_1} = \phi_{Y_2} \circ H$.

Agora, observe que

$$\phi_{Z_2} \circ H = (\phi_{Y_2} \circ \phi_{X_2}) \circ H = (\phi_{Y_2} \circ H) \circ \phi_{X_1} = H \circ (\phi_{Y_1} \circ \phi_{X_1}) = H \circ \phi_{Z_1},$$

e portanto $H|_\Sigma$ é uma conjugação topológica entre as aplicações de primeiro retorno de Z_1 e Z_2 .

(\Leftarrow) Seja $g : V_1 \rightarrow V_2$ um homeomorfismo que conjugua ϕ_{Z_1} e ϕ_{Z_2} . Usando técnicas similares as usadas na Proposição 30, podemos estender g a um homeomorfismo H que nos dá a Σ -equivalência entre Z_1 e Z_2 . \square

Proposição 35 *A família*

$$Z_\varepsilon(x, y, \varepsilon) = \begin{cases} X_\varepsilon(x, y, \varepsilon), & y \geq 0, \\ Y_\varepsilon(x, y, \varepsilon), & y \leq 0; \end{cases}$$

é um desdobramento versal de Z_0 se, e somente se, ϕ_{Z_ε} é desdobramento versal de ϕ_{Z_0} .

Demonstração: (\Rightarrow) Seja Z_ε desdobramento versal de Z_0 . Por definição, todo desdobramento de Z_0 é Σ -equivalente ao desdobramento induzido de Z_ε .

Para cada ε , seja ϕ_{Z_ε} associado à Z_ε . Logo, temos que ϕ_{Z_ε} é desdobramento de ϕ_{Z_0} . Seja ϕ_μ um desdobramento arbitrário de ϕ_{Z_0} . Podemos construir uma família Z_μ de campos suaves por partes tal que $\phi_{Z_\mu} = \phi_\mu$.

Como Z_ε é desdobramento versal, Z_μ é equivalente ao desdobramento induzido de Z_ε . Assim, pela Proposição 34, ϕ_{Z_μ} é topologicamente conjugado ao desdobramento induzido de ϕ_{Z_ε} . Portanto todo desdobramento ϕ_μ é topologicamente conjugado ao desdobramento induzido por ϕ_{Z_ε} , donde ϕ_{Z_ε} é desdobramento versal de ϕ_{Z_0} .

(\Leftarrow) Seja ϕ_{Z_ε} desdobramento versal de ϕ_{Z_0} . Por definição, qualquer outro desdobramento ϕ_{Z_μ} de ϕ_{Z_0} é topologicamente conjugado ao desdobramento induzido de ϕ_{Z_ε} .

Para cada ε , considere Z_ε desdobramento de Z_0 . Agora, seja Z_μ um desdobramento arbitrário de Z_0 . Então ϕ_{Z_μ} é desdobramento arbitrário de ϕ_{Z_0} . Por hipótese, temos que ϕ_{Z_μ} é topologicamente conjugado ao desdobramento induzido de ϕ_{Z_ε} .

Novamente aplicando a Proposição 34, temos que Z_μ é equivalente ao desdobramento induzido de Z_ε e portanto Z_ε é desdobramento versal de Z_0 . \square

Corolário 36 *A codimensão de Z_0 é igual a codimensão de ϕ_{Z_0} . Em outras palavras, Z_ε é desdobramento mini-versal de Z_0 se, e somente se, ϕ_{Z_ε} é desdobramento mini-versal de ϕ_{Z_0} .*

Demonstração: Seja m a codimensão de Z_0 e seja Z_ε desdobramento mini-versal de Z_0 , com $\varepsilon \in \mathbb{R}^m$. Por definição, não existe desdobramento versal Z_μ de Z_0 com $\mu \in \mathbb{R}^n$ e $n < m$. Pela Proposição 35, ϕ_{Z_ε} é desdobramento versal de ϕ_{Z_0} com m parâmetros e portanto a codimensão de ϕ_{Z_0} é menor ou igual que m .

Suponha por absurdo que existe um desdobramento versal ϕ_μ de ϕ_{Z_0} com $\mu \in \mathbb{R}^n$ e $n < m$. Pela Proposição 35, é possível obter um desdobramento versal Z_μ de Z_0 com $\mu \in \mathbb{R}^n$, o que é um absurdo. Assim, ϕ_{Z_0} não possui um desdobramento versal que dependa de menos de m parâmetros e portanto a codimensão de Z_0 é igual a codimensão de ϕ_{Z_0} . \square

Nos resultados a seguir, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave dada por

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0, \\ e^{-\frac{1}{x}}, & \text{se } x > 0; \end{cases}$$

Além disso, defina também $\xi_\varepsilon^k(x) = \varepsilon h(x)(x - \varepsilon)^{k+1}$.

Lema 37 *Para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$ positivo, defina o campo suave por partes*

$$Z_\varepsilon^k(x, y) = \begin{cases} X_0(x, y) = (-1, 2x), & y \geq 0, \\ Y_\varepsilon^k(x, y) = \left(1, 2x + \frac{\partial \xi_\varepsilon^k}{\partial x}(x)\right), & y \leq 0. \end{cases}$$

Então a aplicação de primeiro retorno $\phi_{Z_\varepsilon^k}$ associada a Z_ε^k é dada por

$$\phi_{Z_\varepsilon^k}(x) = x - \frac{h(\varepsilon)}{2}(x - \varepsilon)^{k+1} + \mathcal{O}\left((x - \varepsilon)^{k+2}\right).$$

Demonstração: Sabemos que $\phi_{Z_\varepsilon^k}(x) = \phi_{Y_\varepsilon^k} \circ \phi_{X_0}(x)$. Com um cálculo simples, vemos que $\phi_{X_0}(x) = -x$. Assim, para demonstrar este Lema basta encontrar $\phi_{Y_\varepsilon^k}$.

Pelo Lema 31 temos que as trajetórias de $\phi_{Y_\varepsilon^k}$ são dadas por

$$\left(z, z^2 + \xi_\varepsilon^k(z) + K\right),$$

que são translações verticais do gráfico de $F(z, \varepsilon) = z^2 + \xi_\varepsilon^k(z)$. Para $x > 0$, note que $F_K(z, \varepsilon) = z^2 + \xi_\varepsilon^k(z) + K$ tem $-x$ como raiz se $K = -(-x)^2 - \xi_\varepsilon^k(-x)$. Assim, a trajetória de $\phi_{Y_\varepsilon^k}$ passando por $(-x, 0)$ é dada por

$$\left(t, t^2 + \xi_\varepsilon^k(t) - x^2\right),$$

já que $\xi_{\varepsilon}^k(z) = 0$ para $z \leq 0$. Logo, $\phi_{Z_{\varepsilon}^k}$ é dado implicitamente como solução em z de

$$G(z, \varepsilon) = z^2 + \xi_{\varepsilon}^k(z) - x^2 = 0. \quad (3)$$

Observe que se $x = \varepsilon$, então $z = \varepsilon$ e portanto $\phi_{Z_{\varepsilon}^k}(\varepsilon) = \varepsilon$ é solução da equação acima. Além disso, é fácil ver que

$$\xi_{\varepsilon}^k(\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x} \xi_{\varepsilon}^k(\varepsilon) = \dots = \frac{\partial^k}{\partial x^k} \xi_{\varepsilon}^k(\varepsilon) = 0 \text{ e } \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}} \xi_{\varepsilon}^k(\varepsilon) = \varepsilon h(\varepsilon)(k+1)!.$$

Expandindo ξ_{ε}^k em Taylor em torno de ε , temos

$$\xi_{\varepsilon}^k(z) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(\xi_{\varepsilon}^k)^{(n)}(\varepsilon)(z-\varepsilon)^n}{n!} = \left(\frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}} \xi_{\varepsilon}^k(\varepsilon) \right) \frac{(z-\varepsilon)^{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{(\xi_{\varepsilon}^k)^{(n)}(\varepsilon)(z-\varepsilon)^n}{n!},$$

donde

$$G(z, \varepsilon) = z^2 + \varepsilon h(\varepsilon)(z-\varepsilon)^{k+1} - x^2 + \mathcal{O}((z-\varepsilon)^{k+2}),$$

e portanto

$$\frac{\partial}{\partial z} G(z, \varepsilon) = 2z + \varepsilon h(\varepsilon)(k+1)(z-\varepsilon)^k + \mathcal{O}((z-\varepsilon)^{k+1}) > 0,$$

para todo z suficientemente próximo de $\varepsilon > 0$. Isso quer dizer que numa vizinhança suficientemente próxima de ε a aplicação $G(z, \varepsilon)$ é estritamente crescente. Assim, $\phi_{Z_{\varepsilon}^k}(x)$ é um zero isolado de $G(z, \varepsilon)$ quando $x > 0$.

Voltando para a Equação (3), podemos escrever

$$z^2 + \varepsilon h(\varepsilon)(z-\varepsilon)^{k+1} + \mathcal{O}((z-\varepsilon)^{k+2}) = x^2. \quad (4)$$

Agora, tome $\tilde{z} = z - \varepsilon$ e $\tilde{x} = x - \varepsilon$. Note que

$$\begin{cases} \tilde{z}^2 &= z^2 - 2\varepsilon z + \varepsilon^2, \\ 2\varepsilon\tilde{z} &= 2\varepsilon z - 2\varepsilon^2, \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \tilde{x}^2 &= x^2 - 2\varepsilon x + \varepsilon^2, \\ 2\varepsilon\tilde{x} &= 2\varepsilon x - 2\varepsilon^2, \end{cases}$$

donde $\tilde{z}^2 + 2\varepsilon\tilde{z} = z^2 - \varepsilon^2$ e $\tilde{x}^2 + 2\varepsilon\tilde{x} = x^2 - \varepsilon^2$. Assim, a Equação (4) fica

$$2\varepsilon\tilde{z} + \tilde{z}^2 + \varepsilon h(\varepsilon)\tilde{z}^{k+1} + \mathcal{O}(\tilde{z}^{k+2}) = 2\varepsilon\tilde{x} + \tilde{x}^2. \quad (5)$$

Impondo $\tilde{z} = a_1\tilde{x} + \dots + a_{k+1}\tilde{x}^{k+1} + \mathcal{O}(\tilde{x}^{k+2})$ e substituindo em (5), obtemos $a_1 = 1$, $a_2 = \dots = a_k = 0$ e $a_{k+1} = -\frac{h(\varepsilon)}{2}$. Logo, a solução de (3) é

$$\phi_{Z_{\varepsilon}^k}(x) = x - \frac{h(\varepsilon)}{2}(x-\varepsilon)^{k+1} + \mathcal{O}((x-\varepsilon)^{k+2}).$$

□

Observe que, como $h \in C^{\infty}$, então $\xi_{\varepsilon}^k \in C^{\infty}$. Portanto $Z_{\varepsilon}^k \in \Omega$ é uma perturbação C^{∞} de Z_0 . Temos também que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_{\varepsilon}^k = Z_0$.

Antes de enunciar e demonstrar o Teorema 43 devemos introduzir alguns resultados. O Teorema 38, devido à Malgrange, pode ser encontrado em [7] e [8]. Já o Lema 39 pode ser encontrado na página 20 de [6].

Teorema 38 Seja $F(\mu, x)$ com $\mu \in \mathbb{R}^m$ uma função real e suave definida numa vizinhança da origem de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$. Suponha que $F(0, x) = x^{k+1}g(x)$, onde $g(x)$ é uma função suave tal que $g(0) \neq 0$. Então existe uma função $q(\mu, x)$ suave e uma coleção de funções suaves $s_i(\mu)$, $i = 0, \dots, k+1$ tal que

$$q(\mu, x)F(\mu, x) = x^{k+1} + \sum_{i=1}^{k+1} s_i(\mu)x^{i-1}.$$

Lema 39 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um difeomorfismo local tal que $Df(x) > 0$ para algum $x \in \mathbb{R}$. Seja $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a trajetória dada pela equação $\dot{x} = f(x) - x$. Então f é topologicamente conjugado à φ .

Agora, podemos enunciar e demonstrar o seguinte Lema.

Lema 40 Se $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, possui um número finito de singularidades e é topologicamente equivalente à $\dot{x} = g(x)$, então os dois campos de vetores são topologicamente conjugados.

Demonstração: Tome φ como o fluxo de $\dot{x} = f(x)$ e ψ como o fluxo de $\dot{x} = g(x)$. Devemos provar que existe \tilde{h} que seja uma conjugação topológica entre φ e ψ .

Seja p_1, \dots, p_n as singularidades de $\dot{x} = f(x)$ e suponha sem perda de generalidade que $p_1 < \dots < p_n$. Seja também h o homeomorfismo que dê a equivalência topológica entre $\dot{x} = f(x)$ e $\dot{x} = g(x)$. Logo as singularidades de $\dot{x} = g(x)$ são dadas por $q_i = h(p_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Como h é bijetora e definida em \mathbb{R} , então h é estritamente crescente ou decrescente. Suponha sem perda de generalidade que h é crescente. Assim, temos $q_1 < \dots < q_n$. Se considerarmos a restrição $h_i = h|_{[p_i, p_{i+1}]}$, então $h_i : [p_i, p_{i+1}] \rightarrow [q_i, q_{i+1}]$ é um homeomorfismo.

Agora, vamos construir um homeomorfismo $\tilde{h}_i : [p_i, p_{i+1}] \rightarrow [q_i, q_{i+1}]$ que é uma conjugação topológica entre $\dot{x} = f(x)$ restrito à $[p_i, p_{i+1}]$ e $\dot{x} = g(x)$ restrito à $[q_i, q_{i+1}]$.

Tome $x_1 \in (p_i, p_{i+1})$ e $y_1 \in (q_i, q_{i+1})$. Vamos mostrar que existe uma única conjugação $\tilde{h}_i(x)$ tal que $\tilde{h}_i(x_1) = y_1$. Para cada x existe um único tempo $t(x) \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t(x), x_1) = x$. Observe que se $f(x) > 0$ em $[p_i, p_{i+1}]$ então $t(x)$ é uma função estritamente crescente. O fato de $t(x)$ ser diferenciável segue da diferenciabilidade de φ e do Teorema da Função Implícita.

Se existe uma conjugação tal que $\tilde{h}_i(x_1) = y_1$, então ela deve satisfazer

$$\tilde{h}_i(x) = \tilde{h}_i\left(\varphi(t(x), x_1)\right) = \psi(t(x), \tilde{h}_i(x_1)) = \psi(t(x), y_1),$$

e isso nos mostra que $\tilde{h}_i(x)$ é única. Mais ainda, como $t(x) \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow p_{i+1}$, segue que \tilde{h}_i possui uma extensão contínua tomando $\tilde{h}_i(p_{i+1}) = q_{i+1}$. De maneira análoga, fazendo $\tilde{h}_i(p_i) = q_i$ temos uma aplicação estritamente crescente entre $[p_i, p_{i+1}]$ e $[q_i, q_{i+1}]$. A inversa de uma aplicação contínua estritamente crescente também é uma função contínua estritamente crescente, donde \tilde{h}_i é um homeomorfismo.

Por fim, nos resta mostrar que \tilde{h}_i conjuga φ e ψ . Se $x_1 \in \partial[p_i, p_{i+1}]$, então é fácil ver que para todo t vale

$$\tilde{h}_i(\varphi(t, x_1)) = \psi(t, \tilde{h}_i(x_1)).$$

Se x não pertence à fronteira de $[p_i, p_{i+1}]$, escreva $x = \varphi(t(x), x_1)$, donde $\varphi(t, x) = \varphi(t + t(x), x_1)$. Tomando $\tilde{h}_i(x_1) = y_1$, segue que

$$\tilde{h}_i(\varphi(t, x)) = \tilde{h}_i(\varphi(t + t(x), x_1)) = \psi(t + t(x), y_1) =$$

$$= \psi\left(t, \psi(t(x), y_1)\right) = \psi\left(t, \tilde{h}_i(\varphi(t(x), x_1))\right),$$

e portanto $\tilde{h}_i(\varphi(t, x)) = \psi(t, \tilde{h}_i(x))$.

Colando as conjugações \tilde{h}_i com domínios adjacentes, temos a conjugação \tilde{h} . \square

Proposição 41 *A aplicação de primeiro retorno $\phi_{Z_\varepsilon^k}$ dada no Lema 37 possui codimensão k e um desdobramento (mini) versal desta aplicação é dado por*

$$\phi_{Z_\varepsilon^k}^\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 x + \dots + \lambda_k x^{k-1} + x - x^{k+1}.$$

Demonstração: Seja $f(\mu, x)$ um desdobramento arbitrário de $\phi_{Z_\varepsilon^k}$, com $\mu \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}$. Devemos encontrar um desdobramento versal $h(\lambda, x)$, isto é, queremos que $f(\mu, x)$ seja equivalente ao desdobramento induzido de $h(\lambda, x)$.

Tome $F(\mu, x) = f(\mu, x) - x$. Considere o campo $\dot{x} = F(\mu, x)$ e denote seu fluxo por φ_1 . Deixando μ fixo, temos que $f(\mu, x)$ é uma função em \mathbb{R} . Além disso, como $f(\mu, x)$ é desdobramento de $\phi_{Z_\varepsilon^k}$ temos que $f(\mu, x)$ é difeomorfismo local com $Df(\mu, x) > 0$ para algum x . Pelo Lema 39, segue que $f(\mu, x)$ é topologicamente conjugado à φ_1 .

Pelo Lema 37, temos que $F(\mu, x)$ satisfaz as hipóteses do Teorema 38. Portanto existe uma função $q(\mu, x)$ suave e uma coleção de funções suaves $s_i(\mu)$, $i = 0, \dots, k+1$ tal que

$$F(\mu, x) = \frac{1}{q(\mu, x)} \left(-x^{k+1} + \sum_{i=1}^{k+1} s_i(\mu) x^{i-1} \right).$$

Observe que $-x^{k+1}$ vem do fato de termos tomado $g(x) = -\frac{h(\varepsilon)}{2}$ no Teorema 38. Em relação aos termos x^{i-1} , o sinal negativo faz parte dos $s_i(\mu)$.

Tomando

$$\tilde{G}(\mu, x) = -x^{k+1} + \sum_{i=1}^{k+1} s_i(\mu) x^{i-1},$$

temos que o campo $\dot{x} = F(\mu, x)$ é topologicamente equivalente ao campo $\dot{x} = \tilde{G}(\mu, x)$, considerando a aplicação identidade.

Lembre agora que as $s_i(\mu)$ são suaves. Fazendo $s_i(\mu) = \lambda_i$, segue que $\tilde{G}(\mu, x)$ é induzida de

$$\tilde{H}(\lambda, x) = -x^{k+1} + \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x^{i-1},$$

com $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1}$.

Da referência [9], um desdobramento mini-versal de $\dot{x} = -x^{k+1}$ é dado por

$$\dot{x} = H(\lambda, x) = -x^{k+1} + \sum_{i=1}^k \lambda_i x^{i-1}.$$

Por definição de desdobramento versal, todo desdobramento de $\dot{x} = -x^{k+1}$ é equivalente ao desdobramento induzido de $\dot{x} = H(\lambda, x)$. Assim, existe $\dot{x} = G(\mu, x)$ desdobramento induzido de $\dot{x} = H(\lambda, x)$ que é topologicamente equivalente à $\dot{x} = F(\mu, x)$.

Seja $\tilde{\varphi}_1$ o fluxo de $\dot{x} = G(\mu, x)$. Como $\dot{x} = G(\mu, x)$ é topologicamente equivalente à $\dot{x} = F(\mu, x)$, segue do Lema 40 que $\dot{x} = G(\mu, x)$ e $\dot{x} = F(\mu, x)$ são topologicamente conjugados. Como consequência, $\tilde{\varphi}_1$ e φ_1 são topologicamente conjugados.

Agora, tome $g(\mu, x) = G(\mu, x) + x$. Pelo Lema 39, $g(\mu, x)$ é topologicamente conjugado ao fluxo $\tilde{\varphi}_1$ do campo $\dot{x} = g(\mu, x) - x = G(\mu, x)$. Logo, temos que $g(\mu, x)$ é induzido de

$$h(\lambda, x) = x + H(\lambda, x),$$

pois $G(\mu, x)$ é induzido de $H(\lambda, x)$.

Como $f(\mu, x)$ é topologicamente conjugado de φ_1 , que por sua vez é topologicamente conjugado de $\tilde{\varphi}_1$, segue que $f(\mu, x)$ e $g(\mu, x)$ são topologicamente conjugados. Assim, um desdobramento arbitrário $f(\mu, x)$ de $\phi_{Z_\varepsilon^k}$ é topologicamente conjugado a um desdobramento induzido de $h(\lambda, x)$. Em outras palavras, $h(\lambda, x)$ é desdobramento versal de $\phi_{Z_\varepsilon^k}$. O fato de $h(\lambda, x)$ ser desdobramento mini-versal segue do fato de $H(\lambda, x)$ ser desdobramento mini-versal de $\dot{x} = -x^{k+1}$.

Portanto $\phi_{Z_\varepsilon^k}$ possui codimensão k e um desdobramento mini-versal é dado por

$$h(\lambda, x) = x - x^{k+1} + \sum_{i=1}^k \lambda_i x^{i-1}$$

□

Teorema 42 Para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$ positivos, o campo Z_ε^k dado no Lema 37 possui codimensão k .

Demonstração: Pela Proposição 41, temos que $\phi_{Z_\varepsilon^k}$ tem codimensão k . Já pela Proposição 35 e seu Corolário, a codimensão de $\phi_{Z_\varepsilon^k}$ é igual a codimensão de Z_ε^k . □

Teorema 43 Seja Z_0 dado em (2). Para toda vizinhança $W \subset \Omega$ de Z_0 e para todo $k \in \mathbb{Z}$ positivo existe um campo $Z_\varepsilon^k \in W$ de codimensão k .

Demonstração: Seja Z_ε^k dado pelo Lema 37. Como $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_\varepsilon^k = Z_0$, dado $W \in \Omega$ vizinhança de Z_0 existe um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $Z_\varepsilon^k \in W$, que possui codimensão k . □

O resultado abaixo é uma consequência imediata do último Teorema.

Teorema 44 O campo Z_0 dado em (2) possui codimensão infinita.

6 Referências bibliográficas

[1] GUARDIA, M.; SEARA, T. M.; TEIXEIRA, M. A. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov Systems. **Journal of Differential Equations**, v. 250, n. 4, p. 1967-2063. 2011.

[2] KUZNETSOV, Y. A.; RINALDI, S.; GRAGNANI, A. One-parameter bifurcations in planar Filippov systems. **Int. Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 13, n. 8, p. 2157-2188, 2003.



- [3] BUZZI, C. A.; CARVALHO, T.; TEIXEIRA, M. A. Birth of limit cycles bifurcating from a nonsmooth center. **Journal de Mathematiques Pures et Appliquees**, v. 102, n. 1, p. 36-47, 2014.
- [4] SOTOMAYOR, J. **Lições de equações diferenciais ordinárias**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979. (Projeto Euclides).
- [5] PERKO, L. **Differential equations and dynamical systems**. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [6] ARROWSMITH, D. K.; PLACE, C. M. **An introduction to dynamical systems**. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [7] CHOW, S. N.; HALE, J. K. **Methods of bifurcation theory**. New York: Springer-Verlag, 1982.
- [8] GOLUBITSKY, M.; GUILLEMIN, V. **Stable mappings and their singularities**. Berlin: Springer-Verlag, 1973.
- [9] DUMORTIER, F. **Singularities of vector fields**. Rio de Janeiro: IMPA, 1978.
- [10] FILIPPOV, A. F. **Differential equations with discontinuous righthand sides**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988. (Mathematics and its Applications, 18).
- [11] PEREZ, O. H. **Bifurcações genéricas e relações de equivalência em campos de vetores suaves por partes**. 2017. 124 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2017.

Artigo recebido em ago. 2017 e aceito em set. 2017.