Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 8, dez, 2016
Edição Iniciação Científica

Pedro Lima Ramos
Universidade do Minho
pedro.ramos@psi.uminho.pt

Os primórdios do cálculo infinitesimal

The dawn of calculus

Resumo

O Cálculo Infinitesimal principiou a surgir por volta do século $XVII$, como resultado do trabalho de vários matemáticos, como por exemplo Fermat (1601 – 1665 d.C.), Barrow (1630 – 1677 d.C.), Newton (1643 – 1727 d.C.), Leibniz (1646 – 1716 d.C.). Nesta fase incipiente, nem todos os procedimentos e justificações eram claros e incontroversos. Por exemplo, recorria-se frequentemente às ideias de quantidade infinitamente pequena e de razão última, sendo que, todavia, não existiam ainda definições formais de limite. Tais conceitos eram sobretudo tratados de forma intuitiva. No presente artigo, apresentam-se três exemplos matemáticos muito concretos relativos a esta fase, dois de Newton e um de Leibniz.

Palavras-chave: História da Matemática. Cálculo Infinitesimal. Newton. Leibniz.

Abstract

The Calculus has begin to arise in the 17th century, as a result of the work of several mathematicians, for instance, Fermat(AD 1601 – AD 1665), Barrow (AD 1630 – AD 1677), Newton (AD 1643 – AD 1727), Leibniz (AD 1646 – AD 1716). At this initial stage not all procedures were clear and indubitable. As a matter of fact the ideas of infinitely small quantities and ultimate ratio were often used. However, at the time, there was not a formalization of the notion of limit. Such a concept was handled intuitively. At the present paper three mathematical examples are presented, two from Newton and one from Leibniz.

Keywords: History of Mathematics. Calculus. Newton. Leibniz.

1 Introdução

De acordo com uma visão tradicional, a invenção do Cálculo é atribuída a Isaac Newton (1643 – 1727 d.C.) e a Gottfried von Leibniz (1646 – 1716 d.C.). Estes dois matemáticos, aparentemente de forma independente, conceberam algoritmos que foram universalmente usados e que, em parte, são atualmente aplicados. Para além disso, contribuíram para o desenvolvimento da lógica dos conceitos de derivada e de integral. Neste sentido, estes dois homens tiveram um papel preponderante na criação deste ramo da matemática. Não foram todavia os únicos, por um lado, e, por outro, grande parte das noções por ambos criadas foram só rigorosamente elaboradas dois séculos mais tarde. Newton e Leibniz devem muito aos seus imediatos predecessores no desenvolvimento da nova análise. Com efeito, todos os estudos anteriormente já feitos nesta área por Barrow (1630 – 1677 d.C.), Fermat (1601 – 1665 d.C.), entre outros, bem como todos os desenvolvimentos na área da Geometria até então concebidos, ajudaram ao desenvolvimento do Cálculo Fluxionário de Newton e do Cálculo Diferencial de Leibniz.

Poder-se-á afirmar que Newton teve uma abordagem de cariz um tanto física, no sentido de que encarava as curvas como sendo trajetórias de pontos materiais. Todavia, as justificações que apresentava não eram absolutamente claras e incontroversas, sobretudo quando eliminava termos envolvendo potências de o , com o um instante que considerava infinitesimal. Inclusivamente, numa fase inicial, Newton considerava qualquer tentativa de questionar a instantaneidade do movimento e a taxa de variação instantânea como algo ligado à metafísica, evitando desta forma definições formais. Numa fase posterior tentou uma abordagem um pouco menos intuitiva.

Gottfried Wilhelm von Leibniz, para além de matemático, foi um eminente filósofo e logicista. Ficou essencialmente conhecido pelo trabalho que realizou no nascimento do Cálculo e pela monodologia na Filosofia (cf. [6]). Em 1672, conheceu Huygens (1629 – 1695 d.C.) em Paris, que o instou a empreender um estudo profundo em matemática. Na sua visita a Londres, em 1673, conheceu um grande número de matemáticos, aprendendo muito sobre séries infinitas, comprando uma cópia de Geometrical Lectures de Isaac Barrow, e poderá ter conhecido o De analysi de Newton. Posteriormente, em Paris, no mesmo ano, estudou os trabalhos matemáticos de Cavalieri (1598 – 1647 d.C.), Torricelli (1608 – 1647 d.C.), Roberval (1602 – 1675 d.C.), Sluze (1622 – 1685 d.C.), Hudde (1628 – 1704 d.C.), entre outros.

Um dos primeiros frutos do seu estudo em problemas de quadraturas foi o Teorema da Transmutação, com o qual consegue exprimir a área de uma circunferência unitária à custa de uma série. Teve igualmente um papel preponderante ao nível da notação. A notação utilizada hoje no Cálculo é em grande parte a sua. Tal como Newton, Leibniz mostrou-se incomodado com as bases lógicas dos seus procedimentos. Argumentou todavia que as magnitudes infinitesimais eram ficções úteis para abreviar as oprerações e que apenas as razões entre infinitésimos eram significativas. Ou seja, preconizou que as quantidades infinitesimais podiam ser canceladas, ao passo que divisões entre quantidades infinitesimais não o deveriam ser.

A fragilidade das bases lógicas deste novo cálculo foi consideravelmente criticada. Entre tais criticas tiveram especial eco as considerações do filósofo George Berkeley (1685 – 1753 d.C.) que alertou para a contradição do uso de incrementos que, posteriormente, para se atingir um resultado, deixam aparentemente de o ser quando são igualados a zero. Estas criticas instaram outros matemáticos a progressivamente formalizarem e aprimorarem todos estes conceitos, o que gradualmente conduziu ao Cálculo Infinitesimal como hoje o conhecemos.

No presente artigo, apresentam-se três exemplos muito concretos de cálculos empreendidos por Newton e Leibniz, sempre que possível com as notações por eles apresentadas.

2 Newton - Determinação da razão entre as fluxões $\dot{y}$ e $\dot{x}$ de dois fluentes y e x relacionados por uma equação da forma $f(x,y)=0$

Considere-se um ponto material A, descrevendo uma trajetória definida pela relação $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, com velocidade qualquer, constante ou não.

Suponha-se que a curva da Figura 1 é o gráfico desta relação. À medida que a curva é assim percorrida, existem quantidades que vão variando com o tempo. Estas quantidades são por Newton denominadas de fluentes. Por exemplo: o valor das abcissas x e das ordenadas y relativas às posições ocupadas pelo ponto material, a área z da região do espaço compreendida entre a curva, o eixo dos xx e a reta perpendicular a este último contendo A. As velocidades com que os fluentes variam com o tempo são as fluxões. Existem, então, as fluxões dos fluentes, para cada instante t. Por exemplo, a fluxão do fluente x é $\dot{x}$; a fluxão do fluente z é $\dot{z}$. Note-se que x e y variam entre os números Reais.

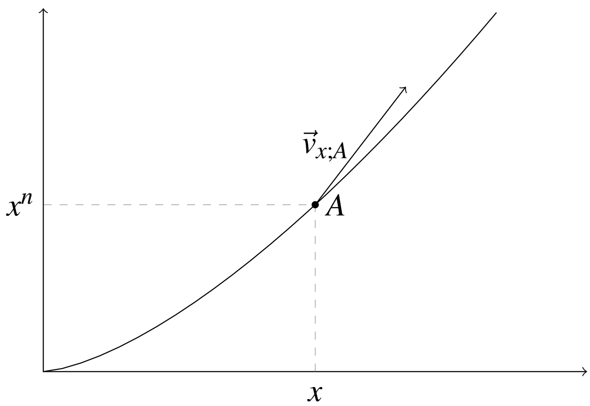


Figura 1: Ponto material A descrevendo uma trajetória definida pela relação $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, com $\vec{v}_{x;A} = \frac{\Delta x}{o}\vec{i} + \frac{\Delta y}{o}\vec{j}$, $\vec{i} = (1,0)$, $\vec{j} = (0,1)$, o uma quantidade de tempo infinitesimal

Seja o uma quantidade de tempo infinitesimal. Então, $\dot{x} = \frac{\Delta x}{o}$, pelo que $\Delta x = \dot{x}o$. Desta forma, Δx será o deslocamento em relação ao eixo dos xx de A durante o instante infinitesimal o. É um deslocamento que Newton representa por $\dot{x}o$. Como o é infinitesimal, $\dot{x}$ aproxima o conceito de velocidade instantânea em relação ao eixo das abcissas do ponto material, no ponto da curva de abcissa x, que A percorre num instante t. Analogamente, $\dot{y} = \frac{\Delta y}{o}$ e $\Delta y = \dot{y}o$.

Ora, volvido o instante o, A está no ponto da curva de coordenadas $(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o)$. Precisamente por ser um ponto da curva, verifica-se que $y + \dot{y}o - (x + \dot{x}o)^n = 0$. Neste ponto, Newton faz uso do teorema binomial, por ele deduzido durante o Inverno de 1664:

Teorema 1 *Sejam $a, x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então,*

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1 \times 2}a^{n-2}x^2 + \ldots + x^n.$$

Dem. cf. [4]

Então,

$$y+\dot{y}o-(x+\dot{x}o)^n=0 \Leftrightarrow y+\dot{y}o-\left(x^n+nx^{n-1}\dot{x}o+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\dot{x}^2o^2+\ldots+\dot{x}^no^n\right)=0$$

$$\Leftrightarrow y-x^n+\dot{y}o-nx^{n-1}\dot{x}o-\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\dot{x}^2o^2-\ldots-\dot{x}^no^n=0.$$

Dividindo por o e porque $y-x^n=0$, vem:

$$\dot{y}-nx^{n-1}\dot{x}-\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\dot{x}^2o-\ldots-\dot{x}^no^{n-1}=0.$$

Neste ponto, Newton faz $\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\dot{x}^2o=0$, bem como todos os termos seguintes. Logo,

$$\dot{y}-nx^{n-1}\dot{x}=0 \Leftrightarrow \frac{\dot{y}}{\dot{x}}=nx^{n-1}.$$

Repare que $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ coincide com o que hoje denominamos de derivada da função definida por $y=y(x)=x^n$. Poder-se-á tal justificar fazendo uma ligação com a linguagem Leibnizeana atualmente adotada. Note que $\dot{y}=\frac{dy}{dt}$ e $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$, com dx, dy e dt as diferenciais de x, y e t, respetivamente. Desta forma, $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dx}$.

Newton justificou o controverso cancelamento dos termos nos quais figura o por o que denominou de método da primeira e da última razão, no qual parece investigar qual a "razão última" entre $\dot{x^n}$ e $\dot{x}$, ou seja, aparentemente parece perscrutar o que hoje se denotaria por $\lim_{o\to 0}\frac{(x+\dot{x}o)^n-x^n}{\dot{x}o}$. Nas suas palavras: "Ao mesmo tempo que x, fluindo, se transforma em $x+\dot{x}o$, x^n transforma-se em $(x+\dot{x}o)^n$, isto é,

$$x^n+nx^{n-1}\dot{x}o+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\dot{x}^2o^2+\ldots+\dot{x}^no^n$$

e os incrementos

$$\dot{x}o \text{ e } nx^{n-1}\dot{x}o+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\dot{x}^2o^2+\ldots+\dot{x}^no^n$$

estão, um para o outro, como

$$1 \text{ para } nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\dot{x}o+\ldots+\dot{x}^{n-1}o^{n-1}.$$

Fazendo agora os incrementos desaparecer, vem que a última proporção será 1 para nx^{n-1}; logo, a fluxão da quantidade x está para a fluxão da quantidade x^n como $1:nx^{n-1}$."

Repare que o raciocínio parece ser que, como $\frac{(x+\dot{x}o)^n-x^n}{\dot{x}o}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\dot{x}o+\ldots+\dot{x}^{n-1}o^{n-1}$, então a última razão ocorre quando o deixa de ser aproximadamente igual a zero para ser exatamente igual a zero, do que resulta que a última proporção será de 1 para nx^{n-1}.

3 Método para determinar a expressão analítica de uma função de tal forma que a área entre o seu gráfico e o eixo dos xx obedece a uma função em x

Pretende-se a expressão analítica $y = f(x)$ de uma função cujo gráfico seja a curva para a qual a área entre ela e o eixo dos xx seja $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, para todo o $x \geq 0$. Considere-se a Figura 2 com o suposto gráfico da curva desejada. Note-se que, na Figura 2, o representa um comprimento infinitesimal, não um tempo infinitesimal, como anteriormente.

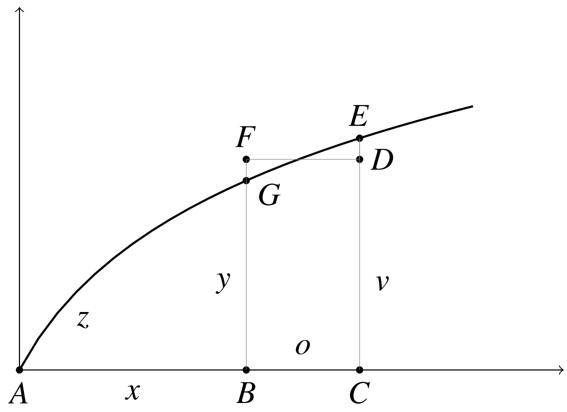


Figura 2: Gráfico de uma função $y = f(x)$ tal que $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

Para a abcissa $x+o$, a área correspondente será $z+ov$. Então,

$$(z+ov)^2 = \frac{4}{9}(x+o)^3 \Leftrightarrow z^2 + 2zov + o^2v^2 = \frac{4}{9}\left(x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3\right).$$

Como $z^2 = \frac{4}{9}x^3$,

$$\frac{4}{9}x^3 + 2zov + o^2v^2 = \frac{4}{9}\left(x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3\right).$$

Simplificando e dividindo por o, vem:

$$2zv + ov^2 = \frac{4}{9}\left(3x^2 + 3xo + o^2\right).$$

Uma vez mais se considera $ov^2 = 0$ porque $o \approx 0$; $3xo = 0$ porque $o \approx 0$; $o^2 = 0$ porque $o \approx 0$. Logo, $2zv = \frac{4}{9}\left(3x^2\right) \Leftrightarrow 2zv = \frac{4}{3}x^2$.

De novo, Newton envereda por uma abordagem intuitiva. Por ov ser a área de uma porção de espaço infinitesimal, $v \approx y$, pelo que $2zv = \frac{4}{3}x^2 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x^2\frac{1}{2z}$. Uma vez que $z^2 = \frac{4}{9}x^3$,

$$y = \frac{4}{3}x^2\frac{1}{2z} \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x^2\frac{1}{2}\frac{3}{2x^{\frac{3}{2}}} \Leftrightarrow y = x^{\frac{1}{2}}.$$

No tratado do método, Newton constrói uma tabela na qual na coluna da esquerda figura a expressão analítica de funções e na da direita a área z sob os gráficos das mesmas. Para tal, usa o método descrito. Eis um excerto dessa tabela:

$y = f(x)$	z
$y = ax^{n-1}$	$z = \frac{a}{n}x^n$
$y = \frac{ax^{n-1}}{(b+cx^n)^2}$	$z = \frac{\left(\frac{a}{nb}\right)x^n}{b+cx^n}$
$y = ax^{n-1}\sqrt{b+cx^n}$	$z = \frac{2a}{3nc}(b+cx^n)^{\frac{3}{2}}$
$y = \frac{ax^{2n-1}}{\sqrt{b+cx^n}}$	$z = \frac{2a}{nc}\left(\frac{-2b}{3c}+\frac{1}{3}x^n\right)\sqrt{b+cx^n}$

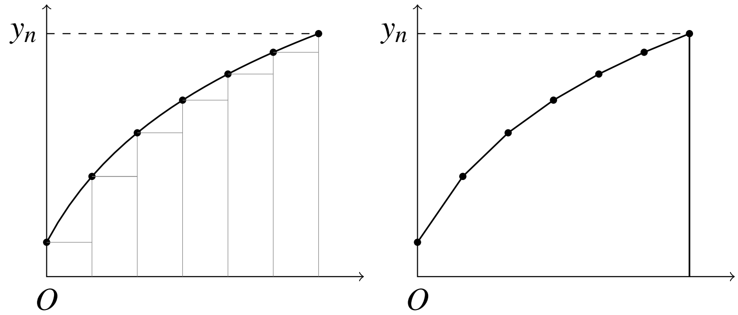
Tabela 1: Curvas e respetivas áreas entre as ditas e o eixo dos xx; $a, b, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

4 Leibniz$-$Terminologia e série aritemética para o valor de π

Leibniz começa por notar o seguinte: sejam A, B, C, D e E uma sequência de números, independentemente da sua grandeza, e L, M, N, P a sequência das diferenças, ou seja, $L = B - A$, $M = C - B$, $N = D - C$, $P = E - D$. Então, $E - A = L + M + N + P$. Este resultado tem particular interesse quando aplicado à geometria. Considera então Leibniz uma curva com início na origem O, definida num intervalo dividido num número finito de sub-intervalos, definindo as ordenadas y_i dos pontos x_i na fronteira dos intervalos. Pelo dito anteriormente, a soma da sequência $\{\delta y_i\}$ das diferenças dessas ordenadas é igual a $y_n - y_0$, a diferença entre a ordenada final e a ordenada inicial. Adicionalmente, constrói a sequência $\{\sum y_i\}$, onde $\sum y_i = y_0 + y_1 + \ldots + y_i$; seguidamente constrói a sequência das diferenças $\{\delta \sum y_i\}$ e constata ser esta igual à sequência geral de ordenadas.

Tudo isto para situações finitas. Contudo, Leibniz extrapola estes dois resultados para situações com infinitas ordenadas. Começa a encarar, assim, numa idealização puramente mental, a Figura 3a) como sendo um polígono com infinitos lados infinitamente pequenos. Um esboço possível de como seria este polígono está presente na Figura 3b). A curva é, entõ, transformada num conjunto de segmentos de reta com diferentes inclinações. Quadrar a curva da Figura 3a) equivaleria a determinar a área do polígono da Figura 3b). Os pontos extremos de cada segmento de reta estão infinitamente próximos, ou, de outra forma, são considerados “consecutivos”. As diferenças entre as ordenadas dos pontos extremos de cada segmento são infinitamente pequenas. Leibniz representa essas diferenças por dy. São as diferenciais de y. Por outro lado, a soma das infinitas ordenadas é representada por $\int y$.

Figura 3



(a) Curva que se pretente quadrar (b) Polígono idealizado

Leibniz introduz assim duas notações: d e $\int$. A primeira vem da palavra latina *differentia*, a segunda do S de *summa*. Aplica a primeira a diferenças que considera infinitamente pequenas; a segunda, a somas com um número infinito de termos.

Então, a primeira regra transposta para o caso das infinitas ordenadas diz que $\int dy = y_n$. A segunda dá-nos o seguinte resultado: $d \int y = y_n$.

A área sob a curva seria a área do polígono idealizado, isto é, o somatório, com infinitos termos, das áreas infinitesimais ydx, com dx a diferencial de x, ou seja, $\int ydx$.

Considere-se agora a curva da Figura 4.

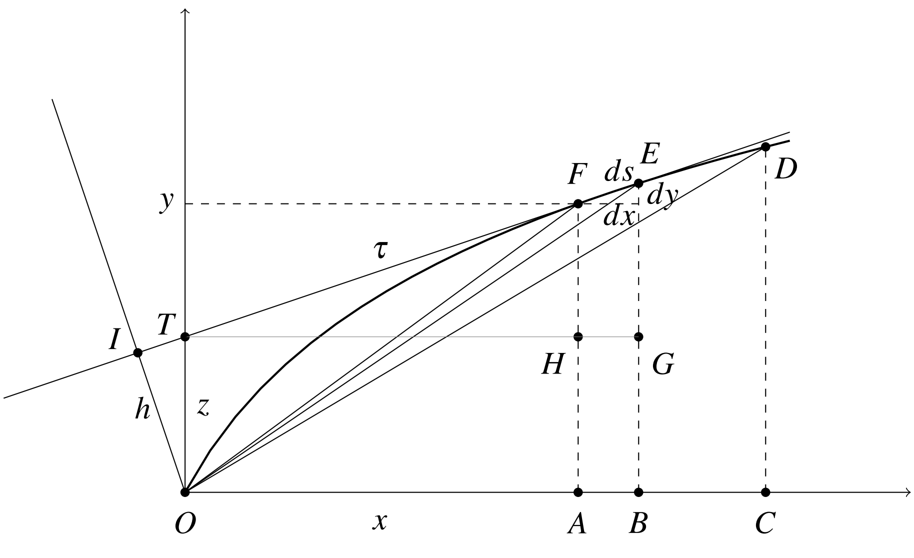


Figura 4: Curva que se pretente quadrar

E, F são dois pontos da curva infinitamente próximos; τ a tangente à curva em F.

Leibniz denomina o triângulo $\Delta dxdyds$ de *triangulum characteristicum*, um triângulo rectângulo de área que considera infinitamente pequena, cuja hipotenusa coincide com o ponto de contato entre a curva e a tangente τ. Sublinhe-se novamente que, aqui, a área sob a curva é considerada como sendo a área de um polígono.

Sejam, então, T, I , h, z como na Figura 4.

Pelo Teorema de Tales (cf. [2], [3]), $\Delta dxdyds$ é semelhante a ΔTGE. Mas,

$$\angle\left\{\overrightarrow{ET},\overrightarrow{EG}\right\} = \angle\left\{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OT}\right\} = \alpha \text{ e}$$
$$\angle\left\{\overrightarrow{TE},\overrightarrow{TG}\right\} = \angle\left\{\overrightarrow{TI},\overrightarrow{TO}\right\} = \gamma, \text{ pois:}$$

1) $\left\{\overrightarrow{GT},\overrightarrow{GE}\right\} = \angle\left\{\overrightarrow{IT},\overrightarrow{IO}\right\} = 1$ reto;

2) $\left\{\overrightarrow{ET},\overrightarrow{EG}\right\} = \angle\left\{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OT}\right\} = \alpha$;

3) A soma dos ângulos internos de um triângulo é dois retos.

Pelo que ΔTIO é semelhante a ΔTEG, logo, por transitividade, ΔTIO é semelhante a $\Delta dxdyds$. Do que $\frac{dx}{h} = \frac{ds}{z}$, isto é, $zdx = \overline{AB}\,\overline{AH} = hds$ e $hds = 2 \times \text{área}\Delta OFE$. Com efeito, como a altura do ΔOFE é h e a base é ds, então a área de ΔOFE é igual a $\frac{hds}{2}$. Do que se segue que a área de ΔOFE é igual a $\frac{zdx}{2}$ e que a área entre o segmento de reta $[OD]$ e a curva $OFED$ é igual a $\int \frac{1}{2}zdx$. Logo, $\int ydx = \text{área}\Delta OCD + \frac{1}{2}\int zdx$, isto é,

$$\int ydx = \frac{1}{2}\left(\overline{OC}\,\overline{CD} + \int zdx\right). \tag{1}$$

A equação (1) é conhecida por Teorema da Transmutação. Permite quadrar curvas $y(x)$ a partir da quadratura da curva de outra função $z(x)$ que a cada x atribui o valor da ordenada do ponto de interseção T entre o eixo dos yy e a reta τ tangente à curva $y(x)$ no ponto de coordenadas (x,y).

É particularmente útil quando se conhece a quadratura de $z(x)$, isto é, $\int zdx$, como, por exemplo, no caso de circunferências, parábolas ou hipérboles.

Leibniz aplicou a construção da Figura 4 à curva de equação $y = \sqrt{2x - x^2}$, $0 \leq x \leq 1$. Para tal, fez uso da regra de Descartes ($1596 - 1650$ d.C.) para o cálculo de tangentes, também denominada de método do círculo (cf. [7]). Este último método permite traçar a tangente a uma curva $y = f(x)$ num ponto genérico F, como se encontra ilustrado na Figura 5.

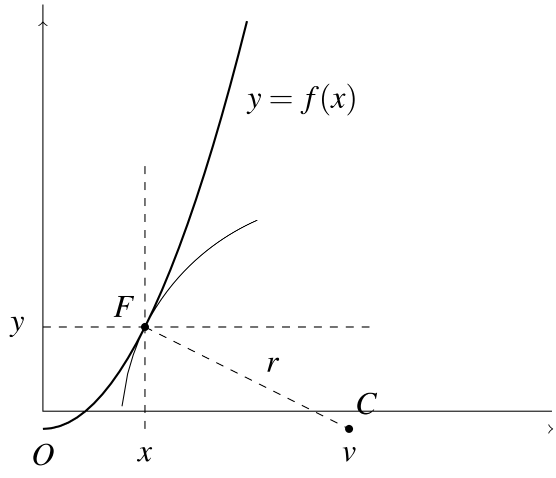


Figura 5: Regra de Descartes para determinar tangentes

Normalmente, uma circunferência de centro $C(v,0)$ e raio $r=\overline{CF}$ interseta a curva $y=f(x)$ em dois pontos. Caso intersete num só ponto, então a reta CF é a normal à curva no ponto F. Nestes casos, e assumindo que $(f(x))^2$ é polinomial, a equação, com v e r fixos,

$$(f(x))^2+(v-x)^2=r^2 \tag{2}$$

tem a abcissa de F como uma solução dupla. Impondo, então, que (2) tem uma solução dupla $x=s$, vem

$$(f(x))^2+(v-x)^2-r^2=(x-s)^2\sum_{i=0}^{k}c_ix^i, \quad c_i\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Note que k é de tal forma que o grau do polinómio que figura no primeiro membro de (3) iguala o grau do polinómio no segundo membro.

Iguam-se as potências de x; resolve-se em ordem a v em termos da raiz $x=s$; determina-se o declive da reta tangente desejada, ou seja, $\frac{(v-x)}{f(x)}$. A quantidade $(v-x)$ é denominada de subnormal a $y=f(x)$ no ponto F.

No caso concreto, muito facilmente se constata, por simples observação da Figura 6, que, para qualquer ponto da curva $y=\sqrt{2x-x^2}$, $0\le x\le 1$, se tem $v=1$, pelo que

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(v-x)}{f(x)}=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

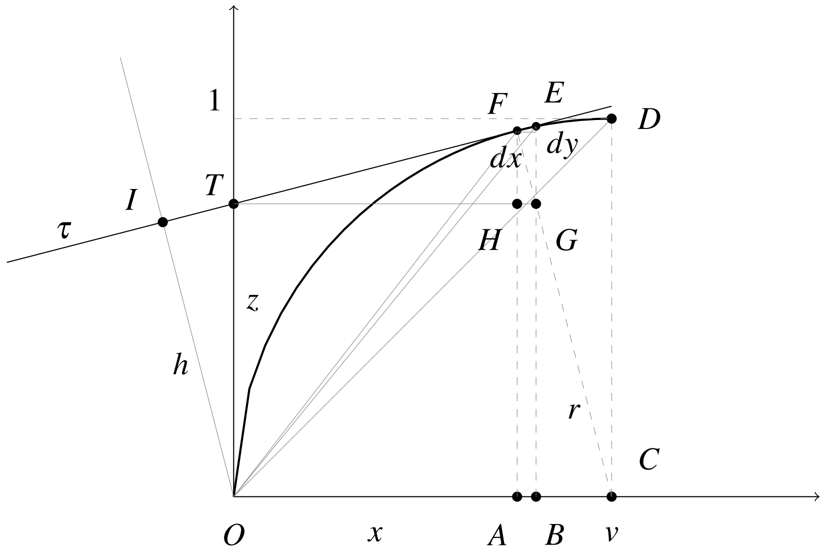


Figura 6: Aplicação da construção da Figura 4 à curva $y=\sqrt{2x-x^2}$, $0\le x\le 1$

Pelo Teorema de Tales, facilmente se conclui que ΔTFH e $\Delta dxdyds$ são semelhantes.

Desta forma,

$$\begin{aligned}\frac{\overline{HF}}{\overline{TH}} = \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{\overline{HF}}{\overline{TH}} &= \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \\ \Leftrightarrow \frac{y-z(x)}{x} &= \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x-x^2}-z(x)}{x} &= \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \\ \Leftrightarrow z(x) &= \sqrt{\frac{x}{2-x}}.\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Transmutação, $\int y dx = \frac{1}{2}\left(1 + \int \sqrt{\frac{x}{2-x}} dx\right)$.

Por outro lado, neste caso é notório que $\int z dx = 1 - \int x dz$, pelo que, novamente pelo Teorema da Transmutação, $\int y dx = 1 - \int \frac{z^2}{1+z^2} dz$. Baseando-se no trabalho de séries de Mercator (1512 – 1594 d.C.), sabe que $\frac{z^2}{1+z^2} = z^2\left(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ldots\right)$. Finalmente,

$$\int y dx = 1 - \int z^2 dz + \int z^4 dz - \int z^6 dz + \int z^8 dz - \ldots$$

Ora, o valor que procurava era claramente $\frac{\pi}{4}$, um quarto do valor da área de um circulo unitário. Também já se conhecia $\int z^2 dz$, $\int z^4 dz$, $\int z^6 dz, \ldots$ (cf. [1], [5]) Pode então, enfim, concluir a sua famosa série aritmética para π:

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots\right).$$

5 Conclusão

Hoje, o Cálculo Infinitesimal é uma área da Matemática em que os conceitos se encontram total e incontroversamente definidos e formalizados. Todavia, nem sempre foi assim. No início, a intuição detinha um papel importante nos algoritmos e na construçã dos conceitos. Só muito mais tarde se formalizaram noções intuitivas importantes, como a noção de limite, por exemplo. Ainda assim, os matemáticos da época lograram atingir os mesmos resultados obtidos séculos depois com métodos rigorosos. É uma grande e admirável prova de engenho e imaginação conseguir, por exemplo, calcular derivadas e integrais sem limites, tais como os conhecemos hoje. Neste processo incipiente Newton e Leibniz tiveram um papel muito relevante.

Referências

[1] BARON, Margaret. *The origins of the infinitesimal calculus*. New York: Dover Phoenix Editions, 1969.

[2] BOYER, Carl. *A history of mathemathics.* New York: John Wiley and Sons, 1991.

[3] KATZ, Victor J. *A history of mathematics.* New York: Harper Collins College Publishers, 1993.

[4] NEWTON, Isaac. *The mathematical works of Isaac Newton.* New York: Johnson Reprint Corporation, 1964.

[5] PÉREZ, Mariano Martínez. *Del cálculo a la teoria de conjuntos, 1630-1910:* una introducción histórica. Madrid: Alianza Editorial, 1984.

[6] ROSS, G. Macdonald. *Leibniz* . São Paulo: Edições Loyola, 1984.

[7] SUZUKI, Jeff. The lost calculus (1637-1670): tangency and optmization without limits. *Mathematics Magazine*, v. 78, n. 5, p. 339−353, Dec. 2005.