Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 8, dez. 2016

Passeio aleatório: jogo da roleta e apostas esportivas

Random walk: roulette game and sports betting

Leandro Morgado
Universidade Federal de Santa Catarina
leandro.morgado@ufsc.br

Leonardo S. Borges
Universidade Federal de Santa Catarina
l.s.borges@ufsc.br

Resumo

Neste artigo, consideramos a situação de um jogador que faz apostas sucessivas, até obter uma quantia previamente fixada ou ficar sem dinheiro para a próxima aposta. Modelamos esse problema usando um passeio aleatório unidimensional. Dois casos são considerados: jogo da roleta, no qual as probabilidades de sucesso são estimadas via equações de recorrência, e problema de apostas esportivas, no qual usamos simulação computacional.
Palavras-chave: Passeio aleatório, probabilidade condicional, processos markovianos, simulação computacional.

Abstract

In this paper, we consider the situation of a player who makes successive bets, until he obtains a previously fixed amount or runs out of money for the next bet. We model this problem using a one-dimensional random walk. Two cases are considered: roulette game, in which the probabilities of success are estimated through equations of recurrence, and sports betting problem, in which we use computational simulation.
Keywords: Random walk, conditional probability, Markovian processes, computational simulation.

1 Introdução

Neste artigo, nossa intenção é discutir alguns aspectos matemáticos sobre jogos de azar e apostas esportivas. Para tanto, consideramos a situação de um apostador com uma quantia inicial, que vai se modificando conforme ganha ou perde suas apostas.

O passeio aleatório unidimensional é um processo adequado para modelar essa situação. Intuitivamente, a ideia deste processo é descrever a trajetória de uma partícula que se move em apenas uma dimensão por meio de "passos aleatórios", com probabilidade p de avançar à próxima posição (aposta ganha) e probabilidade $1-p$ de retroceder à posição anterior (aposta perdida). Para mais detalhes sobre passeio aleatório, veja Feller [1].

Nesse contexto, podemos considerar uma sequência de variáveis aleatórias $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$, que indicam a quantia que o jogador possui após a t-ésima aposta. Portanto, supondo que o jogador ganha a reais quando vence a aposta, e perde b reais quando a aposta não é bem sucedida, temos a seguinte regra de transição do passo t para o passo $t+1$, para todo $n \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \mathbb{P}\big[X_{t+1} = n+a \mid X_t = n\big] = p \\ \mathbb{P}\big[X_{t+1} = n-b \mid X_t = n\big] = 1-p. \end{cases} \tag{1}$$

A notação acima refere-se à probabilidade condicional do primeiro evento ocorrer, considerando que o segundo evento ocorreu. A noção de probabilidade condicional é fundamental para entender as estimativas realizadas na seção seguinte, e uma boa abordagem sobre o assunto pode ser encontrada em Magalhães [2], Dantas [3], James [4], entre outros.

Uma propriedade importante deste processo é a assim denominada "perda de memória", típica de processos markovianos. Segundo esta propriedade, as probabilidades de transição X_t para X_{t+1} ficam completamente determinadas se conhecermos o valor assumido por X_t, sendo irrelevantes os estados anteriores. No caso concreto do apostador, por exemplo, o histórico das apostas anteriores não influencia na probabilidade de sucesso ou fracasso na próxima aposta.

Esse fato nos permite considerar um novo processo a cada aposta realizada. Portanto, as probabilidades de transição do t-ésimo passo para o seguinte são as mesmas de um novo processo em que o apostador possui a mesma quantia inicial. Formalmente, temos, para todo $k, n \in \mathbb{R}$ e para todo $t \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}\big[X_{t+1} = k \mid X_t = n\big] = \mathbb{P}\big[X_1 = k \mid X_0 = n\big]. \tag{2}$$

Em seguida, vamos descrever como este processo evolui em duas situações: o jogador que faz sucessivas apostas no tradicional jogo da roleta, bem como o jogador que opta pelas apostas esportivas.

2 O problema da roleta

Nessa seção, vamos considerar que o nosso jogador está interessado no tradicional jogo da roleta, muito comum em cassinos. Ele deseja apostar sucessivas vezes no preto ou vermelho, ganhando um real em caso de acerto e perdendo um real em caso de erro. E o jogador continua apostando dessa forma até obter a quantia desejada ou perder todo o seu dinheiro.

Essa situação pode ser perfeitamente modelada por um passeio aleatório simples, em que as variáveis aleatórias $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ podem assumir somente valores inteiros. Um detalhe importante nesse passeio aleatório é que as probabilidades de transição não valem $1/2$. De fato, no jogo tradicional da roleta, além das 18 casas pretas e 18 casas vermelhas, temos 2 casas verdes (números 0 e 00)[1].

Dessa forma, a probabilidade de ganho do jogador em cada aposta é dada por $p = 18/38 \approx 0,4737$. Veremos posteriormente que esse pequeno detalhe faz muita diferença na probabilidade do jogador conseguir a quantia que deseja.

Como mencionamos anteriormente, neste processo verificamos a propriedade de "perda de memória", isto é, para determinar as probabilidades de transição em um determinado momento, não precisamos saber o resultado das apostas anteriores. Isso ocorre em função da independência entre cada uma das apostas.

Seja $T \in \mathbb{N}$ o valor total em reais previamente fixado que o jogador deseja obter. Vamos denotar por S o evento do jogador obter sucesso, ou seja, conseguir obter a quantia T com suas apostas sucessivas, antes de perder todo o seu dinheiro. Tome $n \in \mathbb{N}$, com $0 \leq n \leq T$. Defina $Y_n = \mathbb{P}[S \mid X_0 = n]$, isto é, Y_n é a probabilidade do jogador chegar à quantia desejada iniciando suas apostas com n reais. Obviamente, temos $Y_0 = 0$, pois este é o caso do jogador que não tem dinheiro para as apostas já no início do processo. Ademais, se o jogador possui inicialmente a quantia T, ele já obteve sucesso, e portanto $Y_T = 1$.

Para estimar Y_n para $0 < n < T$, vamos particionar o espaço amostral conforme o resultado da primeira aposta. Nesse sentido, se $X_0 = n$, a variável aleatória X_1 pode assumir os valores $n+1$ e $n-1$ e dessa forma:

$$Y_n = \mathbb{P}\big[S \cap (X_1 = n+1) \mid X_0 = n\big] + \mathbb{P}\big[S \cap (X_1 = n-1) \mid X_0 = n\big]. \tag{3}$$

Em seguida, usando a definição de probabilidade condicional em cada um dos termos acima, podemos escrever:

$$\begin{aligned} Y_n &= \mathbb{P}\big[X_1 = n+1 \mid X_0 = n\big] \cdot \mathbb{P}\big[S \mid (X_1 = n+1) \cap (X_0 = n)\big] + \\ &\quad\; \mathbb{P}\big[X_1 = n-1 \mid X_0 = n\big] \cdot \mathbb{P}\big[S \mid (X_1 = n-1) \cap (X_0 = n)\big] \\ &= p \cdot \mathbb{P}\big[S \mid X_0 = n+1\big] + (1-p) \cdot \mathbb{P}\big[S \mid X_0 = n-1\big] \\ &= p \cdot Y_{n+1} + (1-p) \cdot Y_{n-1}. \end{aligned} \tag{4}$$

Note que a igualdade $\mathbb{P}\big[S \mid (X_1 = n+1) \cap (X_0 = n)\big] = \mathbb{P}\big[S \mid X_0 = n+1\big]$ decorre da propriedade de perda de memória citada anteriormente. Em outras palavras, considerar que o jogador começou o processo com n reais e ganhou a primeira aposta é o mesmo que considerar um novo processo, que iniciou a partir da segunda aposta, com capital de $n+1$ reais. Naturalmente, vale um raciocínio análogo para a igualdade $\mathbb{P}\big[S \mid (X_1 = n-1) \cap (X_0 = n)\big] = \mathbb{P}\big[S \mid X_0 = n-1\big]$.

Dessa forma, as probabilidades de sucesso do jogador no problema da roleta devem satisfazer a seguinte relação, para $0 < n < T$:

$$p \cdot Y_{n+1} - Y_n + (1-p) \cdot Y_{n-1} = 0. \tag{5}$$

[1] De fato, o jogo original de roleta original tinha apenas 36 casas, mas, em 1842, os franceses François e Louis Blanc adicionaram a casa 0, ampliando a chance de ganho dos cassinos. Na mesma época, na América, foi introduzida a casa 00, que ficou conhecido como "Double-Zero".

Trata-se de uma recorrência do tipo linear e homogênea, com condições de fronteira dadas por $Y_0 = 0$ e $Y_T = 1$. Para determinar os valores de Y_n, vamos usar uma técnica similar a uma técnica de resolução de EDOs. De fato, os problemas de recorrência podem ser vistos como uma "versão discreta" das equações diferenciais. Mais detalhes sobre tipos de recorrência e métodos de resolução podem ser encontrados em Pollman [5].

Neste caso, nossa técnica consiste em procurar uma solução da forma $Y_n = k^n$, onde k é uma constante. Substituindo essa solução em (5), obtemos a equação $p \cdot k^{n+1} - k^n + (1-p) \cdot k^{n-1} = 0$, e assim temos que k deve satisfazer a assim denominada equação característica:

$$pk^2 - k + (1-p) = 0. \tag{6}$$

Resolvendo (6), obtemos que os possíveis valores de nossa constante são $k = \frac{1-p}{p}$ e $k = 1$. Note que tais valores são distintos, pois no jogo da roleta $p \neq 1/2$. Portanto, $Y_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^n$ e $Y_n = 1^n = 1$ e são possíveis soluções para (5) e, de fato, a solução geral é dada por uma combinação linear entre tais soluções, ou seja:

$$Y_n = A \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^n + B \cdot 1. \tag{7}$$

As constantes A e B da solução acima podem ser determinadas diretamente pelas condições de fronteira. Nesse sentido, como a solução procurada deve satisfazer $Y_0 = 0$ e $Y_T = 1$, basta substituir essas relações em (7) para obter:

$$A = \frac{1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^T - 1} \quad \text{e} \quad B = -\frac{1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^T - 1}.$$

Portanto, a probabilidade do jogador obter a quantia desejada em apostas sucessivas, começando suas apostas com n reais é dada por:

$$Y_n = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^T - 1}. \tag{8}$$

E para o nosso caso específico do jogo de roleta, onde $p = 18/38$, temos que $\frac{1-p}{p} = 10/9$. Logo, podemos escrever:

$$Y_n = \frac{\left(\frac{10}{9}\right)^n - 1}{\left(\frac{10}{9}\right)^T - 1}. \tag{9}$$

Aqui é interessante considerar um valor específico de T para verificar como as casas 0 e 00 favorecem a banca de forma considerável. Vamos supor que o jogador deseja obter a quantia $T = 100$.

Iniciando suas apostas com 50 reais, obtemos $Y_{50} \simeq 0,005127$, ou seja, **a probabilidade de obter a quantia desejada é de apenas 0,5127%!**. E esse valor é bem diferente do obtido se o jogo fosse "justo", com $p = 1/2$. Nesse caso, como o passeio aleatório é simétrico (mesma chance de avançar ou retroceder), a probabilidade de obter 100 reais iniciando com metade desse capital seria 50%. Na Tabela 1 e na Figura 1, apresentamos as probabilidades de sucesso em função da quantia inicial do jogador para este caso particular.

Tabela 1: Probabilidades (%) do jogador obter sucesso no jogo da roleta com $T = 100$.

n	Y_n	n	Y_n	n	Y_n	n	Y_n	n	Y_n	n	Y_n
1	0,0003	18	0,0150	35	0,1035	52	0,6336	69	3,8126	86	22,8747
2	0,0006	19	0,0170	36	0,1152	53	0,7043	70	4,2366	87	25,4167
3	0,0010	21	0,0216	38	0,1429	55	0,8702	72	5,2310	89	31,3792
5	0,0014	22	0,0243	39	0,1591	56	0,9671	73	5,8125	90	34,8661
6	0,0018	23	0,0273	40	0,1770	57	1,0749	74	6,4586	91	38,7404
7	0,0023	24	0,0306	41	0,1970	58	1,1946	75	7,1765	92	43,0452
8	0,0029	25	0,0343	42	0,2192	59	1,3277	76	7,9742	93	47,8283
9	0,0035	26	0,0385	43	0,2439	60	1,4755	77	8,8605	94	53,1429
10	0,0042	27	0,0430	44	0,2712	61	1,6397	78	9,8453	95	59,0479
11	0,0050	28	0,0481	45	0,3017	62	1,8222	79	10,9395	96	65,6091
12	0,0058	29	0,0537	46	0,3355	63	2,0250	80	12,1553	97	72,8993
13	0,0067	30	0,0600	47	0,3731	64	2,2502	81	13,5062	98	80,9995
14	0,0078	31	0,0670	48	0,4148	65	2,5006	82	15,0072	99	89,9997
15	0,0090	32	0,0747	49	0,4612	66	2,7787	83	16,6750		
16	0,0102	33	0,0833	50	0,5127	67	3,0877	84	18,5280		
17	0,0133	34	0,0928	51	0,5700	68	3,4311	85	20,5870		

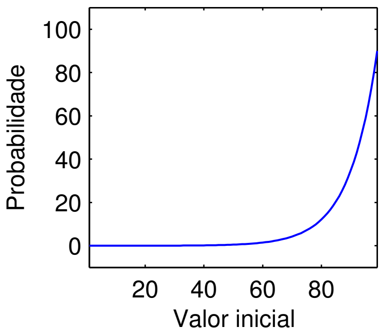

Figura 1: Probabilidades (%) do jogador obter sucesso no jogo da roleta com $T = 100$.

Esses resultados surpreendentes devem-se ao fato que no jogo de roleta, o valor esperado (média) para a variável X_{t+1} é menor do que o valor esperado para a variável X_t. Calculando a esperança correspondente, temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[X_{t+1} \mid X_t = n\big] &= (n+1)\cdot p + (n-1)\cdot(1-p) \\ &= (n+1)\cdot\frac{18}{38} + (n-1)\cdot\frac{20}{38} \\ &= n - \frac{1}{19}. \end{aligned} \tag{10}$$

Para mais detalhes sobre esperança de uma variável aleatória, veja James [4] e Ross [6], entre outros. De toda forma, essa redução da média no decorrer do processo faz com que o passeio aleatório apresente uma leve tendência em direção ao zero. E como é mais provável que a variável aleatória X_t mantenha-se próxima da média, o jogador tem pequenas chances de obter a quantia desejada.

Para outros aspectos relevantes sobre o problema em questão, tais como tempo esperado de jogo, tempo de mistura, etc., consulte Levin, Peres e Wilmer [7].

3 Apostas esportivas

Nesta seção, as apostas esportivas passam a ser o interesse do nosso jogador. Nesse caso, o problema ganha complexidade, tendo em vista a ampla gama de apostas que podem ser feitas, com probabilidades de sucesso e retorno diferentes.

Para modelar o problema, vamos assumir que o apostador possui três opções de apostas, descritas a seguir:

- probabilidade de sucesso $p_1 = 0,25$, com retorno $r_1 = 3,60$, ou seja, a casa paga 3,60 reais para cada real apostado;
- probabilidade de sucesso $p_2 = 0,5$, com retorno $r_2 = 1,80$, ou seja, a casa paga 1,80 reais para cada real apostado;
- probabilidade de sucesso $p_3 = 0,75$, com retorno $r_3 = 1,20$, ou seja, a casa paga 1,20 reais para cada real apostado.

De fato, esses valores que estamos assumindo foram escolhidos com base no que é normalmente pago em sites de apostas. Ora, se a aposta fosse “justa”, para um evento com chance aproximada de 50%, o retorno seria 2 reais para cada real apostado. Entretanto, basta verificar nos principais sites de apostas esportivas que, em esportes nos quais não há empates (como basquete e tênis, por exemplo), quando os times tem chances iguais de vitória, o retorno varia entre 1,80 e 1,90.

Mais uma vez, vamos assumir que o jogador inicia as apostas com uma quantia inicial, e vai apostando 1 real em uma das três opções acima até obter uma quantia desejada T ou ficar sem dinheiro para a aposta seguinte. Assumimos também que a opção pelos três tipos de apostas ocorre de forma aleatória e uniforme, ou seja, o apostador escolhe um dos tipos disponíveis com probabilidade $1/3$.

Usando a mesma notação anterior, denotamos por Y_n a probabilidade de sucesso do jogador, iniciando suas apostas com a quantia n, ou seja, $Y_n = \mathbb{P}[S \mid X_0 = n]$. Fixando em 1 real o valor de cada aposta, segue diretamente que $Y_T = 1$ e $Y_0 = 0$.

Uma diferença importante em relação ao caso anterior é que aqui a nossa sequência de variáveis aleatórias $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ pode assumir valores racionais, em função dos retornos descritos acima. Nesse sentido, optamos pela simulação computacional para estimar as probabilidades de sucesso Y_n para os demais valores inteiros que n pode assumir.

Essa estimativa é eficaz em função de um resultado fundamental em probabilidade, denominado lei dos grandes números. Segundo esta lei, a frequência de um determinado evento em relação ao número total de experimentos converge para a probabilidade desse evento, desde que o número de repetições seja arbitrariamente grande. Para uma abordagem mais rigorosa da lei dos grandes números, veja por exemplo Billingsley [8], Bertsekas e Tsitsiklis [9], James [4], Feller [1], entre outros.

3.1 Simulação computacional

Em nossa simulação computacional, assumimos $T = 100$ e realizamos um milhão de experimentos para cada valor inteiro de n. Verificamos em quantos experimentos o jogador obteve sucesso, e assim temos uma estimativa para as probabilidades no problema das apostas esportivas, expressa na Tabela 2 e na Figura 2 (gráfico da esquerda).

Tabela 2: Probabilidades (%) estimadas do jogador perder ou ganhar, fixando o valor de cada aposta em 1 real.

n	Y_n	n	Y_n	n	Y_n	n	Y_n	n	Y_n	n	Y_n
1	0,0001	18	0,0001	35	0,0019	52	0,0413	69	0,6002	86	9,1443
2	0,0001	19	0,0001	36	0,0033	53	0,0461	70	0,6936	87	10,7364
3	0,0001	20	0,0003	37	0,0045	54	0,0558	71	0,8241	88	12,5456
4	0,0001	21	0,0004	38	0,0052	55	0,0651	72	0,9708	89	14,8036
5	0,0001	22	0,0004	39	0,0050	56	0,0750	73	1,1396	90	17,4387
6	0,0001	23	0,0002	40	0,0055	57	0,0898	74	1,3464	91	20,4324
7	0,0001	24	0,0006	41	0,0056	58	0,1018	75	1,5631	92	23,9896
8	0,0001	25	0,0009	42	0,0073	59	0,1191	76	1,8315	93	28,1448
9	0,0001	26	0,0008	43	0,0092	60	0,1451	77	2,1714	94	33,1555
10	0,0001	27	0,0011	44	0,0136	61	0,1660	78	2,5556	95	38,8873
11	0,0001	28	0,0006	45	0,0118	62	0,1949	79	2,9733	96	45,8246
12	0,0001	29	0,0008	46	0,0157	63	0,2226	80	3,4798	97	54,0380
13	0,0001	30	0,0009	47	0,0170	64	0,2675	81	4,0982	98	63,6896
14	0,0001	31	0,0014	48	0,0199	65	0,3097	82	4,8495	99	73,8614
15	0,0001	32	0,0017	49	0,0235	66	0,3632	83	5,6713		
16	0,0001	33	0,0020	50	0,0246	67	0,4445	84	6,6526		
17	0,0001	34	0,0023	51	0,0336	68	0,5102	85	7,7545		

Verificamos assim que os resultados são similares aos obtidos no problema da roleta. Desta vez, o passeio aleatório correspondente tem tendência ainda maior em direção ao zero, em função dos retornos que fixamos para cada uma das apostas (que favorecem a casa). De fato, o valor

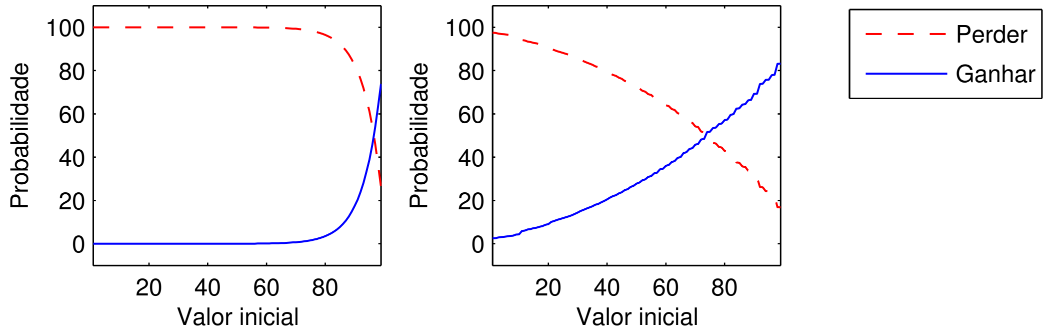

Figura 2: Probabilidades estimadas do jogador perder ou ganhar, fixando o valor de cada aposta em 1 real (esquerda) e 10 reais (direita).

esperado para a variável aleatória X_{t+1} é menor que o valor esperado de X_t, pois:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_{t+1} \mid X_t = n\right] &= (n+0,26)\cdot\frac{1}{3}\cdot p_1 + (n+0,8)\cdot\frac{1}{3}\cdot p_2 + (n+0,2)\cdot\frac{1}{3}\cdot p_3 \\
&\quad +(n-1)\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot(1-p_1)+\frac{1}{3}\cdot(1-p_2)+\frac{1}{3}\cdot(1-p_3)\right] \\
&= n-\frac{1}{10}.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Uma forma de amenizar essa tendência é reduzir o tempo esperado do jogo, e isso pode ser feito aumentando o valor unitário de cada aposta. De fato, fixando o valor de cada uma das apostas em 10 reais, o quadro não é tão desfavorável ao apostador. Simulando um milhão de experimentos para esta nova situação, obtemos os dados da Tabela 3 e expressos também na Figura 2 (gráfico da direita).

Tabela 3: Probabilidades (%) estimadas do jogador perder ou ganhar, fixando o valor de cada aposta em 10 reais.

n	Y_n	n	Y_n	n	Y_n	n	Y_n	n	Y_n	n	Y_n
10	2,4974	25	11,8145	40	20,5067	55	31,2938	70	45,7996	85	62,5902
11	2,5861	26	12,2948	41	21,2817	56	32,4730	71	46,0865	86	64,2885
12	2,9433	27	12,6686	42	22,0345	57	32,8276	72	48,1677	87	64,5084
13	3,0700	28	13,2381	43	22,4534	58	34,3433	73	48,4208	88	66,2490
14	3,2421	29	13,7833	44	23,3113	59	34,7127	74	51,5033	89	66,4362
15	3,3924	30	14,4243	45	23,8012	60	35,9741	75	51,7811	90	69,2428
16	3,6045	31	15,1860	46	24,7592	61	36,4000	76	53,4290	91	69,3729
17	3,7611	32	15,6962	47	25,1741	62	37,7126	77	53,6985	92	73,7639
18	4,2049	33	16,3145	48	26,2686	63	38,1282	78	55,2050	93	73,9227
19	4,3783	34	16,7724	49	26,7832	64	39,7566	79	55,5582	94	75,7403
20	5,9094	35	17,3398	50	27,7974	65	39,9901	80	57,1434	95	75,8265
21	6,0980	36	18,0344	51	28,3082	66	41,8847	81	57,3822	96	77,9125
22	6,6269	37	18,4390	52	29,3094	67	42,2448	82	59,5691	97	78,0472
23	6,8082	38	19,1733	53	29,7524	68	43,8347	83	59,8395	98	83,1091
24	7,2081	39	19,7703	54	30,8398	69	44,1023	84	62,4845	99	83,1722

MORGADO, L.; BORGES, L. S. Passeio aleatório: jogo da roleta e apostas esportivas. **C.Q.D.- Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 8, p. 27-35, dez. 2016.
DOI: 10.21167/cqdvol8201623169664lmlsb2735 - Disponível em: http://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/prod-cientifica/revista-cqd/

O interessante é constatar um ponto em comum nos problemas analisados nas seções anteriores. Tanto no jogo da roleta, como nas apostas esportivas, um pequeno (e muitas vezes imperceptível) desnível nos retornos traz muito prejuízo ao jogador, pois reduz de forma significativa sua probabilidade de sucesso em apostas consecutivas.

4 Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer as contribuições dadas pela Comissão Científica e pela Comissão Editorial e ao CNPq, processo 455842/2014-0, pelo suporte financeiro.

5 Referências Bibliográficas

[1] FELLER, W. **An introduction to probability theory and its applications**. New York: Wiley, 1993.

[2] MAGALHÃES, M. N. **Probabilidade e variáveis aleatórias**. 3. ed. São Paulo: EDUSP, 2011.

[3] DANTAS, C. A. B. **Probabilidade:** um curso introdutório. 3. ed. rev. São Paulo: EDUSP, 2008.

[4] JAMES, B. R. **Probabilidade:** um curso em nível intermediário. 3. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2010.

[5] POLLMAN, H. S. Equações de recorrência. **Revista Eureka**, v. 9, p. 33-40, 2000.

[6] ROSS, S. **Probabilidade:** um curso moderno com aplicações. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

[7] LEVIN, D. A.; PERES, Y.; WILMER, E. L. **Markov chains and mixing times**. Providence: American Mathematical Society, 2008.

[8] BILLINGSLEY, P. **Probability and measure**. New Jersey: Wiley, 2012.

[9] BERTSEKAS, D. P.; TSITSIKLIS, J. N. **Introduction to probability**. 2. ed. Belmont: Athena Scientific, 2008.