Um caso particular do problema de Apolonio, os teoremas de Stewart e de Heron e a demonstração nas aulas de matemática

Rudimar Luiz Nós*

Olga Harumi Saito†

Carlos Alberto Maziozeki de Oliveira‡

Resumo

Apresentamos neste trabalho o Teorema de Stewart e sua demonstração, empregando-o para demonstrar outros teoremas e solucionar problemas aplicados. Objetivamos dessa maneira enfatizar a importância da demonstração nas aulas de matemática do ensino médio e também como a aplicação de um teorema relativamente simples pode simplificar a solução de um problema mais elaborado.

Palavras Chave: Teorema de Stewart, Teorema de Heron, cevianas, arbelos, um caso particular do problema de Apolonio.

Abstract. We present Stewart's theorem and its demonstration and we employ this theorem to demonstrate other theorems, as well as to solve applied problems. The objective is to emphasize the importance of demonstration in high school math classes even as the application of a relatively simple theorem can simplify the solution of a more elaborate problem.
Keywords. Stewart's theorem, Heron's theorem, cevians, arbelos, a specific case of Appolonius problem.

1 Introdução

Os alunos do ensino médio brasileiro geralmente não conhecem teoremas, não sabem demonstrar e têm dificuldades para solucionar problemas aplicados utilizando conhecimentos matemáticos previamente assimilados. Para exemplificar, citamos o trabalho de Oliveira [10], que aplicou uma atividade centrada no Teorema de Stewart a alunos do segundo ano do ensino médio público, constatando que esses estudantes,

*rudimarnos@utfpr.edu.br. UTFPR, Curitiba, PR
†harumi@utfpr.edu.br. UTFPR, Curitiba, PR
‡ccoruja@hotmail.com. CPM-PR, Curitiba, PR

NÓS, R. L.; SAITO, O. H.; OLIVEIRA, C. A. M. Um caso particular do problema de Apolonio, os teoremas de Stewart e de Heron e a demonstração nas aulas de matemática. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 6, p. 48-59, jul. 2016.
DOI: 10.21167/cqdvol6201623169664rlnohscamo4859 - Disponível em: http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/index.jsp

mesmo já tendo estudado relações métricas e trigonométricas em triângulos quaisquer, não foram capazes de empregar a Lei dos Cossenos [4, 6] para solucionar os problemas propostos.

Um dos problemas dessa atividade é o problema das quatro circunferências tangentes, um caso particular do problema de Apolônio [1, 2], enunciado a seguir.

Proposição 1 (Caso específico do problema de Apolonio [4])**.** *Calcular o raio da circunferência de centro E, sabendo-se que o raio da circunferência de centro D mede $1cm$ e o raio da circunferência de centro C mede $2cm$. As três circunferências são tangentes entre si e tangentes à circunferência de centro O, como ilustra a Figura 1.*

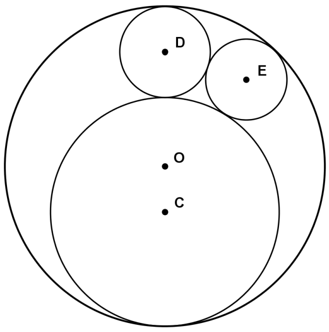

Figura 1: Circunferências tangentes de centros C, D, E e O.

Oliveira [10] esperava que os estudantes solucionassem o problema das quatro circunferências tangentes aplicando a Lei dos Cossenos, como descrevemos a seguir.

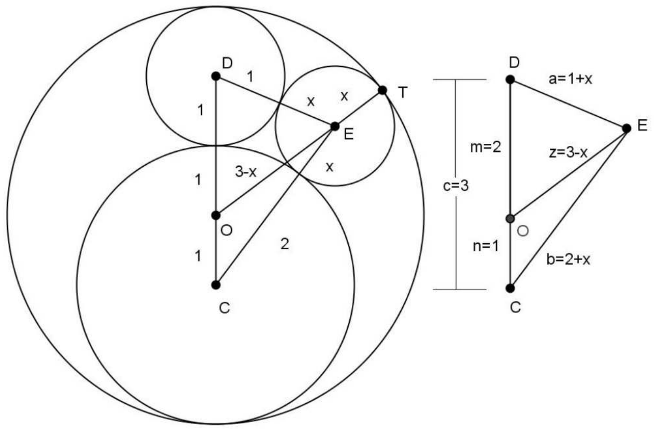

Figura 2: Medidas dos raios das quatro circunferências tangentes.

Sejam x a medida do raio da circunferência de centro E ilustrada na Figura 2, $D\hat{O}E = \alpha$ e $C\hat{O}E = \beta$. Verificamos facilmente que o raio da circunferência de centro O mede $3cm$ e que

$$\begin{aligned}
&OE = OT - ET = 3 - x = z;\\
&DE = 1 + x = a;\\
&CE = 2 + x = b;\\
&OD = 2 = m;\\
&OC = 1 = n.
\end{aligned}$$

Aplicando a Lei dos Cossenos aos triângulos ODE e OCE, ilustrados na Figura 2, obtemos, respectivamente,

$$(1+x)^2 = (3-x)^2 + 2^2 - 2(2)(3-x)cos\,(\alpha) \tag{1.0.1}$$

e

$$(2+x)^2 = (3-x)^2 + 1^2 - 2(1)(3-x)cos\,(\beta)\,. \tag{1.0.2}$$

Como α e β são ângulos suplementares, $cos\,(\beta) = -cos\,(\alpha)$. Podemos então reescrever as Equações (1.0.1) e (1.0.2) como

$$1+2x+x^2 = (3-x)^2 + 4 - 4(3-x)cos\,(\alpha) \tag{1.0.3}$$

e

$$4+4x+x^2 = (3-x)^2 + 1 + 2(3-x)cos\,(\alpha)\,. \tag{1.0.4}$$

Calculando a diferença entre as Equações (1.0.3) e (1.0.4), temos que:

$$\begin{aligned} -3-2x &= 3 - 6(3-x)cos\,(\alpha)\,; \\ cos\,(\alpha) &= \frac{x+3}{3(3-x)}. \end{aligned} \tag{1.0.5}$$

Substituindo a Equação (1.0.5) na Equação (1.0.3), obtemos:

$$\begin{aligned} 1+2x+x^2 &= 9 - 6x + x^2 + 4 - 4(3-x)\frac{x+3}{3(3-x)}; \\ 8x &= 12 - 4\frac{x+3}{3}; \\ 24x &= 36 - 4x - 12; \\ 28x &= 24; \\ x &= \frac{6}{7}. \end{aligned}$$

Baseados nas constatações de Oliveira [10], redigimos este artigo. Assim, apresentamos nas próximas seções a demonstração do Teorema de Stewart e utilizamos esse teorema para demonstrar o Teorema de Heron e para solucionar problemas aplicados, como o problema das circunferências tangentes e a inscrição de uma circunferência em uma *arbelos*.

2 O Teorema de Stewart

Matthew Stewart (1717-1785), matemático escocês, foi aluno de Colin Maclaurin na Universidade de Edimburgo, assumindo a cadeira deste em 1747. Sua obra mais conhecida é *"Some general theorems of considerable use in the higher parts of mathematics"* [12], cuja contracapa é ilustrada na Figura 3. Nessa obra, Stewart apresentou na Proposição II a relação entre as medidas dos lados de um triângulo e uma ceviana qualquer, porém não a demonstrou. Por ter sido apresentada por ele, a relação é chamada de Teorema de Stewart. Este teorema foi demonstrado em 1751 por Thomas Simpson (1710-1761), em 1780 por Leonard Euler (1707-1783) e em 1803 por Lazare N. M. Carnot (1753-1823). Stewart foi um estudioso de geometria que priorizava em seus trabalhos a simplicidade das demonstrações geométricas [9].

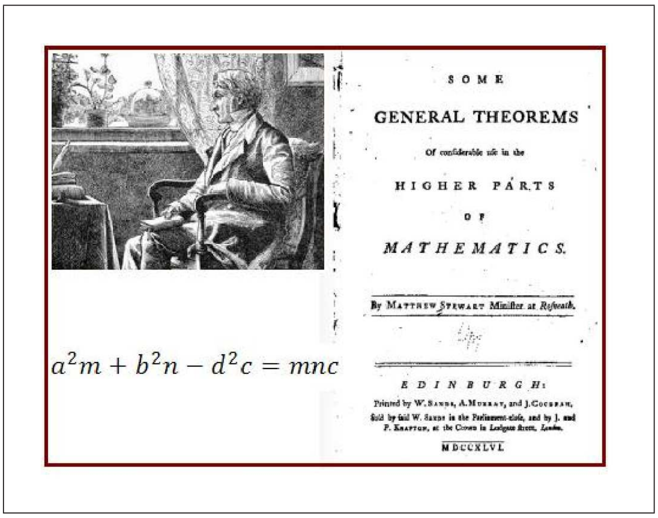

Figura 3: Contracapa do livro de Matthew Stewart [9].

Teorema 2 (Teorema de Stewart [4, 6, 7, 10, 11, 12])**.** *Dados um triângulo ABC e um ponto D do lado AB, vale a relação*

$$a^2n + b^2m - d^2c = cmn,$$

onde a, b e c são as medidas dos lados, d é a ceviana CD e m e n são os segmentos determinados pela ceviana CD no lado AB.

Demonstração. Sejam B um ângulo agudo e k a projeção da ceviana[1] CD sobre o lado AB do triângulo ABC, como ilustrado na Figura 4. No triângulo BCD, valem as relações

$$a^2 = (m-k)^2 + h^2 \tag{2.0.6}$$

e

$$d^2 = h^2 + k^2. \tag{2.0.7}$$

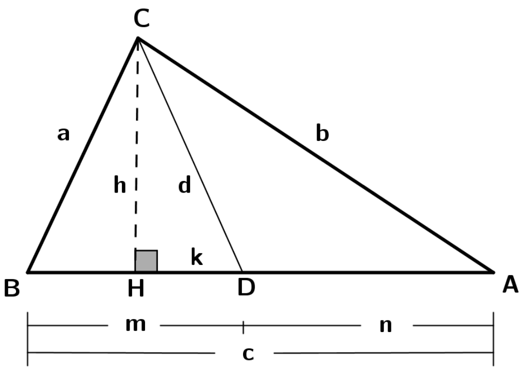

Figura 4: Triângulo ABC e a ceviana CD.

Comparando as Equações (2.0.6) e (2.0.7), concluímos que

$$a^2 \quad m^2 + \cancel{d^2} \quad 2mk. - \tag{2.0.8}$$

[1]Ceviana é o segmento de reta que tem por extremos um vértice de um triângulo e um ponto do lado oposto a esse vértice.

NÓS, R. L.; SAITO, O. H.; OLIVEIRA, C. A. M. Um caso particular do problema de Apolonio, os teoremas de Stewart e de Heron e a demonstração nas aulas de matemática. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 6, p. 48-59, jul. 2016.
DOI: 10.21167/cqdvol6201623169664rlnohscamo4859 - Disponível em: http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/index.jsp

Procedimento análogo permite concluirmos que no triângulo ACD vale a relação

$$b^2 = n^2 + d^2 + 2nk. \tag{2.0.9}$$

Multiplicando a Equação (2.0.8) por n e a Equação (2.0.9) por m, obtemos

$$a^2n = m^2n + d^2n - 2mnk \tag{2.0.10}$$

e

$$b^2m = mn^2 + d^2m + 2mnk. \tag{2.0.11}$$

Somando as Equações (2.0.10) e (2.0.11), temos que

$$a^2n + b^2m = mn(m + n) + d^2(m + n). \tag{2.0.12}$$

Como $m + n = c$, podemos reescrever a Equação (2.0.12) como

$$a^2n + b^2m = cmn + d^2c$$

ou

$$a^2n + b^2m - d^2c = cmn.$$

A demonstração quando o ângulo B é reto ou obutso é análoga a esta.

□

3 O Teorema de Heron

Teorema 3 (Teorema de Heron [3, 4, 6, 7, 10, 11]). *A área S de um triângulo ABC qualquer é dada por*

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

sendo $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ o semiperímetro do triângulo e a, b e c as medidas dos lados.

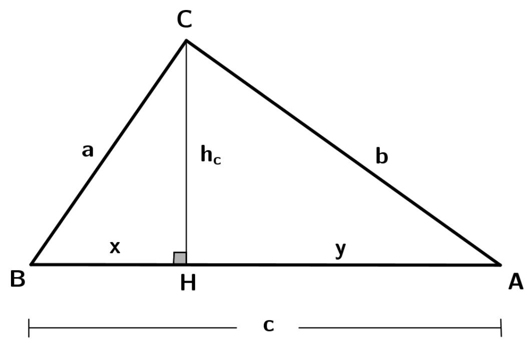

Figura 5: Triângulo ABC e a altura h_c.

Demonstração. Seja o triângulo ABC de base c e altura h_c, ilustrado na Figura 5. Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos BHC e AHC, obtemos, respectivamente,

$$a^2 = x^2 + h_c^2 \tag{3.0.13}$$

e

$$b^2 = y^2 + h_c^2. \tag{3.0.14}$$

NÓS, R. L.; SAITO, O. H.; OLIVEIRA, C. A. M. Um caso particular do problema de Apolonio, os teoremas de Stewart e de Heron e a demonstração nas aulas de matemática. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 6, p. 48-59, jul. 2016.
DOI: 10.21167/cqdvol6201623169664rlnohscamo4859 - Disponível em: http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/index.jsp

Calculando a diferença entre as Equações (3.0.13) e (3.0.14), temos que

$$a^2 - b^2 = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y). \tag{3.0.15}$$

Como $x + y = c$, então

$$y = c - x. \tag{3.0.16}$$

Substituindo a Equação (3.0.16) na Equação (3.0.15), obtemos

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}. \tag{3.0.17}$$

Substituindo a Equação (3.0.17) na Equação (3.0.16), temos que

$$y = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}. \tag{3.0.18}$$

Aplicando o Teorema de Stewart ao triângulo ABC, obtemos

$$a^2 y + b^2 x - h_c^2 c = cxy. \tag{3.0.19}$$

Substituindo as Equações (3.0.17) e (3.0.18) na Equação (3.0.19), temos que:

$$\begin{gathered}
a^2 \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} + b^2 \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} - h_c^2 c = c \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c};\\
-2a^4 + 4a^2b^2 + 2a^2c^2 - 2b^4 + 2b^2c^2 - 4h_c^2c^2 = -a^4 - b^4 + c^4 + 2a^2b^2;
\end{gathered}$$

$$4h_c^2c^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2. \tag{3.0.20}$$

Somando e subtraindo $2a^2c^2$ ao lado direito da Equação (3.0.20), obtemos:

$$\begin{aligned}
4h_c^2c^2 &= 4a^2c^2 - \left(a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - 2b^2c^2\right);\\
4h_c^2c^2 &= 4a^2c^2 - \left[\left(a^4 + 2a^2c^2 + c^4\right) - 2b^2\left(a^2 + c^2\right) + b^4\right];\\
4h_c^2c^2 &= 4a^2c^2 - \left[\left(a^2 + c^2\right)^2 - 2\left(a^2 + c^2\right)b^2 + b^4\right];\\
4h_c^2c^2 &= 4a^2c^2 - \left(a^2 + c^2 - b^2\right)^2;\\
4h_c^2c^2 &= \left[2ac + \left(a^2 + c^2 - b^2\right)\right]\left[2ac - \left(a^2 + c^2 - b^2\right)\right];\\
4h_c^2c^2 &= \left[\left(a^2 + 2ac + c^2\right) - b^2\right]\left[-\left(a^2 - 2ac + c^2\right) + b^2\right];\\
4h_c^2c^2 &= \left[(a + c)^2 - b^2\right]\left[b^2 - (a - c)^2\right];\\
4h_c^2c^2 &= (a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c). &\quad (3.0.21)
\end{aligned}$$

O perímetro do triângulo ABC é dado por $2p = a + b + c$. Logo:

$$a + c - b = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b); \tag{3.0.22}$$
$$b + a - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c); \tag{3.0.23}$$
$$b - a + c = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a). \tag{3.0.24}$$

Substituindo as igualdades (3.0.22), (3.0.23) e (3.0.24) na Equação (3.0.21), temos que:

$$\begin{aligned}
4h_c^2c^2 &= 2p2(p - b)2(p - c)2(p - a);\\
h_c^2 &= \frac{4}{c^2}p(p - a)(p - b)(p - c);\\
h_c &= \frac{2}{c}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}. &\quad (3.0.25)
\end{aligned}$$

Como a área S do triângulo ABC pode ser calculada pelo semiproduto de um lado pela altura relativa a esse lado, temos que

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} h_c c. \tag{3.0.26}$$

Substituindo a Equação (3.0.25) em (3.0.26), obtemos:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} c \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \\ S_{ABC} &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \end{aligned}$$

□

4 Aplicações

4.1 O problema das circunferências tangentes

Aplicando o Teorema de Stewart ao triângulo CDE com ceviana EO, ilustrados na Figura 2, obtemos:

$$\begin{aligned} a^2 n + b^2 m - z^2 c &= cmn; \\ (1+x)^2(1) + (2+x)^2(2) - (3-x)^2(3) &= 3(2)(1); \\ 1 + 2x + x^2 + 8 + 8x + 2x^2 - 27 + 18x - 3x^2 &= 6; \\ 28x &= 24; \\ x &= \frac{6}{7}. \end{aligned}$$

É possível constatarmos aqui como a aplicação do Teorema de Stewart simplifica a solução do problema.

4.2 Demonstração de outros teoremas

Empregamos agora o Teorema de Stewart para demonstrar os Teoremas 4 e 5, propostos em [11].

Teorema 4 (Diagonais do paralelogramo)**.** *A soma dos quadrados das medidas dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados das medidas das diagonais.*

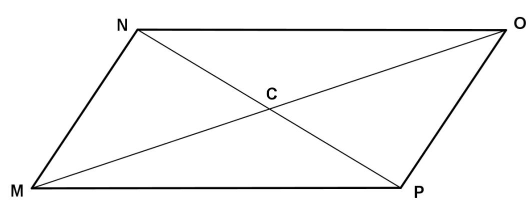

Figura 6: Paralelogramo $MNOP$ e as diagonais MO e NP.

Demonstração. Sejam o paralelogramo $MNOP$, ilustrado na Figura 6, de lados $MP = NO = a$ e $MN = OP = b$, $MO = d_1$ e $NP = d_2$ as diagonais do paralelogramo $MNOP$ e $MC = CO = \dfrac{d_1}{2}$ e $NC = CP = \dfrac{d_2}{2}$. Aplicando o Teorema de Stewart aos triângulos MOP e MNP, obtemos, respectivamente,

$$a^2\frac{d_1}{2} + b^2\frac{d_1}{2} - \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 d_1 = d_1\frac{d_1}{2}\frac{d_1}{2},$$
$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{{d_2}^2}{4} = \frac{{d_1}^2}{4} \tag{4.2.1}$$

e

$$a^2\frac{d_2}{2} + b^2\frac{d_2}{2} - \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 d_2 = d_2\frac{d_2}{2}\frac{d_2}{2},$$
$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{{d_1}^2}{4} = \frac{{d_2}^2}{4}. \tag{4.2.2}$$

Somando as Equações (4.2.1) e (4.2.2), temos que:

$$2\frac{a^2}{2} + 2\frac{b^2}{2} - \frac{{d_1}^2}{4} - \frac{{d_2}^2}{4} = \frac{{d_1}^2}{4} + \frac{{d_2}^2}{4};$$
$$2\left(a^2 + b^2\right) = {d_1}^2 + {d_2}^2.$$

□

Teorema 5 (Quadrisecção da hipotenusa)**.** *Em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas das distâncias do vértice do ângulo reto aos pontos de quadrisecção da hipotenusa é igual a* $\dfrac{7}{8}$ *do quadrado da medida da hipotenusa.*

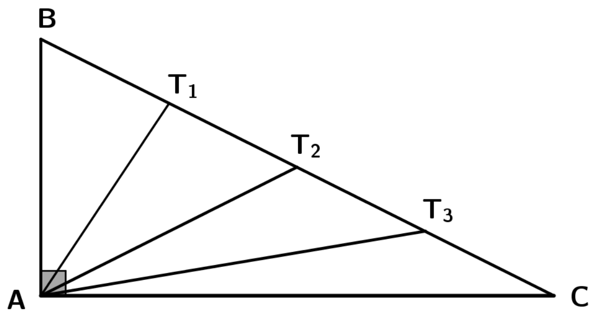

Figura 7: Triângulo ABC e as cevianas AT_1, AT_2 e AT_3.

Demonstração. Sejam o triângulo ABC, retângulo em A e de lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$, ilustrado na Figura 7; T_1, T_2 e T_3 os pontos que dividem a hipotenusa BC em quatro partes iguais, ou seja, $BT_1 = T_1T_2 = T_2T_3 = T_3C = \dfrac{a}{4}$; $AT_1 = d_1$, $AT_2 = d_2$ e $AT_3 = d_3$ as distâncias do vértice A aos pontos de quadrisecção da hipotenusa. Aplicando o Teorema de Stewart ao triângulo ABC para as cevianas

AT_1, AT_2 e AT_3, obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned} c^2\frac{3a}{4}+b^2\frac{a}{4}-{d_1}^2a &= a\frac{a}{4}\frac{3a}{4}, \\ \frac{3c^2}{4}+\frac{b^2}{4}-{d_1}^2 &= \frac{3a^2}{16}; \qquad (4.2.3) \\ c^2\frac{a}{2}+b^2\frac{a}{2}-{d_2}^2a &= a\frac{a}{2}\frac{a}{2}, \\ \frac{c^2}{2}+\frac{b^2}{2}-{d_2}^2 &= \frac{a^2}{4} \qquad (4.2.4) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c^2\frac{a}{4}+b^2\frac{3a}{4}-{d_3}^2a &= a\frac{3a}{4}\frac{a}{4}, \\ \frac{c^2}{4}+\frac{3b^2}{4}-{d_3}^2 &= \frac{3a^2}{16}. \qquad (4.2.5) \end{aligned}$$

Somando as Equações (4.2.3), (4.2.4) e (4.2.5), temos que:

$${d_1}^2+{d_2}^2+{d_3}^2=\frac{3}{2}\left(b^2+c^2\right)-\frac{5}{8}a^2. \qquad (4.2.6)$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo ABC, obtemos

$$b^2+c^2=a^2. \qquad (4.2.7)$$

Substituindo a Equação (4.2.7) em (4.2.6), concluímos que

$${d_1}^2+{d_2}^2+{d_3}^2=\frac{7}{8}a^2. \qquad (4.2.8)$$

□

Demonstrações de outros resultados geométricos empregando o Teorema de Stewart podem ser encontradas em Nós, Saito e Oliveira [8] e Posamentier e Salkind [11].

4.3 Arbelos

Arbelos, do grego "faca de sapateiro", é uma região plana delimitada por três semicircunferências de raios r_1, r_2 e r_1+r_2, respectivamente, como ilustra a Figura 8 [8]. Acredita-se que Arquimedes tenha sido o primeiro a estudar as propriedades matemáticas da arbelos na obra *Book of Lemmas*. Uma dessas propriedades é a equivalência (mesma área) da arbelos e do círculo tracejado de diâmetro AB na Figura 8.

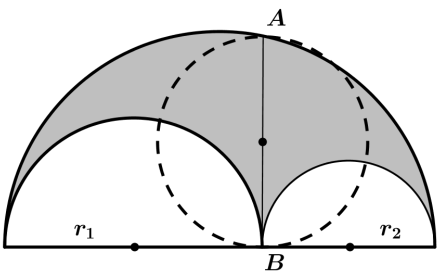

Figura 8: *Arbelos* de raios r_1, r_2 e r_1+r_2.

Proposição 6. *Relacionar os raios r_1, r_2 e r_1+r_2 de uma arbelos com o raio r da circunferência inscrita.*

Seja o triângulo ABC cujos vértices são os centros das semicircunferências de raios r_1 e r_2 e da circunferência inscrita, de raio r, como na Figura 9. Verificamos facilmente que o triângulo ABC tem lados de medidas $r+r_1$, $r+r_2$ e r_1+r_2. Sendo D o centro da semicircunferência de raio r_1+r_2, temos que $BD=r_2$, $DC=r_1$ e $AD=r_1+r_2-r$. Aplicando o Teorema de Stewart no triângulo ABC considerando a ceviana AD, chegamos a

$$(r+r_1)^2(r_1)+(r+r_2)^2(r_2)-(r_1+r_2-r)^2(r_1+r_2)=r_1r_2(r_1+r_2). \quad (4.3.1)$$

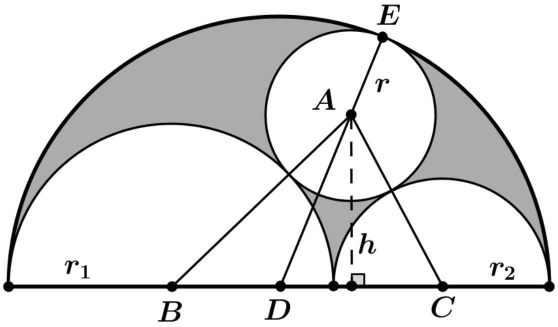

Figura 9: Circunferência de raio r inscrita em uma *arbelos* de raios r_1, r_2 e r_1+r_2.

Desenvolvendo algebricamente a igualdade (4.3.1), obtemos:

$$\begin{aligned} 4rr_1r_2+4rr_1^2+4rr_2^2-3r_1^2r_2-3r_1r_2^2 &= r_1r_2(r_1+r_2); \\ 4r\left(r_1r_2+r_1^2+r_2^2\right)-3r_1r_2(r_1+r_2) &= r_1r_2(r_1+r_2); \\ 4r\left(r_1r_2+r_1^2+r_2^2\right) &= 4r_1r_2(r_1+r_2); \\ r &= \frac{r_1r_2(r_1+r_2)}{r_1^2+r_2^2+r_1r_2}. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Proposição 7. *Relacionar a distância h do centro da circunferência inscrita ao diâmetro da circunferência de raio r_1+r_2 com o raio r da circunferência inscrita na arbelos.*

A área S do triângulo ABC é dada por

$$S_\Delta=\frac{1}{2}h(r_1+r_2). \quad (4.3.3)$$

Aplicando o Teorema de Heron a esse triângulo, temos que

$$S_\Delta=\sqrt{(r+r_1+r_2)\,rr_1r_2}. \quad (4.3.4)$$

Substituindo a Equação (4.3.2) em (4.3.4), obtemos:

$$
\begin{aligned}
S_\Delta &= \sqrt{\left(\frac{r_1r_2\left(r_1+r_2\right)}{r_1^2+r_2^2+r_1r_2}+r_1+r_2\right)\frac{r_1r_2\left(r_1+r_2\right)}{r_1^2+r_2^2+r_1r_2}r_1r_2};\\
S_\Delta &= \sqrt{\frac{\left(r_1+r_2\right)\left(r_1^2+2r_1r_2+r_2^2\right)}{r_1^2+r_2^2+r_1r_2}\frac{r_1r_2\left(r_1+r_2\right)}{r_1^2+r_2^2+r_1r_2}r_1r_2};\\
S_\Delta &= \sqrt{\frac{\left(r_1+r_2\right)\left(r_1+r_2\right)^2}{r_1^2+r_2^2+r_1r_2}\frac{r_1r_2\left(r_1+r_2\right)}{r_1^2+r_2^2+r_1r_2}r_1r_2};\\
S_\Delta &= \frac{\left(r_1+r_2\right)^2r_1r_2}{r_1^2+r_2^2+r_1r_2}. \qquad (4.3.5)
\end{aligned}
$$

Igualando as Equações (4.3.3) e (4.3.5) e empregando a Equação (4.3.2), concluimos que:

$$
\begin{aligned}
h &= 2\frac{\left(r_1+r_2\right)r_1r_2}{r_1^2+r_2^2+r_1r_2};\\
h &= 2r.
\end{aligned}
$$

5 Conclusão

A solução do problema das quatro circunferências tangentes, assim como a relação entre os raios das semicircunferências que definem uma *arbelos* com o raio da circunferência inscrita, foi simplificada com o uso do Teorema de Stewart, o qual também permitiu demonstrar outros teoremas, como o Teorema de Heron. Ressaltamos neste artigo a demonstração de teoremas [5] com o intuito de incentivar os professores de matemática do ensino médio a incorporar efetivamente a demonstração no processo ensino-aprendizagem e também a usar os teoremas demonstrados na solução de problemas aplicados.

Referências

[1] BOYER, C. B. *História da matemática*. Edgard Blücher: São Paulo, 1987.

[2] COURANT, R.; ROBBINS, H. *What is mathematics?* 2.d ed., New York: Oxford University Press,1996.

[3] DALCIN, M. *A demonstração feita por Heron.* Revista do Professor de Matemática, n. 36, SBM, São Paulo, 2009.

[4] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar - geometria plana.* v. 9, 6. ed., São Paulo: Atual, 2005.

[5] FOSSA, J. A. *Introdução às técnicas de demonstração na matemática.* 2. ed., São Paulo: Livraria da Física, 2009.

[6] MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M. *Geometria II.* 4. ed., São Paulo: VestSeller, 2009.

[7] NÓS, R. L.; SAITO, O. H.; OLIVEIRA, C. A. M. *Os teoremas de Stewart e de Heron e a demonstração nas aulas de matemática.* In: Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 3, n. 1, SBMAC, 2015.

[8] NÓS, R. L.; SAITO, O. H.; OLIVEIRA, C. A. M. *Arbelos e o teorema de Stewart*. Revista do Professor de Matemática, n. 86, SBM, São Paulo, 2015.

[9] O BARICENTRO DA MENTE. *O teorema de Stewart*. Disponível em: http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2012/02/o-teorema-de-stewart.html. Acesso em: 14 fev. 2014.

[10] OLIVEIRA, C. A. M. *Os teoremas de Stewart e de Heron e o cálculo da área de um triângulo em função dos lados*. Dissertação de Mestrado, UTFPR, Curitiba, PR, 2014.

[11] POSAMENTIER, A. S.; SALKIND, C. T. *Challenging problems in geometry*. New York:Dover, 1996.

[12] STEWART, M. *Some general theorems of considerable use in the higher parts of mathematics*. Edinburgh: W. Sands and J. Cochran Editors, 1746.