

# Teorema de Pitágoras: extensões e generalizações\*

João Evangelista Brito da Silva<sup>1</sup>, Ermínia de Lourdes Campello Fanti<sup>2</sup> e Hermes Antonio Pedroso<sup>3</sup>

## Resumo

O objetivo principal deste trabalho é estudar algumas extensões de um dos teoremas mais importantes e divulgados da matemática elementar: o Teorema de Pitágoras, que tem suas aplicações em diversas áreas do conhecimento. Inicialmente, realizamos um breve resgate histórico da vida de Pitágoras, o surgimento do teorema e suas aplicações. A seguir são apresentadas várias extensões do teorema, para polígonos regulares, polígonos semelhantes e figuras não retilíneas. A generalização de Polya também é enunciada e demonstrada, situação em que o padrão pitagórico (relação entre as áreas) é válido para quaisquer tipos de figuras semelhantes construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, sendo o Teorema de Pitágoras um caso particular, bem como a generalização de Pappus.

**Palavras Chave:** Teorema de Pitágoras, Extensões do Teorema de Pitágoras, Generalização de Polya, Generalização de Pappus.

---

\* Trabalho realizado como parte Dissertação de Mestrado Profissional, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto, sob a orientação da Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Ermínia de Lourdes Campello Fanti.

<sup>1</sup> Email: jebes@ibilce.unesp.br. Assistente de Suporte Acadêmico - Departamento de Matemática, IBILCE, UNESP e Professor da Rede Pública do Estado de São Paulo.

<sup>2</sup> Email: fanti@ibilce.unesp.br. Departamento de Matemática, IBILCE, UNESP.

<sup>3</sup> Email: hermes@ibilce.unesp.br. Departamento de Matemática, IBILCE, UNESP.

## Introdução

O tema deste trabalho é um dos teoremas mais importantes e conhecidos na Matemática: o Teorema de Pitágoras. Esse é considerado um dos alicerces da Matemática, pois possui inúmeras aplicações em diversas áreas do conhecimento. O objetivo principal é apresentar várias extensões do teorema, finalizando com as demonstrações das generalizações de George Polya e de Pappus de Alexandria, duas situações em que o Teorema de Pitágoras é obtido como um caso particular.

## 1 Um pouco sobre Pitágoras

Pitágoras nasceu em Samos, uma ilha grega na costa marítima do que hoje é a Turquia, por volta de 570 a.C. Como todos os documentos da época se perderam, a doutrina e a vida de Pitágoras está envolta de muitos mistérios, nada pode ser afirmado com muita certeza. Tudo que se sabe sobre Pitágoras veio através de referências de outros autores que viveram séculos depois. Sua morte se deu em Crotona, cidade da Itália meridional, provavelmente, por volta de 500 a.C., com a destruição de sua Escola Pitagórica e o seu possível assassinato. Porém, não existe certeza sobre a data de sua morte, alguns dizem que Pitágoras conseguiu fugir para Metaponto, sul da Itália, onde permaneceu até o fim de sua vida.

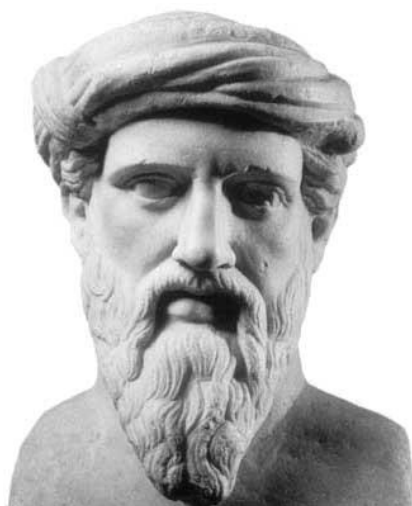


Figura 1 – Busto de Pitágoras

Em todas as referências sobre a vida de Pitágoras, relata-se que o mesmo realizou inúmeras viagens e peregrinações. Permaneceu cerca de 25 anos no Egito,

onde, provavelmente, extraiu os conhecimentos matemáticos e filosóficos que fundamentariam o seu ensinamento futuro.

Pitágoras teria voltado para Samos com 56 anos, com a intenção de ali fundar uma escola iniciática. Seus ensinamentos atraiu a atenção de muitos discípulos, mas também provocou a inimizade de Policrates, tirano de Samos. Partiu então para Crotona, reunindo ali um grupo de discípulos e iniciando-os nos conhecimentos de Matemática, Música e Astronomia. Estava fundada então a Escola Pitagórica, uma instituição religiosa e intelectual, cujos principais conceitos eram:

- Prática de rituais religiosos na crença de que as almas se transmigram de um corpo a outro após a morte;
- Lealdade entre os membros;
- Total entrega da mente ao estudo de Geometria, Aritmética, Música e Astronomia.

Com o passar do tempo e devido às ideias da Escola Pitagórica, Pitágoras foi colecionando vários inimigos. Um deles, que não foi aceito em sua Escola, começou a persegui-lo e, através de falsos testemunhos, colocou o povo da cidade de Crotona contra Pitágoras. A Escola então fora destruída. Como a Escola Pitagórica era secreta, Pitágoras não deixou nenhum registro escrito, e provavelmente, todos os que existiam foram perdidos com a morte de seus discípulos, e a aniquilação dos pitagóricos.

## 2 Teorema de Pitágoras: alguns dados históricos

"Num triângulo retângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos". Essa importante relação entre os três lados de um triângulo retângulo ficou conhecida, na *Geometria Euclidiana*, como Teorema de Pitágoras. Mas séculos antes da existência de Pitágoras, o teorema já era conhecido por babilônios, egípcios e chineses, que utilizavam o resultado na resolução de problemas.

Há provas concretas que os babilônios antigos conheciam o Teorema de Pitágoras. Muitos dos tabletes de barro, que datam de 1800 a 1600 a. C., que foram encontrados e decifrados evidenciam este fato. Um deles, que se chama Plimpton 322, e se encontra atualmente na Universidade de Columbia, contém uma tabela de 15 linhas e 3 colunas, contendo ternos pitagóricos, ou seja, com medidas dos três lados de um triângulo retângulo.

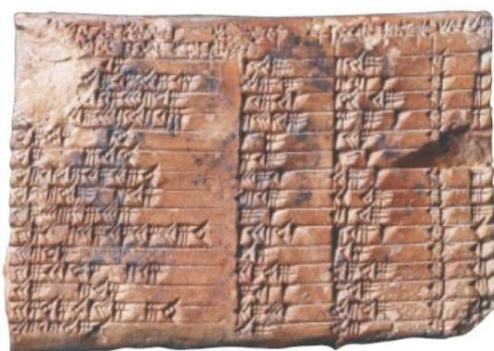


Figura 2 – Placa Plimpton 322.

O primeiro documento escrito no Egito, em grego, que se conhece e que trata do Teorema de Pitágoras são “*Os Elementos*”, de Euclides (360 – 295 a.C.). Trata-se da Proposição I-47, cuja demonstração é realizada envolvendo comparação entre áreas.

É importante observar que, como nenhum dos escritos originais chegou até os nossos dias, não podemos afirmar, com absoluta certeza, se Pitágoras apresentou ou não uma prova do teorema que leva seu nome. Como a Escola Pitagórica, além de secreta era comunitária, ou seja, todo o conhecimento e todas as descobertas pertenciam a todos, pode ser que algum de seus discípulos tenha demonstrado e tenha dado o crédito ao mestre, conforme as normas da comunidade. É certo que Pitágoras não inventou o teorema, mas é possível que leve o seu nome por acreditar-se que ele tenha sido o primeiro a se preocupar em dar uma demonstração (geral). Também não se sabe qual foi a demonstração original feita pelos Pitagóricos, mas historiadores acreditam que deve ter sido usando áreas.

Hoje sabemos que existem mais de 400 demonstrações diferentes do Teorema de Pitágoras, algumas feitas por personalidades como Bháskara e Leonardo da Vinci e até mesmo um presidente dos Estados Unidos (em 1871), James Abram Garfield (1831 – 1881). O clássico livro *The Pythagorean Proposition*, (LOOMIS, 1968) do

professor norte-americano Elisha Scott Loomis (1852 – 1940), contém uma compilação de 370 demonstrações diferentes do Teorema de Pitágoras. Não é nosso objetivo aqui apresentar demonstrações do Teorema de Pitágoras.

### 3 O Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras, em termos de áreas, nos diz que a “*soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos de um triângulo retângulo é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa*”.

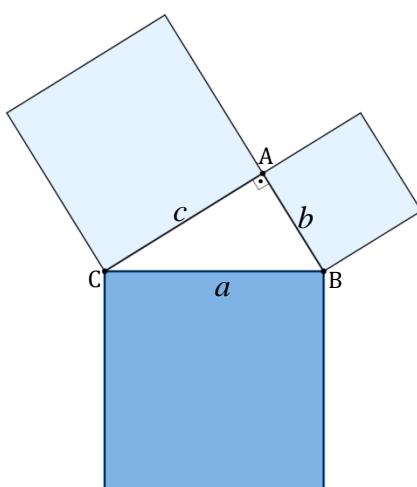


Figura 3 – Triângulo retângulo com os quadrados construídos sobre seus lados.

Se a medida da hipotenusa é  $a$  e se  $b$  e  $c$  são as medidas dos catetos, o enunciado é equivalente a:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Observação: Como usualmente ocorre,  $a$ ,  $b$  e  $c$  indicarão, de acordo com a conveniência, as medidas dos lados ou os lados do triângulo.

#### 3.1 A recíproca do Teorema de Pitágoras

A recíproca do Teorema de Pitágoras: “Se  $a$ ,  $b$  e  $c$  forem as medidas dos lados de um triângulo e  $a^2 = b^2 + c^2$ , então o triângulo é retângulo de hipotenusa  $a$  e catetos  $b$  e  $c$ ” é também verdadeira. A justificativa é simples. Ver, por exemplo, Euclides (2009).

## 4 Extensões do Teorema de Pitágoras

Nesta seção veremos que esse padrão pitagórico (relação entre as áreas) é válido para outras figuras construídas tendo como base um triângulo retângulo, de modo a obter “*extensões*” do Teorema de Pitágoras.

### 4.1 Triângulos Equiláteros

Vamos verificar o padrão pitagórico, isto é, a relação entre áreas similar à do Teorema de Pitágoras na construção de *triângulos equiláteros* sobre os catetos e hipotenusa de um triângulo retângulo.

**Proposição 1:** A área do triângulo equilátero, construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo, é igual à soma das áreas dos triângulos equiláteros construídos sobre os catetos deste triângulo.

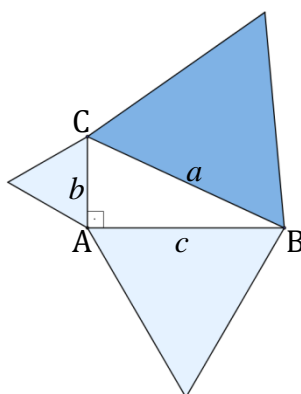


Figura 4 – Triângulos equiláteros sobre os lados do triângulo retângulo.

#### Demonstração:

Seja ABC um triângulo reto em A, com hipotenusa  $a$  e catetos  $b$  e  $c$ . Sejam  $S_a$ ,  $S_b$  e  $S_c$  as áreas dos triângulos equiláteros construídos, respectivamente, sobre a hipotenusa e os catetos deste triângulo.

Dessa forma,  $S_a = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ ,  $S_b = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$  e  $S_c = \frac{c^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ . Somando as áreas  $S_b$  e  $S_c$ , e usando o Teorema de Pitágoras, obtemos  $S_b + S_c = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{c^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = (b^2 + c^2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = S_a$ . Portanto,  $S_a = S_b + S_c$ . ■

## 4.2 Triângulos Semelhantes

O padrão pitagórico (*relação entre áreas*) é válido para *triângulos semelhantes* construídos sobre os lados de um triângulo retângulo. Para isso, vamos enunciar um resultado que será útil na demonstração que desejamos.

**Lema 1:** Se dois triângulos são semelhantes, então a razão entre as suas áreas é igual ao quadrado da razão entre os comprimentos de dois lados correspondentes quaisquer.

Uma demonstração do Lema 1 pode ser encontrada em Lourenço e Silva (1992).

**Proposição 2:** Se construirmos triângulos semelhantes sobre os lados de um triângulo retângulo e se os lados (segmentos) do triângulo retângulo são lados homólogos (correspondentes) aos lados dos triângulos semelhantes que os contém, então a área do triângulo construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos triângulos construídos sobre os catetos.

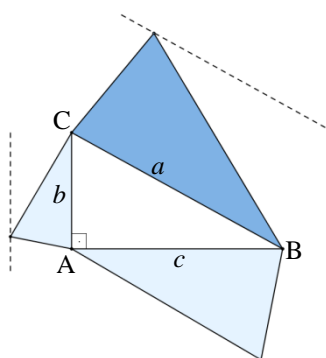


Figura 5 – Triângulos semelhantes construídos sobre os lados do triângulo retângulo.

### **Demonstração:**

Sejam  $T_a$ ,  $T_b$  e  $T_c$ , respectivamente, as áreas dos triângulos semelhantes construídos sobre a hipotenusa  $a$  e catetos  $b$  e  $c$ , como na Figura 5.

Pelo Lema 1, temos que  $\frac{T_b}{T_a} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$  e  $\frac{T_c}{T_a} = \left(\frac{c}{a}\right)^2$ , de onde obtemos  $T_b = \frac{b^2}{a^2} \cdot T_a$  e  $T_c = \frac{c^2}{a^2} \cdot T_a$ .

Somando as duas expressões e usando a relação de Pitágoras, obtemos  $T_b + T_c = \frac{(b^2 + c^2)}{a^2} \cdot T_a = \frac{a^2}{a^2} \cdot T_a = T_a$ . Portanto,  $T_b + T_c = T_a$ . ■

### 4.3 Polígonos Regulares

Veamos agora a situação para *polígonos regulares* construídos sobre os lados de um triângulo retângulo.

**Proposição 3:** A área do polígono regular de  $n$  lados construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos polígonos regulares de  $n$  lados construídos sobre seus catetos.

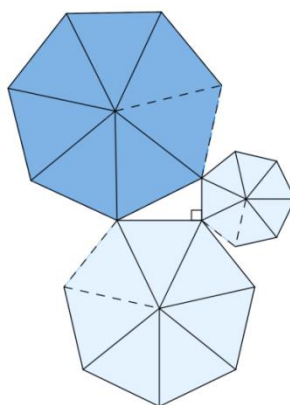


Figura 6 – Polígonos regulares de  $n$  lados sobre os lados do triângulo retângulo.

#### **Demonstração:**

Consideremos um triângulo retângulo em que em cada um de seus lados foram construídos polígonos regulares de  $n$  lados, conforme a Figura 6. Podemos decompor cada polígono regular em triângulos cujos vértices são: dois vértices consecutivos do polígono regular e o seu centro.

Sendo  $S_a$ ,  $S_b$  e  $S_c$  as áreas dos polígonos regulares construídos sobre os lados do triângulo retângulo, temos  $S_a = n \cdot T_a$ ,  $S_b = n \cdot T_b$  e  $S_c = n \cdot T_c$ , onde  $T_a$ ,  $T_b$  e  $T_c$ , são, respectivamente, as áreas de cada triângulo em que foi decomposto o polígono regular, construído sobre a hipotenusa de medida  $a$  e catetos de medidas  $b$  e  $c$ .

Então,  $S_b + S_c = n \cdot (T_b + T_c) = n \cdot T_a = S_a$ , uma vez que, pela Proposição 2 temos  $T_b + T_c = T_a$  (já que os triângulos (isósceles) apoiados sobre os lados do triângulo retângulo são semelhantes).

■



## 4.4 Polígonos Semelhantes

Mais geralmente, vamos mostrar que o padrão pitagórico (relação entre as áreas) é válido para *polígonos semelhantes* construídos sobre os lados de um triângulo retângulo qualquer.

Para isso vamos recordar a definição de polígonos semelhantes e enunciar um lema sobre áreas.

**Definição:** Dois polígonos (convexos ou não)  $A_1A_2A_3A_4\dots A_n$  e  $B_1B_2B_3B_4\dots B_n$ , (onde  $A_i, B_i, i = 1, \dots, n$  indicam seus vértices) são *semelhantes*, quando seus ângulos correspondentes são congruentes e seus lados correspondentes, denominados *homólogos*, são proporcionais, ou seja,  $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1, \widehat{A}_2 = \widehat{B}_2, \widehat{A}_3 = \widehat{B}_3, \dots, \widehat{A}_n = \widehat{B}_n$  e  $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4} = \dots = \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n} = \frac{A_nA_1}{B_nB_1} = k$ , onde a constante  $k$  é chamada *razão de semelhança*.

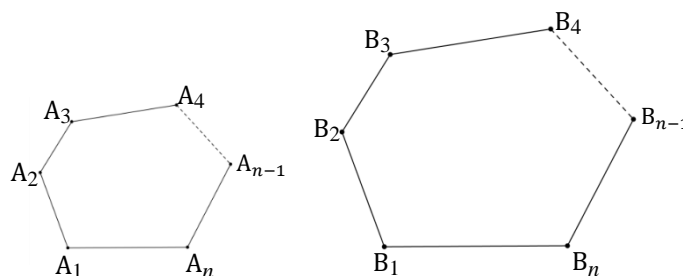


Figura 7 - Polígonos semelhantes de  $n$  lados.

**Lema 2:** Se dois polígonos são semelhantes, então eles possuem áreas proporcionais aos quadrados da razão das medidas entre dois lados homólogos quaisquer (razão de semelhança), ou seja, sendo  $\mathcal{A}_1$  a área do polígono  $A_1A_2A_3A_4\dots A_n$  e  $\mathcal{A}_2$  a área de  $B_1B_2B_3B_4\dots B_n$ , temos que  $\frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2} = k^2$ , com  $k$  a razão de semelhança.

Uma demonstração do Lema 2 pode ser encontrada em Lourenço e Silva (1992).

**Proposição 4:** Se construirmos polígonos semelhantes sobre os lados de um triângulo retângulo e se os lados (segmentos) do triângulo retângulo são lados homólogos aos lados dos polígonos semelhantes que os contém, então a área do

polígono construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos polígonos construídos sobre os catetos.

### **Demonstração:**

Considerando que os polígonos construídos sobre a hipotenusa e os catetos são semelhantes e  $S_a$ ,  $S_b$  e  $S_c$  são suas respectivas áreas, mostraremos que  $S_a = S_b + S_c$ .

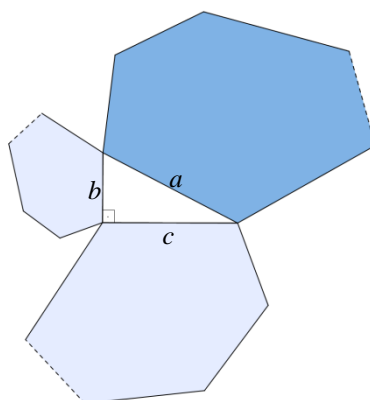


Figura 8 – Polígonos semelhantes de  $n$  lados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo

De fato. Como os polígonos são semelhantes e os lados do triângulo são lados correspondentes dos polígonos, temos de acordo com o Lema 2, que  $\frac{S_b}{S_a} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$  e  $\frac{S_c}{S_a} = \left(\frac{c}{a}\right)^2$ . Somando membro a membro as duas igualdades, obtemos  $\frac{S_b}{S_a} + \frac{S_c}{S_a} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}$ . De onde segue, usando o Teorema de Pitágoras que  $\frac{S_b + S_c}{S_a} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$  e portanto,  $S_a = S_b + S_c$ . ■

## **4.5 Extensões retilíneas**

Apresentamos a seguir algumas extensões do Teorema de Pitágoras, para certas figuras “retilíneas”, polígonos construídos a partir do triângulo retângulo, porém não tendo um de seus lados como sendo um dos lados do triângulo retângulo (mas obedecem alguma relação com o quadrado que se constrói sobre o lado).

Não é difícil demonstrar que em todas as situações a seguir, as regiões (figuras coloridas) construídas sobre os lados do triângulo retângulo preservam o padrão pitagórico das áreas, ou seja, a área da região construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das regiões construídas sobre os catetos. A verificação em cada situação é um interessante exercício e recairá sempre no Teorema de Pitágoras, o qual já sabemos ser verdadeiro.

As regiões ou figuras coloridas apresentadas são caracterizadas do seguinte modo:

- 1) Complementares dos triângulos equiláteros construídos no interior dos quadrados e tendo como base os lados do triângulo retângulo.

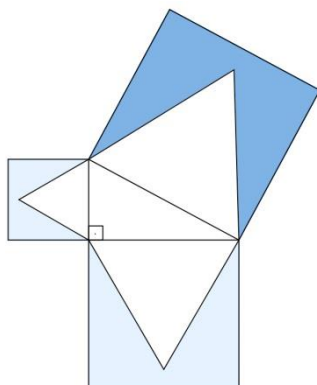


Figura 9 – Complementares dos triângulos equiláteros no interior do quadrado.

- 2) Quadrados inscritos tomando os pontos médios dos quadrados dos lados do triângulo retângulo.

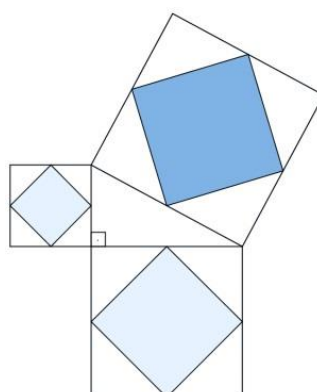


Figura 10 – Quadrados inscritos nos pontos médios.

- 3) Triângulos equiláteros inscritos considerando os pontos médios dos triângulos equiláteros que tem como base os lados do triângulo retângulo.

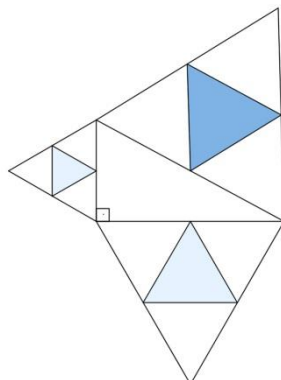


Figura 11 – Triângulos equiláteros inscritos nos pontos médios.

- 4) Quadriláteros não-convexos cujos vértices são: os dois pontos extremos de um lado do triângulo retângulo, o ponto médio do lado oposto do quadrado que tem como base o lado do triângulo retângulo, e o centro de tal quadrado.

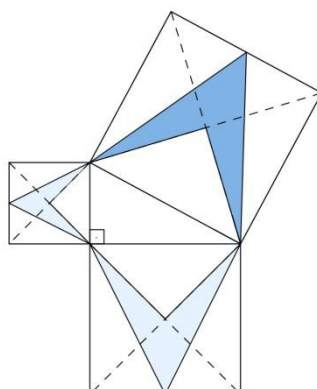


Figura 12 – Quadriláteros não-convexos inscritos nos quadrados.

- 5) Quadrados cujos centros coincidem com os centros dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo e suas diagonais têm como medida  $\frac{d}{2}$ , onde  $d$  indica a medida da diagonal do quadrado básico.

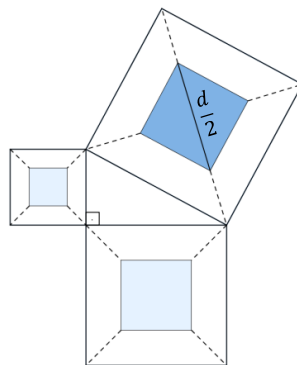


Figura 13 – Quadrados com vértices nas diagonais.

- 6) Quadrados cujos centros coincidem com o centro dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo e suas diagonais têm como medida  $\frac{a}{3}$ , onde  $a$  indica a medida do lado do quadrado básico.

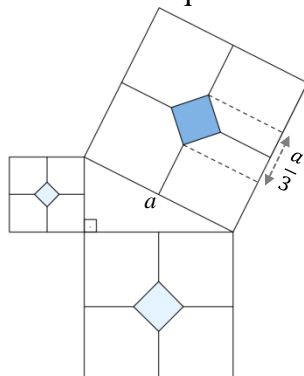


Figura 14 – Quadrados com diagonais iguais a  $\frac{1}{3}$  do lado.

- 7) Quadrados inscritos nos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo em pontos que os dividem na mesma razão  $k$ , como ilustra a figura seguinte.

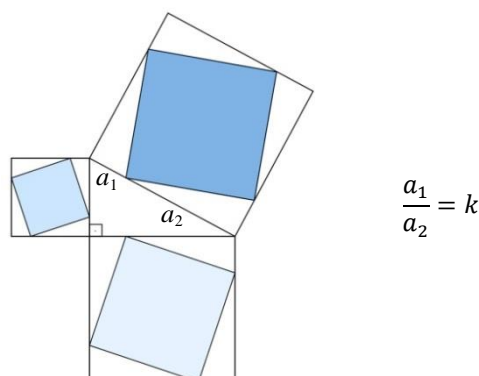


Figura 15 – Quadrados dividindo o lado na mesma razão  $k$ .

- 8) Triângulos inscritos nos triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo retângulo em pontos que os dividem na mesma razão  $k$ .

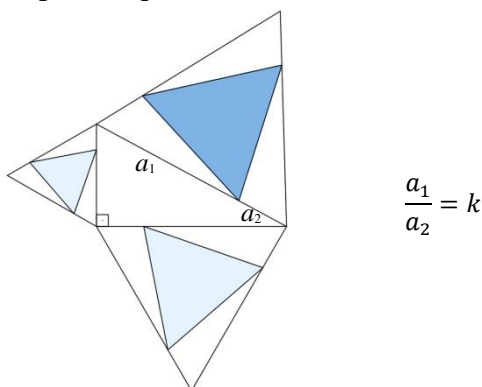


Figura 16 – Triângulos equiláteros dividindo o lado na razão  $k$ .

## 4.6 Extensões não retilíneas

Nesta seção, vamos apresentar algumas extensões para outros tipos de figuras, não necessariamente polígonos, ou seja, figuras “*não retilíneas*”, formadas por segmentos de retas e/ou por arcos de circunferência (referidas às vezes como “*figuras curvilíneas*” ou “*mistas*”).

Assim como nas extensões retilíneas, em todas as situações a seguir, é fácil verificar que o padrão pitagórico é preservado, ou seja, a soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos é igual à área da figura construída sobre a hipotenusa.

1) Círculos inscritos nos quadrados

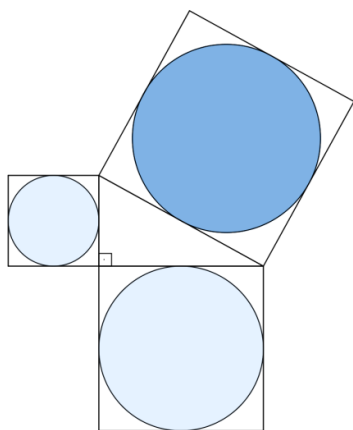


Figura 17

2) Semicírculos com diâmetro sobre os lados do triângulo.

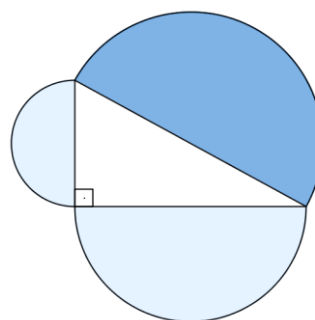


Figura 18

3) Quadrantes sobre os lados do triângulo.

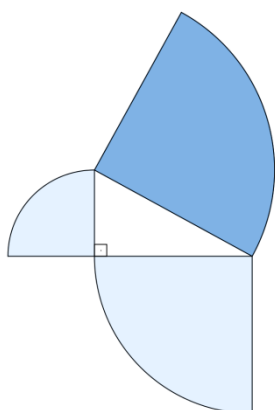


Figura 19

4) Setores angulares sobre os lados do triângulo retângulo.

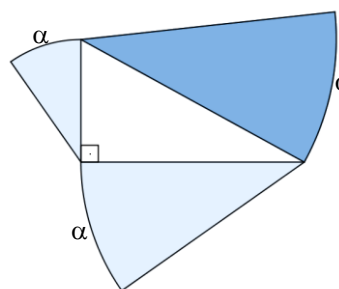


Figura 20

5) Arcos ogivais construídos sobre os lados do triângulo retângulo.

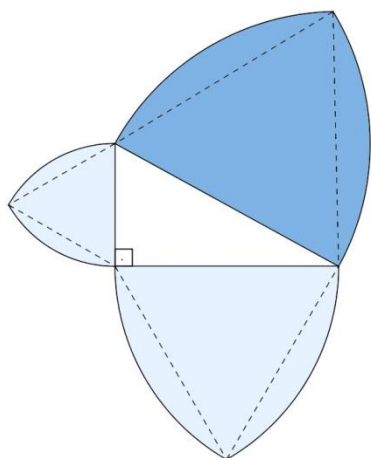


Figura 21

6) Exteriores aos quadrantes de círculos e interiores aos quadrados.

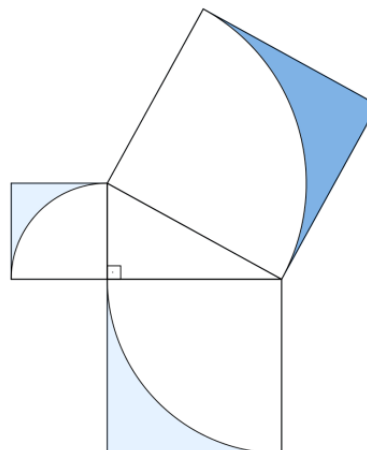


Figura 22

7) Exteriores aos semicírculos e interiores aos quadrados.

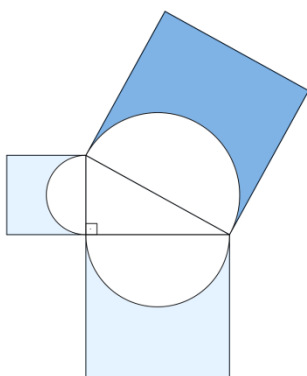


Figura 23

8) Exteriores às ogivas e interiores aos quadrantes de círculos.

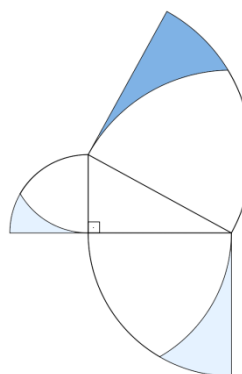


Figura 24

9) Exteriores às ogivas e interiores aos quadrados.

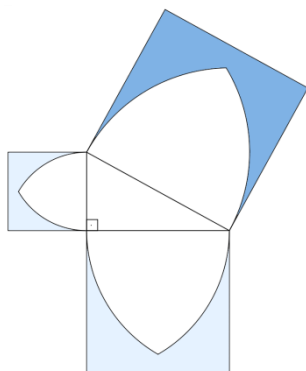


Figura 25

10) Exteriores aos semicírculos e interiores aos quadrantes de círculos.

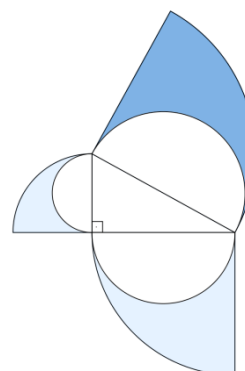


Figura 26

11) Exteriores aos círculos e interiores aos quadrados.

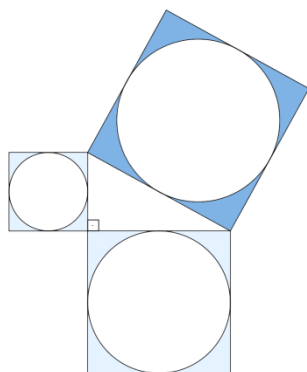


Figura 27

12) Exteriores aos triângulos e interiores às ogivas.

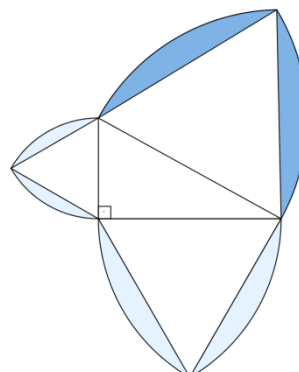


Figura 28

13) Exteriores aos semicírculos e interiores às ogivas.

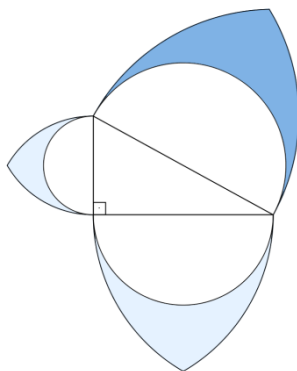


Figura 29

14) Círculos inscritos nos triângulos equiláteros.

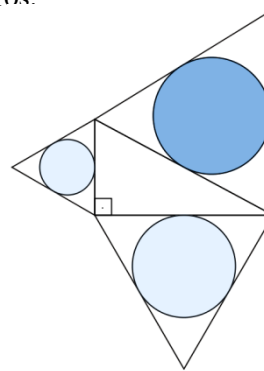


Figura 30

15) Exteriores aos círculos e interiores aos triângulos.

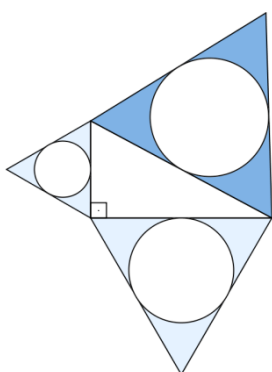


Figura 31

16) Exteriores aos quadrados e interiores aos círculos.

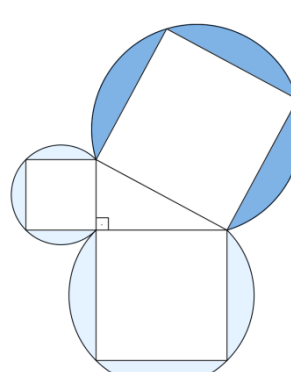


Figura 32



17) Exteriores aos triângulos e interiores aos círculos circunscritos.

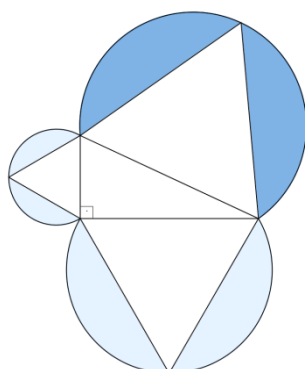


Figura 33

18) Exteriores aos círculos inscritos e interiores aos círculos circunscritos dos quadrados.

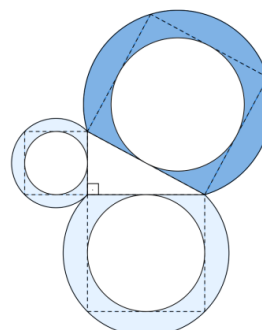


Figura 34

19) Exteriores aos círculos inscritos e interiores aos círculos circunscritos dos triângulos.

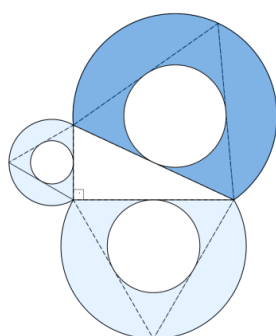


Figura 35

20) Obtidas de dois semicírculos nos quadrados.

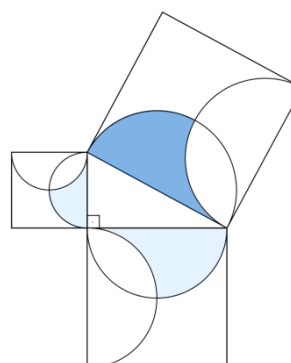


Figura 36

21) Obtidas de arcos de circunferências.

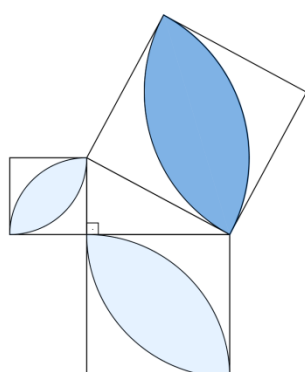


Figura 37

22) Obtidas a partir de semicircunferências.

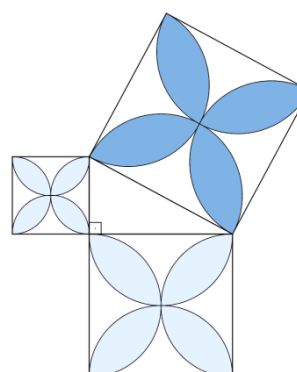


Figura 38

## 5 A generalização de Polya

### 5.1 Um pouco sobre George Polya

George Polya (1887 – 1985), nasceu na Hungria e foi um brilhante matemático, com contribuições fundamentais em áreas como Análise, Combinatória e Probabilidade. Um de seus mais conhecidos livros, escrito em 1945, “*How to Solve it*”, que em português recebeu o título “*A Arte de Resolver Problemas*”, é um trabalho dedicado à “investigação sobre a descoberta e invenção em Matemática”. Polya nos brindou com uma notável prova e generalização do Teorema de Pitágoras: *Se as figuras construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, independentes de sua forma geométrica, forem semelhantes, então o padrão pitagórico das áreas é satisfeito, isto é, a área da figura construída sobre o hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos.*

### 5.2 A generalização de Polya e o Teorema de Pitágoras

**Definição:** Duas figuras geométricas  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{F}'$  são *semelhantes* se a cada ponto  $A$  de  $\mathcal{F}$  é possível fazer uma correspondência a um e só um ponto  $A'$  de  $\mathcal{F}'$ , chamado *homólogo* do ponto  $A$ , de tal forma que se  $A$  e  $B$  são pontos quaisquer de  $\mathcal{F}$  e  $A'$  e  $B'$  são seus pontos homólogos em  $\mathcal{F}'$ , então a razão  $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$  é constante, e é denominada *razão* ou *coeficiente de semelhança* da figura  $\mathcal{F}$  para a figura  $\mathcal{F}'$ . De modo similar ao caso de polígonos semelhantes, dizemos que  $AB$  e  $A'B'$  são *segmentos* (ou *lados*, se for o caso) *homólogos*.

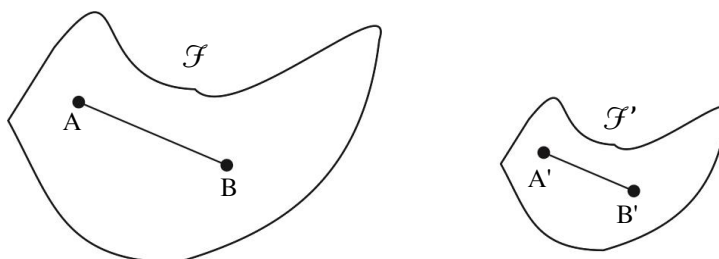


Figura 39 – Figuras semelhantes.

### **Observações:**

- 1) O conceito de polígonos semelhantes é um caso particular do conceito anterior.
- 2) Para o próximo resultado usamos uma generalização do Lema 2 para figuras semelhantes quaisquer, ou seja: *A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes quaisquer estão entre si assim como o quadrado da razão de semelhança.* Uma prova deste fato pode ser encontrada em Lima (1991, p.49) usando a ideia de aproximações por retângulos.

A proposição a seguir foi enunciada e demonstrada por Polya (para melhor compreensão, vide Figura 40).

**Proposição 5** (Polya): Sejam  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{H}$  três figuras semelhantes, construídas, respectivamente, sobre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo. Se os lados (segmentos) do triângulo retângulo são lados homólogos aos lados das figuras semelhantes que os contém, então as áreas  $\mathcal{A}_{(\mathcal{F})}$ ,  $\mathcal{A}_{(\mathcal{G})}$  e  $\mathcal{A}_{(\mathcal{H})}$  satisfazem a relação  $\mathcal{A}_{(\mathcal{F})} = \mathcal{A}_{(\mathcal{G})} + \mathcal{A}_{(\mathcal{H})}$  (padrão pitagórico).

### **Demonstração:**

Faremos a demonstração em duas etapas. Na *primeira*, mostraremos que se a relação entre áreas for satisfeita para uma terna particular de figuras semelhantes construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, então será satisfeita para qualquer outra terna de figuras semelhantes construídas sobre esses mesmos lados. Na *segunda* etapa exibiremos uma terna particular de figuras semelhantes construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, que satisfazem a condição enunciada na proposição, isto é, são semelhantes e satisfazem o padrão pitagórico (relação entre áreas), o que completará a prova.

**1ª Etapa:** Seja ABC um triângulo retângulo, cuja hipotenusa e catetos medem, respectivamente,  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Sejam  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{H}$ , três figuras semelhantes construídas,

respectivamente, sobre a hipotenusa e os catetos do triângulo ABC, para as quais, seja válida a relação  $\mathcal{A}_{(\mathcal{F})} = \mathcal{A}_{(\mathcal{G})} + \mathcal{A}_{(\mathcal{H})}$ , vide Figura 40, a seguir.

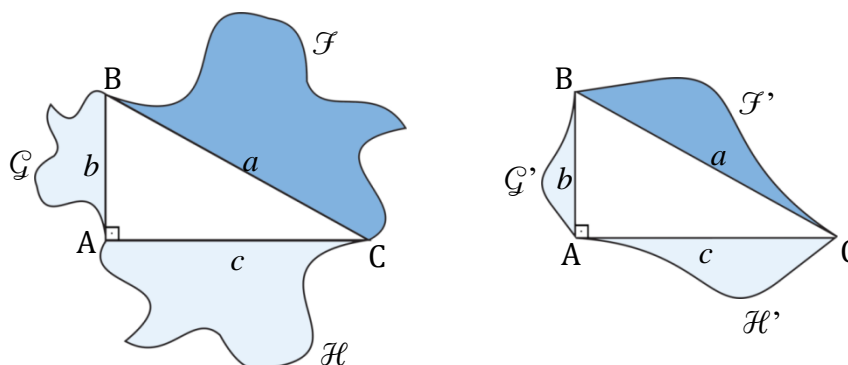


Figura 40 – Figuras semelhantes construídas sobre os lados do triângulo retângulo.

Se  $\mathcal{F}'$ ,  $\mathcal{G}'$  e  $\mathcal{H}'$  são outras três figuras semelhantes construídas, respectivamente, sobre a hipotenusa e catetos do triângulo ABC, na mesma ordem que as anteriores e lembrando que a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre elas (observação anterior, item 2), podemos escrever:

$$\frac{\mathcal{A}_{(\mathcal{F}')}}{\mathcal{A}_{(\mathcal{G}')}} = \frac{\mathcal{A}_{(\mathcal{F})}}{\mathcal{A}_{(\mathcal{G})}} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad \text{e} \quad \frac{\mathcal{A}_{(\mathcal{F}')}}{\mathcal{A}_{(\mathcal{H}')}} = \frac{\mathcal{A}_{(\mathcal{F})}}{\mathcal{A}_{(\mathcal{H})}} = \left(\frac{a}{c}\right)^2.$$

Logo,  $\frac{\mathcal{A}_{(\mathcal{F}')}}{\mathcal{A}_{(\mathcal{F})}} = \frac{\mathcal{A}_{(\mathcal{G}')}}{\mathcal{A}_{(\mathcal{G})}}$  e  $\frac{\mathcal{A}_{(\mathcal{F}')}}{\mathcal{A}_{(\mathcal{F})}} = \frac{\mathcal{A}_{(\mathcal{H}')}}{\mathcal{A}_{(\mathcal{H})}}$ , o que nos permite concluir que

$$\frac{\mathcal{A}_{(\mathcal{F}')}}{\mathcal{A}_{(\mathcal{F})}} = \frac{\mathcal{A}_{(\mathcal{G}')}}{\mathcal{A}_{(\mathcal{G})}} = \frac{\mathcal{A}_{(\mathcal{H}')}}{\mathcal{A}_{(\mathcal{H})}}, \text{ cujo valor comum denotaremos por } m.$$

$$\text{Assim, } \mathcal{A}_{(\mathcal{F}')} = m \cdot \mathcal{A}_{(\mathcal{F})}, \quad \mathcal{A}_{(\mathcal{G}')} = m \cdot \mathcal{A}_{(\mathcal{G})} \quad \text{e} \quad \mathcal{A}_{(\mathcal{H}')} = m \cdot \mathcal{A}_{(\mathcal{H})}.$$

Então,

$$\mathcal{A}_{(\mathcal{G}')} + \mathcal{A}_{(\mathcal{H}')} = m \cdot \mathcal{A}_{(\mathcal{G})} + m \cdot \mathcal{A}_{(\mathcal{H})} = m \cdot (\mathcal{A}_{(\mathcal{G})} + \mathcal{A}_{(\mathcal{H})}) = m \cdot \mathcal{A}_{(\mathcal{F})} = \mathcal{A}_{(\mathcal{F}')}, \text{ ou}$$

$$\text{seja, } \mathcal{A}_{(\mathcal{G}')} + \mathcal{A}_{(\mathcal{H}')} = \mathcal{A}_{(\mathcal{F}')}.$$

**2ª Etapa:** Devemos mostrar que é possível construir 3 figuras semelhantes,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{H}$ , sobre os lados do triângulo retângulo ABC que, de acordo com a hipótese, satisfazem a relação entre áreas.

Sendo D o pé da altura relativa à hipotenusa do triângulo ABC (Figura 41), temos três triângulos semelhantes. Podemos tomar uma cópia do triângulo ABC com sendo a figura  $\mathcal{F}$ , do triângulo ABD como a figura  $\mathcal{G}$  e do triângulo ACD como a figura  $\mathcal{H}$ . Temos então uma terna de figuras semelhantes que satisfazem as condições da proposição. Note que  $\mathcal{A}_{(\mathcal{F})} = \mathcal{A}_{(\mathcal{G})} + \mathcal{A}_{(\mathcal{H})}$ , pois  $\mathcal{A}_{(ABC)} = \mathcal{A}_{(ABD)} + \mathcal{A}_{(ACD)}$ .

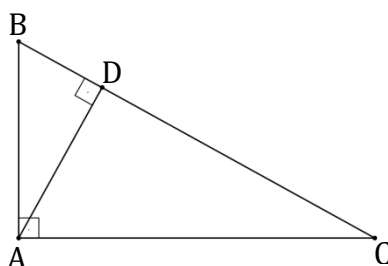


Figura 41 – Altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo.

A Figura 42, a seguir, ilustra os 3 triângulos construídos sobre os lados do triângulo ABC, onde  $A'$  é a reflexão do ponto A em relação à hipotenusa BC,  $D'$  e  $D''$  são as reflexões de D, respectivamente, em relação aos catetos AB e AC.

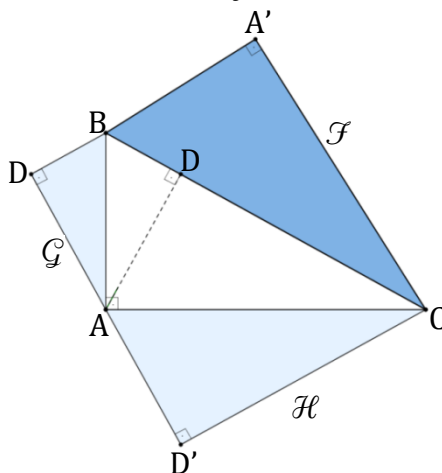


Figura 42 – Construção dos três triângulos semelhantes sobre os lados do triângulo retângulo. ■

Observamos que a relação entre áreas para triângulos semelhantes (quaisquer) foi provada na Proposição 2, usando o Teorema de Pitágoras. Entretanto, para os três

triângulos semelhantes considerados acima, a relação entre áreas se verifica sem usar o Teorema de Pitágoras. Assim, o *Teorema de Pitágoras pode ser obtido como uma consequência do teorema anterior*, uma vez que os quadrados construídos sobre os lados são figuras semelhantes.

Uma pergunta natural é: na generalização de Polya é realmente necessário que o triângulo seja retângulo? Analisando superficialmente, tem-se a impressão que a extensão se aplicaria a qualquer tipo de triângulo. Na proposição seguinte encontramos a resposta.

**Proposição 6:** Se num triângulo ABC, com lados de medidas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , são construídos sobre os seus lados, respectivamente, figuras semelhantes,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{H}$ , tal que as suas áreas satisfaçam a relação  $\mathcal{A}_{(\mathcal{F})} = \mathcal{A}_{(\mathcal{G})} + \mathcal{A}_{(\mathcal{H})}$  e os vértices do triângulo são pontos homólogos das figuras que os contém, então o triângulo ABC é retângulo de hipotenusa  $x$ .

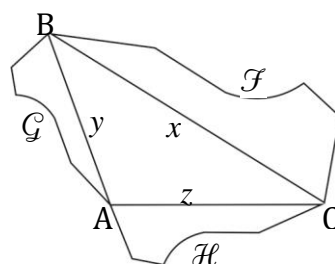


Figura 43 – Figuras semelhantes sobre os lados de um triângulo qualquer.

**Demonstração:**

Sendo  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{H}$  figuras semelhantes, podemos escrever:

$$\frac{\mathcal{A}_{(\mathcal{G})}}{\mathcal{A}_{(\mathcal{F})}} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \Rightarrow \mathcal{A}_{(\mathcal{G})} = \frac{y^2}{x^2} \cdot \mathcal{A}_{(\mathcal{F})} \quad \text{e} \quad \frac{\mathcal{A}_{(\mathcal{H})}}{\mathcal{A}_{(\mathcal{F})}} = \left(\frac{z}{x}\right)^2 \Rightarrow \mathcal{A}_{(\mathcal{H})} = \frac{z^2}{x^2} \cdot \mathcal{A}_{(\mathcal{F})}$$

Então:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(\mathcal{F})} &= \mathcal{A}_{(\mathcal{G})} + \mathcal{A}_{(\mathcal{H})} \Rightarrow \mathcal{A}_{(\mathcal{F})} = \frac{y^2}{x^2} \cdot \mathcal{A}_{(\mathcal{F})} + \frac{z^2}{x^2} \cdot \mathcal{A}_{(\mathcal{F})} \Rightarrow \mathcal{A}_{(\mathcal{F})} = \frac{y^2+z^2}{x^2} \cdot \mathcal{A}_{(\mathcal{F})} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 = \frac{y^2+z^2}{x^2} \Rightarrow x^2 = y^2 + z^2 \Rightarrow x, y \text{ e } z \text{ são respectivamente, as medidas da} \\ &\text{hipotenusa e catetos de um triângulo retângulo (pela recíproca do Teorema de Pitágoras,} \\ &\text{Seção 3.1).} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### **Observações:**

- 1) De acordo com a Proposição 6, fica claro então, que a generalização de Polya só se aplica mesmo a triângulos retângulos.
- 2) Quase todas as extensões apresentadas anteriormente, na seção 4, em que as figuras possuem como um de seus lados um lado do triângulo retângulo são, de fato, casos particulares da generalização de Polya, pois se tratavam de figuras semelhantes.

## **6 A generalização de Pappus**

### **6.1 Um pouco sobre Pappus**

Pappus de Alexandria (c. 290 – 350) foi um dos últimos grandes matemáticos gregos da antiguidade. Apesar de pouco se saber sobre a sua vida, sabe-se que ele foi um importante pesquisador e autor de muitos textos sobre cientistas da antiga civilização grega. Pappus raramente alegou possuir ideias originais, mas tinha o olho voltado para obras de seus predecessores. Uma das suas mais famosas obras, “*Synagoge*” (340 d. C.), ou “*Coleção Matemática*” é uma composição de oito livros, onde são encontrados relatos e novas provas e temas suplementares para várias proposições de Arquimedes, Euclides, Apolônio e Ptolomeu. Muitos de seus estudos foram o ponto de partida para a invenção da Geometria Analítica por Descartes (1596 – 1650), 13 séculos depois. Curiosamente, foi Pappus que formulou a conjectura de que o formato em hexágono dos favos de mel é o que permite armazenar a maior quantidade de mel com o menor gasto de cera. Também ficaram famosos os seus estudos sobre centros de gravidade de sólidos e superfícies de revolução, e sobre seções cônicas.

### **6.2 A generalização de Pappus e o Teorema de Pitágoras**

O resultado a seguir, foi proposto e provado por Pappus e pode ser considerado uma *generalização* do Teorema de Pitágoras, uma vez que o *Teorema de Pitágoras é obtido como um caso particular dele*. Surpreendentemente, tal resultado não exige que o triângulo, sobre cujos lados, constroem-se as figuras (paralelogramos), seja retângulo.

**Proposição 7** (Pappus): Seja  $ABC$  um triângulo (não necessariamente retângulo) e sobre dois de seus lados construímos dois paralelogramos quaisquer,  $ABDE$  e  $ACFG$ , como na Figura 44. Então é possível construir sobre o outro lado desse triângulo, um terceiro paralelogramo,  $BCHI$ , cuja área seja igual à soma das áreas dos outros dois já construídos.

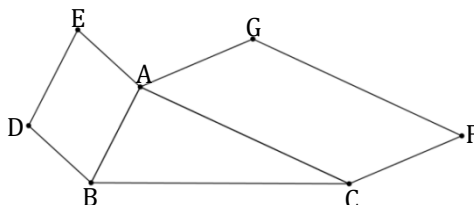


Figura 44 – Paralelogramos sobre os catetos do triângulo retângulo.

**Demonstração:**

Inicialmente, vamos proceder à construção do terceiro paralelogramo, seguindo o raciocínio de Pappus, e depois, provar que a relação entre as áreas é satisfeita.

1º) Construção: Sejam  $M$  a intersecção entre as retas suportes do lado  $DE$  e  $FG$  e  $N$  a intersecção da reta  $\overleftrightarrow{MA}$  com o lado  $BC$ , vide figura auxiliar abaixo. Sobre  $\overleftrightarrow{MA}$ , consideremos o ponto  $P$ , tal que  $\overline{MA} = \overline{NP}$ . Sejam  $\ell$  a reta passando por  $P$  e paralela a  $BC$ , e  $r$  e  $s$ , respectivamente, as retas passando por  $B$  e  $C$  paralelas à reta  $\overleftrightarrow{MA}$ . Sejam  $I$  e  $H$ , respectivamente, a intersecção da reta  $\ell$  com as retas  $r$  e  $s$ . O quadrilátero  $BCHI$  é o paralelogramo, construído por Pappus, e satisfaz a relação proposta.

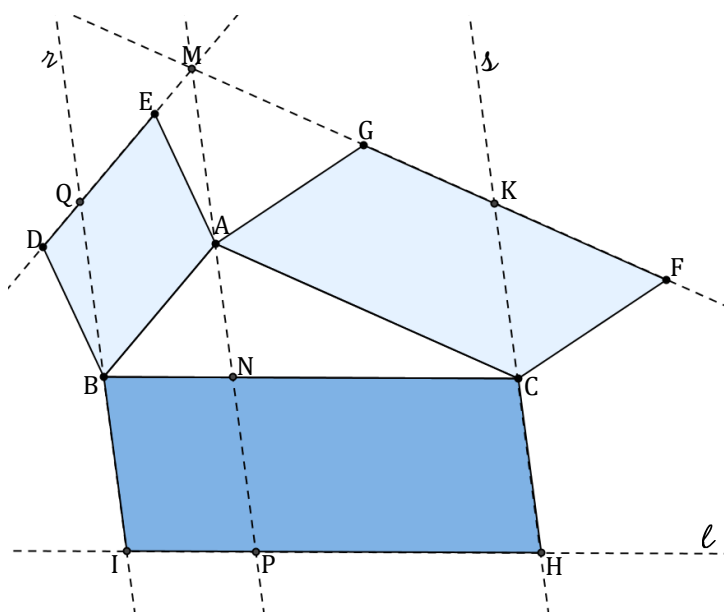


Figura 45 – Construção de Pappus.



2º) Mostremos que a área do paralelogramo BCHI é igual à soma das áreas dos paralelogramos ABDE e ACFG.

Sejam Q o ponto de intersecção entre a reta  $\mathcal{L}$  e DE e K o ponto de intersecção da reta  $\mathcal{L}$  com FG.

Observe que o paralelogramo BNPI tem a mesma área que o paralelogramo ABQM (Figura 45), pois tem a mesma base ( $\overline{AM} = \overline{NP}$ , por construção) e tem a mesma altura, pois estão situados entre duas retas paralelas. Os triângulos BDQ e AEM são congruentes, então  $\mathcal{A}_{(ABDE)} = \mathcal{A}_{(ABQM)}$ , pois  $\mathcal{A}_{(ABDE)} = \mathcal{A}_{(BDQ)} + \mathcal{A}_{(ABQE)}$  e  $\mathcal{A}_{(ABQM)} = \mathcal{A}_{(AEM)} + \mathcal{A}_{(ABQE)}$ . Logo,  $\mathcal{A}_{(ABDE)} = \mathcal{A}_{(ABQM)} = \mathcal{A}_{(BNPI)}$ .

De modo análogo, mostramos que  $\mathcal{A}_{(ACFG)} = \mathcal{A}_{(CNPH)}$ .

Desta forma,  $\mathcal{A}_{(ABDE)} + \mathcal{A}_{(ACFG)} = \mathcal{A}_{(BNPI)} + \mathcal{A}_{(CNPH)} = \mathcal{A}_{(BCHI)}$ .

Assim mostramos que o paralelogramo BCHI, construído sobre BC, é realmente o paralelogramo que satisfaz a generalização de Pappus.

■

**Corolário** (Teorema de Pitágoras): Se na Proposição 7 o triângulo ABC é retângulo e construímos quadrados sobre os catetos do triângulo (retângulo) então a construção de Pappus nos levará a um outro quadrado e portanto obtemos o Teorema de Pitágoras.

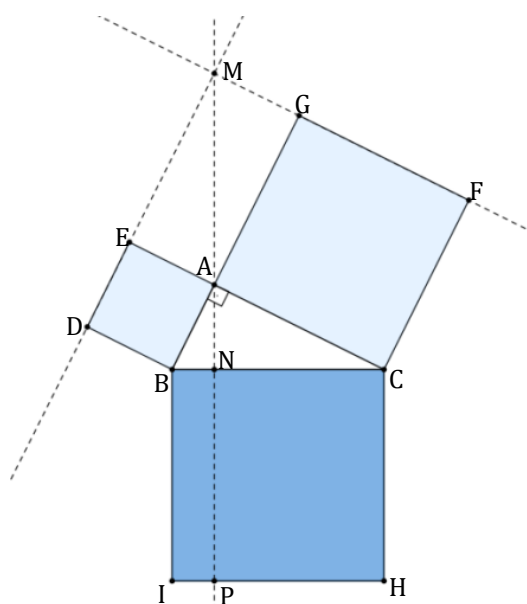


Figura 46 – Construção de Pappus - Teorema de Pitágoras.

### **Demonstração:**

Para concluir que o resultado de Pappus realmente se trata de uma extensão do Teorema de Pitágoras, devemos mostrar que BCHI é realmente um quadrado, Primeiramente, vamos mostrar que  $\overline{NP} = \overline{BC}$ .

Observe que, por construção, AEMG é um retângulo e os triângulos GAM e ABC são congruentes. Assim,  $\overline{BC} = \overline{AM}$  e como, por construção,  $\overline{NP} = \overline{AM}$ , segue que  $\overline{NP} = \overline{BC}$ .

Agora vamos mostrar que o ângulo  $\widehat{B\hat{N}P}$  é reto.

De fato, observe que os ângulos  $\widehat{B\hat{A}N}$  e  $\widehat{M\hat{A}G}$  são congruentes, pois são opostos pelo vértice e que  $\widehat{A\hat{B}N}$  é congruente a  $\widehat{G\hat{M}A}$  (os triângulos ABC e GMA são congruentes). Logo,  $\widehat{A\hat{N}B}$  é congruente a  $\widehat{A\hat{G}M}$ , que por construção, é reto. Como  $\widehat{B\hat{N}P}$  e  $\widehat{A\hat{N}B}$  são suplementares, temos que  $\widehat{B\hat{N}P}$  é reto.

Por construção, BI, CH e NP são paralelos, logo podemos concluir que o paralelogramo BCHI é, na realidade, um quadrado. Portanto, aplicando aos três quadrados a relação garantida por Pappus, obtemos  $\mathcal{A}_{(ABDE)} + \mathcal{A}_{(ACFG)} = \mathcal{A}_{(BCHI)}$ .

■

### **Observações:**

- 1) Note que os paralelogramos construídos de acordo com a construção de Pappus, em geral, não são semelhantes.
- 2) Claramente poder-se-ia construir no lado BC um paralelogramo satisfazendo o padrão de área, basta considerar BC como base e altura  $h = \frac{\mathcal{A}_{(ABCD)} + \mathcal{A}_{(ACFG)}}{BC}$ . Mas vale ressaltar que na demonstração realizada por Pappus, conforme o costume da época, era comum as construções geométricas com o uso de régua e compasso.

## **7 Considerações Finais**

Tanto o Teorema de Pitágoras como suas extensões e generalizações podem ser exploradas/visualizadas utilizando o Software *GeoGebra* de Geometria Dinâmica. Em



Silva (2014) apresentamos uma experiência com alunos do Ensino Fundamental. É interessante observar que a extensão do Teorema de Pitágoras é claramente observada no Currículo do Estado de São Paulo, Caderno do Professor – Vol. 4, 8ª série/9º ano (São Paulo, 2014).

## Referências

- [1] AABOE, A. *Episódios da história da matemática*. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. SBM, 1984.
- [2] BARBOSA, R. M. *Descobrimos padrões pitagóricos*. São Paulo: Atual Editora, 1998.
- [3] EUCLIDES. *Os Elementos*. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 2009.
- [4] LOOMIS, E. S. *The pythagorean proposition, classics in mathematics education series*. National Council of Teachers of Mathematics, Inc., Washington, D.C., 1968, 310p.
- [5] LIMA, E. L. *Medida e forma em geometria: comprimento, área, volume e semelhança*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1991.
- [6] LOURENÇO, M. L.; SILVA, E. A. *Generalizações e extensões do Teorema de Pitágoras*. São José do Rio Preto: Unesp, 1992.
- [7] PEDROSO, H. A. *História da matemática*. São José do Rio Preto: Unesp, 2009.
- [8] SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. *Caderno do professor: matemática. ensino fundamental 8ª série / 9º ano, volume 2*. Secretaria da Educação; Coordenação geral, São Paulo, SEE, 2014.
- [9] SILVA, J. E. B. *Teorema de Pitágoras: algumas extensões/generalizações e atividades com o Software GeoGebra*. Dissertação ProfMat - Mestrado Profissional em Rede Nacional, São José do Rio Preto: Unesp, 2014.