Introdução à Teoria de Poincaré-Bendixson para campos de vetores planares*

Otávio Henrique Perez†
Tiago de Carvalho†

Resumo

O Teorema de Poincaré-Bendixson é um resultado muito importante no estudo de Sistemas Dinâmicos, pois ele estabelece para quais tipos de conjunto limite as trajetórias de um campo de vetores em $\mathbb{R}^2$ deve convergir. Neste trabalho vamos abordar a Função do Primeiro Retorno de Poincaré, além de discutir a estabilidade de Ciclos Limites e provar o Teorema de Poincaré-Bendixson.

Palavras Chave: Sistemas de equações diferenciais ordinárias, campos de vetores, retratos de fase, conjunto limite, Teorema de Poincaré-Bendixson.

Introdução

Muitas vezes, ao nos depararmos com uma equação diferencial, não estamos interessados em sua solução numérica e sim em descobrir o comportamento do sistema a longo prazo. Com esta finalidade, temos que investigar o conjunto limite das trajetórias quando o tempo vai para infinito. O Teorema de Poincaré-Bendixson para campos vetoriais planares aqui exposto responde esta pergunta.

1 A Teoria de Poincaré-Bendixson em $\mathbb{R}^2$

Vamos introduzir algumas definições fundamentais para o entendimento da teoria que será discutida ao longo deste trabalho. Todas elas podem ser encontradas em [1].

Definição 1.1 *Seja E um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f \in C^1(E)$. Para $x_0 \in E$, seja $\phi(t, x_0)$ a solução do PVI*

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= 0, \end{cases} \tag{1.0.1}$$

definida no intervalo maximal $I(x_0) = (\alpha, \beta)$. Nessas condições, para todo $t \in I(x_0)$, a função $\phi_t : E \to E$, definida por $\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$ é chamada de ***fluxo da equação diferencial*** *ou* ***fluxo do campo de vetores****.*

*Trabalho realizado durante estágio de iniciação científica financiado pela FAPESP (processo número 2013/09624-7)

†Emails: otavio_perez@hotmail.com e tcarvalho@fc.unesp.br

Considerando que o ponto x_0 está fixo, a função $\phi_t(x_0) : I \to E$ define a curva das soluções ou a trajetória do sistema de fluxo da equação diferencial passando pelo ponto $x_0 \in E$. A trajetória pode ser vista como a curva ao longo do movimento τ sobre o ponto x_0 no subconjunto $E \subset \mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}}$, conforme a Figura 1.

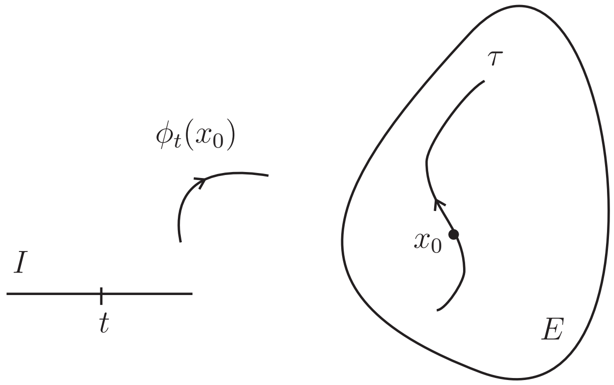

Figura 1: Trajetória

Se pensarmos no ponto x_0 variando sobre $K \subset E$, o fluxo $\phi_t : K \to E$ poderá ser visto como o movimento de todos os pontos no conjunto K, conforme a Figura 2.

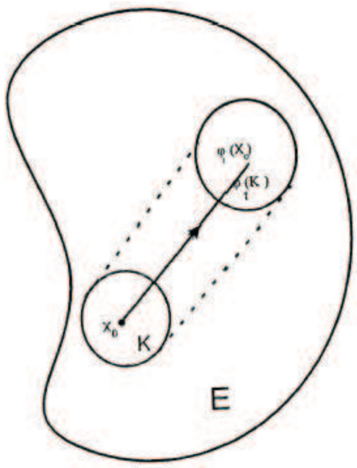

Figura 2: Movimento de todos os pontos do conjunto K

Agora, considere o sistema autônomo

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.0.2}$$

onde $f \in C^1(E)$ e $E \subset \mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}}$ é um aberto. Para $x \in E$, a função $\phi(.,x) : \mathrm{I\!R} \to \mathrm{E}$ define a **trajetória** ou **órbita** de (1.0.2) que passa pelo ponto x. Podemos pensar na trajetória $\phi(.,x)$ que passa pelo ponto $x_0 \in E$ como a curva do movimento ao longo do tempo t. Assim, temos que $\Gamma_{x_0} = \{x \in E / x = \phi(t, x_0), t \in \mathrm{I\!R}\}$ é a trajetória de (1.0.2) que passa pelo ponto x_0 em $t = 0$. Denotaremos a trajetória simplesmente por Γ, que será um subconjunto do espaço de fase $\mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}}$. Na Figura 3, as setas indicam o movimento da trajetória a medida que o tempo passa.

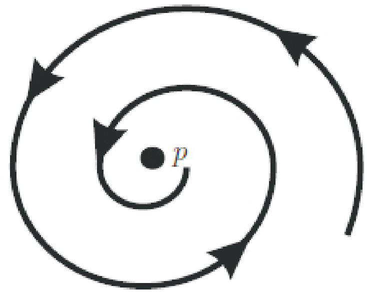

Figura 3: A trajetória Γ de (1.0.2) que tende ao ω-limite

Definição 1.2 *A* ***trajetória positiva*** *de (1.0.2) que passa pelo ponto* $x_0 \in E$ *é dada por* $\Gamma^+_{x_0} = \{x \in E/x = \phi(t, x_0), t \geq 0\}$*. Analogamente, a* ***trajetória negativa*** *de (1.0.2) que passa pelo ponto* $x_0 \in E$ *é dada por* $\Gamma^-_{x_0} = \{x \in E/x = \phi(t, x_0), t \leq 0\}$*.*

Note que $\Gamma_{x_0} = \Gamma^+_{x_0} \cup \Gamma^-_{x_0}$.

Definição 1.3 *Um ponto* $p \in E$ *é um* ***ponto de*** $\boldsymbol{\omega}$***-limite*** *da trajetória* $\phi(t, x)$ *do sistema (1.0.2) se existe uma sequência* $t_n \to +\infty$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \phi(t_n, x) = p.$$

Analogamente, dizemos que um ponto $q \in E$ *é um* ***ponto de*** $\boldsymbol{\alpha}$***-limite*** *da trajetória* $\phi(t, x)$ *do sistema (1.0.2) se existe uma sequência* $t_n \to -\infty$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \phi(t_n, x) = q.$$

O conjunto de todos os pontos de ω-limite da trajetória $\phi(t, x)$ do sistema (1.0.2) é chamado de **conjunto** $\boldsymbol{\omega}$**-limite de** Γ e é denotado por $\omega(\Gamma)$. Analogamente, o conjunto de todos os pontos de α-limite da trajetória $\phi(t, x)$ do sistema (1.0.2) é chamado de **conjunto** $\boldsymbol{\alpha}$**-limite de** Γ e é denotado por $\alpha(\Gamma)$. O conjunto $\alpha(\Gamma) \cup \omega(\Gamma)$ é chamado de **conjunto limite de** Γ.

A seguir, vamos enunciar o Teorema do Fluxo Tubular, cuja demonstração está em [2]. A partir deste teorema, podemos perceber que a trajetória de pontos não singulares de um campo qualquer pode ser vista "simplificadamente"como as trajetórias de um campo constante, como mostra a Figura 4.

Teorema 1.1 ***(Teorema do Fluxo Tubular)****: Seja* p *um ponto não singular do campo* $X : \Delta \to \mathbb{R}^n$ *de classe* C^r *e* $f : A \to \Sigma$ *uma seção transversal local de* X *de classe* C^r *onde* $f(0) = p$*. Existe uma vizinhança* V *de* p *em* Δ *e um difeomorfismo* $h : V \to (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ *de classe* C^r *onde* $\varepsilon > 0$ *e* B *é uma bola aberta do* $\mathbb{R}^{n-1}$ *de centro na origem* $f^{-1}(p) = 0$ *tal que*

1. $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$,
2. h *é uma* C^r*-conjugação entre* $X|Y$ *e co campo constante* $Y : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \to \mathbb{R}^n$, $Y = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$.

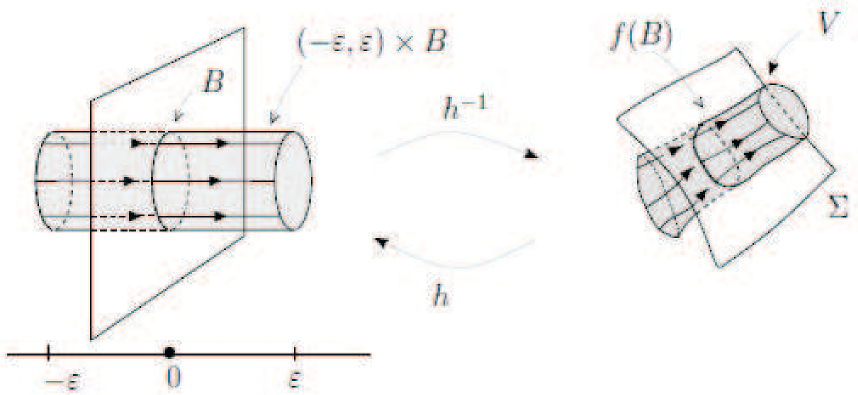

Figura 4: O Teorema do Fluxo Tubular

1.1 A Função de Poincaré

A **Função de Poincaré** ou **Função do Primeiro Retorno** é um resultado essencial no estudo de bifurcações e estabilidade de órbitas periódicas, cuja definição também pode ser encontrada tanto em [1] quanto em [2]. Seja Γ uma órbita períodica do sistema

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.1.1}$$

que passa por x_0 e Σ é o hiperplano perpendicular a Γ em x_0. Para todo ponto $x \in \Sigma$ suficientemente próximo de x_0, a solução $\phi_t(x)$ de (1.1.1) que passa por x em t_0 interceptará Σ em um ponto $P(x)$ próximo de x_0 pata $t \neq 0$. Chamamos a função $x \mapsto P(x)$ de **Função do Primeiro Retorno de Poincaré**. Note que Σ é a seção transversal de Γ em x_0, isto é, Σ é uma superfície suave passando por $x_0 \in \Gamma$ e que não é tangente a Γ em x_0, conforme mostra a Figura 5.

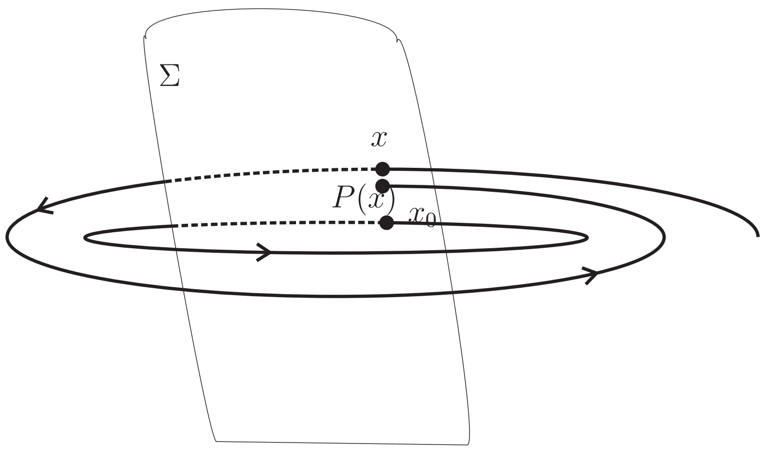

Figura 5: Função do Primeiro Retorno de Poincaré

A seguir veremos um resultado importante para provarmos a existência e a unicidade da Função de Poincaré $P(x)$ e de sua derivada $P'(x)$.

Teorema 1.2 ***(Teorema da Função Implícita)*** *Seja $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ um aberto e $f \in C^1(E)$. Suponhamos que $(a,b) \in E$ é tal que $f(a,b) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) \neq 0$. Então, existe uma vizinhança $N_\delta(b)$ ($b \in \mathbb{R}^m$) e uma única função $g \in C^1(N_\delta(b))$ tal que*

$g(b) = a$ e $f(g(y), y) = 0$, *para todo* $y \in N_\delta(b)$. *Ou seja, a função g é definida implicitamente pela função f.*

Teorema 1.3 *Seja* $E \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto e* $f \in C^1(E)$. *Suponhamos que* $\phi_t(x_0)$ *é uma solução periódica de (1.1.1) de período T e que o ciclo* $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n / \mathrm{x} = \phi(\mathrm{t}, \mathrm{x}_0), 0 \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{T}\}$ *está contido em E. Seja* Σ *um hiperplano ortogonal à* Γ *em* x_0, *ou seja,*

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n / (\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) \cdot \mathrm{f}(\mathrm{x}_0) = 0\}.$$

Existe $\delta > 0$ *e uma única função* $\tau(x) \in C^1(E)$ *para* $x \in N_\delta(x_0)$ *tal que* $\tau(x_0) = T$ *e* $\phi(\tau(x), x) \in \Sigma$, *para todo* $x \in N_\delta(x_0)$.

Demonstração: Seja $x_0 \in \Gamma \cap \Sigma$. Definimos a função

$$F(t, x) = [\phi(t, x) - x_0] \cdot f(x_0).$$

Como $\phi \in C^1(\mathbb{R} \times \mathrm{E})$, temos que $F \in C^1(\mathbb{R} \times \mathrm{E})$. Além disso, como ϕ é periódica de período T, segue que $F(T, x_0) = [\phi(T, x_0) - x_0] \cdot f(x_0) = (x_0 - x_0) \cdot f(x_0)$. Dessa forma, obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial t}(T, x_0) = \frac{\partial \phi(T, x_0)}{\partial t} \cdot f(x_0) = f(x_0) \cdot f(x_0) = |f(x_0)|^2 \neq 0,$$

pois x_0 não é ponto de equilíbrio do sistema (1.1.1).

Segue do Teorema da Função Implícita que existe $\delta > 0$ e uma única função $\tau(x) \in C^1(N_\delta(x_0))$ tal que $\tau(x_0) = T$ e $F(\tau(x), x) = 0$, para todo $x \in N_\delta(x_0)$. Consequentemente, $\phi(\tau(x), x) \in \Sigma$, para todo $x \in N_\delta(x_0)$. $\square$

Definição 1.4 *Sejam* Γ, Σ, δ *e* $\tau(x)$ *definidos como no teorema acima. Para* $x \in N_\delta(x_0) \cap \Sigma$, *a função* $P(x) = \phi(\tau(x), x)$ *é chamada de* ***Função de Poincaré*** *em* x_0.

Note que recorre do Teorema anterior que $P \in C^1(N_\delta(x_0) \cap \Sigma)$.

Exemplo 1.1 *Vamos analisar o seguinte sistema proposto em [1]:*

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

Fazendo a mudança para coordenadas polares ($x = r\cos\theta$ *e* $y = r\mathrm{sen}\,\theta$*) e derivando o sistema em relação à r, obtemos*

$$\begin{cases} \dot{r}\cos\theta &= -r\mathrm{sen}\,\theta + r\cos\theta(1 - r^2) \\ \dot{r}\mathrm{sen}\,\theta &= r\cos\theta + r\mathrm{sen}\,\theta(1 - r^2). \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por $\cos\theta$ *e a segunda por* $\mathrm{sen}\,\theta$ *e em seguida somando ambas, obtemos* $\dot{r} = r(1 - r^2)$. *Se derivarmos o sistema em relação à* θ, *teremos* $\dot{\theta} = 1$ *e, portanto,*

$$\begin{cases} \dot{r} &= r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} &= 1. \end{cases}$$

Note que

- *Para* $r = 1$, *temos* $\dot{r} = 0$ *e, portanto, o fluxo não repele e nem atrai.*
- *Para* $r > 1$, *temos* $\dot{r} < 0$ *e, portanto, o fluxo é um foco atrator com raio decrescente.*

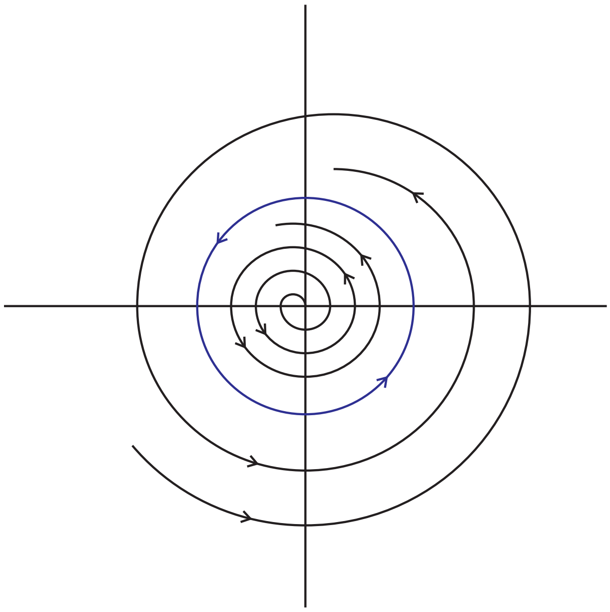

Figura 6: Retrato de Fase

- *Para $r < 1$, temos $\dot{r} > 0$ e, portanto, o fluxo é um foco repulsor com raio crescente.*
- *A origem é um ponto de equilíbrio do sistema e o fluxo é anti-horário.*

A trajetória que passa pelo ponto $(\cos\theta_0, \operatorname{sen}\theta_0)$ em $t = 0$ no círculo unitário é dada por $x(t) = (cos(t+\theta_0), \operatorname{sen}(t+\theta_0))$. Veja a Figura 6

A Função de Poincaré deste exemplo pode ser obtida encontrando as soluções do sistema que foi reescrito com coordenadas polares, ou seja, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \dot{r} &= r(1-r^2) \\ \dot{\theta} &= 1, \end{cases}$$

com $r(0) = r_0$ e $\theta(0) = \theta_0$.

Usando o método das equações diferenciais separáveis e aplicando a condição inicial, obtemos as seguintes soluções:

$$r(t, r_0) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1\right)e^{-2t}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\theta(t, \theta_0) = t + \theta_0,$$

Se Σ é o raio que forma um ângulo θ_0 com o eixo x, segue que Σ é perpendicular a Γ, onde Γ é a trajetória que passa por $(r_1, \theta_0) \in \Sigma \cap \Gamma$ em $t = 0$. Note que $T = 2\pi$.

A Função de Poincaré para este exemplo é dada por

$$\phi(\tau(x), x) = \phi(T, x) = P(r_0) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1\right)e^{-4\pi}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

e

$$P'(r_0) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1\right)e^{-4\pi}\right]^{-\frac{3}{2}} e^{-4\pi} r_0^{-3}.$$

Como $P'(1) = e^{-4\pi} < 1$, temos que este ciclo limite é atrator, conforme a Figura 7.

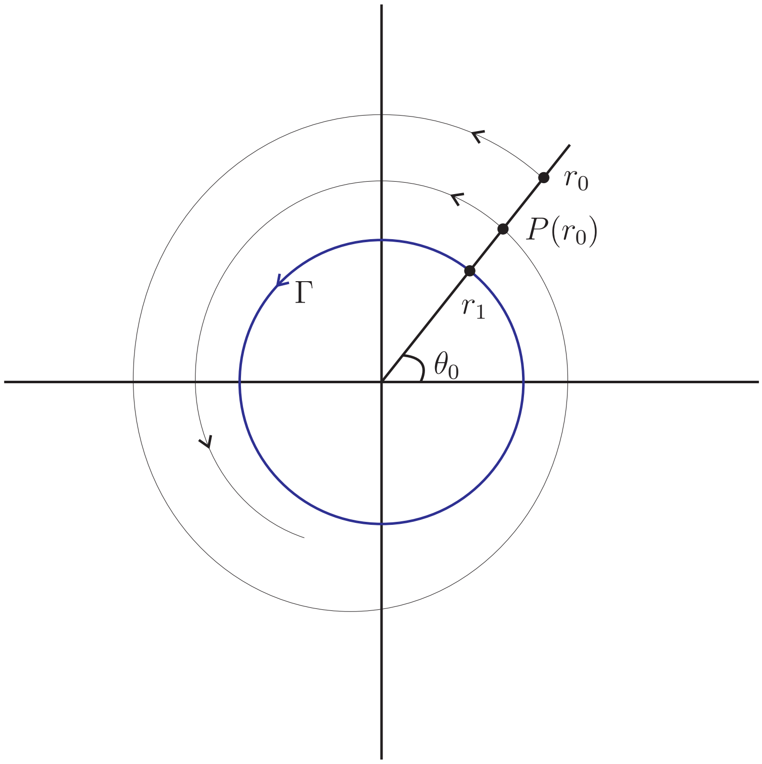

Figura 7: Função de Poincaré

Teorema 1.4 (Teorema do Valor Médio de Lagrange) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é derivável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

Definição 1.5 *Uma* ***Curva de Jordan*** *é uma curva fechada e simples que separa o plano em duas regiões (uma limitada e outra ilimitada), sendo o traço da curva a fronteira comum entre as duas regiões. Sendo Γ uma curva fechada, segue que Σ é dividido em dois segmentos abertos Σ^+ (localizado no exterior da curva) e Σ^- (localizado no interior da curva). Veja a Figura 8*

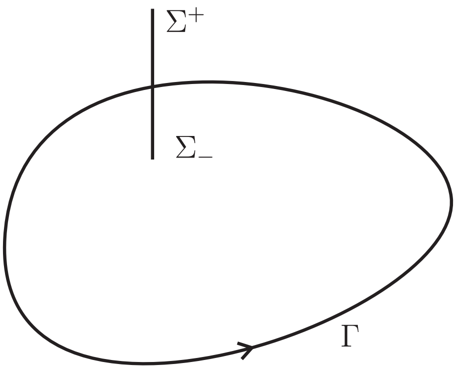

Figura 8: Curva de Jordan

Observação 1.1 *Seja s o sinal da distância ao longo de Σ ($s > 0$ para pontos em Σ^+ e $s < 0$ para pontos em Σ^-). Vamos classificar os ciclos limites a partir do sinal de $P'(0) - 1$, onde $P(x)$ é a Função de Poincaré.*

Considere a função distância dada por

$$d(s) = P(s) - s.$$

Segue que $d(0) = 0$ *e* $d'(s) = P'(s) - 1$. *Pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange, para* $|s| < \delta$ *existe* $\theta \in (0, s)$ *tal que*

$$d'(\theta) = \frac{d(s) - d(0)}{s - 0} = \frac{d(s)}{s} = \frac{P(s) - s}{s}$$

$$d(s) = d'(\theta)s.$$

Como $d'(s)$ *é contínua, temos que se* $d'(0) \neq 0$, *então* $d'(s)$ *terá o mesmo sinal de* $d'(0)$ *para* $|s|$ *suficientemente pequeno.*

Temos os seguintes casos:

- *Se* $d(s) < 0$ *para* $s > 0$, *então* $d'(0) < 0$ *e o ciclo limite é atrator.*
- *Se* $d(s) > 0$ *para* $s < 0$, *então* $d'(0) < 0$ *e o ciclo limite é atrator.*
- *Se* $d(s) > 0$ *para* $s > 0$, *então* $d'(0) > 0$ *e o ciclo limite é repulsor.*
- *Se* $d(s) < 0$ *para* $s < 0$, *então* $d'(0) > 0$ *e o ciclo limite é repulsor.*

Observe que se $d'(s) > 0$, *então* $P'(s) > 1$, *e assim,* Γ *é repulsor. Analogamente, se* $d'(s) < 0$, *então* $P'(s) < 1$, *e assim,* Γ *é atrator.*

Definição 1.6 *Uma matriz* $\phi(t)$ *de ordem* $n \times n$ *cujas colunas formam uma base do espaço de soluções do sistema* $\dot{x} = Ax$ *chama-se* ***matriz fundamental*** *de* $\dot{x} = Ax$.

Observação 1.2 *Vamos assumir que*

$$\varphi'(t) = (\det \phi(t))' = \sum_{i=1}^{n} \det(\phi_1(t), ..., \phi_i'(t), ..., \phi_n(t)).$$

Teorema 1.5 (Fórmula de Liouville) *Seja* $\phi(t)$ *a matriz cujas colunas são soluções do sistema* $\dot{x} = Ax$. *Então, para todo* $t, t_0 \in I$ *com* t_0 *fixo e* $I \cap \mathbb{R}$ *é um intervalo, vale*

$$\det \phi(t) = \det[\phi(t_0)] \int_{t_0}^{t} trA(s)ds.$$

Ideia da Demonstração: *Vamos demonstrar para* $n = 2$. *Para tal, basta provarmos que* $\varphi(t) = \det \phi(t)$ *é solução de* $\dot{x} = [trA(t)]x$. *Assim, temos*

$$\dot{x} = [trA(t)]x \Rightarrow \frac{dx}{dt} = [trA(t)]x \Rightarrow \frac{dx}{x} = [trA(t)]dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{dx}{x} = \int_{t_0}^{t} [trA(s)]ds \Rightarrow e^{\int_{t_0}^{t} trA(s)ds} = \frac{|x(t)|}{|x(t_0)|}.$$

Substituindo x *por* ϕ_t, *obtemos*

$$|\det \phi_t| = |\det \phi_{t_0}| e^{\int_{t_0}^{t} trA(s)ds}.$$

Denotando $A(t) = \begin{pmatrix} \beta_{11}(t) & \beta_{12}(t) \\ \beta_{21}(t) & \beta_{22}(t) \end{pmatrix}$ *e considerando a hipótese de que* $\dot{x} = [trA(t)]x$, *segue que* $\dot{\phi}(t) = A(t)\phi(t)$. *Assim, temos*

$$\begin{pmatrix} \phi_1'(t) \\ \phi_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11}(t) & \beta_{12}(t) \\ \beta_{21}(t) & \beta_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1'(t) \\ \phi_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11}(t)\phi_1(t) + \beta_{12}(t)\phi_2(t) \\ \beta_{21}(t)\phi_1(t) + \beta_{22}(t)\phi_2(t) \end{pmatrix}.$$

Sabemos que $\varphi'(t) = \det\big(\phi_1'(t), \phi_2(t)\big) + \det\big(\phi_1(t), \phi_2'(t)\big)$. *Substituindo os valores de* $\phi_1'(t)$ *e* $\phi_2'(t)$*, segue que*

$$\varphi'(t) = \det\big(\beta_{11}(t)\phi_1(t) + \beta_{12}(t)\phi_2(t), \phi_2(t)\big) + \det\big(\phi_1(t), \beta_{21}(t)\phi_1(t) + \beta_{22}(t)\phi_2(t)\big).$$

Resolvendo na forma matricial,

$$\varphi'(t) = \begin{vmatrix} \beta_{11}(t)\phi_1(t) + \beta_{12}(t)\phi_2(t) \\ \phi_2(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \phi_1(t) \\ \beta_{21}(t)\phi_1(t) + \beta_{22}(t)\phi_2(t) \end{vmatrix}$$

$$\varphi'(t) = \begin{vmatrix} \beta_{11}(t)\phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{12}(t)\phi_2(t) \\ \phi_2(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \phi_1(t) \\ \beta_{21}(t)\phi_1(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \phi_1(t) \\ \beta_{22}(t)\phi_2(t) \end{vmatrix}$$

$$\varphi'(t) = \begin{vmatrix} \beta_{11}(t)\phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{vmatrix} + 0 + 0 + \begin{vmatrix} \phi_1(t) \\ \beta_{22}(t)\phi_2(t) \end{vmatrix}$$

$$\varphi'(t) = \beta_{11}(t)\det\phi(t) + \beta_{22}(t)\det\phi(t) = \big(\beta_{11}(t) + \beta_{22}(t)\big)\det\phi(t) = trA(t)\det\phi(t).$$

Para mostrar o caso geral, basta utilizarmos o mesmo raciocínio. □

1.2 Ciclos Limites no Plano

A seguir, vamos introduzir algumas definições e demonstrar uma proposição, conforme [2].

Definição 1.7 *Sejam* $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ *um aberto e* $X : \Delta \to \mathbb{R}^2$ *um campo vetorial de classe* C^1*. Dizemos que uma órbita periódica* γ *de* X *é um* ***ciclo limite*** *se existir uma vizinhança* V *de* γ *tal que* γ *é um órbita fechada de* X *e intercepta* V*.*

Definição 1.8 *Sejam* $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ *um aberto,* $X : \Delta \to \mathbb{R}^2$ *um campo vetorial de classe* C^1 *e* γ *uma órbita fechada de* X*. Denotamos* $Ext\gamma$ *e* $Int\gamma$ *como, respectivamente, o* ***Exterior da Órbita*** γ *e* ***Interior da Órbita*** γ*.*

Proposição 1.1 *Seja* φ *a solução do sistema* $\dot{x} = f(x)$*. Nas condições das definições acima, existem apenas três tipos de ciclos limites:*

- **(a)** ***Atrator****, quando* $\lim\limits_{t\to\infty} d(\varphi(t,q),\gamma) = 0$*, para todo* $q \in V$
- **(b)** ***Repulsor****, quando* $\lim\limits_{t\to-\infty} d(\varphi(t,q),\gamma) = 0$*, para todo* $q \in V$
- **(c)** ***Semi-estável****, quando* $\lim\limits_{t\to\infty} d(\varphi(t,q),\gamma) = 0$*, para todo* $q \in V \cap Ext\gamma$ *e* $\lim\limits_{t\to-\infty} d(\varphi(t,q),\gamma) = 0$*, para todo* $q \in V \cap Int\gamma$*, ou o contrário.*

Demonstração: *Suponhamos que em* X *temos uma* V*-vizinhança que não contém singularidades. Seja* $p \in \gamma$*,* Σ *uma seção transversal a* γ *passando por* p *e* $\pi : \Sigma_0 \to \Sigma$ *a função de Poincaré, conforme a Figura 9.*

Vamos considerar o sentido positivo de Σ *de* $Ext\gamma$ *para* $Int\gamma$*. Dado* $q \in \Sigma \cap Ext\gamma$*, temos que* $\pi(q) > q$ *ou* $\pi(q) < q$*. Vamos o analisar o caso quando* $\pi(q) > q$*.*

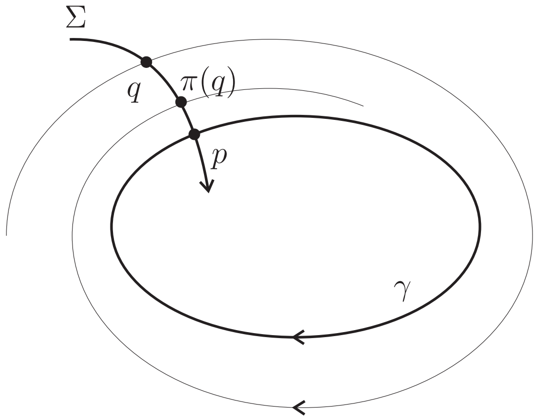

Figura 9: Seção transversal e aplicação de primeiro retorno.

Considere a região A limitada por γ, o arco da trajetória $\widehat{q\pi(q)}$ e pelo segmento $\overline{q\pi(q)} \subset \Sigma$. Dado $x \in A$, $\varphi(t,x) \in A$ para todo $t \geq 0$, isto é, a região A é o homeomorfa a uma anel e positivamente invariante devido a unicidade e a orientação das órbitas. Além disso, $\varphi(t,x)$ intercepta Σ numa sequência monótona x_n que converge para p. Logo, o ciclo limite é atrator quando $\lim_{t\to\infty} d(\varphi(t,q),\gamma) = 0$.

Se $\pi(q) < q$, basta considerar o campo $-X$ e repetir o mesmo raciocínio para concluir que um ciclo limite é repulsor quando $\lim_{t\to-\infty} d(\varphi(t,q),\gamma) = 0$.

As mesmas considerações podem ser feitas em $Int\gamma$. Combinando todas as possibilidades, provamos a proposição. $\square$

Observação 1.3 *Temos que γ é um ciclo limite se, e somente se, p é um ponto fixo isolado de π. Assim, temos*

(a) *γ é **Atrator** se, e somente se, $|\pi(x) - p| < |x - p|$, para todo $x \neq p$ próximo de p.*

(b) *γ é **Repulsor** se, e somente se, $|\pi(x) - p| > |x - p|$, para todo $x \neq p$ próximo de p.*

(c) *γ é **Semi-estável** se, e somente se, $|\pi(x)-p| < |x-p|$, para todo $x \in \Sigma\cap Ext\gamma$ próximo de p e $|\pi(x) - p| > |x - p|$, para todo $x \in \Sigma \cap Int\gamma$ próximo de p, ou o contrário.*

Veja a Figura 10

Pelo Teorema do Valor Médio, temos $\pi'(p) = \lim_{x\to p} \dfrac{|\pi(x) - \pi(p)|}{|x - p|} = \lim_{x\to p} \dfrac{|\pi(x) - p|}{|x - p|}$. Assim, se $\pi'(x) > 1$, então γ é repulsor, e se $\pi'(x) < 1$, então γ é atrator.

1.3 Derivadas da Transformação de Poincaré

O Teorema a seguir estabelece uma condição suficiente para classificar uma órbita períodica.

Teorema 1.6 *Sejam $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $X = (X_1, X_2) : \Delta \to \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1. Seja γ uma órbita periódica de X de período T e $\pi : \Sigma \to \Sigma$ a transformação de Poincaré numa seção transversal Σ a γ passando por p. Então,*

$$\pi'(p) = exp\Big[\int_0^T divX(\gamma(t))dt\Big],$$

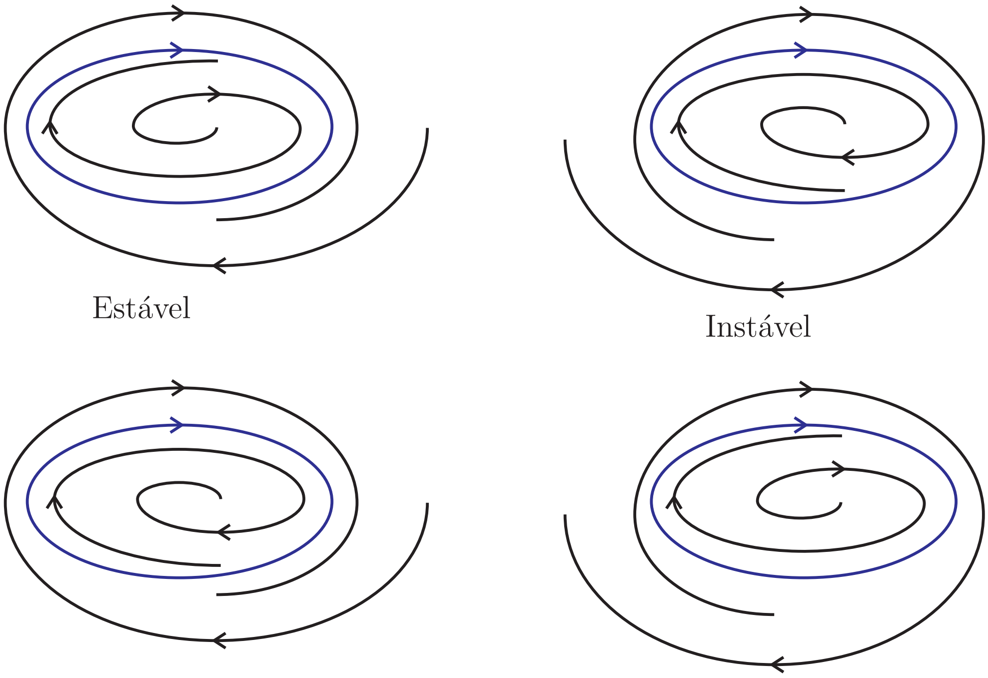

Figura 10: Ciclos limites

onde $divX(x) = D_1X_1(x) + D_2X_2(x)$. *Se* $\int_0^T divX(\gamma(t))dt < 0$, *então* γ *é atrator, e se* $\int_0^T divX(\gamma(t))dt > 0$, *então* γ *é repulsor.*

A seguir, vamos enunciar o ***Teorema de Poincaré-Bendixson*** *conforme [2] e demonstrá-lo. Ele é um resultado de importância ímpar e que serve para classificar o conjunto limite de trajetórias.*

Teorema 1.7 (O Teorema de Poincaré-Bendixson)*: Sejam* $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ *um aberto,* $X : \Delta \to \mathbb{R}^2$ *um campo vetorial de classe* C^k *com* $k \geq 1$, $\varphi(t) = \varphi(t,p)$ *uma curva integral e a semiórbita positiva* $\gamma_p^+ = \{\varphi(t,p)/t \geq 0\}$ *tal que esteja contida num compacto* $K \subset \Delta$.

Suponha que X *possua um número finito de singularidades em* $\omega(p)$. *Temos três possibilidades:*

(a) *Se* $\omega(p)$ *contém somente pontos regulares, então* $\omega(p)$ *é uma órbita periódica.*

(b) *Se* $\omega(p)$ *contém pontos regulares e singulares, então* $\omega(p)$ *é um conjunto de órbitas, cada uma das quais tende a um desses pontos singulares quando* $t \to \pm\infty$.

(c) *Se* $\omega(p)$ *não contém pontos regulares, então* $\omega(p)$ *é um ponto singular.*

Demonstração: *Antes de provar este teorema, vamos apresentar e demonstrar quatro Lemas.*

Lema 1.1 *Seja* Σ *uma seção transversal a* X *e* $\gamma = \{\varphi(t)\}$ *uma órbita de* X. *Se* $p \in \Sigma \cap \omega(\gamma)$, *então* p *pode ser expresso como limte de uma sequência de pontos* $\varphi(t_n)$ *onde* $t_n \to \infty$

Demonstração: *Por hipótese, sabemos que* $\gamma = \{\varphi(t)\} = \{\varphi(t,q)\}$ *e* $p \in \Sigma \cap \omega(\gamma)$. *Consideremos uma vizinhança* V *de* p *e a aplicação* $\tau : V \to \mathbb{R}$. *Como* $p \in \omega(\gamma)$, *existe uma sequência* $(\tilde{t}_n)$ *tal que* $(\tilde{t}_n) \to \infty$ *e* $\varphi(\tilde{t}_n) \to p$ *quando* $n \to \infty$. *Dessa forma, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\varphi(\tilde{t}_n) \in V$, *para todo* $n \geq n_0$.

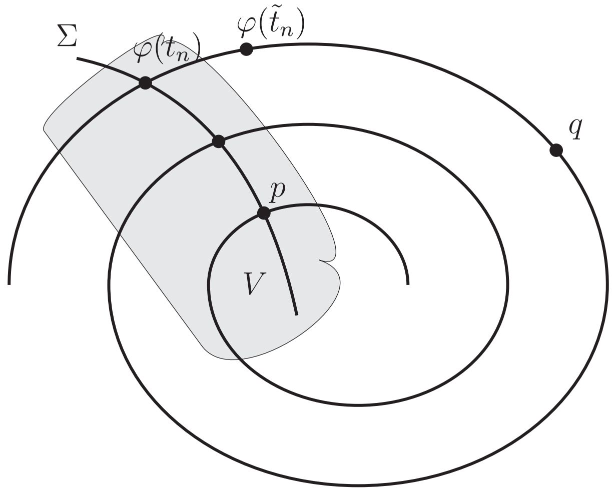

Figura 11: Ilustração do Lema (1.1)

Se $t_n = \tilde{t}_n + \tau(\varphi(\tilde{t}_n))$, *temos*

$$\varphi(t_n) = \varphi(t_n, q) = \varphi\big(\tilde{t}_n + \tau(\varphi(\tilde{t}_n)), q\big) = \varphi\big(\tau(\varphi(\tilde{t}_n)), \varphi(\tilde{t}_n)\big),$$

e, por definição de τ, *segue que* $\varphi(\tilde{t}_n) \in \Sigma$. *Como a aplicação* τ *é contínua, obtemos*

$$\lim \varphi(t_n) = \lim \varphi\big(\tau(\varphi(\tilde{t}_n)), \varphi(\tilde{t}_n)\big) = \varphi\big(\tau(\lim \varphi(\tilde{t}_n)), \lim \varphi(\tilde{t}_n)\big) = \varphi(\tau(p), p) = \varphi(0, p) = p.$$

$\square$

Observação 1.4 *Note que a seção transversal* Σ *possui dimensão* $k = 1$, *pois estamos considerando um campo vetorial* $X \subset \mathbb{R}^2$. *Dessa forma, localmente* Σ *é a imagem difeomorfa de um intervalo de* $\mathbb{R}$ *e assim,* Σ *possui uma ordenação total induzida pela ordenação total do intervalo. Por isso podemos falar em sequências monótonas em* Σ.

Lema 1.2 *Seja* Σ *uma seção transversal a* $X \subset \Delta$. *Se* γ *é uma órbita de* X *e* $p \in \Sigma \cap \gamma$, *então* $\gamma_p^+ = \{\varphi(t,p)/t > 0\}$ *intercepta* Σ *em uma sequência monótona* p_1, p_2, ..., p_n, ...

Demonstração: *Seja* $D = \{t \in \mathbb{R}^+/\varphi(\mathrm{t}, \mathrm{p}) \in \Sigma\}$. *Decorre do Teorema do Fluxo Tubular que* D *é discreto. Portanto, podemos ordenar o conjunto*

$$D = \{0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < ...\}.$$

Seja $p_1 = p$ *e definimos* $p_n = \varphi(t_{n-1}, p)$. *Se* $p_1 = p_2$, *então* γ *é uma trajetória fechada de período* $\tau = t_1$ *e* $p_n = p$ *para todo* n. *Se* $p_1 \neq p_2$, *vamos tomar* $p_1 < p_2$ *e, caso exista* p_3, *vamos mostrar que* $p_3 > p_2$.

Orientamos a seção transversal Σ *conforme a Figura 12* ***(a)***. *Observe que, como* Σ *é conexo e o campo* X *é contínuo, as órbitas de* X *cruzam* Σ *sempre no mesmo sentido, como mostra a Figura 12* ***(b)***.

Consideremos agora a Curva de Jordan formada pela união do seguimento $\overline{p_1p_2} \subset \Sigma$ *com o arco* $\widehat{p_1p_2}$, *como na Figura 13.*

A partir de p_2, *a órbita* γ *fica contida na região* S *limitada pela curva (isto é, para valores de de* $t > t_1$). *De fato, ela não pode interceptar o arco* $\widehat{p_1p_2}$ *devido à unicidade das órbitas e não pode interceptar o segmento* $\overline{p_1p_2}$ *porque iria contrariar o sentido do fluxo, como mostra a Figura 14.*

Assim, caso exista p_3, *teremos* $p_1 < p_2 < p_3$. *Analogamente, obteremos* $p_1 < p_2 < ... < p_n <$ ... *e, portanto,* $\{p_n\}$ *é uma sequência monótona. O raciocínio é análogo para* $p_1 > p_2$. $\square$

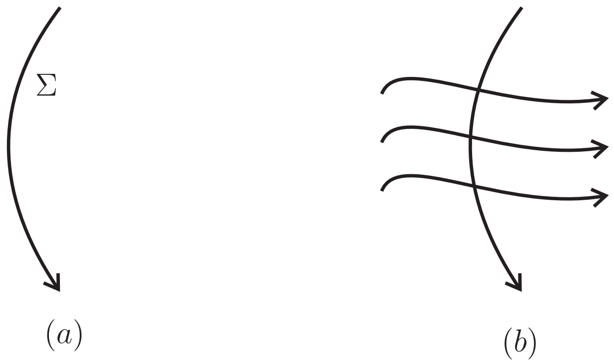

Figura 12: Seção transversal.

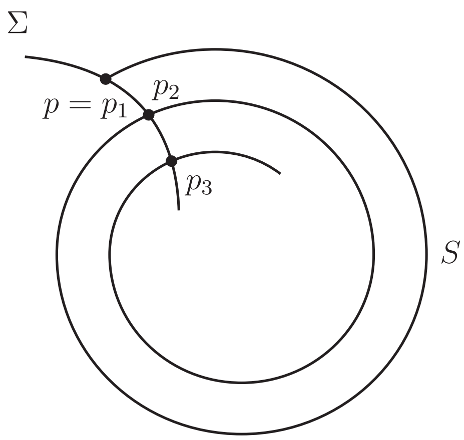

Figura 13: Curva de Jordan.

Lema 1.3 *Se Σ é uma seção transversal ao campo X e $p \in \Delta$, então Σ intercepta $\omega(p)$ no máximo em um único ponto.*

Demonstração: *O conjunto de pontos γ_p^+ em Σ tem no máximo um ponto limite, pois pelo Lema (1.2) o mesmo forma uma sequência monótona. Daí, $\lim\limits_{t_n \to \infty} \varphi(t_n) = p$.* $\square$

Lema 1.4 *Sejam $p \in \Delta$ com γ_p^+ contida num compacto e γ uma órbita de X com $\gamma \subset \omega(p)$. Se $\omega(\gamma)$ contém pontos regulares, então γ é uma órbita fechada e $\omega(p) = \gamma$.*

Demonstração: *Sejam $q \in \omega(\gamma)$ um ponto regular, V uma vizinhança de q e Σ_q a seção transversal correspondente. Pelo Lema (1.1), existe uma sequência $t_n \to \infty$ tal que $\gamma(t_n) \in \Sigma_q$ e $\gamma(t_n) \to q \in \omega(\gamma)$. Pelo Lema (1.3), a sequência $\{\gamma(t_n)\}$ reduz-se a um ponto e isso prova que γ é periódica.*

Provemos agora que $\gamma = \omega(p)$. Como $\gamma(p)$ é conexo e γ é um conjunto fechado e não vazio, basta mostrar, por absurdo, que γ é aberto em $\omega(p)$.

Sejam $\bar{p} \in \gamma$, $V_{\bar{p}}$ uma vizinhança de $\bar{p}$ em γ e $\Sigma_{\bar{p}}$ a seção transversal correspondente. Vamos mostrar que $V_{\bar{p}} \cap \gamma = V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$. Obviamente, $V_{\bar{p}} \cap \gamma \subset V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$. Por contradição, suponhamos que exista $\bar{q} \in V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$ tal que $\bar{q}$ não pertence à γ. Pelo ***Teorema do Fluxo Tubular*** *e pela Invariância de $\omega(p)$, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t, \bar{q}) \in \omega(p) \cap \Sigma_{\bar{p}}$ e $\varphi(t, \bar{q}) \neq \bar{p}$. Daí, existem dois pontos distintos de $\omega(p)$ em $\Sigma_{\bar{p}}$, o que é impossível pelo Lema (1.3), logo $V_{\bar{p}} \cap \gamma = V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$.*

Sendo $U = \bigcup\limits_{\bar{p} \in \gamma} V_{\bar{p}}$ é aberto em $\omega(p)$, então $\gamma \subset \omega(p)$ e $U \cap \omega(p) = U \cap \gamma = \gamma$. Dessa forma, γ é aberto em $\omega(p)$. $\square$

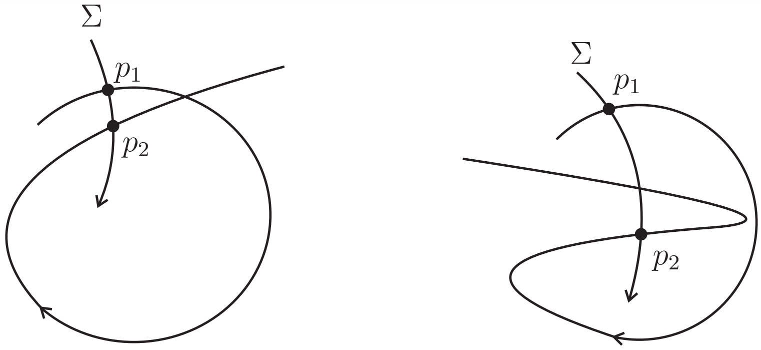

Figura 14: Impossibilidades

Agora, podemas continuar com demonstração do Teorema.

1. *Se ocorre a hipótese* ***(a)*** *e* $q \in \omega(p)$*, então a órbita* $\gamma_q \subset \omega(p)$*. Sendo* $\omega(p)$ *compacto resulta que* $\omega(\gamma_q) \neq \emptyset$*. Segue do Lema* (1.4) *que* $\omega(p) = \gamma_q$*, que é uma órbita periódica. Veja a Figura 15.*

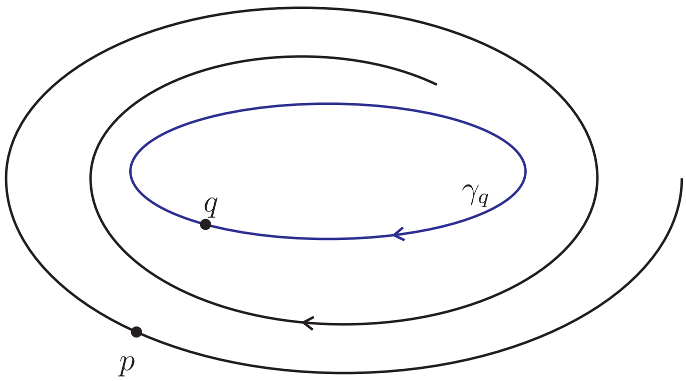

Figura 15: Órbita Periódica.

2. *Se ocorre a hipótese* ***(b)****, temos que se* γ *for reduzido a um único ponto singular, então* $\omega(\gamma)$ *é um ponto singular. Caso* γ *não for reduzido a pontos singulares (ou seja,* $\omega(p)$ *contém pontos regulares), então* $\omega(\gamma)$ *contém apenas pontos singulares, pois se tiver apenas pontos regulares, pelo Lema* (1.4) *seria uma órbita fechada, o que é um absurdo. Mais ainda, reduz-se a um único ponto singular, pois é conexo. Veja a Figura 16.*

3. *Se ocorre a hipótese* ***(c)****, temos que a órbita irá convergir em um compacto, pois toda trajetória contida em um compacto possui uma subsequência que converge. Como* $\omega(p)$ *é conexo, a trajetória converge para um único ponto singular. Veja a Figura 17.*

□

Vamos usar o Teorema acima para analisar o exemplo proposto por [2].

Exemplo 1.2 *Seja* X *um campo vetorial de classe* C^1 *em* $\mathbb{R}^2$ *que não possui pontos singulares em* $B_{r,R} = \{(x, y)/r^2 < x^2 + y^2 < R^2\}$*, com* $0 < r < R$*. Se* X *aponta para o interior de* $B_{r,R}$ *em todo ponto de sua fronteira, então* X *tem uma órbita periódica em* $B_{r,R}$*, pois neste caso se a órbita não fosse periódica, ela estaria limitada em um compacto* $K \subset B_{r,R}$ *que contém um ponto singular, o que é um absurdo. O retrato de fase deste exemplo está na Figura 18.*

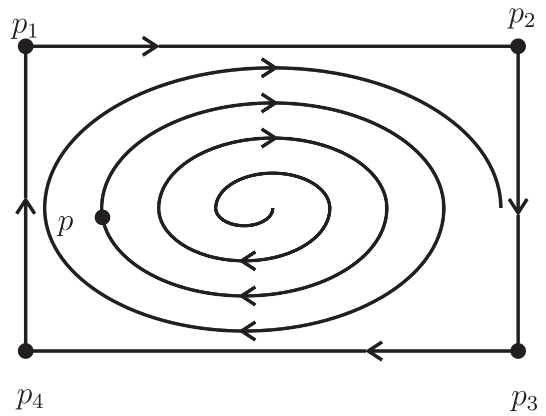

Figura 16: $\omega(p)$ é um conjunto de órbitas que tendem aos pontos singulares quando $t \to \pm\infty$

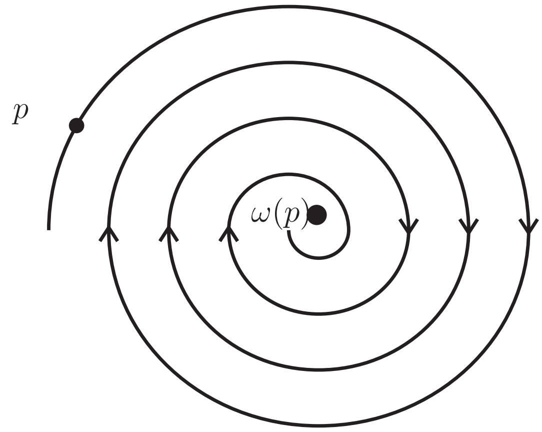

Figura 17: Convergência.

1.4 Pontos Singulares no Interior de Uma Órbita Periódica

O Teorema a seguir é uma aplicação do Teorema de Poincaré-Bendixson, como pode ser visto em [2].

Teorema 1.8 *Seja X um campo vetorial de classe C^1 num conjunto aberto $\Delta \subset \mathbb{R}^2$. Se γ é uma órbita fechada de X tal que $Int\gamma \subset \Delta$, então existe um ponto singular de X contido em $Int\gamma$.*

Demonstração: *Suponhamos, por absurdo, que não existem pontos singulares em $Int\gamma$. Considerando o conjunto Γ de órbitas fechadas de X contidas em $\overline{Int\gamma}$, ordenadas segundo a seguinte ordem*

$$\gamma_1 \leq \gamma_2 \to \overline{Int\gamma_1} \supseteq \overline{Int\gamma_2},$$

mostraremos que todo subconjunto S totalmente ordenado de Γ admite uma cota superior, isto é, um elemento maior ou igual que qualquer elemento de S. Um conjunto nessas condições chama-se indutivo.

De fato, seja $\sigma = \{\cap In\bar{t}\gamma_i / \gamma_i \in S\}$. Note que $\sigma \neq \emptyset$, pois cada $In\bar{t}\gamma_i$ é compacto e a família $\{\cap In\bar{t}\gamma_i / \gamma_i \in S\}$ tem a propriedade da Intersecção Finita (qualquer intersecção finita de elemento da família é não vazia).

Seja $q \in \sigma$. Pelo Teorema (1.7), $\omega(q)$ é uma órbita periódica contida em σ, pois este conjunto é invariante por X e não contém pontos singulares. Esta órbita é uma cota superior de S

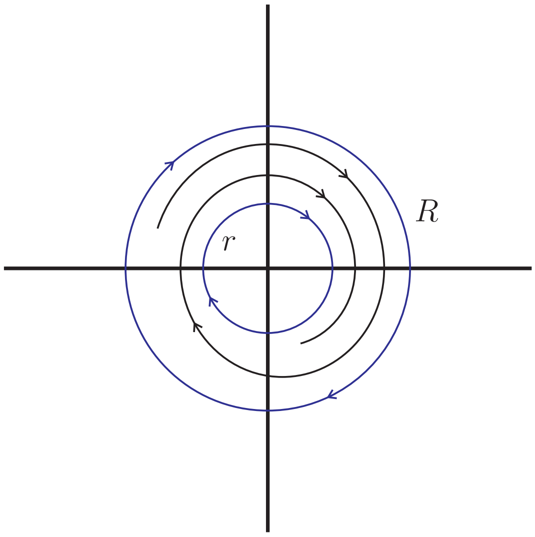

Figura 18: Figura Exemplo 1.2.

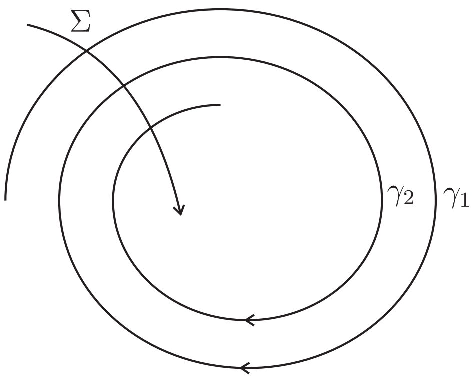

Figura 19: O conjunto Γ de órbitas fechadas de X

O Lema de Zorn nos diz que se em um conjunto não vazio e parcialmente ordenado e todo subconjunto totalmente ordenado tem uma cota superior, então o conjunto tem um elemento maximal. Seja μ o elemento maximal. Isto quer dizer que não existe nenhuma órbita fechada de Γ contida em $Int\mu$. Por outro lado, $p \in Int\mu$ e $\alpha(p)$,$\omega(p)$ são órbitas fechadas pelo Teorema de Poincaré-Bendixson (pois não possuem pontos singulares). Como $\alpha(p)$ e $\omega(p)$ não podem ser iguais a μ, um deles estará contido em $Int\mu$, o que é um absurdo, pois μ é elemento maximal.

Esta contradição prova que devem existir pontos singulares em $Int\gamma$. $\square$

Referências

[1] Perko, L., *Differential equations and dynamical systems, Texts in Applied Mathematics, 7, Springer-Verlag, New York, 1991.*

[2] Sotomayor, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.*