Como calcular a área e o perímetro de uma elipse?

Josiel Pereira da Silva *

Resumo

Muitos professores de Matemática relatam que a maioria dos livros didáticos de Matemática utilizados no Ensino Médio não abordam o conceito de área e perímetro da elipse. Neste trabalho, abordaremos esse tema, que tem como objetivos deduzir, as fórmulas que permitem calcular a área e o perímetro de uma elipse, utilizando uma linguagem simples e de fácil compreensão, mas sem perder o rigor matemático. Para isso, utilizamos as noções de derivada e integral, tópicos que geralmente são abordados em um primeiro curso de Cálculo e que podem ser encontrados em [1] e [3]. Utilizando as noções de derivada e integral, concluímos que a área e o perímetro, que denotaremos por S e C, respectivamente, de uma *elipse* de focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, centro $O(0,0)$ e vértices $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$ e $B_2(0,b)$, onde A_1A_2 é o eixo maior de comprimento $2a$ e B_1B_2 é o eixo menor de comprimento $2b$, podem ser obtidos através das fórmulas $S = \pi \cdot ab$ e $C \approx \pi a\left(2 - \frac{e^2}{2} + \frac{3e^4}{16}\right)$.

Palavras Chave: Elipse, Área, Perímetro.

1 Introdução

O cálculo de área e perímetro são atividades indispensáveis para o ser humano. Desde a antiguidade, o homem sempre foi desafiado em diversas situações a calcular áreas e perímetros de figuras planas. Hoje não é diferente, diariamente resolvemos problemas que geralmente utilizamos Matemática na sua resolução.

Foi devido a esse pensamento e alguns anos lecionando Matemática em turmas do Ensino Médio, que surgiu a ideia de produzir esse artigo. Percebemos que não é dada a importância merecida em sala de aula ao estudo das cônicas. Isso ficou evidente após analisar o material didático e livros utilizados atualmente, nos quais o cálculo da área e do perímetro das cônicas são geralmente omitidos nos textos de Geometria Analítica para o Ensino Médio. Diante desse cenário, o objetivo deste trabalho é deduzir tais fómulas que permitem calcular a área e o perímetro da elipse.

2 A elipse nos livros didáticos

É comum, em livros de Matemática, encontrarmos fórmulas que podem ser usadas para calcular área e perímetro de figuras planas, por exemplo, quadrado, retângulo, círculo, etc. Porém, quando estudamos a elipse no Ensino Médio, dificilmente é apresentado nos livros didáticos, as fórmulas que fornecem a área e o perímetro de uma elipse.

*Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

3 A área de uma elipse

Chama-se *elipse*, o conjunto de pontos de um plano cuja somas das distâncias a dois pontos fixos desse plano é uma constante.

Considere uma *elipse* de focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, centro $O(0,0)$ e vértices $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$ e $B_2(0,b)$, onde A_1A_2 é o eixo maior de comprimento $2a$ e B_1B_2 é o eixo menor de comprimento $2b$, como ilustra a figura a seguir.

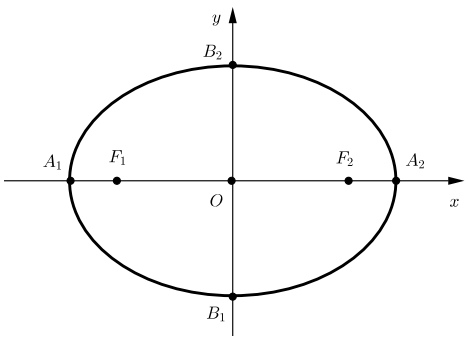

Figura 1: Elipse centrada na origem.

A equação reduzida dessa elipse é dada por

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ onde } a^2=b^2+c^2. \tag{3.1}$$

Isolando a variável y na equação (3.1) obtemos,

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \text{ ou } y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

A área da semi-elipse, que denotaremos por S_1, correspondente a região delimitada pelo eixo Ox e pela função $f_1:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $f_1(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ é dada pela integral

$$S_1=\int_{-a}^{a} f_1(x)\,dx \tag{3.2}$$

Assim,

$$S_1=\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Consultando [1] encontramos, de forma bem detalhada, o cálculo da integral trigonométrica indefinida

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx,$$

que tem como resultado

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C,$$

onde segue

$$S_1 = \frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{ab}{2}\left[\text{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\right]_{-a}^{a} = \frac{ab}{2}\cdot\pi = \frac{\pi ab}{2}.$$

Denotando por S_2 a área da semi-elipse correspondente a região delimitada pelo eixo Ox e pela função $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_2(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, S_2 é dada pela integral

$$S_2 = -\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx,$$

que calculando de modo análogo ao caso anterior, encontramos

$$S_2 = \frac{\pi ab}{2}.$$

A área total, que denotaremos por S é dada por

$$S = S_1 + S_2.$$

Assim,

$$S = \pi\cdot ab.$$

Observe que se $a = b$, a elipse se torna um círculo cujo raio é $r = a$ e a área da elipse é dada por

$$S = \pi\cdot a\cdot a = \pi\cdot a^2.$$

4 O perímetro de uma elipse

A equação reduzida da elipse como vimos anteriormente é

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ onde } a^2 = b^2+c^2.$$

Derivando implicitamente ambos os membros da igualdade

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4.1}$$

em relação a x, obtemos

$$y' = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Logo,

$$1+(y')^2 = 1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}. \tag{4.2}$$

Isolando y^2 na equação (4.1), encontramos

$$y^2 = b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right). \tag{4.3}$$

Substituindo a equação (4.3) na equação (4.2), obtemos

$$1+(y')^2 = 1+\frac{b^4x^2}{a^4b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{a^2-\frac{c^2x^2}{a^2}}{a^2-x^2}.$$

Como a excentricidade da elipse, que denotamos por e, é dada por $e = \frac{c}{a}$, temos,

$$1 + (y')^2 = \frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}. \tag{4.4}$$

O perímetro procurado, é dado pela fórmula

$$C = 4\int_0^a \sqrt{1 + (y')^2}dx,$$

que pode ser encontrada em [1].

Logo,

$$C = 4\int_0^a \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}}dx.$$

Para chegar a uma expressão mais simples devemos fazer uma substituição trigonométrica. Para isso, tome $x = a \cdot \text{sen}(\alpha)$ e terá $dx = a \cdot cos(\alpha)$. Observe que para $x = 0$, teremos $\alpha = 0$. Já para $x = a$ teremos $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Dessa forma,

$$C = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{\frac{a^2 - e^2a^2\,\text{sen}^2(\alpha)}{a^2 - a^2\,\text{sen}^2(\alpha)}}a \cdot cos(\alpha)\right] d(\alpha) = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2\,\text{sen}^2(\alpha)}\, d(\alpha).$$

Portanto,

$$C = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2\,\text{sen}^2(\alpha)}\, d(\alpha). \tag{4.5}$$

Resolver a integral da igualdade (4.5) não é uma tarefa fácil. Por isso, a única alternativa é obter uma boa aproximação para a tal integral. Para isso, iremos usar a série binomial, que permite expandir potências do tipo $(1+x)^n$, para todo $x, n \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < 1$. Assim, como

$$|-e^2\,\text{sen}^2(\alpha)| = |e^2||\,\text{sen}^2(\alpha)| < 1,$$

usaremos a igualdade

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \cdots, \tag{4.6}$$

para obter tal aproximação. Fazendo $n = \frac{1}{2}$ e $x = -e^2\,\text{sen}^2(\alpha)$ na igualdade (4.6) e resolvendo a integral encontrada após as devidas substituições, teremos,

$$C \approx \pi a\left(2 - \frac{e^2}{2} + \frac{3e^4}{16}\right). \tag{4.7}$$

Quando $e = 0$, a elipse torna-se um círculo de raio $r = a = b$, cujo perímetro é $2\pi a$.

5 Conclusão

O cálculo integral é umas das partes da Matemática mais fascinante. É uma ferramenta que permite resolver problemas considerados elementares, mas que exigem do resolvedor um conhecimento matemático mais acurado. Isso se torna visível quando temos a missão de calcular a área e o perímetro de uma elipse, uma cônica bem conhecida dos amantes da Matemática.

Diferente de outras curvas, o cálculo da área de uma elipse é uma tarefa teoricamente fácil, mas, calcular o seu perímetro não é uma atividade trivial. Portanto, com um pouco de esforço poderemos exibir uma expressão que poderá ser usada para calcular a área de uma elipse qualquer. Tal fórmula é

$$S = \pi ab.$$

Já a expressão que fornece uma boa aproximação para o perímetro de uma elipse é

$$C \approx \pi a \left(2 - \frac{e^2}{2} + \frac{3e^4}{16}\right).$$

O ensino médio é uma fase da educação básica onde o aluno tem a oportunidade de não só obter o amadurecimento dos conhecimentos obtidos no ensino fundamental, como também, a adquirir o prazer e a autonomia com relação a aprendizagem Matemática. Diante disso, é importante que os professores aprensentem, de forma agradável, as cônicas, elementos da geometria muito presente no cotidiano de cada um, basta observar a bola de futebol americano, uma melancia, etc.

Esperamos que este trabalho seja o início de uma caminhada, onde temas que professores, por inúmeros motivos deixam de apresentar aos seus alunos, a exemplo das cônicas, possam ser exibidos de maneira clara, agradável e acima de tudo, objetiva.

Referências

[1] FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mírian Bus. *Cálculo A: funções, limite, derivação, integração*. São Paulo, Pearson Prentice Hall, (1997).

[2] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise*. Vol. 1. (11^a edição). Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2006.

[3] SWOKOWSKI, Earl William. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo, Makron Books, (1994).