




# ERMAC 2017

Encontro Regional de Matemática  
Aplicada e Computacional

## Caderno de trabalhos completos e resumos

De 2 a 5 de maio de 2017  
Bauru - SP





Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional

De 2 a 5 de Maio de 2017

Unesp, Faculdade de Ciências - Bauru/SP

### Comissão Organizadora

Profa. Dra. Tatiana Miguel Rodrigues de Souza (Presidente - Unesp/FC)  
Profa. Dra. Edilaine Martins Soler (Vice-presidente - Unesp/FC)  
Profa. Dra. Adriana Cristina Cherri Nicola (Unesp/FC)  
Prof. Adj. Antonio Roberto Balbo (Coordenador da Regional 10 SBMAC; Unesp/FC)  
Profa. Dra. Célia Aparecida dos Reis (Unesp/FC)  
Prof. Dr. Fernando Luiz Pio dos Santos (Unesp/IBB)  
Profa. Dra. Helenice de Oliveira Florentino Silva (Unesp/IBB)  
Prof. Dr. Luis Antonio da Silva Vasconcellos (Unesp/FC)  
Profa. Dra. Nair Cristina Margarido Brondino (Unesp/FC)  
Profa. Dra. Prescila Glauca Christianini Buzolin (Unesp/FC)

### Comissão Científica

Prof. Adj. Alexys Bruno Alfonso (Presidente - Unesp/FC)  
Profa. Dra. Emília de Mendonça Rosa Marques (Vice-presidente - Unesp/FC)  
Prof. Dr. Agnaldo José Ferrari (Unesp/FC)  
Profa. Dra. Andriana S. L. de O. Campanharo (Unesp/IBB)  
Profa. Dra. Claudia Pio Ferreira (Unesp/IBB)  
Profa. Adja. Edméa Cássia Baptista (Unesp/FC)  
Prof. Dr. Hércules de Araujo Feitosa (Unesp/FC)  
Prof. Dr. Jorge Manuel Vieira Capela (Unesp/IQ)  
Profa. Dra. Maria Ednéia Martins Salandim (UNESP/FC)  
Profa. Dra. Maristela Oliveira dos Santos (USP/ICMC)  
Prof. Adj. Rubens de Figueiredo Camargo (Unesp/FC)  
Prof. Dr. Tiago de Carvalho (Unesp/FC)

### Comissão Editorial

Prof. Dr. Luiz Henrique da Cruz Silvestrini (Presidente - Unesp/FC)  
Profa. Dra. Cristiane Alexandra Lázaro (Vice-presidente - Unesp/FC)  
Profa. Dra. Carina Alves (Unesp/IGCE)  
Profa. Dra. Daniela R. Cantane (Unesp/IBB)  
Prof. Dr. Fabiano Borges da Silva (Unesp/FC)  
Prof. Dr. Marcelo Reicher Soares (Unesp/FC)  
Profa. Dra. Marisa Veiga Capela (Unesp/IQ)  
Profa. Dra. Sidinéia Barrozo (Unesp/IQ)  
Profa. Dra. Sônia Cristina Poltroniere Silva (Unesp/FC)  
Prof. Dr. Valter Locci (Unesp/FC)

### Realização/Apoio:





## Sumário

### Trabalhos completos

A análise do plano de fase de sistemas modelados por uma equação de Duffing .....	10
Daniel Zarpelão Porcel; Célia Aparecida dos Reis; Antonio Roberto Balbo	
Abordagem heurística de melhoramento de solução do problema de fluxo de potência ótimo reativo .....	18
Daisy Paes Silva; Edilaine Martins Soler	
Abordagens de otimização para o problema de alocação dinâmica de veículos no contexto de transporte rodoviário de carga no Brasil .....	25
Cesar Dario Alvarez Cruz; Pedro Munari; Reinaldo Morabito	
Análise da ordem de acurácia do erro em soluções numéricas da equação de Poisson .....	33
Rafael de Lima Sterza; Beatriz Liara Carreira; Letícia Braga Berlandi; Analice Costacurta Brandi	
Análise de métodos numéricos na solução de problemas estacionários .....	40
Letícia Braga Berlandi; Rafael de Lima Sterza; Beatriz Liara Carreira; Analice Costacurta Brandi	
Análise de robustez e modelagem em máquina de estado da codificação 8b/10b .....	48
Victor Afonso dos Reis; Lucas Arruda Ramalho; Ailton Akira Shinoda	
Análise do perfil de ingressantes e metodologias colaborativas como estratégias para diminuir a evasão e a retenção .....	56
João Paulo de Freitas Gama; Fabiana Tristão de Santana	
Aplicação da transformada de Laplace na modelagem matemática do atraso no sinal de sondas empregadas no monitoramento e controle do oxigênio dissolvido em bioprocessos de produção de antibióticos .....	64
Samuel Conceição de Oliveira	
Automatic construction of arterial tree models using different power laws .....	72
Lucas Diego Mota Meneses; Rafael Alves Bonfim de Queiroz; Patricia Fonseca de Brito; Bernardo Martins Rocha	
Automatic construction of three-dimensional model of arterial tree incorporating the Fahraeus-Lindqvist effect .....	80
Patricia Fonseca de Brito; Rafael Alves Bonfim de Queiroz; Lucas Diego Mota Meneses; Rodrigo Weber dos Santos	
Cálculo do número básico de reprodução para modelos em <i>patches</i> na propagação da dengue .....	87
Gabriela Colovati de Almeida; Fernando Luiz Pio dos Santos	
Conexões de Galois e um exemplo vindo da lógica .....	94
Cristiane Alexandra Lázaro; Hércules de Araujo Feitosa; Mauri Cunha do Nascimento	
Contribuições de atividades de raciocínio lógico para o desenvolvimento de habilidades matemáticas requeridas no Pisa 2015 .....	101
Luiz Henrique da Cruz Silvestrini; Marcelo Reicher Soares; Letícia Leite Pavanello	
Derivadas fracionárias: critérios para classificação .....	107
Graziane Sales Teodoro; Edmundo Capelas de Oliveira	
Desenvolvimento de um programa interativo para aplicação das redes neurais artificiais em problemas de classificação de dados .....	115
Marcio Presumido Junior; Leandro Souto de Oliveira; Giovane Ferreira da Cunha; Alfredo Bonini Neto	
Educação financeira: uma introdução através de um software .....	123
Carina Brabo da Silva Caramelo; Renata Zotin Gomes de Oliveira	

Estimação da dissipação energética e da sobrepressão com uso de baixo-explosivos .....	131
Vinícios Munari Dewes	
Estudo de singularidades da matriz Jacobiana no fluxo de carga continuado através de uma técnica de parametrização geométrica .....	139
Leandro Souto de Oliveira; Marcio Presumido Junior; Alfredo Bonini Neto	
Extensão de modelo hidrodinâmico incluindo condições de fronteira não homogêneas para a pressão .....	147
Alfredo Jaramillo Palma; Gustavo Carlos Buscaglia	
Funções completamente monótonas no cálculo fracionário .....	155
Ester Cristina Fontes de Aquino Rosa; Edmundo Capelas de Oliveira	
Hepatite B: investigação numérica de modelos de ordem não inteira .....	163
Lislaine Cristina Cardoso; Fernando Luiz Pio dos Santos; Rubens de Figueiredo Camargo	
Jogo digital para o ensino de métodos numéricos .....	170
Marcos Henrique de Paula Dias da Silva	
Método da transformada diferencial generalizada no modelo fracionário de Malthus .....	178
Lucas Kenjy Bazaglia Kuroda; Alexys Bruno Alfonso; Rubens de Figueiredo Camargo	
Método de perturbação homotópica e a transformada sumudu num modelo dinâmico .....	185
Luverci do Nascimento Ferreira; Edmundo Capelas de Oliveira	
Modelagem e análise dinâmica de sistema eletromecânico para aplicação em amortecimento de suspensão mecânica .....	193
Leandro Cordeiro; Bento Rodrigues de Pontes Junior; Tatiane Cornachini Cordeiro	
Modelagem preliminar de turbina radial com entrada radial com o método da linha média.....	200
Pedro Mantegazza; Luben Cabezas-Gómez; Felipe Costa Magazoni	
Modelo de auto-produção de usinas hidrelétricas: uma abordagem não-linear .....	208
Marcus Vinícios Capellini; Augusto Cesar Pereira; Edméa de Cássia Baptista; Edilaine Martins Soler; Leonardo Nepomuceno	
Modelo de simulação em redes de petri temporizadas para a análise da qualidade de serviço de uma solução de integração .....	215
Francisco da Silveira; Sandro Sawicki	
Modelo matemático de dormência do câncer: via cálculo fracionário .....	223
Ailara Cristina de Oliveira Ribeiro; Paulo Fernando de Arruda Mancera	
Modelo matemático de um processo de solidificação de plástico em molde .....	230
Santiago del Rio Oliveira; Delson Luiz Módolo	
Modelo matemático para a programação da produção e sequenciamento de máquinas distintas em paralelo com estoques intermediários .....	238
Sander Joner; Neida Patias Volpi	
Modelos de auto-produção multi-período de companhias <i>price-makers</i> em mercados de energia do tipo <i>pool</i> .....	246
Tiago Gomes Cabana; Leonardo Nepomuceno	
Otimização do consumo energético em uma indústria gráfica .....	254
Lucas Farias de Menezes; Antonio Roberto Balbo; Adriana Cristina Cherri; Edilaine Martins Soler	

Otimização do problema de despacho econômico: uma comparação entre diferentes técnicas .....	260
..... Deborá Barbosa Aires; Pedro Rochavetz de Lara Andrade; Edméa Cassia Baptista	
Otimização do processo de corte unidimensional com objetivo de minimizar custos de matérias-primas e utilização de máquina .....	267
..... Guilherme Simões; Felipe Kesrouani Lemos; Adriana Cristina Cherri; Silvio Alexandre de Araújo	
Otimização estocástica com recurso em dois estágios aplicada a um problema de programação linear sujeito a incertezas .....	275
..... Geovana Aparecida França dos Santos; Vinícius Aparecido Salatta; Solange Regina dos Santos	
Otimização estocástica por meio de um problema de programação linear com coeficientes aleatórios .....	283
..... Vinícius Aparecido Salatta; Geovana Aparecida França dos Santos; Solange Regina dos Santos	
Pares de Galois e uma adjunção motivada pelas traduções entre lógicas .....	290
..... Hércules de Araujo Feitosa; Cristiane Alexandra Lázaro; Mauri Cunha do Nascimento	
Planejamento otimizado de plantio e colheita de cana-de-açúcar visando a maximização da produção de sacarose atendendo a uma demanda mensal pré-estabelecida pela usina .....	298
..... Maria Laura Parra Spagnuolo de Souza; Amanda Suellen Caversan; Antonio Roberto Balbo; Helenice de Oliveira Florentino Silva	
Relações de consequência simétrica .....	306
..... Hércules de Araujo Feitosa; Marcelo Reicher Soares; Angela Pereira Rodrigues Moreira	
Simulação de um modelo linearizado de otimização inteira 0-1 para a maximização de produção de biogás em propriedades rurais através biodigestores .....	312
..... Gustavo Chaves Tanaka; Antonio Roberto Balbo; Célia Aparecida dos Reis; Helenice de Oliveira Florentino Silva	
Simulação numérica da difusão de calor bidimensional no substrato frio de um cooler termoeletrônico utilizando o método de Lattice Boltzmann .....	320
..... Luben Cabezas-Gómez; Matheus dos Santos Guzella; Gustavo dos Santos Ribeiro; Luiz Eduardo Czelusniak; Vinícius Pessoa Mapelli	
Sobre estabilidade para sistemas dinâmicos em escalas temporais .....	328
..... Igner Luis Domini dos Santos	
Sobre uma derivada fracionária com uma modificação do tipo Caputo .....	334
..... Daniela dos Santos de Oliveira; Edmundo Capelas de Oliveira	
Solução da equação de Poisson através do método das interfaces imersas de altas ordens .	342
..... Miguel Angel Rojas Meza; Leandro Franco de Souza; José Alberto Cuminato	
Solução do problema de fluxo de potência ótimo com restrição de segurança com controles discretos .....	350
..... Marina Teixeira Costa; Adilson Preto de Godoi; Edméa Cássia Baptista; Leonardo Nepomuceno	
Solução do problema de máximo carregamento com variáveis contínuas e discretas com o método <i>branch and bound</i> e pontos interiores .....	358
..... Graciliano Antonio Damazo; Edméa Cássia Baptista; Edilaine Martins Soler	
Solução numérica de problemas elípticos não lineares via método de diferenças finitas exponencial de alta ordem .....	366
..... Beatriz Liara Carreira; Leticia Braga Berlandi; Rafael de Lima Sterza; Analice Costacurta Brandi	

Tomada de decisão no setor de celulose e papel utilizando programação por metas ponderadas .....	374
Marlon Paulo de Melo Wolff; Aleff Viegas Abreu	
Um estudo de estabilidade para um modelo racionário de crescimento de câncer avascular .....	381
Robinson Tavoni; Paulo Fernando de Arruda Mancera; Rubens de Figueiredo Camargo	
Um estudo sobre a memória epidemiológica: modelo SIRC fracionário .....	387
Ana Carla Ferreira Nicola Gomes; Adriano de Cezaro	
Um modelo bi-integrado do processo de produção de papel .....	393
Amanda Ortega de Castro Ayres; Carla Taviane Lucke da Silva Ghidini; Washington Alves de Oliveira; Betania Silva Carneiro Campello	
Um modelo não-linear de equilíbrio espacial de preços sem estoque regulador e o método de pontos interiores .....	401
Taíse Caroline Lopes Albano; Maurício Móz Christofletti; Edméa Cássia Baptista	
Uma aplicação clássica para o método dos elementos discretos utilizando processamento paralelo .....	409
Luiz Carlos Facundo Sanches; Ronaldo Carrion; Carlos Hércules Morais Lima	
Uma equação diferencial parcial tempo-fracionária e o teste ESR .....	416
José Vanterler da Costa Sousa; Edmundo Capelas de Oliveira; Luiz Alberto Magna	
Uma nova heurística para a abordagem híbrida de condicionamento em sistemas lineares oriundos do método de pontos interiores .....	424
Carla Taviane Lucke da Silva Ghidini; Kelly Cadena Madrid; Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira	
Uso do método primal dual barreira logarítmica para o dimensionamento de biodigestores modelo indiano .....	432
Márcia Aparecida. Zanolli Meira e Silva; Helenice de Oliveira Florentino Silva; Wellington Carlos Massola	

## Resumos

Análise da influência de parâmetros elétricos no comportamento de um sistema eletromecânico .....	441
Matheus Mikael Quartaroli; Bento Rodrigues de Pontes Junior	
Análise descritiva do comportamento da série brasileira de produção de automóveis para posterior identificação de seu processo gerador .....	444
Giovanna Gomes Huysmans; Nair Cristina Margarido Brondino	
Aplicação da função Zeta de Lerch para acelerar a convergência de uma série relevante para o cálculo fracionário .....	447
Ariane Vellasco Gomes; Rubens Figueiredo de Camargo; Alexys Bruno Alfonso	
Aplicação de um modelo matemático para estimação do custo industrial do processamento do leite in natura .....	450
Vitória Castro Santos Barreto; Paulo André de Oliveira; Danilo Simões	
Aproximação de funções por polinômios trigonométricos e aplicação em sistemas mecânicos utilizando o GeoGebra .....	453
João Paulo de Freitas Gama; Fabiana Tristão de Santana	
Cadeias de Markov: modelo probabilístico e teorema de Perron-Frobenius .....	456
Amanda Silvieri Leite de Oliveira; Camila Sabrina Baião Ferro; Fabiano Borges da Silva	



Corpos quadráticos e a construção de reticulados .....	459
Victor Passarelli Destefane; Lucas Yudy Juang; Carina Alves	
Decomposição em valores singulares de um conjunto de séries temporais envolvendo variáveis econômicas e sociodemográficas brasileiras .....	462
Eduardo Rosa Godinho; Nair Cristina Margarido Brondino	
Detecção de ataques a sistemas de reconhecimento facial: uma abordagem baseada nas máquinas de Boltzmann restritas .....	465
Gustavo Botelho de Souza; Aparecido Nilceu Marana; João Paulo Papa	
Determinação da intensidade do impulso em equações diferenciais impulsivas .....	468
Patrícia Kyoe Fukushima; Vanessa Rolnik	
Estudo de problemas de dimensionamento de lotes com múltiplos itens .....	471
Ana Laura Carvalho Bianco; Adriana Cristina Cheri	
Estudos sobre o problema de corte de estoque unidimensional com aplicação na indústria de papel .....	474
Vinícius Dias de Vasconcelos; Sônia Cristina Poltroniere	
Formação continuada de professores de matemática: uma produção de vídeos articulados com GeoGebra e os cadernos do professor/aluno .....	477
Jucieli Catarina de Almeida; Leandra dos Santos; Josyellen Ferreira Jordão; Sueli Liberatti Javaroni	
Impact of chemical control on mosquito population dynamics .....	480
Claudia Pio Ferreira	
Matemática aplicada no ensino de cálculo: o problema da maca .....	482
Josué Gomes da Silva	
Matemática e estatística no ENEM .....	485
Marisa Veiga Capela; Pollyanna Bettyni Fray; Karen Eliana Baú Ortega-Gálvez; Jorge Manuel Vieira Capela	
Minimização da energia das linhas de fluxo magnético em um sistema supercondutor com centros de aprisionamento .....	488
Daví Filenga	
Modelagem fracionária: oscilador harmônico .....	491
Giovana Pereira Vizotto; Rubens de Figueiredo Camargo	
Modelo matemático aplicado à transmissão de <i>Acinetobacter baumannii</i> em UTIs .....	494
Aurélio de Aquino Araújo; Daniela Renata Cantane	
Modelo matemático de otimização aplicado ao planejamento de tratamento por radiação ..	497
Paulo Zago Leonel ; Daniela Renata Cantane	
Modelos de otimização energética em sistemas de abastecimento .....	500
Rayne Herrera Sanches; Edilaine Martins Soler	
O sistema TLR e a semântica de matrizes da Lógica RM3 .....	503
Luis Felipe Salvador Boato; Luiz Henrique da Cruz Silvestrini	
Otimização da operação de bombas hidráulicas em sistemas de abastecimento .....	506
Isabela Garcia Parras; Ana Raquel Faccioli; Kathleen Janaína Macedo Silva; Edilaine Martins Soler	
Otimização da produção de biogás em biodigestores rurais .....	509
Leandro Willian Marcucci; Helenice de Oliveira Florentino	

Otimização do problema de dimensionamento de lotes integrado ao problema de corte de estoque bidimensional em uma indústria de papel .....	512
Betania Silva Carneiro Campello; Washington Alves de Oliveira; Carla Taviane Lucke da Silva Ghidini; Amanda Ortega de Castro Ayres	
Planejamento de trajetória para a manipulação de partículas em microfluídica .....	515
Luca Meacci; Franciane Fracalossi Rocha; Arianne Alves Silva; Petterson Vinicius Pramiu; Gustavo Carlos Buscaglia	
Problema de corte com sobras aproveitáveis e demandas incertas .....	518
Adriana Cristina Cherri; Luiz Henrique Cherri; José Fernando Oliveira; Maria Antônia Carravilla; Douglas Alem	
Problemas de otimização: uma proposta de ensino utilizando o software Mathematica .....	521
Cristiane Santana da Silva; Franciele Nates dos Santos	
Problemas de roteirização de veículos com janelas de tempo: um estudo em uma empresa de transporte coletivo .....	524
Rafael Bortolon Paulovic; Andréa Carla Gonçalves Vianna	
Redes complexas: conceitos e aplicações .....	526
Eduardo Ribeiro Pinto; Andriana Susana Lopes de Oliveira Campanharo	
Resolução do problema do caixeiro viajante utilizando meta-heurísticas .....	529
Mateus Gomes Cabana; Andréa Carla Gonçalves Vianna	
Reticulados via polinômios de grau 2 e 3 .....	532
William Lima da Silva Pinto; Carina Alves; Cintya Wink de Oliveira Benedito	
Soluções periódicas dos modelos de moscas-varejeiras de Nicholson com retardo .....	535
Carolinne Stefane de Souza; Suzete Maria Silva Afonso	
Textos e atividades: matemática nos anos iniciais através do EMAI .....	538
Isis Cristiane Barbosa Rossi; Ivete Maria Baraldi	
Transformada de Laplace para EDO sob a ação de funções descontínuas e de impulso e aplicação em juros compostos .....	541
Juliano Rian Custódio Malta; Vanessa Rolnik	
Um estudo sobre módulos e resoluções livres .....	544
Guilherme Augusto Cestari Sanches; Cristiane Alexandra Lázaro	
Um modelo multi-grupo para infecções hospitalares .....	547
Thomas Nogueira Vilches; Claudia Pio Ferreira	
Um procedimento para a localização de picos na deconvolução de curvas cinéticas de processos complexos não isotérmicos .....	550
Lucas Miranda; Marisa Veiga Capela; Jorge Manuel Vieira Capela	
Uma abordagem da geometria fractal para o ensino médio .....	553
Clayton Eugênio Santos de Paula; Tatiana Miguel Rodrigues de Souza	
Uma abordagem para as leis de Kepler no ensino médio .....	556
Fabio Araújo Ravagnani; Tatiana Miguel Rodrigues de Souza	
Uma análise das diferentes estratégias de atualização do método primal-dual barreira logarítmica e o fluxo de potência ótimo .....	559
João Paulo de Lima; Edméa Cássia Baptista	
Uma análise do método <i>Outer Approximation</i> na resolução do problema de fluxo de potência ótimo com variáveis de controle discretas .....	562
Luiza Rodrigues Matos; Daisy Paes Silva; Edilaine Martins Soler	
Uma experiência com o jogo “Cinco em Linha” para o estímulo do raciocínio lógico .....	565
Emily Bolinelli Arfeli; Cristiane Alexandra Lázaro; Tatiana Miguel Rodrigues de Souza	



Uso de otimização no projeto estrutural de um suporte de duas barras .....	568
Paulo Sergio da Silva Gouveia; Jussara Longhi; Sabrina Franciele Mendonça Janones; Eric Fabrício Farias Machado	
Uso de um algoritmo colônia de formigas na seleção de variáveis dependentes e independentes para futura construção de um modelo de previsão de consumo de combustíveis .....	571
José Antonio Rico Coque; Nair Cristina Margarido Brondino	
Valor médio da exponencial periódica de uma combinação linear de $t$ , $\sin(t)$ e $\cos(t)$ em termos das funções de Bessel .....	574
Bruno Pereira Ferrazzi; Alexys Bruno Alfonso	
Variabilidade na duração das fases do ciclo de vida de insetos-praga .....	577
Antone dos Santos Benedito; Claudia Pio Ferreira	



Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional  
De 2 a 5 de Maio de 2017  
Unesp, Faculdade de Ciências - Bauru/SP

## **Trabalhos completos**





## A Análise do Plano de Fase de Sistemas Modelados Por uma Equação de Duffing

*Daniel Zarpelão Porcel*

*UNESP, Mestrado em Engenharia Elétrica  
danizporcel@hotmail.com*

*Célia Aparecida dos Reis*

*Faculdade de Ciências da UNESP de Bauru, Departamento de Matemática  
celia@fc.unesp.br*

*Antonio Roberto Balbo*

*Faculdade de Ciências da UNESP de Bauru, Departamento de Matemática  
arbalbo@fc.unesp.br*

**Resumo:** Massa, mola e amortecedor são componentes básicos de sistemas oscilatórios, mesmo que só apareçam conceitualmente no modelo matemático, e como os sistemas físicos são inerentemente não lineares, as não linearidades podem ser introduzidas nas equações diferenciais que governam os modelos de tais sistemas através desses componentes. Como exemplos de vibrações não lineares podem ser citados as vibrações de vigas, de cabos, de pêndulos, de alguns isoladores, de circuitos elétricos, etc, cujas dinâmicas não lineares são muitas vezes descritas por uma equação de Duffing nas suas diversas formas. A técnica de Lyapunov pode ser utilizada para análise dessas dinâmicas. Neste trabalho, efetua-se um estudo do plano de fase de um oscilador Duffing, com uma força externa e um termo cúbico. Condições necessárias e suficientes para análise de estabilidade assintótica desta dinâmica não linear são obtidas, além de uma avaliação de comportamento caótico. Simulações numéricas são apresentadas.

**Palavras-chave:** Equação de Duffing, Plano de Fase, Dinâmica não Linear, Estabilidade Assintótica.

### 1. Introdução

O estudo de vibrações teve início a partir do descobrimento dos primeiros instrumentos musicais datados de 4000 a. C. provavelmente com apitos ou tambores (Rao, 2009; Miller, D. C. 1935). Deve-se a Pitágoras (582 – 507 a. C.) a primeira investigação com base científica relacionada aos sons musicais, com contribuições importantes também devido a Aristóteles por volta de 350 a. C., Galileu Galilei (1564 – 1642), Isaac Newton (1642 – 1727), Daniel Bernoulli (1700 – 1782), Jean D’Alembert (1717 – 1783), J. B. Fourier (1768 – 1830), Joseph Lagrange (1736 – 1830) dentre outros (Rao, 2009). Atualmente, o estudo das vibrações evoluiu com o estudo da vibração torcional no projeto de eixos de hélices de navio a vapor, em absorvedores de vibrações atuantes, por exemplo, em sistemas de levitação magnética (os trem MAGLEVS), no estudo das vibrações de vigas, cabos, etc. A Teoria moderna de Lyapunov desenvolvida em 1892 é aplicável a todos os sistemas dinâmicos. As pesquisas desenvolvidas por Duffing e Van der Pol resultaram nas primeiras soluções relacionadas a vibrações não lineares e destacam sua importância na Engenharia (Rao, 2009).

Segundo Rao (2009), as vibrações estão presentes em inúmeras atividades humanas, pois, o ato de respirar, só é possível quando nossos pulmões vibram. O ato de caminhar apresenta uma oscilação periódica entre mãos e pernas. A audição humana envolve vibração nos tímpanos, enxergamos porque as ondas de luz sofrem vibração, etc.

As vibrações ou são naturais ou são aplicadas externamente, como em projetos de máquinas, fundações, estruturas, motores, sistemas de controle e outros exemplos. Dependendo do sistema físico, as vibrações são prejudiciais e em outros, de grande importância e proveito. Por exemplo, a energia gerada pelas vibrações induzidas por terremoto e tsunamis pode ser extremamente danosa, enquanto que a energia proveniente de vibrações pode ser utilizada benéficamente em máquinas de lavar, escovas de dente elétricas, brocas odontológicas, aparelhos elétricos de massagens e etc. Além disso,

podem ser citadas ainda as vibrações das ondas do mar e vento que podem ser convertidas, por exemplo, em energia elétrica (Chen, 2000; Rao, 2009; Reis, 2014-a, 2014-b, 2015-a, 2015-b, 2017).

É sabido que massa, mola e amortecedor são componentes básicos de sistemas oscilatórios e como os sistemas físicos são inerentemente não lineares, as não linearidades podem ser introduzidas nas equações diferenciais que governam os modelos matemáticos de tais sistemas, através desses componentes. Como exemplos de problemas de vibrações não lineares podem ser citados as vibrações de um pêndulo, de vigas, de cabos, de alguns isoladores de circuitos elétricos (Chen, 2000; Rao, 2009; Reis, 2014-a, 2014-b, 2015-a, 2015-b, 2017; Brennan e Kovacic, 2011).

A equação não linear que modela um sistema oscilatório apresentando uma não linearidade cúbica é denominada equação de Duffing. Esta designação é uma homenagem ao pesquisador e engenheiro alemão Georg Duffing, que em 1918 escreveu um abrangente livro relacionado a este tema (Brennan e Kovacic, 2011; Reis, 2014-a, 2014-b, 2015-a, 2015-b, 2017).

Desde esta época, uma grande quantidade de estudos tem sido publicada envolvendo a mesma, incluindo o desenvolvimento de métodos de soluções, tanto analíticos quanto numéricos, além do uso desses para investigar o comportamento dinâmico de sistemas físicos que são descritos pelas várias formas desta equação. Devido à sua aparente simplicidade e ao acúmulo de informações relacionadas a esta equação, ela tem sido usada por muitos pesquisadores como um modelo aproximado de diversos sistemas físicos, ou como um modelo matemático conveniente usado na investigação de novos métodos de soluções. Por exemplo, desde os anos 70, ela tem sido útil para descrever o comportamento caótico de um sistema (Rao, 2009; Brennan e Kovacic, 2011; Medeiros, 2017). Daí a importância do estudo de problemas relacionados a esta equação. Em Reis, (2014-b, 2015-b, 2017) estudos do primeiro modo de vibração de uma viga e das vibrações de um cabo ambos modelados por uma equação de Duffing podem ser encontrados.

Neste trabalho, baseado no estudo efetuado em Reis (2014-a, 2015-a), efetua-se um estudo de um sistema não linear modelado por uma equação de Duffing, via técnica de Lyapunov. O objetivo é efetuar a construção de seu plano de fase, visando estudar, futuramente, o comportamento caótico deste sistema. A análise da estabilidade assintótica é apresentada, além de simulações numéricas.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: na seção 2 apresenta-se a dinâmica não linear no espaço de estados, além da determinação dos pontos críticos deste sistema. Na seção 3, são estabelecidas condições necessárias e suficientes envolvendo os parâmetros do sistema não linear para a ocorrência de estabilidade assintótica. Na seção 4, apresentam-se as simulações numéricas, e por fim encontram-se as conclusões e as referências.

## 2. A Modelagem Matemática

Considere o oscilador de Duffing, com uma força externa e um termo cúbico descrito pela equação (Rao, 2009; Brennan e Kovacic, 2011; Reis, 2014-a):

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + \alpha x + \gamma x^3 = F \cos \Omega t \quad (1)$$

sendo que,  $x$ ,  $\xi$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $F$  e  $\Omega$  são, respectivamente, o deslocamento, o raio de amortecimento, o parâmetro de rigidez, parâmetro de rigidez não linear, amplitude de excitação e frequência de excitação.

Quando  $\xi = 0$  e  $\alpha = 1$  a Equação (1) modela as vibrações de um cabo uniforme de comprimento  $l$  e suspenso, com deslocamento  $q$  e o movimento do primeiro modo de vibração de uma viga bi-apoiada nas extremidades, de comprimento  $l$ , conforme Brennan e Kovacic (2011), Reis (2014-a, 2014-b, 2015-a, 2015-b, 2017).

A Equação (1) pode ser escrita no espaço de estados da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_1 - 2\xi x_2 - \gamma x_1^3 + F \cos \Omega t \end{cases} \quad (2)$$

sendo  $x = (x_1, x_2)$  o vetor de estados.

A Equação (2) pode ser escrita no espaço e estados, de acordo com Reis (2014-a, 2015-b, 2017), com um acréscimo de uma entrada de controle  $u(t)$  na seguinte forma:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u(t) \quad (2-a)$$

sendo:

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\alpha x_1 - 2\xi x_2 - \gamma x_1^3 \end{pmatrix}, g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u(t) = F \cos \Omega t + v(t) \quad (2-b)$$

e  $v(t)$  uma entrada de controle auxiliar.

Considerando a Equação (2), para a determinação dos seus pontos críticos tem-se que:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1(-\alpha - \gamma x_1^2) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Da Equação (3), determina-se o valor de  $x_1$ , a saber:

$$x_1 = 0, x_1 = \sqrt{\frac{-\alpha}{\gamma}}, x_1 = -\sqrt{\frac{-\alpha}{\gamma}}.$$

Do sistema de Equação (2), são determinados os pontos críticos da dinâmica não linear de Equação (1), dados por:

$$P_1 = (0,0), P_2 = \left(\sqrt{\frac{-\alpha}{\gamma}}, 0\right), P_3 = \left(-\sqrt{\frac{-\alpha}{\gamma}}, 0\right). \quad (4)$$

Se  $\alpha = 0$  ou se  $\alpha \neq 0$  e  $\alpha, \gamma$  possuem sinais contrários, somente existe o primeiro ponto crítico denominado na Equação (4) de  $P_1$ . Nota-se que os pontos críticos  $P_2$  e  $P_3$  estão fora da origem.

### 3. Análise de Estabilidade Assintótica

Neste trabalho, a análise da estabilidade assintótica da dinâmica não linear de Equação (1), será efetuada em torno do ponto crítico  $P_1$ . Para tal, inicialmente seja  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -2\xi \end{pmatrix}$  a matriz Jacobiana deste sistema calculada em torno deste ponto (Ferrara, 2009; Reis, 2014-a, 2015-a). A equação característica e os autovalores desta dinâmica são respectivamente:

$$\lambda^2 + 2\xi\lambda + \alpha = 0 \text{ e } \lambda = -\xi \pm \sqrt{\Delta} \quad (5)$$

sendo  $\Delta$  o discriminante desta equação e dado pela expressão:

$$\Delta = 4(\xi^2 - \alpha). \quad (6)$$

Quando  $\Delta = 0$ , a equação característica possui um autovalor real de multiplicidade dois, a saber:  $\lambda = -\xi$ . Além disso:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \xi = \pm \sqrt{\alpha}, \alpha > 0. \quad (6-a)$$

Assim, o ponto de equilíbrio  $P_I = (0, 0)$ , é classificado como nó ou ponto espiral (Ferrara, 2009). Além disso, quanto a estabilidade assintótica, tem-se que (Reis, 2014-a, 2015-a):

- Se  $\Delta = 0$  e  $\xi < 0$ ,  $P_I$  é instável; (7)

- Se  $\Delta = 0$  e  $\xi > 0$ ,  $P_I$  é assintoticamente estável. (8)

Se  $\Delta > 0$ , a equação característica de Equação (5) apresenta dois autovalores reais e distintos, a saber:  $\lambda_1 = -\xi + \sqrt{\xi^2 - \alpha}$  e  $\lambda_2 = -\xi - \sqrt{\xi^2 - \alpha}$ . Além disso:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow -\infty < \xi < -\sqrt{\alpha} \cup \sqrt{\alpha} < \xi < +\infty \text{ e } \alpha > 0. \quad (9)$$

Observa-se que se  $\sqrt{\alpha} < \xi < +\infty$  então  $\lambda_1 = -\xi + \sqrt{\xi^2 - \alpha} < 0$  e  $\lambda_2 = -\xi - \sqrt{\xi^2 - \alpha} < 0$ . De fato:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = -\xi + \sqrt{\xi^2 - \alpha} > 0 &\Leftrightarrow -\xi > -\sqrt{\xi^2 - \alpha} \Leftrightarrow \xi < \sqrt{\xi^2 - \alpha} \\ &\Leftrightarrow \xi^2 < |\xi^2 - \alpha| = \begin{cases} \xi^2 - \alpha & \text{se } \xi^2 - \alpha > 0 \\ -\xi^2 + \alpha & \text{se } \xi^2 - \alpha < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

A primeira igualdade da Equação (10) gera  $0 < -\alpha$ . O que não ocorre, pois da Equação (9)  $\alpha > 0$ . A segunda igualdade leva a:

$$\begin{aligned} \xi^2 < -\xi^2 + \alpha \text{ e } \xi^2 < \alpha &\Leftrightarrow 2\xi^2 < \alpha \text{ e } \xi^2 < \alpha \Leftrightarrow \\ \xi^2 < \frac{\alpha}{2} \text{ e } \xi^2 < \alpha &\Leftrightarrow |\xi| < \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \text{ e } |\xi| < \sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

Como  $\sqrt{\alpha} < \xi < +\infty$ , tem-se que a solução é vazia e então  $\lambda_1 = -\xi + \sqrt{\xi^2 - \alpha} < 0$ . Desta forma, conforme Ferrara (2009), se  $\Delta > 0$  e  $\sqrt{\alpha} < \xi < +\infty$ , tem-se que  $P_I$  é um nó estável. Agora, se  $-\infty < \xi < -\sqrt{\alpha}$  e  $\alpha > 0$ , então  $\lambda_1$  e  $\lambda_2 > 0$ . De fato

$$\begin{aligned} -\xi - \sqrt{\xi^2 - \alpha} < 0 &\Leftrightarrow -\xi < \sqrt{\xi^2 - \alpha} \\ &\Leftrightarrow \xi^2 < |\xi^2 - \alpha| = \begin{cases} \xi^2 - \alpha & \text{se } \xi^2 - \alpha > 0 \\ -\xi^2 + \alpha & \text{se } \xi^2 - \alpha < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

Analisando a Equação (11), gera que na primeira igualdade,  $0 < -\alpha$ . Isto não ocorre, pois dado Equação (9),  $\alpha > 0$ . A segunda igualdade leva a:

$$\begin{aligned} \xi^2 < -\xi^2 + \alpha \text{ e } \xi^2 < \alpha &\Leftrightarrow 2\xi^2 < \alpha \text{ e } \xi^2 < \alpha \Leftrightarrow \\ \xi^2 < \frac{\alpha}{2} \text{ e } \xi^2 < \alpha &\Leftrightarrow |\xi| < \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \text{ e } |\xi| < \sqrt{\alpha}. \end{aligned} \quad (12)$$

Como  $-\infty < \xi < -\sqrt{\alpha}$ , tem-se que sua solução é vazia. Deste modo, segundo Ferrara (2009), com  $\Delta > 0$  e  $-\infty < \xi < -\sqrt{\alpha}$ , tem-se que  $P_I$  é um nó instável.

Se  $\Delta < 0$ , a equação característica de Equação (5) apresenta um par de autovalores complexos conjugados, a saber:  $\lambda_1 = -\xi + j\sqrt{\alpha - \xi^2}$  e  $\lambda_2 = -\xi - j\sqrt{\alpha - \xi^2}$ . Além disso:

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{\alpha} < \xi < \sqrt{\alpha} \text{ e } \alpha > 0. \quad (13)$$



Observa-se que se  $-\sqrt{\alpha} < \xi < 0$  então a parte real de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são positivas. Então segundo Ferrara (2009),  $P_1$  é um ponto espiral instável.

Se  $0 < \xi < \sqrt{\alpha}$  então a parte real de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são negativas. Então segundo Ferrara (2009),  $P_1$  é um ponto espiral assintoticamente estável.

A classificação dos pontos  $P_2$  e  $P_3$  e a análise da estabilidade assintótica serão objetos de estudos futuros.

#### 4. Simulações Numéricas

A Figura 1, a seguir, mostra o plano de fase da dinâmica não linear de Equação (2) para os valores de parâmetros, adotados na Tabela 1 e variações dos parâmetros  $\zeta$  e  $\Omega$  (Reis, 2014-a).

Como interessa vibrações naturais, neste trabalho serão excluídos os valores de parâmetros tais que o sistema não linear se torna instável de acordo com os resultados obtidos nas Equações (7), (11), (12) e (13).

Tabela 1. Valores de parâmetros.

Parâmetro	$\alpha$	$\gamma$	$F$
Valor	1	5	0,3

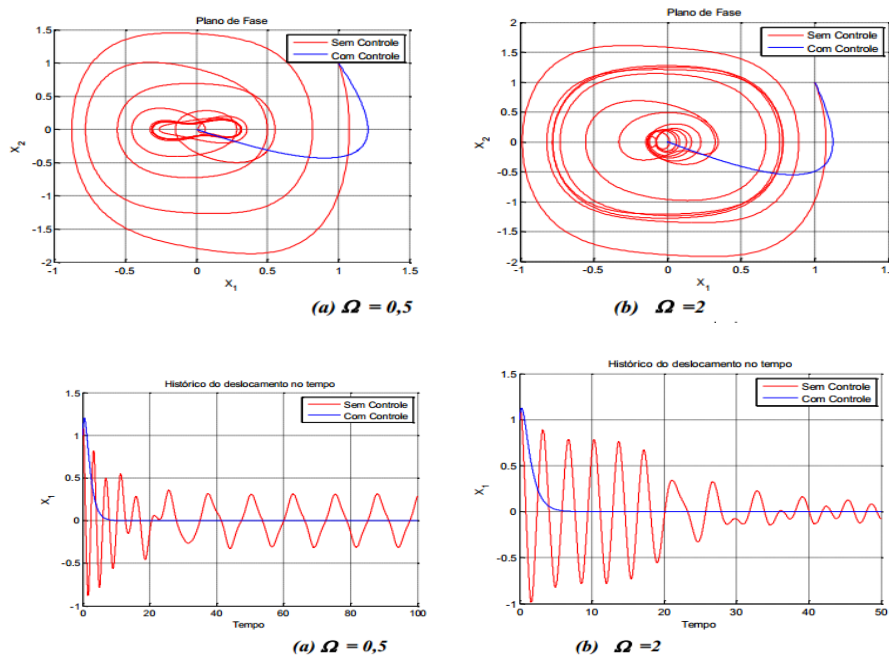


Figura 1: Plano de fase da dinâmica não linear de Equação (2) e (2-a) para  $-1 < \zeta < 1$ , (Reis, 2014-a).

Nota-se, de acordo com a Equação (13) e como  $\alpha = 1$ , que  $P_1$  é um ponto espiral assintoticamente estável, mas altamente oscilante, conforme os gráficos da resposta no tempo. Com o objetivo de estabilizar o sistema em um intervalo de tempo bastante pequeno, Reis (2014-a) introduz um controle não linear, mediante variações da frequência de oscilações, usando a técnica de linearização exata. Esse efeito é mostrado na Figura 1.

As Figuras 2, 3, 4, 5, 6 e 7 mostram o plano de fase e a resposta no tempo da dinâmica de Equação (2), as quais avaliam o comportamento desta dinâmica não linear (Reis, 2014-a), de acordo com os valores de parâmetros da Tabela 1.

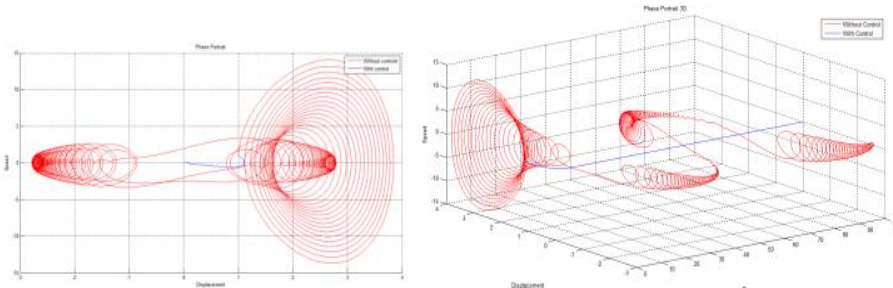


Figura 2: Plano de fase com  $|\xi| < 1$  e  $\Omega = 0,10$  (Reis, 2014-a).

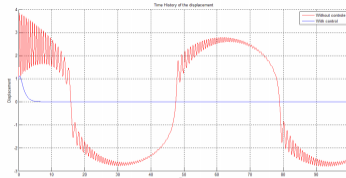


Figura 3: Resposta no tempo com  $|\xi| < 1$  e  $\Omega = 0,10$  (Reis, 2014-a).

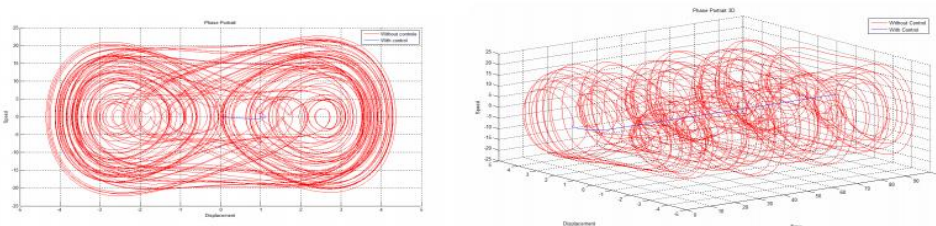


Figura 4: Plano de fase com  $|\xi| < 1$  e  $\Omega = 2$  (Reis, 2014-a).

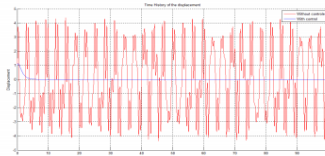


Figura 5: Resposta no tempo com  $|\xi| < 1$  e  $\Omega = 2$  (Reis, 2014-a).

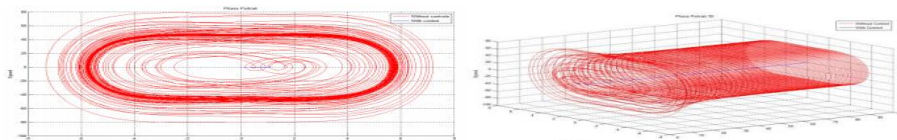


Figura 6: Plano de fase com  $|\xi| < 1$  e  $\Omega = 10$  (Reis, 2014-a).



Figura 7: Resposta no tempo com  $|\xi| < 1$  e  $\Omega = 10$  (Reis, 2014-a).

Depreende-se das Figuras 2 a 7 um comportamento bastante irregular com variações significativas em sua amplitude, o que leva a inferir em um comportamento caótico, como provado em Bender e Orszag (1978, p. 547), Zwillinger (1997, p. 122), Reis (2014-a), justificando a importância da equação de Duffing no estudo de uma grande gama de comportamentos conhecidos em sistemas dinâmicos não lineares. Vale ressaltar que Medeiros (2017) utiliza a mesma para exemplificar a ocorrência de ciclos limites.

De Reis (2014-a), as Figuras 2 a 7 mostram também o efeito no sistema de um controle não linear  $u(t)$  (Equação 2-a), para eliminação do comportamento oscilatório acentuado, como também bastante eficiente no sentido de eliminação do caos existente conforme Bender e Orszag (1978, p. 547), Zwillinger (1997, p. 122), Reis (2014-a).

## 5. Conclusões

Neste trabalho efetuou-se um estudo do plano de fase e a análise das vibrações de um oscilador Duffing com uma força externa e uma não linearidade cúbica. A análise da estabilidade assintótica é efetuada e condições necessárias e suficientes, em função dos parâmetros do sistema, são obtidas. Simulações numéricas foram apresentadas mediante alterações da frequência de oscilações do raio de amortecimento. Mediante estas, constata-se um comportamento bastante irregular com variações acentuadas na amplitude das respostas no tempo, o que leva a inferir em comportamento caótico quando de mudanças dos parâmetros  $\xi$  e  $\Omega$ , comportamento este provado em Bender e Orszag, (1978, p. 547), Zwillinger (1997, p. 122), Reis (2014-a).

Para trabalhos futuros, pretende-se efetuar o estudo dos pontos críticos deslocados da origem além da avaliação do comportamento do sistema nas condições de ocorrência de ciclos limites e um estudo aprofundado de ocorrência de caos.

## 6. Referências

BENDER, C. M. AND ORSZAG, S. A. **Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers**, New York: McGraw-Hill, p. 547, 1978.

CHEN, L., **Controlling Chaotic Oscillations With Input-Output Linearization**, Journal of Shanghai University, 2000.

FALNES, J., (2007). **A Review Of Wave-Energy Extraction**, Departamento f Physics and Centre of Ships and Ocean Structures, Norwegian University of Science and Technology NTNU, NO-7491 Trondheim, Norway, Setembro de 2007.

FERRARA, N. F., PRADO, C.P.C. **Caos Uma Introdução**, São Paulo: Edgard Blucher, 1994.

KOVACIC, I., BRENNAN, M.J. **The Duffing Equation Nonlinear Oscillators and Their Behavior**, John Wiley & Sons, Ltd. 2011.

MEDEIROS, E.S., CALDAS, I.L., BAPTISTA, M.S., FEUDEL, U. **Trapping Phenomenon Attenuates the Consequences of Tipping Points for Limit Cycles**, Scientific Reports, 2017.

RAO, S.S. **Vibrações Mecânicas**, Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2009.

REIS, C. A., BALTHAZAR, J. M., COLON, D., ROSA, S. R. F., ROCHA, R. T. ; PONTES JUNIOR, B. R. (2014 – a). **Análise das Vibrações Forçadas de um Oscilador de Duffing via Linearização Exata**. In: VIII Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM 2014), 2014, Uberlândia. Anais do VIII Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM 2014), 2014.



REIS, C. A., VASCONCELOS, L. A. S., NETO, O. L., ROCHA, R. T. (2014 – b). **Análise das Deflexões Grandes de uma Viga Com Rigidez Não Linear Utilizando a Linearização Exata a Realimentação.** In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNAMC 2014), 2014, Natal. Anais do Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNAMC 2014), 2014.

REIS, C. A., COLON, D., ROSA, S. R. F., Balthazar, J. M. (2015-a). **Analysis Of Phase Plan Of The Duffing Oscillator And The Internal Dynamics Associated With The Feedback Linearization.** In: 23rd ABCM International Congresso of Mechanical Engineering – COBEM, 2015, Rio de Janeiro.

REIS, C. A., VASCONCELLOS, L. A. S., NETO, O. L. (2015 – b). **Um estudo da dinâmica interna para um problema com Rigidez Não Linear.** In: Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações - Dincon 2015, 2015, Natal. Anais da Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações, 2015.

REIS, C. A. , COLON, D., ROSA, S. R. F. (2017). **Applications of Duffing Equation in Analysis Non Linear Systems cables and beams via the technique of linearization Exact and Internal Dynamics.** Capítulo de livro aceito para publicação.

THOMPSON, J. M. T., STEWART, H. B. **Nonlinear Dynamics and Chaos**, John Wiley & Sons, Ltd. 2002.

ZWILLINGER, D., **Handbook of Differential Equations**, Academic Press, San Diego, 1997.





## Abordagem heurística de melhoramento de solução do problema de fluxo de potência ótimo reativo

*Daisy Paes Silva*

*Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"; Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica  
daisy.silva@feb.unesp.br*

*Edilaine Martins Soler*

*Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"; Faculdade de Ciências  
edilaine@fc.unesp.br*

**Resumo:** O Problema de Fluxo de Potência Ótimo foi definido em 1962 e, desde então, é considerado um problema importante e de difícil resolução para a área de Otimização e Engenharia Elétrica. O Problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo é um caso particular do problema de Fluxo de Potência Ótimo, em que os controles relacionados a potência ativa são fixados e considera-se apenas os controles relacionados à potência reativa. Tal problema é modelado como um problema de programação não-linear, não-convexo, restrito e com variáveis discretas e contínuas. Devido à importância deste problema e à dificuldade de solução imposta pelas variáveis discretas e pela não linearidade das funções envolvidas, propõe-se uma nova abordagem heurística para a resolução deste problema. Esta abordagem consiste na minimização do *gap* de integralidade das variáveis discretas e na obtenção de uma sequência de problemas contínuos resolvidos por um método de pontos interiores. Testes numéricos com o sistema elétrico IEEE 14 barras foram realizados para verificar o potencial da abordagem proposta.

**Palavras-chave:** Otimização. Problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo. Heurística de melhoramento. Minimização do *gap* de integralidade.

### Introdução

A energia elétrica é uma das fontes mais utilizadas no mundo, sendo assim, é um dos recursos que influenciam a qualidade de vida e o desenvolvimento econômico de uma população. Os sistemas elétricos de potência são considerados um dos sistemas mais complexos construídos pelo homem, devido à sua dimensionalidade geográfica e equipamentos utilizados (ALRASHIDI, 2007). Os sistemas elétricos de potência devem fornecer energia elétrica para a população, sendo esta de qualidade adequada, no momento solicitado e com custo mínimo.

Um modo eficiente para determinar o estado ótimo de um sistema elétrico de potência é através da resolução do problema de Fluxo de Potência Ótimo (FPO). O propósito de um problema de FPO é determinar o estado de um sistema de transmissão de energia elétrica que otimize um dado desempenho deste sistema e satisfaça suas restrições físicas e operacionais. Este problema teve origem na década de 1960 (CARPENTIER, 1962). A partir de então, muitos trabalhos com diferentes formulações e abordagens para a resolução do problema de FPO foram publicados.

O problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo (FPOR), considerado neste trabalho, é um caso particular do problema de FPO, em que as variáveis associadas à potência ativa são fixadas e as variáveis associadas à potência reativa são controladas de modo a minimizar as perdas de potência ativa nas linhas de transmissão de energia elétrica. Na formulação adotada neste trabalho o problema de FPOR é modelado matematicamente como um problema de programação não-linear, não-convexo, restrito e com variáveis discretas e contínuas. Devido à dificuldade de solução imposta pelas variáveis discretas do problema, muitas das abordagens da literatura tratam os controles discretos como contínuos. Estas formulações não representam propriamente a realidade de um sistema elétrico de potência, pois alguns

controles podem somente ser ajustados por valores discretos. A experiência indica que arredondar a solução contínua para os valores discretos mais próximos são aceitáveis para variáveis de controle discretas com passos pequenos, como é o caso dos *taps* dos transformadores. Entretanto, o arredondamento pode não fornecer boas soluções para variáveis discretas com passos grandes, como é o caso das susceptâncias *shunt*. Além disso, a técnica de arredondamento pode levar o sistema a pontos de operação subótimos ou até mesmo inactíveis.

O tratamento adequado das variáveis discretas em problemas de FPO tem recebido significativa atenção desde o final da década de 1980 (TINEEY, 1988), (PAPALEXOPOULOS, 1989). Algoritmos de aproximação linear e não-linear clássicos da literatura como *Branch-and-Bound* e *Outer Approximation*, entre outros, que visam à resolução de problemas de programação não-linear com variáveis discretas e contínuas, levam muito tempo computacional para a resolução de problemas de FPO de grande porte.

Assim, devido à importância do problema de FPOR e o grau de dificuldade em obter boas soluções para este problema quando consideradas as variáveis discretas, torna-se de grande importância o desenvolvimento de novas abordagens de resolução para este problema.

Portanto, este trabalho propõe uma abordagem heurística de melhoramento de solução baseada na minimização do *gap* de integralidade das variáveis de controle discretas para a resolução do problema de FPOR. A abordagem proposta obtém uma solução factível melhor a cada iteração.

Este trabalho está organizado como segue: na segunda seção apresenta-se a Formulação Matemática do Problema de FPOR com variáveis discretas e contínuas adotada, na terceira seção propõe-se uma Abordagem Heurística de Melhoramento da Solução para o Problema de FPOR, na quarta seção resume-se a abordagem proposta por um algoritmo de solução para o problema de FPOR, na quinta seção analisa-se os testes numéricos e apresenta-se os Resultados Preliminares com o sistema elétrico IEEE 14 barras e na última seção são discutidas as considerações finais acerca do trabalho proposto.

## Formulação Matemática do Problema de FPOR

Neste trabalho, tratamos do problema de FPOR que é modelado matematicamente como um problema de programação não-linear, não-convexo, restrito e com variáveis de controle discretas e contínuas, e pode ser representado de forma genérica por (1):

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f(x,y) \\ \text{s.a:} \quad & h(x,y) = 0 \\ & g(x,y) \leq 0 \\ & \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \\ & y_k \in \{d_{k_1}, \dots, d_{k_n}\}, k = 1, \dots, n_y, \end{aligned} \tag{1}$$

em que  $x = (x_1, \dots, x_{n_x})$  são as variáveis contínuas do problema, que representam as magnitudes e ângulos de tensão nas barras;  $y = (y_1, \dots, y_{n_y})$  são as variáveis de controle discretas do problema, que representam os *taps* dos transformadores (com passos pequenos) e as susceptâncias *shunt* (com passos grandes);  $f$  é a função objetivo, não-linear, não separável e que não permite simplificações, que na formulação adotada representa as perdas de potência ativa nas linhas de transmissão de energia elétrica;  $h$  são equações não-lineares que representam as restrições físicas do sistema, balanço de potência ativa e reativa;  $g$  são inequações não-lineares que representam as restrições operacionais do sistema, limites de injeção de potência reativa. Para resolver o problema de FPOR propõe-se neste trabalho uma abordagem heurística de melhoramento de solução apresentada a seguir.

## Abordagem Heurística de Melhoramento da Solução para o Problema de FPOR

O modelo matemático para o problema de FPOR (1) é classificado como um problema de Programação Não-Linear Inteiro Misto (PNLIM). Problemas deste tipo são considerados de difícil resolução, pois envolvem funções não-lineares e variáveis inteiras (neste caso, variáveis discretas). Além disso, obter uma solução factível para um problema de PNLIM pode ser uma tarefa bastante árdua, sendo até mesmo impraticável para alguns algoritmos não heurísticos cumpri-la em tempo aceitável. A seguir apresentamos uma heurística de melhoramento de solução proposta para a resolução do problema (1).

O problema (1) pode ser reformulado como o problema (2).

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} && f(x,y) \\
 & \text{s.a:} && h(x,y) = 0 \\
 & && g(x,y) \leq 0 \\
 & && P_k(y_k) = 0, k = 1, 2, \dots, n_y \\
 & && \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \\
 & && \underline{y} \leq y \leq \bar{y}
 \end{aligned} \tag{2}$$

em que  $P_k(y_k)$  é uma função senoidal desenvolvida por Soler (2013), conforme (3):

$$P(y_k) = \left[ \text{sen} \left( \frac{y_k}{p} \pi + \alpha \right) \right]^2, \tag{3}$$

em que  $\alpha$  representa uma constante  $0 \leq \alpha < \pi$ , determinada para que os valores discretos sejam raízes da função, e  $p$  é o tamanho do passo. Tem-se que  $P_k(y_k) = 0$  se, e somente se,  $y_k$  assume valores discretos e  $P_k(y_k) > 0$  caso contrário.

Assim, encontrar uma solução para o problema (2) é equivalente a encontrar uma solução ótima para o problema (1). No entanto, a introdução da restrição  $P_k(y_k) = 0$  dificulta a resolução do problema (2) por parte dos *solvers* de programação não-linear. Assim neste trabalho considerar-se que  $P_k(y_k)$  representa o *gap* de integralidade de  $y_k$ . Com isso, pode-se definir o *gap* de integralidade de  $y$  dado por (4).

$$\text{gap}(y) = \sum_{k=1}^{n_y} P_k(y_k). \tag{4}$$

Nota-se que considerar as restrições  $P_k(y_k) = 0$  em (2) consiste em considerar na região factível deste problema apenas as soluções onde o respectivo *gap* de integralidade é nulo.

Inspirados no trabalho de Melo, Fampa, Raupp (2012) e de Melo (2012), a partir do problema (1) definimos o problema (5).

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} && \text{gap}(y) \\
 & \text{s.a:} && h(x,y) = 0 \\
 & && g(x,y) \leq 0 \\
 & && \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \\
 & && \underline{y} \leq y \leq \bar{y}
 \end{aligned} \tag{5}$$

tal que uma solução do problema (5) seja  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

A função objetivo de (1) não é considerada em (5) para que o foco seja dado somente à obtenção de uma solução factível para (1). Verifica-se que uma solução  $(\bar{x}, \bar{y})$  de (5) é uma solução factível de (1) se, e somente se,  $\text{gap}(\bar{y}) = 0$  e conseqüentemente é uma solução discreta de (1). Porém, uma vez que o problema (5) não considera a função objetivo de (1) pode-se obter uma solução factível, mas de baixa qualidade. Para obter uma solução de boa qualidade utiliza-se uma estratégia, chamada neste trabalho de

heurística de melhoramento de solução. Inicia-se uma busca local que baseia-se na resolução do problema (6) obtido de (1) ao se fixar as variáveis  $y$  em valor  $\bar{y}$ .

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f(x, \bar{y}) \\ \text{s.a :} \quad & h(x, y) = 0 \\ & g(x, y) \leq 0 \\ & \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \end{aligned} \tag{6}$$

A resolução do problema (6) é uma estratégia utilizada em alguns algoritmos para PNLIM com aproximação linear, como o *Outer Approximation*, para obter soluções melhores para problemas da forma de (1) (MELO; FAMPA, RAUPP, 2012). Seja  $(\bar{x}, \bar{y})$  a solução de (6). Na abordagem proposta esta solução é utilizada para atualizar o limitante superior do problema,  $z = f(\bar{x}, \bar{y})$ , visando a sua melhoria a cada iteração, ou seja, o problema (6) fornece uma solução  $(\bar{x}, \bar{y})$  que é a melhor solução obtida até o momento para (1).

A segunda etapa de melhoria de solução factível para (1) consiste na resolução do problema (7) que visa a minimização do *gap* de integralidade e adota uma restrição de corte de nível objetivo.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \text{gap}(y) \\ \text{s.a :} \quad & h(x, y) = 0 \\ & g(x, y) \leq 0 \\ & f(x, y) \leq z - \varepsilon \\ & \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \\ & \underline{y} \leq y \leq \bar{y} \end{aligned} \tag{7}$$

em que  $z$  é o melhor limitante superior obtido até o momento para (1) e  $\varepsilon > 0$  é um valor fixo e suficientemente pequeno de forma que exclua a melhor solução factível já obtida até o momento. Se a função objetivo de (7),  $\text{gap}(y)$ , for nula na solução obtida, esta solução será factível para o problema (1). Se a função objetivo de (7),  $\text{gap}(y)$ , for não nula na solução obtida para este problema ou o problema (7) for infactível, não é mais possível obter soluções melhores para (1).

Nota-se que a única diferença entre (5) e (7) é a restrição de corte de nível objetivo que na abordagem proposta visa a obtenção de soluções factíveis que melhore o limitante superior a cada iteração ou até que a solução do problema (7) não forneça mais valores discretos para  $y$  ou o problema se torne infactível.

Devido à eficiência de métodos de pontos interiores na resolução de problemas de FPO contínuo, os problemas de programação não-linear envolvidos na abordagem de solução proposta serão resolvidos pelo método de pontos interiores com filtro implementado no *solver* IPOPT (<https://projects.coinor.org/Ipopt>).

A seguir apresenta-se o algoritmo da abordagem de solução proposta para a resolução do problema de FPOR como dado em (1).

## Algoritmo

O algoritmo da abordagem de solução proposta baseia-se em Melo, Fampa, Raupp (2012), que propuseram um método para resolver problemas não-lineares com variáveis binárias. Entretanto, neste trabalho, propõe-se uma abordagem para resolver problemas de otimização não-linear com variáveis discretas e contínuas.

1. Faça  $l = 1$  e defina  $\varepsilon > 0$ .
2. Resolva o problema (5) obtendo  $(\bar{x}^l, \bar{y}^l)$ .
3. Fixe  $y^l$  em  $\bar{y}^l$  e resolva (6) obtendo  $(\bar{x}^l, \bar{y}^l)$ .

Tabela 1: Solução obtida para as variáveis discretas: Sistema Elétrico IEEE 14 barras.

Variável de controle discreta	Valor (p.u.)
$t_{4,7}$	0,98
$t_{4,9}$	0,97
$t_{5,6}$	0,95
$b_9^{sh}$	0,2

4. Faça  $z^l = f(\bar{x}^l, \bar{y}^l)$ .
5. Faça  $l = 2$ .
6. Resolva o problema (7) com  $z^{l-1}$  obtendo  $(x^l, y^l)$ .
7. Se (7) é infactível ou  $gap(y) > 0$ , então PARE, a solução  $(x^{l-1}, y^{l-1})$  é uma solução discreta do problema (1). Caso contrário, ou seja, se (7) é factível e o  $gap(y^l) = 0$ , siga para o passo 8.
8. Faça  $z^l = f(x^l, y^l)$ .
9.  $l = l + 1$ .
10. Retorne ao passo 6.

## Resultados Preliminares

Os testes numéricos foram realizados com o sistema elétrico IEEE 14 barras, referência na área de engenharia elétrica, para avaliar o potencial da abordagem proposta quando aplicada ao problema de FPOR com variáveis discretas e contínuas. O sistema IEEE de 14 barras possui variáveis associadas a estas barras que são: 14 magnitudes de tensão nas barras, 14 ângulos de tensão nas barras, 3 *taps* dos transformadores e 1 susceptância *shunt*. Os dados destes sistemas elétricos foram obtidos no site [www.ee.washington.edu/research/pstca](http://www.ee.washington.edu/research/pstca).

O computador utilizado para a realização dos testes numéricos possui processador Intel Core i5 de 1,6 GHz e 8 GB de memória RAM. Para a resolução dos problemas de FPOR foi utilizado o solver Interior Point Optimizer (IPOPT) em interface com o software General Algebraic Modeling System (GAMS) disponível no site [www.gams.com](http://www.gams.com).

Nos testes os limites mínimos e máximos das magnitudes das tensões nas barras adotados foram, respectivamente, 0,95 e 1,05 pu. As variáveis discretas, *taps* dos transformadores devem estar entre 0,95 e 1,05 p.u. com passo de 0,01 e a susceptância *shunt* deve estar entre 0 e 0,4 p.u com passo de 0,2.

A Figura 1 mostra a evolução das variáveis contínuas magnitude de tensão nas barras ao longo do processo iterativo. Pode-se notar através da curva que houve um aumento da tensão nas barras. Isso ocorre devido à necessidade de minimizar a função objetivo uma vez que os valores discretos mantiveram-se fixos. Nota-se que nas últimas iterações as tensões se estabilizaram ainda dentro dos limites preestabelecidos.

A Figura 2 mostra a evolução da função objetivo ao longo do processo iterativo. Pode-se notar que a função objetivo decresceu em 6,16% até a 8ª iteração. Posteriormente a função objetivo se manteve constante a até a última iteração com solução factível até a 11ª iteração.

O tempo computacional de resolução foi de 2,141 segundos. As variáveis discretas assumiram seus valores discretos permitidos logo na 1ª iteração e mantiveram-se constantes nos valores apresentados na Tabela 1. As perdas de potência ativa nas linhas de transmissão de energia elétrica do sistema na solução obtida foram de 13,7 MW.



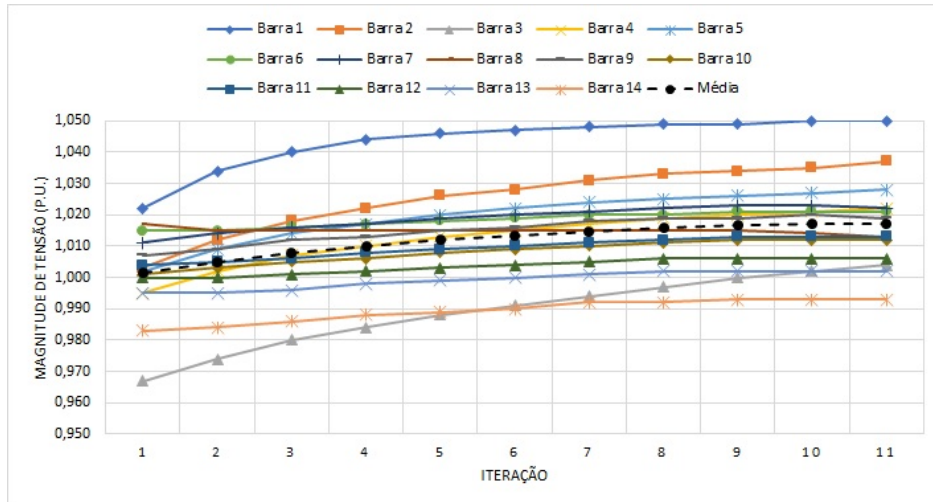


Figura 1: Evolução das magnitudes de tensão nas barras ao longo do processo iterativo.

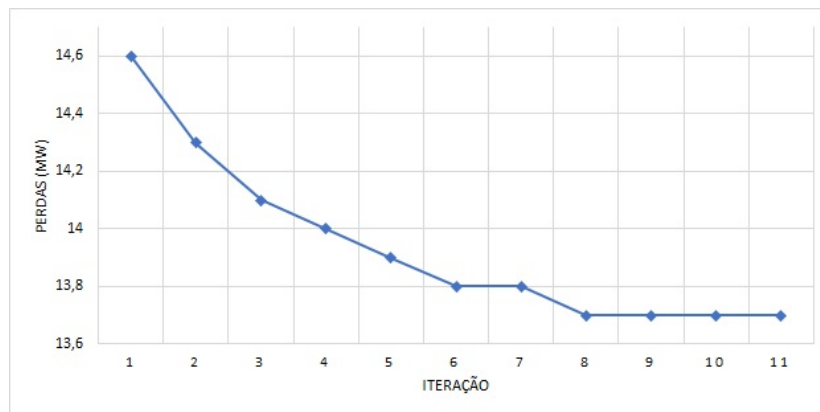


Figura 2: Evolução da função objetivo ao longo do processo iterativo.

## Conclusões

O problema de FPOR é modelado como um problema programação não-linear, não-convexo, com variáveis discretas e contínuas. Além disso, a função objetivo utilizada é não-separável e não permite simplificações. Para tanto, o problema FPOR é um problema de difícil resolução. Portanto, neste trabalho, propõe-se uma abordagem de solução para o problema de FPOR através de heurística de melhoramento de solução associado a um método de pontos interiores com filtro, combinando as vantagens de ambos para a resolução do problema de FPOR.

Uma função senoidal é utilizada para tratar as variáveis discretas *taps* dos transformadores e susceptâncias *shunt* para a resolução do problema de FPOR. Uma heurística de melhoramento de solução baseada na minimização do *gap* de integralidade das variáveis de controle discretas definida por esta função senoidal proposta para a resolução do problema de FPOR. As heurísticas propõem encontrar uma solução e a cada iteração melhorá-la, uma vez que as soluções factíveis forneçam limitantes superiores válidos para o problema.

Os testes numéricos foram realizados com o sistema elétrico IEEE 14 barras. A abordagem proposta mostrou-se eficiente obtendo soluções discretas de boa qualidade, ou seja, minimiza as perdas de



potência ativa nas linhas de transmissão de energia elétrica e satisfaz as restrições físicas e operacionais do problema de FPOR.

Apesar do valor da função objetivo ser menor a cada iteração, não necessariamente a solução da última iteração, que possui melhor valor para a função objetivo, é a melhor solução do ponto de vista da confiabilidade do sistema elétrico, uma vez que o perfil de tensão torna-se mais elevado ao longo do processo iterativo. Assim, cabe ao operador do sistema de transmissão de energia elétrica analisar e escolher uma das soluções fornecidas pela abordagem proposta.

Futuramente a abordagem proposta será testada em sistemas elétricos de maior porte, como os sistemas elétricos IEEE 30, 118 e 300 barras e os resultados obtidos serão comparados com os resultados da literatura.

## Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) - Processo nº 428740/2016-2.

## Referências

- ALRASHIDI, M. Hybrid particle swarm optimization approach for solving the discrete opf problem considering the valve loading effects. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 22, p. 2030-2038, 2007.
- CARPENTIER, J. Contribution a l'étude du dispatching économique. **Bulletin de la Societe Francaise des Electriciens**, v. 3, p. 431-447, 1962.
- MELO, W. A. X; FAMPA, M. M. C.; RAUPP F. M. P. Uma heurística de minimização de gap para Programação Não Linear Inteira Mista com variáveis binárias. In: CONGRESO IBERO-AMERICANO DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA E SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 2012, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: FGV, 2012. p. 3412-3423.
- MELO, W. A. X. **Algoritmos para Programação Não Linear Inteira Mista**. 2012. 96 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Sistemas e Computação) – UFRJ, Rio de Janeiro, 2012.
- PAPAPLEXOPOULOS, A. D. Large-scale optimal power flow: effects of initialization, decoupling and discretization. **IEEE Transactions on Power Systems**. v. 4, n. 2, p. 748-759, 1989.
- SILVA, D.P. **Funções Penalidade para o Tratamento das Variáveis Discretas do Problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo**. 2016. 115 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – UNESP, Bauru, 2016.
- SOLER, E. M. Penalty-Based Nonlinear Solver for Optimal Reactive Power Dispatch With Discrete Controls, **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 28, p. 2174 -2182, 2013.
- TINNEY, W. F. Some deficiencies in optimal power flow. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 3, n. 2, p. 676-683, 1988.
- WATCHTER, A. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming, **Mathematical Programming**, v. 1, p. 25-57, 2006.



## Abordagens de Otimização para o problema de Alocação Dinâmica de Veículos no contexto de Transporte Rodoviário de Carga no Brasil

*Cesar Dario Alvarez Cruz*

*Universidade Federal de São Carlos; Departamento de Engenharia da Produção  
cesarknbv@ufscar.br*

*Pedro Munari*

*Universidade Federal de São Carlos; Departamento de Engenharia da Produção  
munari@dep.ufscar.br*

*Reinaldo Morabito*

*Universidade Federal de São Carlos; Departamento de Engenharia da Produção  
morabito@ufscar.br*

**Resumo:** O problema de Alocação Dinâmica de Veículos (PADV) envolve alocar uma frota de veículos para atender à demanda de transporte de carga prevista entre terminais, durante um horizonte de tempo finito e com múltiplos períodos, tendo como objetivo maximizar o lucro gerado pelos serviços completados. A dimensão dos exemplares reais enfrentados pelas transportadoras logísticas na prática é consideravelmente grande, dificultando a obtenção de soluções ótimas em tempos computacionais aceitáveis. Assim, a literatura tem se concentrado no desenvolvimento de métodos heurísticos que permitem obter boas soluções, sem garantia de otimalidade, mas em tempos toleráveis na prática. Neste trabalho, propõem-se métodos de solução exatos, capazes de proporcionar garantia de otimalidade e/ou boas soluções aproximadas, acompanhadas de certificados de otimalidade ou de qualidade de solução, e permitem tratar problemas reais de porte em tempos razoáveis. A abordagem proposta é baseada na decomposição de Dantzig-Wolfe, utilizando-se a técnica de geração de colunas com estabilização pelo algoritmo primal-dual de pontos interiores, o que permite um ganho de desempenho significativo. Experimentos computacionais usando dados reais fornecidos por uma transportadora brasileira indicam o potencial prático da abordagem proposta, principalmente para problemas de grande porte.

**Palavras-chave:** Otimização. Alocação Dinâmica de Veículos. Dantzig-Wolfe. geração de colunas. estabilização.

## 1 Introdução

O problema de gestão de frotas no transporte rodoviário de carga apresenta vários desafios operacionais, principalmente ao tratar o gerenciamento da frota de transferência, que consiste em alocar veículos às requisições de transporte de carga. Devido às diferenças geográficas de demanda de serviços de transporte, muitas vezes se acumulam veículos vazios em uma região onde eles não são necessários, ou se gera um déficit de veículos vazios em regiões onde há demanda. Embora a movimentação de veículos vazios não gere lucros para as empresas (os custos operacionais tem que ser cobertos pelas viagens de veículos com carga), estas viagens são essenciais para a continuidade das operações. Consequentemente, a alocação de veículos de carga é um componente central do planejamento e controle das operações de empresas de transporte rodoviário de cargas. Neste contexto, tem-se o problema de Alocação Dinâmica de Veículos (PADV), que consiste em, dado um conjunto de demandas conhecidas por transporte de carga entre diferentes terminais (armazéns ou centros de distribuição), alocar veículos vazios aos diferentes terminais para atender essas demandas, de maneira a se maximizar o lucro gerado pelos serviços de demanda completados e se minimizar os custos das viagens de veículos vazios.

Powell, Sheffi e Thiriez (1984) foram uns dos primeiros autores a abordarem o tratamento de transporte rodoviário de cargas por meio do PADV, com enfoque no gerenciamento da frota de caminhões. Baseado em modelos prévios, os autores utilizam um gráfico de espaço-tempo para representar o aspecto dinâmico do problema. Powell (1986) propõe um modelo alternativo onde é possível manter estoque de veículos vazios quando a demanda alocada a um veículo é insuficiente. As decisões que se tomam neste modelo correspondem à movimentação de veículos carregados, veículos vazios e a quantidade de veículos mantidos em estoque. Dejax e Crainic (1987) propuseram uma taxonomia do problema de movimentação de veículos vazios, visando aumentar o conhecimento destes sistemas a identificar possíveis tendências de pesquisa relacionada. Os autores apresentam uma classificação, baseada no escopo e abrangência dos problemas, que consideram mais pertinente para o estudo de reposicionamento de veículos: modelos operacionais e modelos de políticas de decisão. Do mesmo modo, definem diferentes critérios que servem para refinar a classificação dos diferentes modelos.

Frantzeskakis e Powell (1990) estudam o PADV com demanda incerta com o objetivo de maximizar as contribuições esperadas totais. O problema é formulado como um modelo de programação estocástica, e uma nova heurística é desenvolvida, a qual é contrastada com aproximações determinísticas prévias. Powell e Carvalho (1998a, 1998b) apresentam a formulação de modelagem denominado *Logistics Queuing Network* (LQN) para o gerenciamento de cargas, baseado no trabalho de Powell, Jaillet e Odoni (1995). Formulações clássicas de problemas reais geralmente resultam em problema intratáveis. Porém, os modelos LQN podem considerar uma quantidade maior de detalhes do problema, contrariamente às formulações clássicas. A solução apresentada começa com a formulação clássica de programação linear que, então, é reformulada como um problema de programação dinâmica. Os autores mostram que o algoritmo LQN se aproxima em torno de 3% dos valores ótimos das relaxações de programação linear.

Em Vasco (2012) e Vasco e Morabito (2014, 2016) estuda-se o PADV no contexto do sistema de Transporte Rodoviário de Carga (TRC) no Brasil. Os autores tomam como ponto inicial o modelo de Ghiani, Laporte e Musmanno (2004) estendendo-o para incluir detalhes importantes na gestão de veículos de carga, como a necessidade de terceirização de frota (*outsourcing fleet sizing*), a necessidade de aceitar *backlog* no planejamento (já que dado o alto nível competitivo da indústria de carga, estrategicamente é prejudicial rejeitar pedidos), diferentes tipos de veículos, restrições de movimentação de veículos para certas cargas ou certos percursos, e capacidade de carga dos terminais. A ênfase é dada na caracterização do problema em situações reais, na modelagem matemática do problema e utiliza-se heurísticas e metaheurísticas, como o GRASP, o *simulated annealing* e a colônia de formigas (ACO), para obter soluções factíveis.

Dada a dificuldade computacional em se resolver exemplares realistas e de grande porte do PADV por meio de softwares de otimização de propósito geral, como o IBM CPLEX, este trabalho utiliza a decomposição de Dantzig-Wolfe, juntamente com o método de geração de colunas (GC), para propor uma abordagem de solução que seja efetiva na prática. Em particular, recorre-se a uma variante do método de GC baseada em soluções bem-centralizadas obtidas por um método de pontos interiores. Isto permite estabilizar o método e reduzir, de forma significativa, o número de iterações e o tempo computacional para a resolução dos exemplares, conforme observado em experimentos computacionais com dados reais fornecidos por uma empresa de transporte rodoviário. Dessa forma, este estudo busca contribuir com ferramentas e abordagens de otimização para apoiar decisões no nível operacional da gestão de frotas de empresas de transporte rodoviário de cargas. Em particular, na otimização do uso de veículos nos transportes de transferências de cargas entre terminais, envolvendo veículos de média e grande capacidade.

O restante deste artigo está estruturado da seguinte forma. Na Seção 2, define-se um modelo de programação linear inteira para o PADV. Na Seção 3, apresenta-se a decomposição e o método de geração de colunas utilizados para resolver o problema. Na Seção 4, são apresentados resultados para os exemplares de grande porte baseados em dados reais. As conclusões e perspectivas para trabalhos futuros são apresentadas na Seção 5.

## 2 Modelagem Matemática do PADV

As decisões a serem tomadas no problema PADV envolvem determinar quais cargas são aceitas e quais são rejeitadas entre terminais, além de definir o reposicionamento de veículos vazios entre terminais para atender a demanda futura. A seguir, o PADV é modelado como em Vasco e Morabito (2014), dado por uma extensão de um problema de fluxo *multicommodity* de custo mínimo em um grafo direcionado expandido, para o caso em que todas as demandas são conhecidas a priori. Seja  $N$  o conjunto de terminais da rede de transporte;  $T$  o conjunto de períodos do horizonte de planejamento; e  $V$  o conjunto de subdivisões de toda a frota disponível para o transporte de cargas (diferenciação dos veículos, seja pela forma de sua remuneração, pelas rotas praticadas ou, ainda, pelo tratamento individual de cada veículo, placa a placa, sendo nesse caso  $|V|$  igual à quantidade de veículos existentes na frota). Além disso, considere os seguintes parâmetros:

- $\tau_{ij}$  : Tempo de viagem de  $i$  até  $j$ ,  $\forall i, j \in N$ ;
- $d_{ijt}$  : Demanda por serviços de transporte (em número de veículos cheios) de  $i$  até  $j$  começando no período  $t$ ,  $\forall i, j \in N, \forall t \in T$ ;
- $p_{ij}^v$  : Lucro (receita menos custos operacionais diretos) obtida ao se realizar a rota de  $i$  até  $j$  com um veículo do tipo  $v$ ,  $\forall i, j \in N, \forall v \in V$ ;
- $c_{ij}^v$  : Custo de deslocamento para um veículo do tipo  $v$  vazio de  $i$  até  $j$ ,  $\forall i, j \in N, \forall v \in V$ ;
- $m_{it}^v$  : Quantidade de veículos do tipo  $v$  que entram (i.e., ficam disponíveis) no sistema no terminal  $i$  no período  $t$ ,  $\forall i \in N, \forall t \in T, \forall v \in V$ ;
- $A_{ij}^v$  : Restrição de movimentação entre os terminais  $i$  e  $j$  para o tipo de veículo  $v$ , sendo: 1, se o veículo pode fazer o percurso; 0, caso contrário;  $\forall i \in N, j \in N$  e  $v \in V$ .

Sejam as variáveis de decisão definidas como:

- $x_{ijt}^v$  : Fluxo (número) de veículos cheios de carga do tipo  $v \in V$  que começam a se movimentar desde o terminal  $i$  até o terminal  $j$  no período  $t$  para satisfazer a demanda  $d_{ijt}$ ,  $\forall i \in N, j \in N$  e  $t \in T$ ;
- $y_{ijt}^v$  : Fluxo (número) de veículos vazios do tipo  $v \in V$ , que começam a se movimentar desde o terminal  $i$  até o terminal  $j$  no período  $t$ ,  $\forall i \in N, j \in N$  e  $t \in T$ .

A partir das definições apresentadas, tem-se a seguinte formulação para o PADV:

$$\max \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{t \in T} \sum_{v \in V} (p_{ij}^v x_{ijt}^v - c_{ij}^v y_{ijt}^v) \quad (1)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{j \in N} (x_{ijt}^v + y_{ijt}^v) - \sum_{\substack{k \in N, \\ k \neq i, \\ t > \tau_{ki}}} (x_{kit}^v + y_{kit}^v) - y_{iit-1}^v = m_{it}^v, \quad (2)$$

$$\forall i \in N, \forall t \in T, \forall v \in V,$$

$$\sum_{v \in V} x_{ijt}^v \leq d_{ijt}, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T, \quad (3)$$

$$x_{ijt}^v = 0 \wedge y_{ijt}^v = 0, \text{ if } A_{ij}^v = 0, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V, \quad (4)$$

$$x_{ijt}^v \in \mathbb{Z}_+, y_{ijt}^v \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V. \quad (5)$$



A função objetivo (1) maximiza o lucro total das operações ao longo do horizonte de planejamento, que equivale ao lucro gerado pelas movimentações dos veículos cheios menos o custo das movimentações dos veículos vazios. O conjunto de restrições (2) garante o balanço do fluxo de veículos cheios e vazios em cada terminal  $i$ , período  $t$  e tipo de veículo  $v$ . O conjunto de restrições (3) estabelece um limite superior equivalente à demanda para a quantidade de veículos alocados a cada arco. O conjunto de restrições (4) estabelece as rotas cheias e vazias que podem ser feitas para cada tipo de veículo. Estas restrições são relevantes do ponto de vista prático, pois permitem evitar que determinados tipos de veículos realizem certas rotas, seja por segurança das rodovias, restrições dos motoristas quando são contratados, entre outros. Por fim, as restrições (5) impõem o domínio das variáveis de decisão.

Em certas situações práticas, é desejável tratar cada veículo individualmente como um tipo de veículo, em vez de separá-los em grupos. Isto se faz com o intuito de melhorar a gestão e o planejamento dos recursos das operações (VASCO; MORABITO, 2014). Assim, cada veículo passa a ser considerado como um grupo diferente e se fixa  $m_{it}^v \in \{0, 1\}, \forall i \in N, \forall t \in T, \forall v \in V$ , como um parâmetro binário, tomando o valor de 1 se o veículo  $v$  entra no sistema no terminal  $i$  no período  $t$ , e 0 caso contrário, satisfazendo:

$$\sum_{j \in N} \sum_{t \in T} \sum_{v \in V} m_{it}^v = |V|.$$

Ao se tratar individualmente cada veículo, a dificuldade em se resolver a formulação (1)–(5) por métodos convencionais aumenta, devido ao crescimento do número de variáveis e restrições nas formulações.

### 3 Decomposição de Dantzig-Wolfe e o método de geração de colunas

Nesta seção, apresenta-se a decomposição de Dantzig-Wolfe e o método de geração de colunas aplicados ao PADV. Iniciando com a decomposição, observe que as restrições de fluxo (2) e movimentação (4) podem ser agrupadas de acordo com o tipo de veículo. Assim, escolhendo-se as restrições de atendimento à demanda (3) como restrições de acoplamento, as demais podem ser isoladas em conjuntos  $X^v$ , para todo  $v \in V$ , dados por:

$$X^v = \left\{ \begin{array}{l} (x^v, y^v) \mid \sum_{j \in N} (x_{ijt}^v + y_{ijt}^v) - \sum_{\substack{k \in N, \\ k \neq i, \\ t > \tau_{ki}}} (x_{kit(t-\tau_{ki})}^v + y_{kit(t-\tau_{ki})}^v) - y_{iit-1}^v = m_{it}^v, \\ \forall i \in N, \forall t \in T, \\ x_{ijt}^v = 0 \wedge y_{ijt}^v = 0, \text{ if } A_{ij}^v = 0, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T \\ x_{ijt}^v \in \mathbb{Z}_+, y_{ijt}^v \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T \end{array} \right\}.$$

Assim, tem-se a seguinte formulação equivalente a (1)–(5):

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{t \in T} \sum_{v \in V} (p_{ij}^v x_{ijt}^v - c_{ij}^v y_{ijt}^v) \\ \text{s.a.:} & \sum_{v \in V} x_{ijt}^v \leq d_{ijt}, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T \\ & (x^v, y^v) \in X^v, \quad \forall v \in V. \end{array}$$

Pelo Teorema da Representação (veja, por exemplo, Bertsimas e Tsitsiklis (1997)), qualquer solução  $(x^v, y^v) \in X^v$  poder ser descrito como uma combinação de pontos e raios extremos de  $X^v$ , dada por:

$$\begin{aligned} (x^v, y^v) &= \sum_{q \in Q^v} \lambda_q^v (\bar{x}_q^v, \bar{y}_q^v) + \sum_{r \in R^v} \lambda_r^v (\bar{x}_r^v, \bar{y}_r^v), \\ \sum_{q \in Q^v} \lambda_q^v &= 1, \lambda_q^v \geq 0, \lambda_r^v \geq 0, \end{aligned}$$

onde  $(\bar{x}_q^v, \bar{y}_q^v)$  e  $(\bar{x}_r^v, \bar{y}_r^v)$  denotam os pontos e raios extremos de  $X^v$ , respectivamente. No caso do DVAP, os conjuntos  $X^v$  são limitados e, portanto, raios extremos não são considerados. Ao se substituir essa representação dos pontos no problema equivalente acima, obtém-se o Problema Mestre (PM):

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in N} \sum_{\substack{j \in N \\ i \neq j}} \sum_{t \in T} \sum_{v \in V} \left( p_{ij}^v \sum_{q \in Q^v} \lambda_q^v \bar{x}_{qijt}^v - c_{ij}^v \sum_{q \in Q^v} \lambda_r^v \bar{y}_{rijt}^v \right) \\ \text{s.a.:} \quad & \sum_{v \in V} \sum_{q \in Q^v} \lambda_q^v \bar{x}_{qijt}^v \leq d_{ijt}, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T, \quad (u_{ijt}) \\ & \sum_{q \in Q^v} \lambda_q^v = 1, \quad \forall v \in V, \quad (w_v) \\ & \lambda_q^v \geq 0, \quad \forall v \in V, \forall q \in Q, \end{aligned}$$

onde  $u_{ijt}$  e  $w_v$  representam as variáveis duais das restrições de acoplamento e convexidade, respectivamente. Nesse contexto, as colunas do PM, podem ser geradas a partir dos pontos extremos de cada conjunto  $X^v$ . Para obtê-los, pode-se resolver os subproblemas a seguir, que determinam um programa de alocação de veículos cheios e vazios para cada tipo de veículo  $v \in V$ :

$$Z_{sp}^v = \max \quad \sum_{i \in N} \sum_{\substack{j \in N \\ i \neq j}} \sum_{t \in T} \sum_{v \in V} ((p_{ij}^v x_{ijt}^v - c_{ij}^v y_{ijt}^v) - u_{ijt} x_{ijt}^v) \quad (6)$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_{j \in N} (x_{ijt}^v + y_{ijt}^v) - \sum_{\substack{k \in N, \\ k \neq i, \\ t > \tau_{ki}}} (x_{ij(t-\tau_{ki})}^v + y_{ij(t-\tau_{ki})}^v) - y_{iit}^v = m_{it}^v, \quad (7)$$

$$\forall i \in N, \forall t \in T,$$

$$x_{ijt}^v = 0 \wedge y_{ijt}^v = 0, \text{ if } A_{ij}^v = 0, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T, \quad (8)$$

$$x_{ijt}^v \in \mathbb{R}_+, y_{ijt}^v \in \mathbb{R}_+, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T. \quad (9)$$

Dessa forma, o custo relativo de cada variável (coluna)  $\lambda_q^v$  é dado por  $(Z_{sp}^v - w_v)$ . Isso permite inicializar o PM com apenas um subconjunto de colunas, resultando no PM restrito (PMR) e, iterativamente, gerar novas colunas por meio das soluções duais obtidas do PMR. Esse procedimento é conhecido como método de geração de colunas (GC), o qual converge para uma solução ótima do PM. Dado que cada veículo representa um tipo de veículo, cada subproblema torna-se um problema de caminho máximo sobre um grafo direcionado de espaço-tempo e, portanto, utiliza-se um algoritmo de caminho máximo para grafos direcionados acíclicos (AHUJA; MAGNANTI; ORLIN, 1993).

A GC padrão, baseada em soluções duais ótimas, apresenta vários inconvenientes, especialmente quando o método simplex é utilizado para resolver o PMR (VANDERBECK, 2005; LüBBECKE; DESROSIERS, 2005). Entre eles, estão: convergência lenta próximo a solução ótima (*tailing-off effect*); primeiras iterações com colunas e valores duais irrelevantes (*heading-in effect*); degeneração no problema primal fazem com que o valor ótimo do PMR seja constante por varias iterações (*plateau effect*); e instabilidade nas soluções duais, que saltam de um valor extremo para outro (*yo-yo effect*). Assim, para evitar o efeito negativo de tais inconvenientes, neste trabalho recorre-se à geração de colunas primal-dual (GONDZIO; GONZÁLEZ-BREVIS; MUNARI, 2016; MUNARI; GONDZIO, 2015; GONDZIO; GONZALEZ-BREVIS; MUNARI, 2013), uma variante do método de GC que utiliza algoritmo de pontos interiores para obter soluções duais estáveis e bem centralizadas na região factível do PMR.

Note que a solução obtida por GC corresponde a uma solução da relaxação linear do problema original (1)–(5), já que este problema é definido por variáveis inteiras. Neste trabalho, para a obtenção de soluções inteiras para o problema, aplicou-se uma heurística que consiste em impor o domínio inteiro sobre as variáveis  $\lambda_q$  do PM, ao final do método de geração de colunas.

## 4 Resultados

Nesta seção, são apresentados experimentos computacionais utilizando-se a abordagem de solução proposta na seção anterior. No total, foram utilizados os 30 exemplares propostos em Vasco (2012), os quais são baseados na situação real de uma transportadora brasileira e possuem as seguintes características: 53 terminais; 36 períodos – tendo cada período 4 horas; 300 cargas a serem transportadas; e frota heterogênea com 130 veículos – cada veículo foi tratado como um único tipo de veículo. Utilizando-se a formulação (1)–(5), esses exemplares envolvem milhões de variáveis e restrições e, assim, são considerados de grande porte.

A Tabela 1 mostra os resultados dos limitantes obtidos pela GC primal-dual para os exemplares utilizados. As colunas da tabela referem-se a: nome do exemplar (Exemplar); valor ótimo da relaxação linear da formulação (1)–(5), obtida utilizando-se o software de otimização IBM CPLEX (Sol. Ot. LP); tempo de execução para se resolver a relaxação linear, em segundos (Tempo LP); valor ótimo da formulação (1)–(5), também utilizando-se o software IBM CPLEX (Sol. Ot.); tempo de execução para se resolver o problema, em segundos (Tempo IP); limitante superior obtido com a GC primal-dual (LS); limitante inferior obtido com a GC primal-dual (LI); tempo de execução da GC primal-dual, em segundos (Tempo GC); tempo total dispendido na resolução dos subproblemas da GC primal-dual, em segundos (Tempo Sub); tempo total dispendido na resolução dos PMRs da GC primal-dual, em segundos (Tempo PMR); total de iterações da GC primal-dual (Iter); valor da solução obtida pela heurística executada ao final da GC primal-dual (Sol Heur); tempo de execução dessa heurística, em segundos (Tempo Heur); Melhor limitante superior reportado por Vasco (2012) obtido usando-se heurísticas (Melhor LS); tempo de execução das heurísticas de Vasco (2012), em segundos (Tempo LS); porcentagem de otimalidade entre a solução ótima do problema e a melhor solução heurística de Vasco (2012), calculada por ((Sol Ot - Melhor LS)/Sol. Ot)\*100.

Tabela 1: PDCGM para instâncias do grupo VI

Exemplar	Sol. Ot. LP	Tempo LP	Sol. Ot.	Tempo IP	LS	LI	Tempo GC	Tempo Sub	Tempo PMR	Iter	Sol Heur	Tempo Heur	Melhor LS	Tempo LS	GAP
p1r-v130	18051	4406,93	18051	4456,93	18051,0	18051,0	29,67	4,92	24,75	16	18051	0,35	17.483,99	184,77	3,1%
p2r-v130	19654	2571,62	19654	2621,62	19654,0	19654,0	34,56	5,43	29,13	18	19654	0,30	18.859,01	212,46	4,0%
p3r-v130	17143,2	3345,12	17143,2	3395,12	17143,2	17143,1	27,87	4,21	23,66	14	17143,2	0,38	16.677,21	252,10	2,7%
p4r-v130	19775,4	5737,48	19775,4	5787,48	19775,4	19775,4	58,80	6,98	51,82	23	19775,4	0,37	19.356,62	251,13	2,1%
p5r-v130	18751,6	2960,74	18751,6	3010,74	18751,6	18751,5	28,86	4,88	23,99	16	18751,6	0,38	18.291,61	159,13	2,5%
p6r-v130	20210,8	2406,12	20210,8	2456,12	20210,8	20210,6	40,09	5,49	34,59	18	20210,8	0,39	19.690,81	164,86	2,6%
p7r-v130	19471,8	2655,22	19471,8	2705,22	19471,8	19471,8	33,69	5,51	28,18	18	19471,8	0,75	19.132,43	160,50	1,7%
p8r-v130	18731,8	2848,07	18731,8	2898,07	18731,8	18731,6	40,20	5,56	34,64	18	18731,8	0,88	18.156,21	135,70	3,1%
p9r-v130	15675,4	3144,30	15675,4	3244,30	15675,4	15675,4	38,80	5,81	32,99	19	15675,4	0,30	15.121,82	115,60	3,5%
p10r-v130	19008,8	2747,57	19008,8	2847,57	19008,8	19008,7	23,21	4,30	18,91	14	19008,8	0,37	18.321,02	149,61	3,6%
p11r-v130	17167,2	2853,84	17167,2	2953,84	17167,2	17167,2	28,53	4,21	24,32	14	17167,2	0,29	16.578,22	145,89	3,4%
p12r-v130	22236,4	3990,18	22236,4	4090,18	22236,4	22236,3	44,79	6,83	37,96	22	22236,4	0,37	21.617,22	230,84	2,8%
p13r-v130	20060	3615,89	20060	3715,89	20060,0	20059,8	34,76	5,64	29,12	18	20060	0,39	19.265,62	137,83	4,0%
p14r-v130	20106,8	2528,72	20106,8	2628,72	20106,8	20106,8	28,79	4,54	24,25	15	20106,8	0,29	19.258,01	170,79	4,2%
p15r-v130	21139,6	3323,45	21139,6	3423,45	21139,6	21139,6	29,89	5,21	24,68	17	21139,6	0,39	21.021,23	216,57	0,6%
p16r-v130	18137	2811,06	18137	2911,06	18137,0	18137,0	33,73	5,56	28,17	18	18137	0,30	17.072,01	216,57	5,9%
p17r-v130	17693,2	2549,79	17693,2	2649,79	17693,2	17693,1	30,37	5,07	25,29	17	17693,2	0,38	16.888,81	178,40	4,5%
p18r-v130	18267,6	2631,64	18267,6	2781,64	18267,6	18267,5	37,04	5,65	31,39	18	18267,6	0,38	17.597,41	147,48	3,7%
p19r-v130	18457,2	2649,52	18457,2	2799,52	18457,2	18457,1	30,56	5,16	25,39	17	18457,2	0,30	17.967,60	208,81	2,7%
p20r-v130	20975,8	2988,18	20975,8	3138,18	20975,8	20975,8	31,63	5,17	26,46	17	20975,8	0,36	19.689,61	193,85	6,1%
p21r-v130	17287,8	4348,15	17287,8	4498,15	17287,8	17287,7	47,98	7,02	40,96	23	17287,8	0,38	16.696,01	145,04	3,4%
p22r-v130	18884,2	3772,88	18884,2	3922,88	18884,2	18884,1	40,68	5,91	34,77	19	18884,2	0,37	18.527,39	272,04	1,9%
p23r-v130	21953,8	4045,42	21953,8	4195,42	21953,8	21953,7	32,39	6,26	26,12	17	21953,8	0,32	20.842,21	190,04	5,1%
p24r-v130	18557,4	2438,79	18557,4	2588,79	18557,4	18557,4	26,72	4,79	21,93	15	18557,4	0,30	18.352,43	173,60	1,1%
p25r-v130	17500,4	2704,71	17500,4	2854,71	17500,4	17500,3	35,03	5,79	29,24	19	17500,4	0,30	16.822,40	214,61	3,9%
p26r-v130	20717,6	3393,23	20717,6	3543,23	20717,6	20717,5	28,44	4,87	23,57	16	20717,6	0,30	20.046,02	161,22	3,2%
p27r-v130	20179,6	3448,76	20179,6	3538,76	20179,6	20179,6	32,28	5,06	27,22	17	20179,6	0,30	19.295,42	177,04	4,4%
p28r-v130	18324,4	2476,82	18324,4	2566,82	18324,4	18324,4	33,17	5,16	28,01	17	18324,4	0,30	17.951,61	117,62	2,0%
p29r-v130	19342,2	2831,48	19342,2	2921,48	19342,2	19342,1	33,84	5,19	28,65	17	19342,2	0,94	18.818,41	161,39	2,7%
p30r-v130	16996,4	2614,34	16996,4	2704,34	16996,4	16996,4	37,15	6,05	31,10	20	16996,4	0,30	16.208,22	159,37	4,6%
<b>Média</b>		<b>3161,33</b>		<b>3261,67</b>			<b>34,45</b>	<b>5,41</b>	<b>29,04</b>	<b>18</b>		<b>0,39</b>		<b>180,16</b>	<b>3,3%</b>

Na Tabela 1, observa-se que a solução heurística da geração de colunas (integralizar as variáveis do PMR) tem melhores resultados que os limitantes superiores reportados no trabalho de Vasco (2012).



Da mesma forma, pode-se observar que o tempo computacional para resolver o modelo no *software* de propósito geral IBM CPLEX é significativamente maior que o tempo computacional da GC primal-dual, e a solução heurística obtida é igual à solução ótima.

## 5 Conclusões

O Problema de Alocação Dinâmica de Veículos (PADV) tem grande aplicabilidade em sistemas logísticos, especificamente em operações de transporte rodoviário de carga. Dado que exemplares de grande porte têm sido abordados unicamente com métodos puramente heurísticos (VASCO; MORABITO, 2016), o objetivo deste trabalho foi propor um método de solução baseado na decomposição de Dantzig-Wolfe, para resolver a relaxação linear do problema original. O método de geração de colunas, com estabilização por pontos interiores, mostrou-se efetivo na resolução dos exemplares. Os resultados mostraram-se promissores, tanto em termos do tempo computacional, quanto na qualidade de soluções factíveis obtidas. Como proposta de trabalhos futuros, pretende-se desenvolver um método *branch-and-price*, baseando-se na GC aqui proposta, de modo a obter soluções ótimas para o DVAP.

## Referências

- AHUJA, R.; MAGNANTI, T. L.; ORLIN, J. B. *Network flows : theory, algorithms, and applications*. Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall, 1993. ISBN 978-0136175490.
- BERTSIMAS, D.; TSITSIKLIS, J. *Introduction to Linear Optimization*. 1st. ed. [S.l.]: Athena Scientific, 1997. ISBN 1886529191.
- DEJAX, P. J.; CRAINIC, T. G. Survey paper—a review of empty flows and fleet management models in freight transportation. *Transportation Science*, v. 21, n. 4, p. 227–248, 1987. ISSN 0041-1655.
- FRANTZESKAKIS, L. F.; POWELL, W. B. A successive linear approximation procedure for stochastic, dynamic vehicle allocation problems. *Transportation Science*, v. 24, n. 1, p. 40–57, 1990. ISSN 0041-1655.
- GHIANI, G.; LAPORTE, G.; MUSMANNO, R. *Introduction to logistics systems planning and control*. Hoboken, NJ, USA: J. Wiley, 2004. ISBN 978-0470849163.
- GONDZIO, J.; GONZALEZ-BREVIS, P.; MUNARI, P. New developments in the primal-dual column generation technique. *European Journal of Operational Research*, v. 224, n. 1, p. 41–51, 2013.
- GONDZIO, J.; GONZÁLEZ-BREVIS, P.; MUNARI, P. Large-scale optimization with the primal-dual column generation method. *Mathematical Programming Computation*, v. 8, n. 1, p. 47–82, 2016.
- LÜBBECKE, M. E.; DESROSIERS, J. Selected topics in column generation. *Operations Research, INFORMS*, v. 53, n. 6, p. 1007–1023, nov 2005. ISSN 0030-364X.
- MUNARI, P.; GONDZIO, J. Column generation and branch-and-price with interior point methods. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 3, n. 1, 2015.
- POWELL, W. B. A stochastic model of the dynamic vehicle allocation problem. *Transportation Science*, v. 20, n. 2, p. 117–129, 1986. ISSN 0041-1655.
- POWELL, W. B.; CARVALHO, T. A. Dynamic control of logistics queueing networks for large-scale fleet management. *Transportation Science*, v. 32, n. 2, p. 90–109, 1998.



POWELL, W. B.; CARVALHO, T. A. Real-time optimization of containers and flatcars for intermodal operations. *Transportation Science*, v. 32, n. 2, p. 110–126, 1998. ISSN 0041-1655.

POWELL, W. B.; JAILLET, P.; ODONI, A. Stochastic and dynamic networks and routing. *Network Routing*, v. 8, p. 141–295, 1995.

POWELL, W. B.; SHEFFI, Y.; THIRIEZ, S. The dynamic vehicle allocation problem with uncertain demands. p. 357–374, 1984.

VANDERBECK, F. Implementing mixed integer column generation. In: \_\_\_\_\_. *Column Generation*. Boston, MA: Springer US, 2005. p. 331–358. ISBN 978-0-387-25486-9.

VASCO, R. A. *Otimização na alocação dinâmica de veículos no transporte rodoviário de cargas completas entre terminais*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de São Carlos, 2012.

VASCO, R. A.; MORABITO, R. Otimização na alocação dinâmica de veículos no transporte rodoviário de cargas completas entre terminais. *Gestão e Produção*, scielo, v. 21, p. 271 – 284, 06 2014. ISSN 0104-530X.

VASCO, R. A.; MORABITO, R. The dynamic vehicle allocation problem with application in trucking companies in brazil. *Computers & Operations Research*, v. 76, p. 118 – 133, 2016. ISSN 0305-0548.





## **Análise da ordem de acurácia do erro em soluções numéricas da equação de Poisson**

*Rafael de Lima Sterza*

*Universidade Estadual Paulista FCT/Unesp  
rlsterza@gmail.com*

*Beatriz Liara Carreira*

*Universidade Estadual Paulista FCT/Unesp  
bia.liara36@hotmail.com*

*Letícia Braga Berlandi*

*Universidade Estadual Paulista FCT/Unesp  
leticiaberlandi@gmail.com*

*Analice Costacurta Brandi*

*Universidade Estadual Paulista FCT/Unesp  
analice@fct.unesp.br*

**Resumo:** Neste trabalho são apresentados métodos para estimar o erro de soluções numéricas avaliando a ordem de acurácia através da ordem efetiva e a utilização de diferentes tipos de normas matriciais para a verificação do código computacional. Constatou-se que, apesar dessas normas serem equivalentes, a ordem de acurácia resultante pode ser distinta. Existem métodos numéricos capazes de encontrar aproximação para a solução de uma equação diferencial, em especial, para a equação de Poisson bidimensional. Porém a finalidade deste trabalho é explorar um método capaz de obter aproximações mais precisas e com baixo custo computacional, conhecido como método de diferenças finitas compactas, e verificar que o emprego da ordem efetiva pode ser diferente da ordem do método em si.

**Palavras-chave:** Métodos Numéricos e Aplicações. Método de Diferenças Finitas Compactas. Equação de Poisson. Ordem Efetiva.

### **Introdução**

As equações diferenciais elípticas estão relacionadas com problemas de equilíbrio que não dependem, em geral, do tempo. Como exemplos de equações elípticas têm-se problemas de vibração em membranas, problemas de difusão, entre outros (FORTUNA, 2012). A equação de Poisson representa um problema estacionário e com a necessidade de obtenção de soluções aproximadas para problemas desse tipo impulsionou o estudo de novas técnicas, dentre elas, o método de diferenças finitas compactas. Os esforços para calcular uma solução mais precisa tem dirigido a atenção dos pesquisadores para o desenvolvimento do método de diferenças finitas compactas que é um método conhecido por ter propriedades de alta ordem de precisão e baixo custo computacional, quando comparado com outros métodos numéricos (OKORO; OWOLOKO, 2010).

É comum a utilização de normas vetoriais em procedimentos de verificação numérica onde se estima, basicamente, o erro numérico envolvido e sua ordem de acurácia. A determinação da ordem de acurácia é importante para confirmação da ordem teórica do modelo numérico utilizado e para a estimativa da ordem de acurácia quando o resultado teórico é desconhecido. Ao se investigar a ordem de acurácia, para um número fixo de variáveis e intervalo de discretização, a escolha da norma a ser empregada pode acarretar diferentes resultados, e isso pode levar a interpretações equivocadas (MARTINS et al, 2013). Neste contexto, o objetivo deste trabalho é avaliar o uso de diferentes tipos de normas na

verificação do código computacional na solução da equação de Poisson bidimensional resolvida numericamente pelo método de diferenças finitas compactas e, além disso, verificar a ordem de acurácia do método através da ordem efetiva.

## Formulação Matemática

Uma das principais equações elípticas que representam os problemas de equilíbrio é a equação de Poisson dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y). \quad (1)$$

Uma característica dos problemas modelados por equações diferenciais parciais elípticas é que toda região  $\Omega$  seja imediatamente afetada por qualquer mudança no valor da variável dependente em um ponto do interior do domínio ou na fronteira  $\partial\Omega$ . Isso é equivalente a afirmar que as propriedades físicas de problemas elípticos se propagam em todas as direções dentro da região  $\Omega$ , afetando os pontos interiores, e por este motivo suas condições de contorno normalmente são especificadas ao longo de toda fronteira (FORTUNA, 2012).

A solução numérica de uma equação diferencial parcial necessita de condições auxiliares adequadas. A determinação dessas condições auxiliares é facilitada introduzindo-se o conceito de características. Em problemas com duas variáveis independentes  $x$  e  $y$ , por exemplo, características reais, se existirem, são curvas no plano  $x - y$ , pelas quais, informações se propagam (FORTUNA, 2012). As condições de contorno usualmente especificam os valores da função ou os valores de sua derivada normal ao longo do contorno  $\partial\Omega$ , ou uma mistura de ambos, que são, respectivamente, as condições de Dirichlet ( $u$  é conhecida em  $\partial\Omega$ ), de Neumann ( $\frac{\partial u}{\partial n}$  é conhecida em  $\partial\Omega$ ) e Robin ( $\alpha u = \beta \frac{\partial u}{\partial n}$  conhecida em  $\partial\Omega$ ). Em particular, considera-se neste trabalho uma região quadrada  $\Omega = \{(x, y) : a \leq x \leq b; a \leq y \leq b\}$  com condição de contorno  $u(x, y) = g(x, y)$  em  $\partial\Omega$ .

## Formulação Numérica

O problema em estudo é formulado por uma equação diferencial parcial do tipo estacionária e por condições auxiliares específicas. Considerando o fato de que nem sempre existe solução analítica, faz-se necessária a resolução do problema de modo numérico. Para tanto, o método de diferenças finitas e o método de diferenças finitas compactas são adotados para a discretização do domínio e das derivadas parciais do problema.

Um problema envolvendo uma equação diferencial pode ser resolvido por três tipos de abordagem. A abordagem analítica fica restrita a problemas simples e lineares. Problemas complexos tornam-se difíceis ou até mesmo impossíveis de se resolver analiticamente, por conta da insuficiência dos métodos existentes. A abordagem experimental é capaz de produzir resultados mais realísticos, em contrapartida possui limitações de ordem espacial, pois requer estruturas que suportem o experimento, dependendo na maioria das vezes, de processos operacionais caros e longos. Enquanto isso, a abordagem computacional é capaz de solucionar equações com alto nível de complexidade, não havendo restrições a geometrias e processos complicados. É sempre necessário um cuidado especial na construção da modelagem, para que de fato, ela seja uma equação que represente o fenômeno estudado. Erros de truncamento são inerentes ao processo, mas técnicas de convergência e estabilidade são incorporadas, garantindo a validade dos resultados.

A primeira etapa para resolução de qualquer método numérico envolvendo equações diferenciais parciais é discretizar a região onde se procura a solução. Para a discretização define-se uma malha, que é um conjunto finito de pontos pertencentes ao domínio, chamados nós da malha (CUMINATO, 2013).

## Método de Diferenças Finitas Compactas

Considerando uma malha retangular com espaçamento  $h$  e  $k$  nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, então tem-se que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{i,j} - \frac{h^4}{360} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \Big|_{i,j} + O(h^6), \quad (2)$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{k^2} - \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{i,j} - \frac{k^4}{360} \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \Big|_{i,j} + O(k^6). \quad (3)$$

Considerando o fato que  $u$  é a solução da equação (1), tem-se que

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{i,j} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{i,j} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_{i,j}, \quad (4)$$

da mesma forma

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{i,j} = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{i,j} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_{i,j}. \quad (5)$$

Ao substituir as equações (4) e (5) nas equações (2) e (3), respectivamente, e utilizando uma aproximação por diferenças finitas centradas na segunda derivada de  $f$ , obtém-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} - \frac{h^2}{12} \left( -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \Big|_{i,j} - \frac{h^4}{360} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \Big|_{i,j} + O(h^6), \quad (6)$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{k^2} - \frac{k^2}{12} \left( -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \Big|_{i,j} - \frac{k^4}{360} \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \Big|_{i,j} + O(k^6). \quad (7)$$

Perceba que é necessário uma aproximação para o termo  $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_{i,j}$ , que pode ser dado por

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_{i,j} = \frac{4u_{i,j}}{h^2 k^2} - 2 \left( \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}}{h^2 k^2} \right) + \frac{u_{i-1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j+1}}{h^2 k^2}. \quad (8)$$

Substituindo a equação (8), nas equações (6) e (7), somando as equações resultantes e em seguida, substituindo-a na equação (1), obtém-se

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{k^2} + \left( \frac{h^2 + k^2}{12} \right) \left[ \frac{4u_{i,j}}{h^2 k^2} - 2 \left( \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}}{h^2 k^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{u_{i-1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j+1}}{h^2 k^2} \right] = \frac{1}{12} (f_{i-1,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1} - 4f_{i,j}). \end{aligned} \quad (9)$$

Fazendo  $h = k$ , então a equação (9) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} (u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}) + \frac{2}{3} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) - \frac{10}{3} u_{i,j} = \\ & = -\frac{h^2}{12} (f_{i-1,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1} + 8f_{i,j}). \end{aligned} \quad (10)$$

A equação (10) representa o esquema de diferenças finitas compactas, com erro de truncamento local dado por

$$\tau_{i,j} = -\frac{h^4}{360} \left( \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \Big|_{i,j} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \Big|_{i,j} \right) + O(h^6),$$

em que o termo dominante do erro é  $h^4$ , então isso significa que a equação (10) é o esquema de diferenças finitas compactas de 4ª ordem. Para o método de diferenças finitas compactas de 6ª ordem, trabalha-se apenas para  $h = k$ . Inicialmente reescreve-se a equação (1)

$$-(\delta_x^2 u_{i,j} + \delta_y^2 u_{i,j} + \tau_{i,j}) = f_{i,j}, \quad (11)$$

onde  $\delta_x^2$  e  $\delta_y^2$  representa o operador de aproximação por diferenças finitas, ou seja, as equações (2) e (3), respectivamente. Na equação (11), trabalha-se com o termo  $\tau_{i,j}$

$$\tau_{i,j} = -\frac{h^2}{12} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{i,j} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{i,j} \right) - \frac{h^4}{360} \left( \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \Big|_{i,j} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \Big|_{i,j} \right) + O(h^6). \quad (12)$$

Substituindo as equações (4) e (5) na equação (12) e utilizando a equação (8), tem-se que

$$\tau_{i,j} = \frac{h^2}{12} [\nabla^2 f_{i,j} + 2(\delta_x^2 \delta_y^2 u_{i,j})] - \frac{h^4}{360} \left( \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \Big|_{i,j} + 5 \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} \Big|_{i,j} + 5 \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \Big|_{i,j} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \Big|_{i,j} \right) + O(h^6). \quad (13)$$

A expressão compacta de 6ª ordem requer mais uma aproximação, que pode ser obtida através da equação (1), então

$$\begin{aligned} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} &= -\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2}, & \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} &= -\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \\ \text{e} \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} &= -\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} - \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4}. \end{aligned} \quad (14)$$

Substituindo as equações (14) na equação (13) e fazendo as manipulações algébricas necessárias, obtém-se

$$\tau_{i,j} = \frac{h^2}{12} [\nabla^2 f_{i,j} + 2(\delta_x^2 \delta_y^2 u_{i,j})] + \frac{h^4}{360} (\nabla^4 f_{i,j} + 4\delta_x^2 \delta_y^2 f_{i,j}) + O(h^6). \quad (15)$$

Substituindo a equação (15) na equação (11), obtém-se o método de diferenças finitas compactas de 6ª ordem dada por

$$-\frac{10}{3} u_{i,j} + \frac{2}{3} A + \frac{1}{6} B = -\frac{h^2}{12} C + 5 \frac{h^6}{360} \delta_x^2 \delta_y^2 f_{i,j}, \quad (16)$$

onde

$$\begin{aligned} A &= u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}, \\ B &= u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j+1}, \\ C &= f_{i-1,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1} + 8f_{i,j}, \\ \delta_x^2 \delta_y^2 f_{i,j} &= \frac{4f_{i,j}}{h^4} - 2 \left( \frac{f_{i-1,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1}}{h^4} \right) + \frac{f_{i-1,j-1} + f_{i-1,j+1} + f_{i+1,j-1} + f_{i+1,j+1}}{h^4}. \end{aligned}$$

## Norma Matricial

Por definição, uma norma matricial em  $\mathbb{R}^{n \times n}$  é uma função que para cada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  associa a cada matriz um número real não negativo que satisfaz as propriedades, para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$

- i)  $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ,
- ii)  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ ,
- iii)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ ,
- iv)  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

Neste trabalho, as normas matriciais utilizadas são

$$1. \text{ Norma Linha: } \|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad (17)$$

$$2. \text{ Norma Coluna: } \|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad (18)$$

$$3. \text{ Norma Euclidiana: } \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n (a_{ij})^2}. \quad (19)$$

As normas do erro numérico foram utilizadas para a verificação do código computacional.

## Ordem de Acurácia

O erro numérico de um problema pode ser calculado como a diferença entre a solução analítica  $u$  e a sua solução numérica  $U$ , entretanto ao se considerar o emprego de um método de discretização em um domínio de cálculo  $\omega$ , o erro de discretização pode ser considerado a principal fonte do erro numérico (MARTINS et al., 2013), o erro numérico  $E$ , pode ser representado por (MARCHI; SILVA, 2002)

$$E = u - U = c_1 h^{P_1} + c_2 h^{P_2} + c_3 h^{P_3} + c_4 h^{P_4} + \dots \quad (20)$$

onde os coeficientes  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  são números reais obtidos em função da variável dependente do problema unidimensional e de suas derivadas, mas não depende de  $h$ , que é o espaçamento da malha.

As verdadeiras ordens ( $P_v$ ) são definidas como os expoentes de  $h$  dos termos não nulos na equação do erro de truncamento (20) e seguem a relação  $1 \leq P_1 < P_2 < P_3 \dots$  e são números inteiros positivos. Em geral, constituem uma progressão aritmética, ou seja, a diferença entre ordens sucessivas é uma constante. Normalmente, o número de ordens verdadeiras é infinito porque a equação (20), é constituída por uma quantidade infinita de termos não nulos (MARCHI; SILVA, 2002).

O menor expoente  $P_1$  é denominado ordem assintótica e, muitas vezes, é tratada na literatura por ordem do erro ou ordem de acurácia e denotada por  $P$ . Quando  $h \rightarrow 0$  na equação (20),  $c_1 h^{P_1}$  é a principal componente do erro numérico, dessa forma, toma-se  $P = P_1$ .

Para problemas bidimensionais, a equação (20) será reescrita considerando os eixos  $x$  e  $y$ ,  $h_x = h_y = h$ ,  $P_x = P_y = P$ , obtendo assim (MARCHI; SILVA, 2005)

$$E = u - U = c_x h^{P_x} + c_y h^{P_y} = (c_x + c_y) h^P = d_{x,y} h^P. \quad (21)$$

Dessa forma,  $P$  pode ser calculado através da ordem efetiva  $P_E$ . A ordem efetiva é definida como a inclinação local da curva do erro de discretização da solução numérica versus o tamanho  $h$  dos elementos da malha num gráfico em escala logarítmica. Então, a ordem efetiva  $P_E$  pode ser calculada por



$$P_E = \frac{\ln \left[ \frac{E(U_2)}{E(U_1)} \right]}{\ln(q)}, \quad (22)$$

onde  $U_1$  e  $U_2$  são soluções numéricas obtidas em malhas fina e grossa, respectivamente e  $q$  é a razão  $q = \frac{h_2}{h_1}$  (OLIVEIRA, 2010).

## Resultados Numéricos

Considerando a equação de Poisson bidimensional,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \sin \left( \frac{\pi}{2} x \right) \sin \left( \frac{\pi}{2} y \right), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (23)$$

com condições do tipo Dirichlet e a solução analítica da equação (23) é dada por

$$u(x, y) = \sin \left( \frac{\pi}{2} x \right) \sin \left( \frac{\pi}{2} y \right).$$

As Tabelas 1 e 2 apresentam os resultados numéricos para cinco diferentes refinamentos da malha do problema simulado, em que  $\|E\|_\infty$ ,  $\|E\|_1$  e  $\|E\|_2$  representam as normas linha, coluna e Euclidiana, respectivamente, do erro numérico. E, ainda,  $P_E$  representa a ordem efetiva do método numérico avaliado.

Tabela 1: Representação das normas e da ordem efetiva para diferentes tipos de espaçamento  $h$  utilizando o método compacto de 4ª ordem.

$h$	$\ E\ _\infty$	$\ E\ _1$	$\ E\ _2$	$P_E$
0.25	2.7372e-05	2.7372e-05	2.4086e-05	-
0.125	3.7834e-06	3.7834e-06	3.0540e-06	3.8735
0.0625	4.7980e-07	4.7980e-07	3.8259e-07	3.9976
0.0313	6.0292e-08	6.0292e-08	4.7846e-08	3.9943
0.0156	7.5453e-09	7.5453e-09	5.9815e-09	3.9994

Nota-se na Tabela 1 que a ordem efetiva  $P_E$  do método está próxima à verdadeira ordem do método numérico utilizado que é de 4ª ordem. E, além disso, analisando-se as normas da matriz do erro numérico, quando se faz o refinamento da malha a norma tende a diminuir ainda mais, garantindo a eficiência do método, já que esses valores estão entre  $10^{-5}$  e  $10^{-9}$ . Agora, os resultados numéricos simulados utilizando o método de diferenças finitas compactas de 6ª ordem são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2: Representação das normas e da ordem efetiva para diferentes tipos de espaçamento  $h$  utilizando o método compacto de 6ª ordem.

$h$	$\ E\ _\infty$	$\ E\ _1$	$\ E\ _2$	$P_E$
0.25	2.5917e-07	2.5917e-07	2.2806e-07	-
0.125	8.7494e-09	8.7494e-09	7.0626e-09	5.9072
0.0625	2.7579e-10	2.7579e-10	2.1992e-10	6.0059
0.0313	8.6555e-12	8.6555e-12	6.8695e-12	5.9961
0.0156	2.4769e-13	2.4609e-13	1.9353e-13	5.8746

Pode-se observar que os resultados apresentados na Tabela 2 são equivalente ao método de 4ª ordem. Os valores da ordem efetiva condizem com o valor da ordem verdadeira, que neste caso é 6, e, além



disso, os valores dos resultados das normas são pequenos, já que estão entre  $10^{-7}$  e  $10^{-13}$ , garantindo a eficiência do método numérico estudado.

## Conclusão

Este trabalho apresentou uma análise do procedimento numérico empregado na obtenção de resultados numéricos para a solução da equação de Poisson bidimensional. A análise foi realizada através do estudo dos erros numéricos considerando as normas - norma linha, norma coluna e norma Euclidiana - e pela obtenção da ordem efetiva que foi comparada com a verdadeira ordem do método.

Neste contexto, concluiu-se que o código computacional utilizado neste trabalho foi coerente e apresentou bons resultados, pois com o refinamento da malha, as normas dos erros numéricos tenderam a diminuir e a ordem efetiva ficou próxima da verdadeira ordem dos métodos estudados.

## Agradecimentos

Agradecemos à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pelo apoio financeiro no desenvolvimento deste trabalho, processo nº 2016/17849-7.

## Referências

CUMINATO, J.A.; MENEGUETTE Jr., M. **Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

FORTUNA, A.O. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações**. 2.ed. São Paulo: EDUSP, 2012.

MARCHI, C. H.; SILVA, A. F. C. Journal of the Brazilian Soc. of Mech. Sc. and Eng. Multi-dimensional Discretization Error Estimation for Convergent Apparent Order, v. 27, pp. 432-439, (2005).

MARCHI, C. H.; SILVA, A. F. C. Numerical Heat Transfer. **Unidimensional Numerical Solution Error Estimation for Convergent Apparent Order**, part B, v. 42, p. 167-188, (2002).

MARTINS, M. A. et al. Efeito do tipo de norma sobre a ordem de acurácia do erro de soluções numéricas em CFD. In: Congresso de Matemática Aplicada e Computacional, 2013. Bauru. **Anais...** Bauru: Unesp, 2013. p. 99-103.

OKORO, F. M.; OWOLOKO, A. E. Journal of Mathematics and Technology. **Compact Finite Difference scheme for Poisson equation using direct solver**, v. 3, p. 130-138, 2010.

OLIVEIRA, F. **Efeito das malhas anisotrópicas bidimensionais sobre o desempenho do método Multigrid geométrico**. 2010. 204f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - PGMEC-UFPR, Curitiba, 2010.



## Análise de métodos numéricos na solução de problemas estacionários

*Leticia Braga Berlandi*

*Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"; Faculdade de Ciências e Tecnologia  
leticiaberlandi@gmail.com*

*Rafael de Lima Sterza*

*Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"; Faculdade de Ciências e Tecnologia  
rlsterza@gmail.com*

*Beatriz Liara Carreira*

*Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"; Faculdade de Ciências e Tecnologia  
bia.liara36@hotmail.com*

*Analice Costacurta Brandi*

*Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"; Faculdade de Ciências e Tecnologia  
analice@fct.unesp.br*

**Resumo:** A teoria das equações diferenciais é objeto de intensa atividade de pesquisa, pois apresenta aspectos puramente matemáticos e uma multiplicidade de aplicações. O presente trabalho consiste na resolução da equação diferencial parcial elíptica de Poisson, em que foi considerada a condição de contorno do tipo Dirichlet para a obtenção da solução numérica do problema bidimensional, considerando um domínio quadrado. Na obtenção da solução numérica foram utilizados dois métodos iterativos, o método de Gauss-Seidel e o método dos gradientes conjugados que foram implementados no software MatLab e o resultado obtido foi comparado com a solução analítica conhecida da literatura. Dessa forma, foi verificado se os métodos numéricos utilizados foram eficientes para a solução desse tipo de problema.

**Palavras-chave:** Métodos Numéricos e Aplicações. Equações Diferenciais Parciais. Método de Gauss-Seidel. Método dos Gradientes Conjugados.

### 1. Introdução

As equações elípticas estão relacionadas com problemas de equilíbrio que não dependem, em geral, do tempo. Como exemplos de equações elípticas temos as equações que descrevem problemas de pressão, problemas em elasticidade, problemas de camada limite, problemas de vibração em membranas e problemas de difusão. De maneira simplificada, problemas elípticos caracterizam-se pela propagação de suas propriedades físicas em todas as direções coordenadas indistintamente, ao contrário das equações parabólicas e hiperbólicas onde essas propriedades propagam-se em direções preferenciais. Daí o porquê das condições de fronteira de um problema elíptico serem normalmente especificadas ao longo de toda a fronteira.

Os métodos numéricos consistem em uma ferramenta que auxilia na obtenção de soluções numéricas, em geral aproximadas, de diversos problemas que se encontram no mundo real. Como a utilização de computadores de baixo custo com uma alta capacidade de processamento, muitas das atividades da ciência têm feito uso cada vez mais intensivo dos métodos computacionais na resolução de problemas reais, para os quais as soluções manuais são impraticáveis, imprecisas, ou ainda, são muito custosas em relação ao tempo de execução. Em situações da vida real, tem-se a necessidade constante de encontrar soluções matemáticas para problemas que são modelados por equações diferenciais parciais, uma vez que esse tipo de equação ocorre com muita frequência na explicação de fenômenos da natureza.

Neste trabalho, o interesse está em resolver uma equação diferencial parcial elíptica com condições de contorno do tipo Dirichlet por toda a fronteira. Além disso, estuda-se métodos numéricos iterativos na resolução de sistemas de equações lineares, gerados a partir da discretização através do método de diferenças finitas. A implementação do algoritmo foi através do software MatLab, em que uma pequena análise do erro, comparações entre os métodos numéricos e a solução analítica, conhecida da literatura, foram realizadas.

## 2. Formulação Matemática

Inicialmente, considera-se  $R$  uma região do plano e  $\Omega R$  sua fronteira. Se  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  na equação

$$a(x,y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = d\left(x,y,u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad (1)$$

tem-se uma equação diferencial parcial (EDP) elíptica, para todo ponto  $(x,y)$  pertencente a região limitada do plano  $R$ .

Sabe-se que muitos problemas práticos são governados pela equação (1), com  $a = c = -1$  e  $b = 0$ . Fazendo  $d = f(x,y)$ , obtém-se a equação de Poisson, dada por

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y). \quad (2)$$

A Equação (1) possui infinitas soluções pois, sendo linear e tendo como solução  $u$  e  $v$ , tem-se que  $w = \alpha u + \beta v$  também é solução dessa equação. Dessa forma, para que a solução seja única, deve-se especificar as condições de contorno com a qual pretende-se trabalhar num determinado problema. Em geral, existem três tipos de condições de contorno na qual uma equação diferencial pode estar sujeita: Dirichlet, Neumann e Robin ou Mista.

O método das diferenças finitas consiste em substituir as derivadas parciais presentes na equação diferencial por aproximações por diferenças finitas. Para isto, é necessário que os pontos onde essas diferenças são calculadas sejam pré-estabelecidos. Ou seja, para a resolução computacional é necessário discretizar o domínio, com a criação de uma malha de pontos.

Para ilustrar este processo, considera-se a equação de Poisson com condição de contorno tipo Dirichlet dada por

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= -\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x,y), \quad (x,y) \in R, \\ u &= g(x,y), \quad (x,y) \in \Omega R. \end{aligned} \quad (3)$$

definida no retângulo  $R = \{(x,y), 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$  sobre a fronteira  $\Omega R$  desse retângulo.

A discretização de uma equação estacionária nos fornece um sistema de equações que pode ser resolvido por meio de métodos diretos e iterativos. Para ilustrar como esta discretização é realizada na prática considera-se a equação (2).

Primeiramente, para aproximar  $u_{xx}$  e  $u_{yy}$  por diferenças finitas cobre-se a região  $R$  com uma malha. Escolhe-se a opção mais óbvia que consiste em traçar linhas paralelas aos eixos coordenados. Os pontos dessa malha serão denotados por  $(x_i, y_j), x_i = ih, y_j = jk, i = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, M$ , onde  $h = \frac{a}{N}$  representa o espaçamento na direção  $x$  e  $k = \frac{b}{M}$  representa o espaçamento na direção  $y$ . Denota-se por  $R_\delta$  os pontos da malha interiores a  $R$ , isto é,

$$R_\delta = \{(x_i, y_j), 0 < i < N, 0 < j < M\},$$

e por  $\Omega R_\delta$  os pontos da malha que estão sobre a fronteira, ou seja,

$$\Omega R_\delta = \{(x_i, y_j), (i = 0, N, 0 \leq j \leq M) \text{ e } (0 \leq i \leq N, j = 0, M)\}.$$

Pode-se agora aproximar as derivadas da equação (2) da seguinte forma: a equação (2) é válida para todos os pontos de  $R$ , então em particular para um ponto genérico de  $R_\delta$  pode-se escrever,

$$-[u_{xx}(x_i, y_j) + u_{yy}(x_i, y_j)] = f(x_i, y_j). \quad (4)$$

Assim, pode-se aproximar as derivadas por:

$$\begin{cases} u_{xx}(x_i, y_j) \cong \frac{u(x_i + h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i - h, y_j)}{h^2} \\ u_{yy}(x_i, y_j) \cong \frac{u(x_i, y_j + k) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j - k)}{k^2} \end{cases} \quad (5)$$

Substituindo essas aproximações em (4), obtém-se:

$$-\left[ \frac{u(x_i+h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i-h, y_j)}{h^2} + \frac{u(x_i, y_j+k) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j-k)}{k^2} \right] \cong f(x_i, y_j). \quad (6)$$

Seguindo a notação utilizada na literatura, denota-se por  $u_{(i,j)}$  o valor da solução no ponto  $(x_i, y_j)$  e por  $U_{(i,j)}$  a solução da equação de diferenças:

$$-\left( \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} - U_{i,j-1}}{k^2} \right) = f_{i,j}. \quad (7)$$

Para pontos adjacentes à fronteira, a equação (7) envolve pontos na fronteira que serão obtidos diretamente da condição de Dirichlet, ou seja,

$$u(x_i, y_j) = g(x_i, y_j), \quad \text{para todo } (x_i, y_j) \in \Omega R_\delta.$$

Para simplificar a notação, introduz-se o operador:

$$-\Delta_\delta U_{i,j} = -\left[ \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} - U_{i,j-1}}{k^2} \right].$$

Com essa notação, a equação (7) pode ser escrita como

$$-\Delta_\delta U_{i,j} = f(x_i, y_j), \quad (x_i, y_j) \in R_\delta, \quad (8)$$

sendo que sua condição de contorno é dada por

$$U_{i,j} = g(x_i, y_j), \quad \text{para todo } (x_i, y_j) \in \Omega R_\delta. \quad (9)$$

A equação (8) quando aplicada nos pontos internos de  $R_\delta$ , resulta num sistema linear simétrico com  $(N-1) \times (M-1)$  equações. Espera-se que resolvendo esse sistema linear, os valores  $U_{i,j}$  encontrados sejam uma boa aproximação para  $u_{i,j}$ . De fato, será visto que a solução obtida por (8) converge para  $u_{i,j}$ , quando a malha for refinada. O sistema linear proveniente de (8) pode ser escrito na forma matricial  $AU = B$  onde

$$U = (U_{1,1}, U_{2,1}, \dots, U_{N-1,1}, U_{1,2}, U_{2,2}, \dots, U_{N-1,2}, \dots, U_{1,M-1}, U_{2,M-1}, \dots, U_{N-1,M-1})^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & & c & & & & \\ b & a & b & & & \ddots & & 0 \\ & b & a & b & & & 0 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & c \\ c & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \ddots & & & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & & & & b & a & b \\ & & & c & & & b & a \end{pmatrix},$$

e

$$B = \begin{pmatrix} f(x_1, y_1) + \frac{g(x_0, y_1)}{h^2} + \frac{g(x_1, y_0)}{k^2} \\ f(x_2, y_1) + \frac{g(x_2, y_0)}{k^2} \\ \vdots \\ f(x_{N-1}, y_1) + \frac{g(x_{N-1}, y_1)}{h^2} + \frac{g(x_{N-1}, y_0)}{k^2} \end{pmatrix}.$$

Na matriz  $A$ , os números  $a, b$  e  $c$  são os coeficientes da discretização de 5 pontos e são dados por:

$$a = \frac{2}{h^2} + \frac{2}{k^2}, \quad b = -\frac{1}{h^2}, \quad c = -\frac{1}{k^2}.$$

Os conceitos de métodos explícitos ou implícitos no tempo não são aplicáveis às equações elípticas devido à ausência da integração temporal. Dessa forma, é sempre necessário resolver um sistema de equações lineares e, como a matriz de coeficientes do sistema não é, em geral, tridiagonal, a solução é obtida por métodos iterativos.



### 3. Formulação Numérica

A discretização de modelos matemáticos que aparecem em dinâmica dos fluidos computacional gera grandes sistemas de equações algébricas do tipo  $Ax = b$  e a resolução de tais sistemas por métodos diretos não é recomendável, uma vez que a inversão da matriz dos coeficientes é um processo muito caro. Por esta razão, o uso de métodos iterativos é adotado nesse tipo de problema.

Métodos iterativos resultam da aplicação repetida de um algoritmo, em geral simples, que a partir de uma aproximação conhecida constrói uma nova, mais próxima da solução exata.

Como já foi dito, os métodos iterativos são muito aplicados na solução do sistema  $Ax = b$  quando a matriz  $A$  é esparsa e, nesse caso, pode-se programar esses métodos levando-se em consideração os zeros de  $A$ . Outra característica muito positiva é que os métodos iterativos são auto-corrigíveis, isto é, sua convergência independente da aproximação inicial. Todo método iterativo começa com uma aproximação inicial  $x^{(0)}$  que é sucessivamente modificada de acordo com alguma regra. Para que seja útil, a iteração deve convergir mas, só será considerada efetiva se a convergência for rápida.

Através de um método iterativo obtém-se uma sequência de aproximações  $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots$  para a solução do sistema original  $Ax = b$ . Uma vez que  $x^{(k)}$  esteja suficientemente próximo da solução exata de acordo com uma margem de tolerância aceita, para-se o processo de iteração e aceita-se  $x^{(k)}$  como a solução aproximada adequada para o problema. Por exemplo, o critério de parada pode ser estabelecido através de uma cota de tolerância, ou seja,  $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \epsilon$ .

Como visto, para a resolução numérica de equações elípticas, em especial para a equação de Poisson, é necessário a utilização de métodos iterativos para se obter os resultados e, os métodos iterativos escolhidos e utilizados no presente trabalho foram os métodos de Gauss-Seidel e dos gradientes conjugados. Uma breve descrição de tais métodos segue abaixo.

#### 3.1 Método de Gauss-Seidel

Quando se trata de solução de sistemas lineares, em certos casos, os métodos iterativos são melhores que os métodos exatos, por exemplo quando a matriz dos coeficientes é esparsa. Estes métodos também são mais econômicos, pois requerem um gasto computacional menor. Além disso, são capazes de se autocorrigirem, isto é, sua convergência independe da aproximação inicial.

Para resolver iterativamente um sistema linear da forma  $Ax = b$ , onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

primeiramente decompõe-se a matriz  $A$  de tal forma que

$$A = L + D + U, \quad (10)$$

em que  $L$  é a matriz triangular estritamente inferior,  $D$  é a matriz diagonal e  $U$  é a matriz triangular estritamente superior

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

A partir disso, a matriz  $A$  é decomposta na soma

$$A = M + N, \quad (11)$$

e escreve-se o sistema na forma  $Mx = b - Nx$ .

A matriz  $M$  é escolhida propositalmente de maneira que seja invertível facilitando a resolução do sistema. Por exemplo,  $M$  pode ser diagonal, triangular ou tridiagonal. O método iterativo, então, é definido por

$$Mx^{(k)} = b - Nx^{(k-1)}, \quad \text{com } k = 1, 2, \dots \quad (12)$$

sendo  $x^{(0)}$  uma aproximação inicial qualquer e  $k$  o número de iterações, e então  $x^{(k)}$  e  $x^{(k-1)}$  são vetores de  $n$  componentes avaliados na iteração  $k$  e na iteração anterior, respectivamente.

Dessa forma, o método de Gauss-Seidel considera

$$M = L + D \quad \text{e} \quad N = U.$$

Isso permite escrever

$$Ax = b \Leftrightarrow (M + N)x = b \Leftrightarrow (L + D)x = b - Ux.$$

Portanto, escrito na forma matricial o método de Gauss-Seidel consiste em

$$Dx^{(k)} = b - Lx^{(k)} - Ux^{(k-1)},$$

ou ainda,

$$(L + D)x^{(k)} = b - Ux^{(k-1)},$$

$$x^{(k)} = (L + D)^{-1}b - (L + D)^{-1}Ux^{(k-1)}. \quad (13)$$

onde a Equação (13) representa o método de Gauss-Seidel na forma matricial. E, conseqüentemente, na forma pontual pode ser escrito como

$$x_i^{(k)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j}x_j^{(k-1)}}{a_{i,i}}. \quad (14)$$

com  $i = 1, 2, \dots, n$ , onde a Equação (14) representa o método de Gauss-Seidel na forma pontual.

### 3.2 Método dos Gradientes Conjugados

O método dos gradientes conjugados é um algoritmo para encontrar o mínimo local de uma função de  $n$  variáveis, supondo que o gradiente da função possa ser calculado. Ele usa direções conjugadas (ortogonais) ao invés do gradiente local para buscar o mínimo. É um método efetivo para a resolução de sistemas matriciais com matrizes simétricas e definidas positivas, ou seja,  $A^T = A$  e  $x^T Ax > 0$ , para qualquer  $x$  não nulo. Este é um método iterativo, então ele pode ser aplicado a sistemas esparsos que são grandes demais para ser tratados por métodos diretos.

O método dos gradientes conjugados tem por objetivo uma convergência mais rápida que a do método dos gradientes. A ideia básica dos métodos do tipo gradiente, para resolver o sistema  $Ax = b$  é minimizar a função de  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,

$$F(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x, \quad (15)$$

com  $x \in \mathbb{R}^n$ . O vetor  $x^*$  é uma solução do sistema de equações lineares se, e somente se,  $x^*$  minimiza  $F$ . Ao derivar  $F$  da equação (15) em relação ao vetor  $x$  e igualar a zero, obtém-se

$$\nabla F(x^*) = Ax^* - b = 0, \quad (16)$$

ou seja, o método dos gradientes conjugados soluciona o sistema de equações lineares quando encontra o mínimo de  $F$ . Inicia-se o método dos gradientes conjugados escolhendo-se uma solução inicial  $x_0 = b - Ax_0$  e  $d_1 = r_0$ , em que  $r_k$  é o vetor resíduo na iteração  $k$  e  $d_k$  é o vetor de direção de busca na iteração  $k$ , com  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ . O método dos gradientes conjugados constrói os vetores  $r$  e  $d$  a cada iteração, por

$$r_k = r_{k-1} - \alpha_k A d_k, \quad (17)$$

e

$$d_{k+1} = r_k + \beta_k d_k. \quad (18)$$

Os escalares  $\alpha$  e  $\beta$  das equações (17) e (18), respectivamente, são dados por

$$\alpha_k = \frac{r_{k-1}^T r_{k-1}}{d_k^T A d_k}, \quad (19)$$

e

$$\beta_k = \frac{r_k^T r_k}{r_{k-1}^T r_{k-1}}. \quad (20)$$

A solução em cada iteração é dada por

$$x_k = x_{k-1} + \alpha_k d_k. \quad (21)$$

Os vetores  $r$  e  $d$  auxiliam o método dos gradientes conjugados na busca do mínimo de  $F$ , em que cada iteração a solução  $x_k$  aproxima-se mais de  $x^*$ , uma vez que para se obter um resultado coerente e preciso com um processo iterativo é necessário que a cada iteração a resposta se aproxime cada vez mais da solução real. Com as equações (17), (18), (19), (20) e (21), forma-se o algoritmo iterativo do método dos gradientes conjugados. Esse método converge para a solução em no máximo  $n$  iterações.

## 4. Resultados Numéricos

No presente trabalho uma equação diferencial parcial elíptica foi considerada e resolvida pelo método de diferenças finitas, e o sistema linear proveniente dessa discretização foi resolvido pelos métodos de Gauss-Seidel e Gradientes Conjugados. Considera-se o problema elíptico

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2. \quad (22)$$

Considerando um domínio quadrado, ou seja,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$  foi resolvido o problema elíptico bidimensional (22), com condições de contorno Dirichlet, ou seja,  $u = 0$  em todos os lados do quadrado.

As soluções aproximadas foram obtidas para  $u$  com  $h = k = 0, 1$  e  $0,05$ . E, ainda, o sistema linear proveniente da discretização foram resolvidos pelos métodos de Gauss-Seidel e Gradientes Conjugados, em que as soluções numéricas foram comparadas com a solução analítica:

$$u(x, y) = 1 - y^2 - \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \operatorname{sech}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) \cosh\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi y}{2}\right). \quad (23)$$

O objetivo aqui é obter a solução da EDP elíptica bidimensional dada pela equação (22). Para isso, considera-se também  $R_\delta$  os pontos da malha interiores a  $R$ , isto é,  $R_\delta = \{(x_i, y_j), 0 < i < N, 0 < j < M\}$  e por  $\Omega R_\delta$  os pontos da malha que estão sobre a fronteira, ou seja,  $\Omega R_\delta = \{(x_i, y_j), (i = 0, N, 0 \leq j \leq M) \text{ e } (0 \leq i \leq N, j = 0, M)\}$ .

A equação (22) é conhecida como equação de Poisson e é através dela que baseia-se a solução do sistema de equações lineares que aqui estão sendo discutidos. O enunciado do problema fornece a informação de que deve-se considerar um domínio quadrado  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ , com condições de contorno do tipo Dirichlet  $u(x, y) = 0$  por toda a fronteira  $\Omega R$ .

Além disso, foram encontradas soluções aproximadas para  $u$  com diferentes espaçamentos  $h = k = 0.1$  e  $h = k = 0.05$ , para que seja possível a comparação entre a solução numérica e a solução analítica em diferentes contextos. A seguir, alguns resultados numéricos obtidos através dos métodos de Gauss-Seidel e gradientes conjugados são apresentados.

Aplicando o método de Gauss-Seidel no sistema linear proveniente da discretização da equação de Poisson, com o espaçamento  $h = k = 0.1$  e  $0.05$ , tem-se

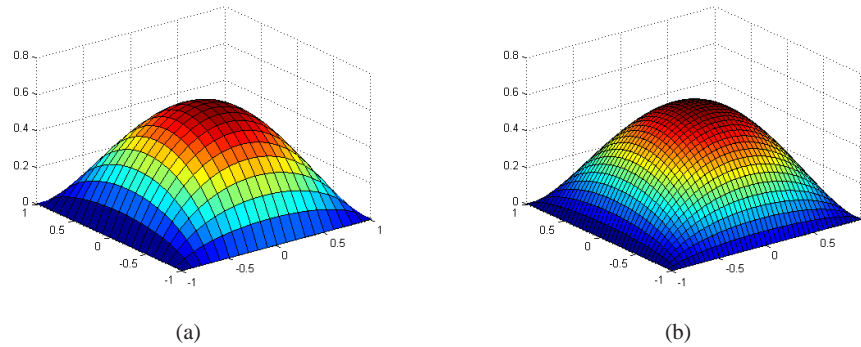


Figura 1: Solução da equação de Poisson através do método de Gauss-Seidel, com (a)  $h = 0,1$  e (b)  $h = 0,05$ .

Agora, aplicando o método dos gradientes conjugados no sistema linear proveniente da discretização da equação de Poisson, com o espaçamento  $h = k = 0,1$  e  $0,05$ , tem-se

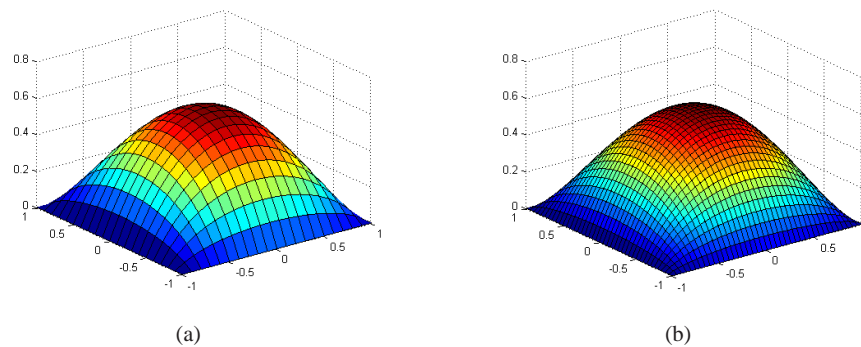


Figura 2: Solução da equação de Poisson através do método dos gradientes conjugados, com (a)  $h = 0,1$  e (b)  $h = 0,05$ .

Para  $h = k = 0,1$  e  $0,05$ , as matrizes  $A$  e  $B$  geradas ( $A$  com os coeficientes do sistema linear e  $B$  com a solução do sistema) são esparsas e, portanto, optou-se em mostrar apenas os gráficos resultantes.

Sabe-se que o erro absoluto é dado por

$$E = \max_{1 \leq i, j \leq N-1} |u_{i,j} - U_{i,j}|.$$

Dessa forma, na tabela abaixo pode-se observar a distribuição do erro máximo absoluto cometido pelos métodos numéricos, com diferentes espaçamentos.

Tabela 1: Comparação entre os valores do maior erro absoluto cometido pelos métodos numéricos.

Espaçamento	Gradientes Conjugados	Gauss-Seidel
0,1	0,0012	0,0012
0,08	$7,3961 \cdot 10^{-4}$	$7,6432 \cdot 10^{-4}$
0,05	$2,9001 \cdot 10^{-4}$	$3,1491 \cdot 10^{-4}$
0,04	$1,8566 \cdot 10^{-4}$	$4,2931 \cdot 10^{-4}$

A partir da Tabela 1, pode-se concluir que ambos os métodos se aproximam da solução analítica. Porém, pensando em uma melhor aproximação, o método dos gradientes conjugados se sobressai em relação ao método de Gauss-Seidel. Isso decorre da observação do maior erro absoluto cometido pelos métodos numéricos, onde o método dos gradientes conjugados apresenta um erro menor quando comparado ao método de Gauss-Seidel.



Além disso, a convergência do método dos gradientes conjugados deu-se em um menor número de iterações para todos os espaçamentos que foram utilizados neste trabalho. Para  $h = k = 0,1$ , a solução do sistema através do método dos gradientes conjugados foi obtida depois de o método ter realizado 46 iterações, enquanto que a solução através do método de Gauss-Seidel foi obtida depois de 412 iterações terem sido realizadas. Para  $h = k = 0,08$ , o método dos gradientes conjugados realizou um total de 57 iterações e o método de Gauss-Seidel realizou 644 iterações. Para  $h = k = 0,05$ , o método dos gradientes conjugados realizou 96 iterações, enquanto que o método de Gauss-Seidel realizou 1.649 iterações. Por fim, com  $h = k = 0,04$ , o método dos gradientes conjugados convergiu depois de ter realizado 120 iterações, enquanto que a solução obtida através do método de Gauss-Seidel foi dada depois de 2.000 iterações.

## Conclusões

O presente trabalho teve por objetivo estudar a equação de Poisson, num domínio bidimensional. Além disso, objetivou-se estudar os métodos de Gauss-Seidel e dos gradientes conjugados. Estes foram utilizados no cálculo da solução aproximada do sistema linear obtido a partir da discretização da equação de Poisson, com condição de contorno tipo Dirichlet.

Para a obtenção de soluções aproximadas, diferentes espaçamentos foram considerados e ambos os métodos foram eficazes na solução da equação. Isso decorre do fato de que as soluções numéricas se deram de maneira próxima quanto à solução analítica do problema, resultando em um erro que pode ser considerado desprezível. Além disso, pôde-se constatar que quanto maior o refinamento da malha, melhor a solução numérica do problema analisado.

## Referências

- CUMINATO, J. A. ; MENEGUETTE, M. **Discretização de Equações Diferenciais Parciais: técnicas de diferenças finitas**. 1. ed. v. 1. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- FORTUNA, A. de O. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Flúidos: Conceitos Básicos e Aplicações**. 2. ed. São Paulo: Edusp, 2012.
- GILAT, A ; SUBRAMANIAM, V. **Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas: Uma introdução com aplicações usando o MATLAB**. Porto Alegre: Bookman, 2008.



## Análise de Robustez e Modelagem em Máquina de Estado da Codificação 8b/10b

*Reis, Victor Afonso*

*Universidade Estadual Paulista “Júlio Mesquita Filho”; Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira  
victor.afonsoreis35@gmail.com*

*Ramalho, Lucas Arruda*

*Universidade Estadual Paulista “Júlio Mesquita Filho”; Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira  
lucasarrudaramalho@gmail.com*

*Shinoda, Ailton Akira*

*Universidade Estadual Paulista “Júlio Mesquita Filho”; Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira  
shinoda@dee.feis.unesp.br*

**Resumo:** Em sistemas com alta taxa de eventos, onde a informação provém de um grande número de sensores e os eventos de interesse são raros, usualmente uma codificação 8b/10b é recomendada para implementação no canal de transmissão. Para uma sequência digital gerada e transmitida em alta velocidade, pode ocorrer uma série de problemas na transmissão. Estes problemas são caracterizados por ruídos devido a radiações, interferências eletromagnéticas, ionizações indesejáveis, atenuações e uma dessincronização entre o transmissor e receptor dada por uma longa sequência de níveis lógicos, zeros (0's) ou um (1's), no canal de transmissão. Esta longa sequência interfere no sincronismo dos circuitos adicionais, sendo necessário um balanceamento nos *bits* transmitidos. Neste projeto é realizado um estudo da codificação 8b/10b através de um sistema implementado em software Matlab™ dentro do ambiente do *Simulink*. Além disso, o sistema foi também descrito na linguagem de descrição de hardware VHDL usando o software Vivado™. Pelo estudo da codificação obteve-se uma alta taxa de detecção de erros no canal de transmissão, possibilitando reduzir drasticamente a porcentagem de erros transmitidos por meio de outros circuitos.

**Palavras-chave:** VHDL, FPGA, Codificação 8b/10b, Transmissões.

### 1 - Introdução

Os sistemas de comunicação evoluíram durante décadas, chegando atualmente à taxas de transmissões na ordem de Gbps por segundo. Na figura 1 é ilustrado um esquema de um sistema de comunicação elementar. Dados que são transmitidos por qualquer meio (fibra óptica, fios metálicos, wireless, cabo coaxial) estão sujeitos à ruídos e problemas durante a transmissão pelo canal de transmissão como ilustrado.

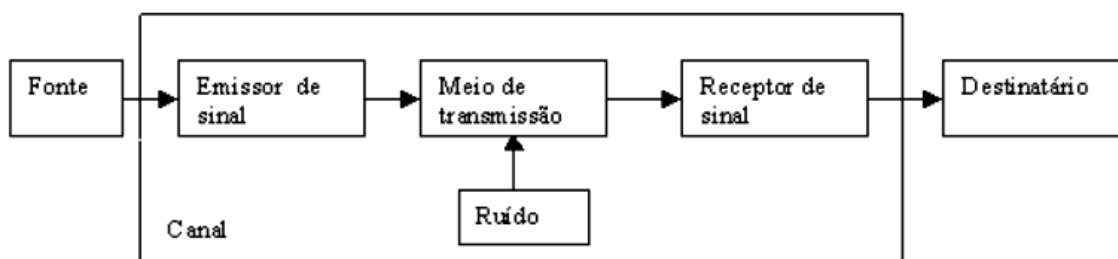


Figura 1 – Esquema de um sistema de comunicação elementar.

Em ambientes modernos, diversos recursos tecnológicos tendem a trocar dados a pequenas ou longas distâncias. Dessa forma, deve-se garantir uma alta confiabilidade dos dados na transmissão, de forma que no lado do receptor sejam recebidos os mesmos dados enviados pelo transmissor. Esta preocupação ocorre devido à problemas comuns em qualquer meio de transmissão, como por exemplo: a atenuação do sinal, dessincronização entre o transmissor e o receptor e ruídos apresentados no canal de transmissão [1][2].

Os hardwares que são responsáveis por transmitir os dados também são vulneráveis à ruídos e interferências, sendo possível enviar dados incorretos para o receptor. Com o aumento da velocidade de transmissão todos os problemas citados ficam mais evidentes, principalmente a dessincronização entre o transmissor e o receptor (jitter) e a aparição de vários dados ruidosos. Esses dois tipos de problemas são fatores limitante na velocidade de um canal de transmissão [3].

Uma forma de resolver os problemas citados é a introdução de codificações de canal na transmissão. Estas codificações pretendem introduzir redundâncias lógicas no dado a ser transmitido, como forma de reduzir as taxas de erro na transmissão. O uso destas codificações aumenta a qualidade do sistema de transmissão, apesar de diminuir a taxa efetiva de dados no sistema [4].

As codificações de canal possuem várias técnicas e características para codificar um dado. Dessa forma pode-se separá-las em 5 grandes categorias: unipolar, polar, bipolar, multinível e multitransição. Em métodos unipolares todos os níveis de tensão do sinal estão em um dos lados do gráfico tensão pelo tempo.

Um exemplo do método de codificação unipolar é a codificação em blocos. Esta codificação transforma um bloco com um determinado número “m” de *bits* em um outro bloco com “n” número de *bits*, adicionando uma redundância lógica facilitando a detecção de erros. Esta codificação gera dados com o máximo de transições possíveis, retirando muitas sequências de dados repetidos no canal. Logo, é possível facilitar a sincronização entre o emissor e o receptor por meio de circuitos externos. Codificações como por exemplo a 4b/5b, a 6b/8b, a 8b/10b, a 64b/66b e a 128b/130b utilizam esse método [5].

Em sistemas de comunicação há a problemática da escolha da melhor codificação para a aplicação alvo. Algumas codificações fornecem mais confiabilidade na transmissão do que outras para o mesmo sistema. Dessa maneira ao implementar uma codificação testa-se a mesma para obter a melhora do sistema de comunicação. Em caso de erros de transmissão no canal, a decodificação da mensagem pode ou não detectar os dados como errôneos. Logo, a robustez da codificação é avaliada considerando a capacidade de distinguir com êxito os dados corretos e incorretos da transmissão.

Para sistema de comunicação de altas velocidades é recomendada a utilização da codificação 8b/10b, independente do meio de transmissão [6]. Sendo assim, o objetivo deste trabalho é o estudo da robustez desta codificação 8b/10b obtendo a taxa de erro apresentada no lado do receptor. Esta análise refere-se à um estudo realizado por meio do MATLAB™, implementando a codificação em software e testando a taxa de erros por meio de recursos do SIMULINK.

Para o teste da codificação 8b/10b em ambiente real, deve-se implementá-la em *hardwares* e realizar transmissões entre um transmissor e um receptor. Por isso, a codificação 8b/10b foi descrita e simulada em linguagem de descrição de *hardware* VHDL.

Pela análise parcial do estudo feito no MATLAB™ (SIMULINK) obteve-se uma alta taxa de detecção de erros na transmissão quando comparada com a taxa de erros total. A seção 2 ressalta a teoria da codificação 8b/10b. A seção 3 apresenta a simulação no software MATLAB™ (SIMULINK) do estudo da robustez da codificação 8b/10b. A seção 4 descreve o sistema da codificação 8b/10b, implementada na linguagem de descrição de *hardware* VHDL. A seção 5 conclui os resultados do estudo e da implementação da codificação em VHDL.

## 2 – Codificação 8b/10b

A codificação foi descrita para se adequar à locais com transmissões em alta velocidades, promovendo sistemas de baixo custo e com transmissões confiáveis. Pela descrição, a codificação promove um balanceamento DC no sinal, ou seja, o dado a ser transmitido não possui níveis lógicos

altos ou baixos por muito tempo. Esse balanço torna-se importante para a recuperação do relógio e consequentemente sincronização entre o emissor e o receptor.

Os dados de 8 *bits* são codificados em 10 *bits* de forma que possua o maior número de transições possíveis. Neste mapeamento, nota-se que alguns dados de 10 *bits* não possuem equivalentes em dados de 8 *bits*. Dessa maneira, usa-se alguns dados de 10 *bits* com o mesmo número de *bits* 1's e 0's como dados de controle da transmissão [10].

Na codificação é descrito o conceito de disparidade, apresentando dois tipos: a disparidade do sistema, ou do inglês *Running Disparity* (RD), e a disparidade dos dados. A codificação é descrita de forma que os dados transformados em 10 *bits* só possuam disparidade de dados de +2, -2 ou 0 (nula). Desta maneira, a disparidade dos dados é obtida no momento em que se codifica o dado de entrada para 10 *bits*. A disparidade do sistema, ou RD, é obtida seguindo regras de acordo com a disparidade dos dados e também é responsável pela escolha dos dados no momento da codificação [10].

O RD alterna-se entre +1 e -1 ou permanece o mesmo, de acordo com as regras ilustradas na figura 2. Se o RD é -1 e a disparidade dos dados de 10 *bits* for +2, o RD troca para +1. Caso o RD for +1 e a disparidade dos dados de 10 *bits* for -2, logo o RD troca para -1. Qualquer outra situação não pertencente a esses casos o RD permanece o mesmo.

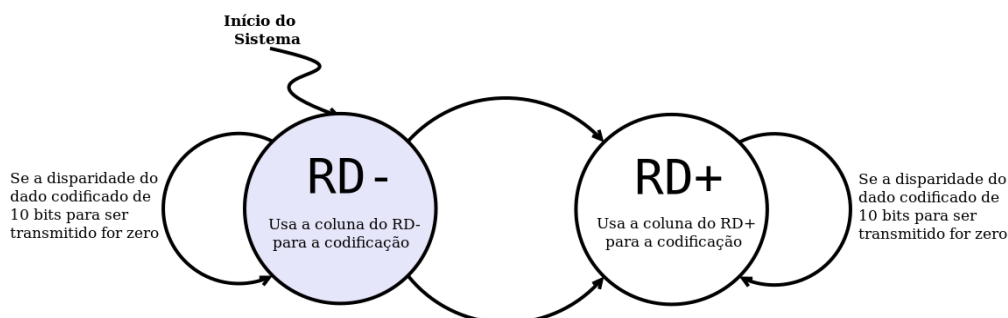


Figura 2 – Máquina de estados para a transição do RD.

A característica da disparidade de dados na transmissão, possuindo um número definido da diferença de *bits* 1's e 0's, possibilita a detecção de erro pelo receptor e uma possível recuperação do dado por meio de circuitos adicionais. Como descrito, para codificar os dados usa-se o RD que sempre será -1 quando o sistema for inicializado. [10].

A codificação dos dados é feita separando os dados de 8 *bits* em duas partes. Um esquema dessa separação da codificação pode ser visualizado na Figura 3.

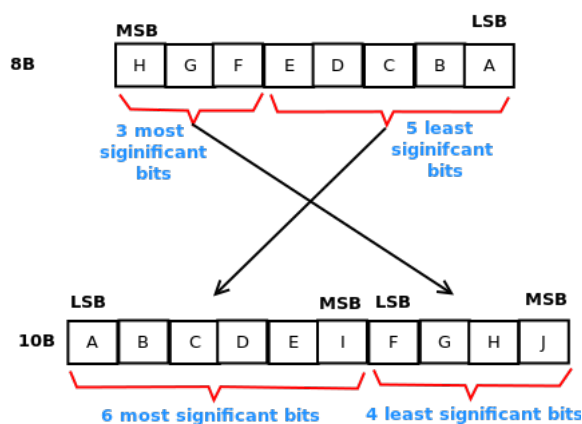


Figura 3 – Esquema da separação para codificação 8b/10b.

Pela figura 3 observa-se que o dado de entrada da codificação é dividido em dois blocos. O primeiro bloco, que possui 3 bits mais significativo dos dados de entrada, ao passar pelo *encoder* se

torna um bloco de 4 bits menos significativos da saída. O segundo bloco de entrada, que possui 5 bits menos significativos, se torna um bloco de 6 bits mais significativos na saída do encoder. Totalizando um dado de saída de 10 bits, pela junção das partes mais significativa e menos significativa codificadas.

### 3 – Simulação e Análise da Robustez da codificação 8b/10b

O sistema foi implementado no Matlab<sup>TM</sup> usando os recursos *Embedded Matlab<sup>TM</sup> Function Block* (EMFB) do *Simulink*. Nesta ferramenta pode-se descrever o *encoder* e o *decoder* por meio da grande variedade de recursos, além de criar mecanismos para obter as características da codificação. A obtenção destas características provém de inserção de erros na transmissão de dados do *encoder* para o *decoder* e análise do número de erros obtidos pelo número de dados transmitidos. Estes erros inseridos devem ser aleatórios para a obtenção de uma característica que se aproxime da realidade.

Na figura 4 é ilustrado o sistema desenvolvido usando a ferramenta EMFB do *Simulink*. Neste sistema observa-se que o bloco *HDL counter* insere dados binários de 8 bits no sistema. Os subsistemas *Bernoulli Binary Generator* (BBG), *Aleatory Counter* (ALC) e *Multiport Switch* (MPS) são responsáveis por gerarem o erro na transmissão, depois que os dados são codificados para 10 bits no subsistema *Encoder 8b to 10b*. Ou seja, estes subsistemas emulam a probabilidade de erro no canal.

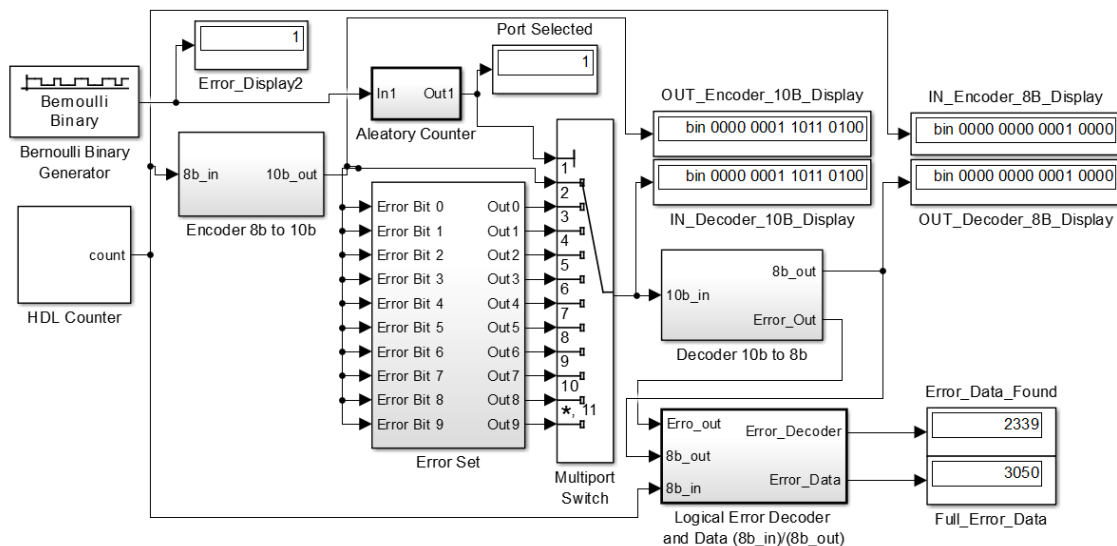


Figura 4 - Sistema desenvolvido no Matlab<sup>TM</sup> usando a EMFB do *Simulink*.

No subsistema *Error Set* aplica-se o erro, em um único bit no dado transmitido. No subsistema *Decoder 10b to 8b* os dados são decodificados para 8 bits novamente. No subsistema *Logical Error Decoder and Data (8b\_in)/(8b\_out)* (LEDD) o número de erros do sistema é obtido de duas formas. Primeiramente analisa-se o sinal de saída do *decoder Error\_out*, identificando que o *decoder* teve sucesso ao classificar o dado como errôneo. A segunda forma de obter o número de erros é a comparação entre os dados de entrada do subsistema *HDL counter* com os dados de saída do *decoder*, identificando que o *decoder* falhou ao detectar o dado como errôneo.

Para observar a proporção de erros em relação ao número de dados transmitidos no sistema, configurou-se no ambiente MATLAB<sup>TM</sup> *Simulink* para simular 10000 pacotes de dados transmitidos ao receptor. Variou-se a probabilidade de erro no canal no bloco *Bernoulli Binary Generator* de 0 até 20 por cento, coletando o número de erros pela comparação entre o dado de entrada e saída do sistema. O componente *Full\_Error\_Data* refere-se ao número de erros total da transmissão. E a diferença do número dos componentes *Error\_Data\_Found* e *Full\_Error\_Data*, refere-se ao número de erros que

não foram detectados pela codificação. Como resultado, obtém-se uma análise da robustez da codificação 8b/10b quando exposta a diferentes probabilidades de erro no canal.

Na figura 5 é ilustrado o gráfico da simulação do sistema, possuindo a probabilidade de erro no canal no eixo horizontal e a porcentagem de erro obtida na palavra recebida no eixo vertical.

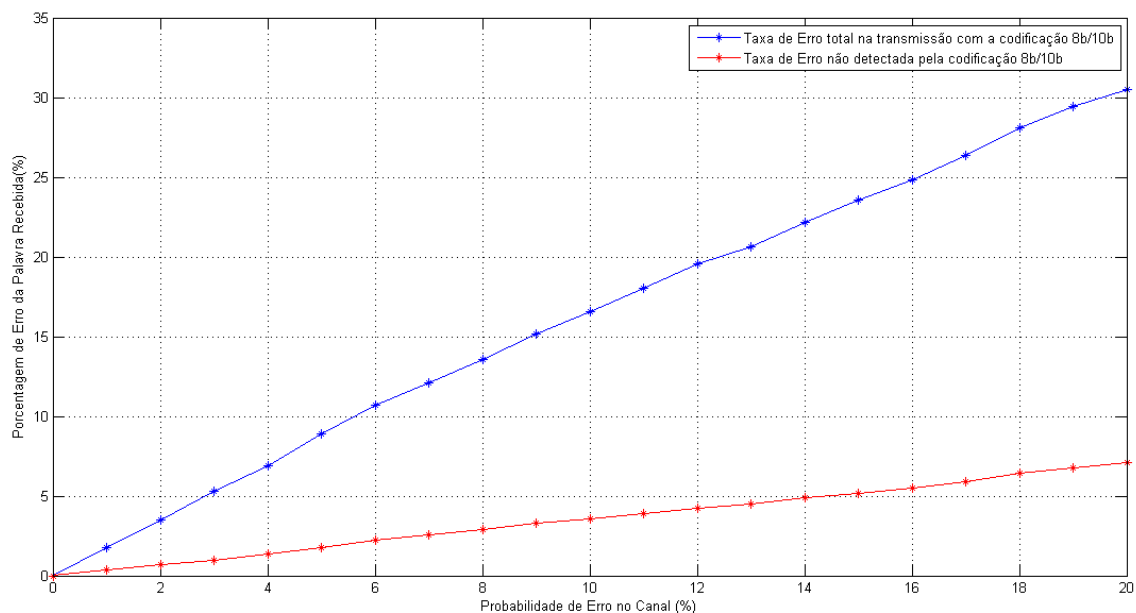


Figura 5 – Análise de robustez da codificação 8b/10b quando exposta a diferentes probabilidades de erro no canal de transmissão.

O gráfico plotado em azul refere-se ao número total de erros na transmissão e o gráfico plotado em vermelho refere-se à porcentagem de erros que a codificação não detectou. Pelo gráfico ilustrado para uma probabilidade de erro no canal de 5%, a porcentagem de erro na palavra que a codificação não detectou foi de 1,77%.

A taxa de erro na transmissão ser maior do que a probabilidade de erro é explicada pelo descompasso do RD do *encoder* e *decoder*, quando há um erro na transmissão. O funcionamento da codificação 8b/10b baseia-se no valor do RD. Dessa maneira, pode-se estar na situação de o *encoder* mude o RD para +1. Neste caso, existe a possibilidade que em caso de erro na transmissão, o *decoder* mude o RD para -1. Esse descompasso entre os RDs do *encoder* e o *decoder* causam erros na decodificação. Esse efeito permanece por alguns ciclos de *clock*, no máximo 5 ciclos, até que o RD do *encoder* e *decoder* voltem a serem o mesmo.

#### 4 - Modelagem em Máquinas de Estado VHDL

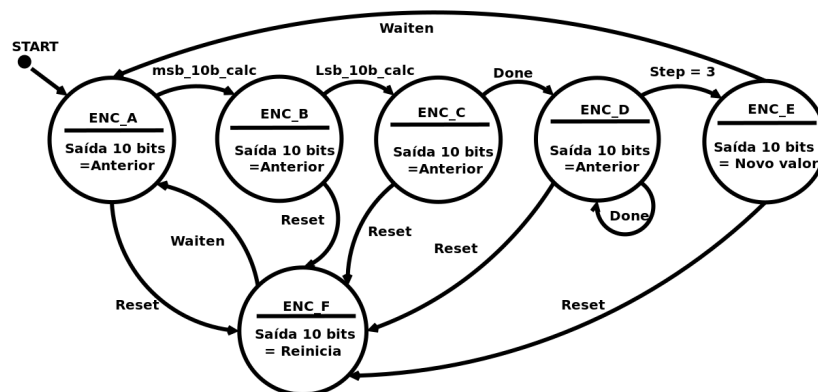
A modelagem da codificação 8b/10b para ser descrita na linguagem VHDL requer a utilização de algumas técnicas de circuitos digitais. O funcionamento da codificação, inicialmente, processa os dados de entrada, de forma a separar os 5 *bits* menos significativos e os 3 *bits* mais significativos do dado de entrada de 8 *bits*. Com os *bits* separados, cada parte é codificada de acordo com o RD e as tabelas da codificação para 6 e 4 *bits*, respectivamente. Posteriormente, as partes codificadas são unidas, seguindo um padrão, calculando o novo RD e transmitidas ao receptor que realiza o caminho inverso na decodificação.



Para esse processamento do dado no sistema descrito em VHDL, é necessário o uso de máquinas de estado finito, para melhor controle dos procedimentos. As máquinas de estado finito é um modelo matemático, largamente utilizado para representação de programas de computador e circuitos lógicos. Com este recurso é possível representar o comportamento de um circuito ou programa graficamente, podendo ser utilizado várias maneiras de representação como por exemplo a representação por diagrama de estados. Esta representação é de representar o sistema em máquinas de estado, com apenas seus estados e a ação que provocou as transições.

Na figura 6 são ilustradas as máquinas de estado do sistema descrito em VHDL da codificação 8b/10b. Pela figura estão presentes seis estados no sistema do *encoder* e no *decoder*. No *encoder* o estado “ENC\_A” refere-se ao estado de espera do dado de 8 bits de entrada. O estado “ENC\_B” diz a respeito da codificação dos 3 bits mais significativos. Já o estado “ENC\_C” trata a codificação da parte menos significativa do dado de entrada. No estado “ENC\_D” é realizada a junção das partes codificadas, formando a saída do dado de 10 bits. Além disso nesse estado é realizado o cálculo do novo RD do sistema. No estágio “ENC\_E” o valor da saída é atualizado e retorna ao estado de espera “ENC\_A” para receber o novo dado de entrada. Caso em algum momento, ou qualquer estágio, for inserido um sinal de *reset* no sistema, passa-se para o estágio “ENC\_F” reinicializa as saídas e zera as entradas passando para o estágio “ENC\_A” novamente. A máquina de estado do *decoder* apresenta comportamento similar, apesar de inverso, com o objetivo de decodificar os blocos do dado codificado. Assim a mesma é capaz de fornecer o dado de 8 bits decodificado ou identificar possíveis erros.

**ENCODER**



**DECODER**

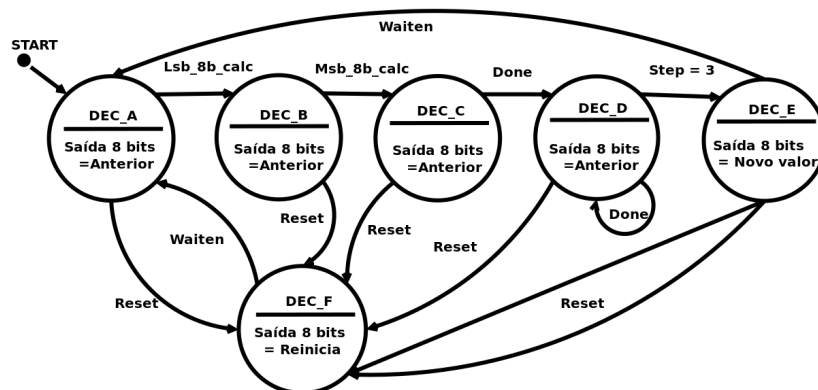


Figura 6 – Máquina de estados do sistema implementado a codificação 8b/10b em VHDL.

O sistema implementado em máquina de estado apresenta facilidade de programação e depuração do comportamento dos dispositivos. Entretanto o mesmo adiciona ciclos de operação para executar tarefas. As máquinas de estado propostas neste trabalho necessitam de 7 ciclos de operação

para codificar ou decodificar os dados. Como forma de mitigar o tempo de espera entre entrada e saída do sistema, recomenda-se que o dispositivo apresente dois *clock*'s de funcionamento. O primeiro *clock* sincroniza a entrada de dados na codificação. O segundo deve ser 7 vezes mais rápido, de forma a tornar o processamento interno da codificação transparente à entrada.

Na figura 7 é ilustrado a simulação do sistema da codificação 8b/10b, descrito em VHDL no software Vivado™ da Xilinx.

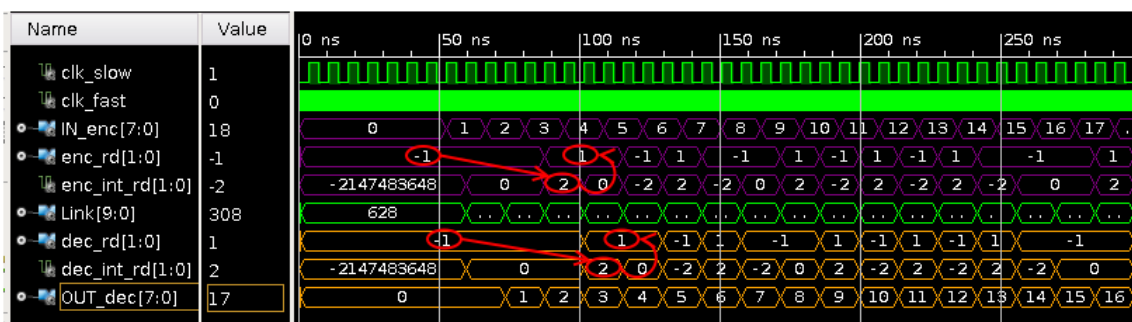


Figura 7 – Simulação do sistema da codificação 8b/10b descrita em VHDL.

Os sinais representados em roxo referem-se ao sistema do *encoder*, enquanto em laranja os do sistema do *decoder*. O *clock* do sistema pode ser observado pelo “clk\_fast” (1 GHz). Adicionalmente o *clock* de entrada de dados pode ser observado pelo “clock\_slow” (142,8 MHz). Os *clock*s inseridos no sistema tem o propósito de mostrar a relação entre suas frequências. Em um sistema real, o valor das frequências será relativo às capacidades do oscilador e dos *Phase-Locked Loop* (PLL) disponíveis.

A entrada de dados é representada pelo sinal “IN\_enc” funcionando com um contador de 8 *bits*. Observa-se que ao codificar, o RD do sistema é atualizado, revelando um correto funcionamento do *encoder* pelo sinal “enc\_int\_rd” permanecer entre “+2, -2 e 0”. Pelo sinal “enc\_rd” quando o estado atual do sistema está negativo (-1) e o próximo RD dos dados é positivo (+2), o sinal RD do sistema (enc\_rd) é atualizado para um valor positivo (+1) como descrito na codificação. O sinal “Link” representa os dados codificados em 10 *bits* transmitidos para o *decoder*, estando representados na simulação na forma decimal. Nos sinais de RD do *decoder* (dec\_rd, dec\_int\_rd) observa-se a mesma transição obtida no *encoder*, revelando o correto funcionamento do *decoder* na decodificação e do *encoder* na codificação. O sinal “OUT\_dec” representa a saída do sistema, em que se verifica a presença dos mesmos dados de entrada na saída indicando que o sistema é funcional.

## 5 - Conclusões

A utilização de sistema codificadores para comunicação de alta velocidade é vital para sincronismos entre transmissão e recepção, bem como verificação de erros no canal. Existem diversas técnicas que efetuam essa tarefa de codificação. A escolha entre elas é realizada analisando o custo benefício entre robustez, confiabilidade, ocupação de taxa de dados e largura de banda, e qualidade do canal utilizado.

Este artigo efetuou uma simulação de análise de robustez da codificação 8b/10b em diferentes probabilidades de erro no canal. Os resultados mostram que a codificação pode apresentar falha ao detectar erros, e a porcentagem depende da probabilidade de erro ou qualidade do canal.

A técnica utilizada no MATLAB pode ser aplicada para testes de robustez de outras codificações em nível de simulação. Entretanto, a escolha da codificação para determinada aplicação (tipo do canal) deve ser realizada com testes reais. Logo este trabalho também descreve o

funcionamento do sistema com *encoder* e *decoder* em linguagem de descrição de hardware VHDL. Pretende-se em trabalhos futuros, testar a modelagem de máquinas de estado, apresentadas e simuladas neste artigo, em dispositivos FPGA que possibilitem os testes reais da codificação.

Além disso, será feita a análise de outras codificações comparando o desempenho e o grau de melhora do canal de transmissão entre diferentes condições de probabilidade de erro.

## 6 - Agradecimentos

Os autores agradecem à FUNDUNESP e ao laboratório SPRACE pelo apoio técnico e financeiro obtido ao longo deste trabalho.

## 7 - Referências

- [1] MACHADO, Renato. PROBLEMAS DE TRANSMISSÃO. 2016. Disponível em: <<http://coral.ufsm.br/gpscom/professores/RenatoMachado/ComunicacaoDeDados/ComDados09Renato.pdf>>. Acesso em: 06 mar. 2017.
- [2] TRONCO, Tania Regina; AVILA, Luis Fernando de. FUNDAMENTOS DE COMUNICAÇÕES ÓPTICAS. 2012. Disponível em: <[http://www.ft.unicamp.br/~lfavila/TT503/fundamentos de comunicacoes opticas.pdf](http://www.ft.unicamp.br/~lfavila/TT503/fundamentos_de_comunicacoes_opticas.pdf)>. Acesso em: 06 mar. 2017.
- [3] PRA, Thiago Dai. MEDIDOR DE TAXA DE ERRO DE BIT PARA FIBRA ÓPTICA. 2012. 76 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Elétrica, Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012. Disponível em: <<https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/65425/000858235.pdf?sequence=1>>. Acesso em: 06 mar. 2017.
- [4] ALTOÉ, Mariana Olivieri Caixeta. CODIFICAÇÃO CONJUNTA FONTE-CANAL UTILIZANDO CODIFICADORES UNIVERSAIS ADAPTATIVOS. 2007. 92 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Eletrônica e Computação, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2007. Disponível em: <<http://www.bd.bibl.ita.br/tesesdigitais/000543362.pdf>>. Acesso em: 06 mar. 2017.
- [5] FOROUZAN, Behrouz A.. COMUNICAÇÃO DE DADOS E REDES DE COMPUTADORES. 4. ed. São Paulo: Amgh, 2010. 1134 p.
- [6] WIDMER, Albert X.; FRANSZK, Peter A.. A DC-Balanced, Partitioned-Block, 8B/10B Transmission Code. IBM Journal Of Research And Development. New York, p. 440-451. set. 1983.
- [7] RUSCHEL, Orlando T.. PRINCÍPIOS DA COMUNICAÇÃO DIGITAL. Porto Alegre: Edipucrs, 1996. 227 p.
- [8] CHAKRABARTI, Partha Pratim. TRANSMISSION CHARACTERISTICS OF OPTICAL FIBERS. New Delhi: Mcgraw-hill Education, 2015. 750 p.
- [9] SILVÉRIO, Ricardo Luiz. FIBRAS ÓPTICAS. 2002. 37 f. Monografia (Especialização) - Curso de Física, Física, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2002. Disponível em: <[http://www.infis.ufu.br/infis\\_sys/pdf/RICARDO\\_LUIZ\\_SILVERIO.pdf](http://www.infis.ufu.br/infis_sys/pdf/RICARDO_LUIZ_SILVERIO.pdf)>. Acesso em: 10 mar. 2017.
- [10] LATTICE SEMICONDUCTOR. 8B/10B ENCODER/DECODER. Hillsboro: Lattice Semiconductor, 2015.



## **Análise do Perfil de Ingressantes e Metodologias Colaborativas como Estratégias para Diminuir a Evasão e a Retenção**

*João Paulo de Freitas Gama*

*Universidade Federal do Rio Grande do Norte;  
defreitasgama11@gmail.com*

*Fabiana T. Santana*

*Universidade Federal do Rio Grande do Norte;  
fabianasantana@ect.ufrn.br*

**Resumo:** Este trabalho aborda a problemática da evasão e reprovação em cursos de Ciências Exatas e Engenharia e algumas estratégias que podem ser adotadas para melhorar os índices. Serão apresentados os resultados de algumas ações aplicadas no Bacharelado em Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Rio Grande do Norte em 2016, tais como a análise do perfil de alunos ingressantes, em particular de duas turmas do turno diurno, os resultados obtidos com uma avaliação de sondagem aplicada com conteúdos do Ensino Médio e a aplicação de uma metodologia colaborativa, que se restringiu ao ensino de Vetores. Tais ações que tinham como objetivo diminuir os índices de evasão e reprovação, além de melhorar a qualidade do ensino, resultaram em um curso de nivelamento proposto para complementar a formação em tópicos básicos de Matemática, mostraram ainda que fatores como ausência do hábito de estudo e fragilidades em conteúdos básicos contribuem para baixos rendimentos em cursos superiores e, por fim, constataram que aplicar metodologias colaborativas, mesmo que apenas para alguns conteúdos, é uma maneira de proporcionar benefícios para a aquisição de conhecimento.

**Palavras-chave:** Avaliação de Sondagem. Perfil de Ingressantes. Metodologias Colaborativas. Ensino.

### **Introdução**

O curso de Bacharelado em Ciências e Tecnologia (BC&T) é um bacharelado interdisciplinar que foi criado na Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) como parte do projeto REUNI e conta com a entrada de 560 alunos semestralmente, todos selecionados integralmente via SiSu. Neste curso, que é parte de um modelo de formação em dois ciclos, o aluno após um período de 3 anos para o turno diurno ou 3 anos e meio para o turno noturno pode reingressar em outro curso de engenharia da UFRN aderido ao modelo de formação em ciclos ou se inserir em programas de pós-graduação, bem como atuar no mercado de trabalho.

Devido ao grande número de ingressantes no BC&T, é comum observarmos estudantes com diferentes hábitos de estudo, em alguns casos inapropriados ou inexistentes, assim como lacunas importantes na formação de conteúdos do Ensino Médio. Diante dessa realidade, os altos índices de reprovação e de evasão no primeiro ano do curso são frequentes, o que justifica o desenvolvimento de projetos e aplicações de metodologias voltados para a qualidade do ensino.

Este contexto de reprovações e evasões em períodos iniciais de cursos de Ciências e Engenharias é comum em várias universidades públicas e particulares do Brasil, o que tem despertado a preocupação e levado alguns autores a refletirem sobre esta problemática. Por exemplo, Alves e Mantovani (2017) levantaram as dificuldades enfrentadas pelos acadêmicos para se manterem nos cursos de Engenharia em uma instituição de ensino superior privada na cidade de Maringá, Paraná. Já Barbosa e Lorder (2011) fizeram pesquisas com estudantes do curso de Engenharia Elétrica da UFRGS para compreender por que esses cursos apresentam os maiores índices de evasão e retenção e como causas forma destacadas a dificuldade de conciliação do curso de graduação com a necessidade de trabalho, a falta de apoio e



didática dos professores, a falta de infraestrutura física do curso e a falta de preparo anterior ao ensino superior.

A problemática da evasão e reprovação não se restringe apenas às instituições brasileiras e é também comum em instituições de diferentes países. Este tema é abordado por Silva Filho (2007) com a utilização de dados oficiais e comparações entre várias instituições. Já ACT REPORT (2017) mostra que as estatísticas sobre esse assunto estão relacionadas com o método de seleção para o ingresso e com a modalidade de curso. Por fim, o Centro Interuniversitario de Desarrollo (2006), justifica esse problema, dentre outras coisas, com desigualdade social.

As análises feitas nos trabalhos citados acima, também se aplicam ao BC&T, onde observa-se que o insucesso se relaciona, dentre outras coisas, com fragilidades em certos conteúdos do currículo do Ensino Médio, com ausência de hábitos de estudo, com problemas pessoais e familiares e com a carga horária de trabalho. Para amenizar os problemas apontados, foi desenvolvido no segundo semestre de 2016 o projeto *Análise do perfil do ingressante no BC&T e ações para diminuir os índices de reprovação e evasão* e aqui serão mostrados alguns resultados de ações que o compunham, como avaliação de sondagem e questionário de análise de perfil aplicados em turmas de ingressantes, curso de nivelamento e aplicação de metodologias colaborativas de ensino para melhorar o próprio processo de ensino e aprendizagem.

## **Análise do perfil de ingressantes**

Como amostra para o estudo feito, foram selecionadas duas turmas, que serão chamadas de Turma A e Turma B, ambas da disciplina Vetores e Geometria Analítica do turno diurno do BC&T. Observou-se que dos 140 alunos matriculados na Turma A, 68,57% possuem matrícula de anos anteriores a 2016 e, provavelmente, já tenham cursado a disciplina sem obter sucesso. Já na Turma B, dos 102 alunos matriculados, 63,46% possuem matrículas de anos anteriores. Levando em conta que as lacunas em conteúdos do Ensino Médio acabam comprometendo o rendimento dos estudantes ingressantes em cursos superiores, foi aplicada uma avaliação de sondagem para diagnosticar quais conteúdos deveriam ser trabalhados em cursos de nivelamento. Na Tabela 1, pode-se ver que as categorias contempladas na avaliação foram Sistemas, Equações, Operações e Frações, Potências e Raízes e Produtos Notáveis.

As Tabelas 2 e 3 relacionam as taxas de acertos considerando o número de questões respondidas em cada turma, onde pôde-se constatar que ambas as turmas são equivalentes em relação aos assuntos avaliados. Esta constatação tornou possível comparar as turmas nas atividades aplicadas posteriormente.

Os alunos que apresentaram baixo rendimento na avaliação de sondagem foram convidados a participar do curso de nivelamento *Tópicos de Matemática Elementar* que foi oferecido como curso de extensão. Na Turma A, 18 dos alunos que responderam a avaliação de sondagem participaram do curso de nivelamento, sendo que 10 foram aprovados, 5 foram reprovados e 3 trancaram a disciplina. Já na Turma B, 10 dos alunos que responderam a avaliação participaram do curso de nivelamento, sendo que 6 foram aprovados, 2 reprovados e 2 trancaram a disciplina.

Além da avaliação de sondagem, os alunos também responderam um questionário para analisar o perfil enquanto estudantes do Ensino Médio. A análise dos 66 questionários respondidos na Turma A mostraram que 47% dos alunos estão na faixa etária entre 17 a 19 anos e apenas 6% são maiores que 29 anos. Em relação à disciplina de Matemática cursada no Ensino Médio, 74,3% disseram ter tido um desempenho bom, dos quais 71% estudavam a disciplina menos que 3h por semana e 53,1% estudavam em escolas públicas.

Já na turma B, a análise dos 50 questionários de investigação de perfil mostraram que 53% dos alunos estão na faixa etária entre 17 a 19 anos e apenas 4% são maiores que 29 anos. Em relação à disciplina de Matemática cursada no Ensino Médio, 82% disseram ter tido um desempenho bom, dos quais 60% estudavam a disciplina menos que 3h por semana e 52,3% estudavam em escolas públicas.



Tabela 1: Apresentação das questões objetivas aplicadas e classificação por categoria.

<p>Categoria: Sistemas</p> <p>(1) Se <math>x</math> e <math>y</math> satisfazem o sistema <math>\begin{cases} 4x + 5y = 2 \\ 6x + 7y = 4 \end{cases}</math>, então o valor de <math>x + y</math> é: (a) 1 (b) 2 (c) -3 (d) -4 (e) 5 (f) não lembro</p> <p>(2) Sobre o sistema <math>\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}</math>, é correto afirmar que: (a) o sistema não tem solução (b) O valor de <math>x + y</math> é 2 (c) o sistema tem infinitas soluções (d) o valor de <math>x + y</math> é 4 (e) o valor de <math>x + y</math> é 0 (f) não lembro</p> <p>(3) Sobre o sistema <math>\begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ 16x - 8y = 4 \end{cases}</math>, é correto afirmar que: (a) o sistema tem infinitas soluções (b) o sistema não tem solução (c) O valor de <math>x + y</math> é 2 (d) o valor de <math>x + y</math> é 4 (e) o valor de <math>x + y</math> é 0 (f) não lembro</p>
<p>Categoria: Equações</p> <p>(4) A raiz da equação <math>\frac{2(x+1)}{3} - \frac{3(x+2)}{4} = \frac{x+1}{6}</math> pertence ao intervalo: (a) [-6,-3] (b) [-3,-1] (c) [-2,0] (d) [0,2] (e) [2,6] (f) Não lembro</p> <p>(5) A raiz da equação <math>x + 5 = 14 - \frac{x}{2}</math> pertence ao intervalo: (a) [5,7] (b) [8,11] (c) [12,15] (d) [3,5] (e) [-1,2] (f) Não lembro</p>
<p>Categoria: Operações e Frações</p> <p>(6) O valor da expressão <math>\frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}</math> é: (a) <math>\frac{13}{30}</math> (b) <math>\frac{1}{3}</math> (c) 4 (d) <math>\frac{1}{4}</math> (e) 3 (f) Não lembro</p> <p>(7) O valor da expressão <math>4 + \left\{ 0,2 \times 30 \times \left[ 2 + 2,5 \times \frac{4}{6} \times (1 - 0,4) \right] \right\}</math> é: (a) 22 (b) 18 (c) 4 (d) 6 (e) 3 (f) Não lembro</p> <p>(8) O valor da expressão <math>\frac{0,2 \times 0,7 - 4 \times 0,01}{0,5 \times 0,2}</math> é: (a) 1 (b) 2 (c) 0,5 (d) 0,01 (e) 0,2 (f) Não lembro</p>
<p>Categoria: Potências e Raízes</p> <p>(9) O valor da expressão <math>(7\sqrt{3} - 5\sqrt{48} + 2\sqrt{12}) : 3\sqrt{3}</math> é: (a) -3 (b) <math>2\sqrt{3}</math> (c) <math>\frac{\sqrt{3}}{3}</math> (d) 2 (e) 1 (f) Não lembro</p>
<p>Categoria: Produtos Notáveis</p> <p>(10) A expressão <math>\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}</math> é equivalente à: (a) <math>\frac{x}{x+2}</math> (b) <math>\frac{x-2}{x}</math> (c) <math>\frac{x+2}{2}</math> (d) 1 (e) <math>\frac{x^2}{x+2}</math> (f) não lembro</p>

Tabela 2: Porcentagem de acertos da Turma A considerando o número de questões respondidas na amostra de 66 avaliações.

Categoria	Questões	Nº Questões	Acertos (%)	Média Acertos (%)
Sistemas	(1)	54	57,41	54,19
	(2)	54	64,81	
	(3)	57	40,35	
Equações	(4)	32	31,25	43,26
	(5)	38	55,26	
Operações e Frações	(6)	52	74,51	66,99
	(7)	52	74,51	
	(8)	58	70,69	
Potências e Raizes	(9)	28	57,14	57,14
Produtos Notáveis	(10)	46	52,17	52,17

Tabela 3: Porcentagem de acertos da Turma B considerando o número de questões respondidas na amostra de 50 avaliações.

Categoria	Questões	Nº Questões	Acertos (%)	Média Acertos (%)
Sistemas	(1)	33	54,55	47,16
	(2)	42	60,47	
	(3)	34	26,47	
Equações	(4)	21	14,29	36,31
	(5)	28	58,33	
Operações e Frações	(6)	40	80,00	74,68
	(7)	33	69,70	
	(8)	39	74,36	
Potências e Raizes	(9)	12	66,67	66,67
Produtos Notáveis	(10)	30	56,67	56,67

Tabela 4: Análise dos 66 questionários da Turma A.

Desempenho em Matemática	Tempo de estudo por semana	Tipo de escola
10,6% Muito Bom	43% menos que 3 horas 43% de 3 a 5 horas	28,6% Pública e 71,4% Particular
74,3% Bom	71% menos que 3 horas 27% de 3 a 5 horas	46,9% Particular e 53,1% Pública
13,6% Fraco	77,8 menos que 3 horas 22,2% de 3 a 5 horas	44,4% Particular e 55,6% Pública
1,5% Muito Fraco	100% menos que 3 horas	100% Particular

Tabela 5: Análise dos 50 questionários da Turma B.

Desempenho em Matemática	Tempo de estudo por semana	Tipo de escola
10% Muito Bom	40% menos que 3 horas 60% menos que 3 horas	100% Pública
82% Bom	60% menos que 3 horas 32% de 3 a 5 horas	47% Particular e 52% Pública
6% Fraco	100% menos que 3 horas	66,7% Pública e 33,3% Particular
2% Muito Fraco	100% menos que 3 horas	100% Pública

Os dados das Tabelas 4 e 5 mostram que a maior parte dos alunos ingressantes, oriundos de escolas públicas ou particulares, não precisavam se dedicar mais que 3 horas por semana para terem um desempenho bom no Ensino Médio, o que ajuda a justificar o alto índice de insucesso no ensino superior, que exige muita dedicação e tempo de estudo.

## Metodologia colaborativa aplicada no ensino de vetores

O processo de ensinar para surtir efeitos positivos e duradouros é um processo complexo. Alguns autores estão vendo o ensino colaborativo, isto é, metodologias com estratégias onde se trabalha conjuntamente com ajuda mútua onde todos se beneficiam, como um meio de atingir certos objetivos na área educacional. Este processo exige confiança, diálogo e troca de experiências e tem se mostrado um excelente recurso para ser aplicado em sala de aula.

Juntando diversas pessoas que interagem, dialogam e reflectem em conjunto, criam-se sinergias que possibilitam uma capacidade de reflexão acrescida e um aumento das possibilidades de aprendizagem mútua, permitindo, assim, ir muito mais longe e criando melhores condições para enfrentar, com êxito, as incertezas e obstáculos que surgem (BOAVIDA; PONTES, 2002, p.3).

Metodologias colaborativas contribuem com o processo de ensino e aprendizagem e podem ser vistas como uma estratégia para melhorar as taxas de aprovação em turmas desniveladas. Pensando nisso, foi feita uma experiência nas duas turmas investigadas com o ensino de Vetores, conteúdo que compõem o programa da disciplina. Na turma A adotou-se aula expositiva com a proposta de uma atividade de fixação ao final, denominada Roteiro, que deveria ser entregue em data estabelecida. Esta primeira metodologia, apesar de se assemelhar à tradicional, foi pensada para fixar o conteúdo estudado com a aplicação e entrega da atividade proposta, porém sem exigir a participação colaborativa dos alunos durante as aulas. Já na turma B, aplicou-se uma metodologia colaborativa, onde os alunos deveriam ler o conteúdo e o material didático disponibilizado antecipadamente e, em sala de aula, a atividade denominada Roteiro foi utilizada para, em grupos, os alunos debaterem sobre o assunto e responderem as questões propostas, utilizando sempre que necessário a ajuda da professora e do monitor da disciplina.

Apesar de ter 140 e 104 alunos matriculados nas turmas A e B, respectivamente, nem todos frequentaram as aulas e entregaram as atividades propostas. A Tabela 6 mostra as taxas referentes ao número de alunos que entregaram cada atividade e a média de entrega por turma, onde pode-se constatar que em ambas as turmas a participação foi de pouco mais de 50% dos alunos matriculados e que o comprometimento na resolução dos roteiros foi semelhante em ambas as turmas, mesmo em uma delas a atividade sendo aplicada em sala de aula.

Tabela 6: Percentual de alunos que entregaram as atividades propostas nas Turmas A e B.

Turma	Nº de alunos	Atividades	taxa de alunos que entregaram	taxa média de entrega
A	140	Roteiro 1.1	56,43	50,24
		Roteiro 1.2	37,86	
		Roteiro 1.3	56,43	
B	104	Roteiro 1.1	52,88	51,92
		Roteiro 1.2	50,96	
		Roteiro 1.3	51,92	

Na data da avaliação do tema Vetores, constatou-se que alguns trancamentos de matrícula em ambas as turmas já tinham sido realizados. A turma A que havia iniciado com 140 alunos passa a ter 132 alunos e a Turma B, iniciada com 104 alunos passa a ter 97 alunos matriculados. A mesma avaliação, dada na Tabela 7, foi aplicada para ambas as turmas e correspondeu a 30% da nota da Unidade 1.

Os dados da Tabela 8, que mostram as taxas de acertos em relação ao número de provas respondidas, sugerem que em geral a Turma B, que estudou o conteúdo de forma colaborativa, teve melhor rendimento com uma média de 52,57% de acertos enquanto a Turma A teve em média 48,55% de acertos.

Tabela 7: Prova que avaliou o conteúdo Vetores nas Turmas A e B.

(1) Marque as alternativas verdadeiras: (i) Se $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ são pontos de $\mathbb{R}^2$ e $\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ é um vetor de $\mathbb{R}^2$ , então os vetores $\vec{v}$ e $\vec{AB}$ tem a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento. (ii) Se $A(1, 4), B(-2, 3), C(1, 2)$ e $D(4, 3)$ são pontos de $\mathbb{R}^2$ , então os vetores $\vec{BA}$ e $\vec{CD}$ não são representantes de um mesmo vetor $\vec{v}$ com ponto inicial na origem. (iii) Os vetores $\vec{u} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{v} = -5\vec{i} - 5\vec{j} - 5\vec{k}$ são paralelos e possuem com sentidos opostos. (iv) Se $ \vec{v}  = 2$ , então o versor do vetor $3\vec{v}$ é diferente de $\vec{v}/2$ .
(2) Sabendo que $M(2a, b + 6)$ é o ponto médio do segmento $AB$ , onde $A(a, 2)$ e $B(12, b + 3)$ , determine os valores de $a$ e $b$ .
(3) Sabendo que $A(1, -\frac{1}{2}, -1)$ e $B(n + 1, -1, -\frac{1}{4})$ são pontos de $\mathbb{R}^3$ , encontre o valor de $n$ tal que $ \vec{AB}  = \sqrt{3}$ .
(4) Determine os valores de $m$ e $n$ sabendo que o ponto $P(m, 4, n)$ pertence à reta que passa pelos pontos $A(-1, -2, 3)$ e $B(2, 1, -5)$ .
(5) Marque as alternativas verdadeiras: (i) O vetor $\vec{v} = (x, 0, z)$ é ortogonal ao eixo $y$ . (ii) O vetor $\vec{v} = (x, 0, 0)$ não é paralelo ao eixo $x$ . (iii) Quando $y = 0$ e $z = 0$ o vetor $\vec{v} = (x, y, z)$ está no eixo $Ox$ . (iv) O vetor $\vec{v} = (0, 0, z)$ é paralelo ao vetor $\vec{i} = (1, 0, 0)$ . (v) Quando $z = 0$ o vetor $\vec{v} = (x, y, z)$ está no plano $yz$ . (vi) O vetor $\vec{v} = (0, y, z)$ não é paralelo ao plano $yz$ . (vii) O eixo $Oz$ é ortogonal ao plano $xy$ , por isso todo vetor paralelo ao eixo $Oz$ é ortogonal ao plano $xy$ . (viii) O vetor $\vec{v} = (0, 0, z)$ está representado sobre o eixo $Oz$ e pode-se dizer que $\vec{v}$ é paralelo ao eixo $Oz$ .
(6) Encontre o vetor $\vec{x}$ que satisfaz a equação $3\vec{u} - \vec{v} + \vec{x} = 4\vec{x} + 2\vec{w}$ sabendo que $\vec{u} = (2, 3, -1)$ , $\vec{v} = (1, -1, 1)$ e $\vec{w} = (-3, 4, 0)$ são vetores do $\mathbb{R}^3$ .
(7) Sabendo que $A(-3, 2)$ e $B(3, -1)$ são pontos do $\mathbb{R}^2$ , encontre o ponto $P$ localizado no eixo $Ox$ que é equidistante de $A$ e $B$ .
(8) Marque a alternativa correta: (i) Dois vetores são paralelos se seus representantes tem a mesma direção, mesmo tendo módulos e sentidos diferentes. (ii) Dois vetores são iguais se tiverem módulos iguais, mesmo que tenham sentidos e direções diferentes. (iii) Os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{BA}$ (também denotado por $-\vec{AB}$ ) possuem módulos diferentes e sentidos opostos. (iv) O vetor nulo, denotado por $\vec{0}$ , representa todo vetor $\vec{AA}$ e possui módulo igual a 1.

## Conclusões

Das oito turmas da disciplina Vetores e Geometria Analítica, oferecidas no BC&T no segundo semestre de 2016, as Turmas A e B são as que apresentam maior número de matrículas de alunos com histórico de insucesso, cada uma delas com 68,57% e 63,46%, respectivamente.

Tabela 8: Análise por questões da prova que avaliou o conteúdo Vetores nas Turmas A e B.

Questão	Turma / N° de Provas	Taxa de acertos	Turma / N° de Provas	Taxa de acertos
(1)	A / 95	33,68	B / 68	32,35
(2)		37,89		38,23
(3)		29,47		36,76
(4)		37,89		50,00
(5)		58,95		58,82
(6)		92,63		89,71
(7)		26,32		30,88
(8)		71,58		83,82

A taxa média de aprovação nas turmas da disciplina Vetores e Geometria Analítica oferecidas no segundo semestre de 2016 foi de 47,32%, sendo que nas Turmas A e B essa taxa foi de 48% e 52%, respectivamente. Apesar de não ter sido adotada na Turma A uma metodologia colaborativa, que exigiu um pouco mais de iniciativa dos alunos, esta turma também recebeu um tratamento diferenciado com a aplicação dos Roteiros, que tinham por objetivo fixar o conteúdo estudado. Apesar das observações de semestres anteriores indicarem que turmas desniveladas apresentam, em geral, os maiores índices de reprovação, os dados da pesquisa realizada mostraram que as metodologias adotadas proporcionaram resultados positivos, sendo que a Turma A ficou próxima da taxa média de aprovação e a Turma B ficou entre as três melhores.

Em relação ao quesito evasão, as turmas observadas não se diferenciaram muito daquelas oferecidas em semestres anteriores com o mesmo perfil de insucesso, apresentando uma taxa média de 19%, enquanto a taxa média das oito turmas oferecidas no semestre foi de 15,75%. A dificuldade de conciliar o horário do oferecimento dessas turmas com as demais disciplinas regulares cursadas pelos alunos e, até mesmo com o horário de trabalho, foi um dos fatores que contribuíram com a evasão, uma vez que, ao reprovar em uma disciplina, o aluno só consegue cursá-la em um turno diferente do convencional. Apesar da Turma B estar entre as melhores em relação à aprovação, esta turma apresentou uma das maiores taxas de evasão, ficando em 23%. Seria preciso uma investigação mais detalhada para buscar mais razões para este fato, porém, a pesquisa aponta que a carga horária elevada de disciplinas cursadas e distribuída ao longo do dia dificulta a aplicação de metodologias que exigem um tempo maior de dedicação por parte dos alunos.

Com as pesquisas realizadas, foi possível ver que a problemática da evasão e reprovação tem sido discutida nacional e internacionalmente e que algumas estratégias estão sendo propostas para possibilitar a permanência e aprovação dos alunos em cursos de graduação. A investigação de perfil dos ingressantes mostrou ser uma boa alternativa para viabilizar nivelamentos rápidos, de acordo com a necessidade, além de detectar alunos em situação de carência socioeconômica. No que se refere ao processo de ensino e aprendizagem, as metodologias tradicionais podem ser aperfeiçoadas com a introdução de novas estratégias, como o ensino colaborativo e as ferramentas computacionais. Desde que bem planejadas pelo professor, de acordo com o perfil dos estudantes, essas estratégias podem despertar o interesse da turma e proporcionar aprendizado eficiente e duradouro.

## Referências

ALVES, M. F. S.; MANTOVANI, K. L. **Identificação do perfil dos acadêmicos de engenharia como uma medida de combate à evasão.** Revista de Ensino de Engenharia 35.2, 2017.

ACT REPORT. **National collegiate retention and persistence to degree rates 2005.** Disponível em:





Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional  
De 2 a 5 de Maio de 2017  
Unesp, Faculdade de Ciências - Bauru/SP

www.act.org. Acesso em: jan, 2017.

BARBOSA, P. V.; MEZZOMO, F.; LODER, L. L. **Motivos de evasão no curso de Engenharia Elétrica: realidade e perspectivas.** Congresso Brasileiro de ensino de engenharia. Vol. 39, 2011.

BOAVIDA, A.; PONTE, J. P. **Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas.** Reflectir e investigar sobre a prática profissional 1 (2002): 43-55.

CENTRO INTERUNIVERSITARIO DE DESARROLLO. **Repitencia y deserción universitaria en América Latina.** Chile: Unesco, 2006.

FILHO, S., LOBO, R.L.; et al. **A evasão no ensino superior brasileiro.** Cadernos de pesquisa 37.132, 641-659, 2007.

## **Aplicação da transformada de Laplace na modelagem matemática do atraso no sinal de sondas empregadas no monitoramento e controle do oxigênio dissolvido em bioprocessos de produção de antibióticos**

*Samuel Conceição de Oliveira*

*Universidade Estadual Paulista (Unesp) ; Faculdade de Ciências Farmacêuticas (FCF) ;  
Departamento de Bioprocessos e Biotecnologia (DBB);  
samueloliveira@fcfar.unesp.br*

**Resumo:** Neste trabalho, uma equação que considera o atraso no sinal de sondas utilizadas na medida do nível de oxigênio dissolvido (OD) em bioprocessos de produção de antibióticos é desenvolvida e recomendada para o tratamento de dados experimentais de OD visando à estimativa correta do coeficiente volumétrico de transferência de oxigênio ( $k_{La}$ ), um parâmetro chave de controle da oxigenação do meio fermentativo. Para o desenvolvimento de tal equação, utilizou-se o método da transformada de Laplace para resolver a equação diferencial que descreve o atraso no sinal de resposta da sonda, o qual é caracterizado por uma constante de delay  $k_d$ . Simulações da equação proposta e da equação tradicional utilizando valores de  $k_{La}$  e  $k_d$  iguais a  $400 \text{ h}^{-1}$  e  $350 \text{ h}^{-1}$ , respectivamente, evidenciaram que o atraso no sinal de resposta da sonda interfere nos níveis medidos de OD, levando a uma estimativa incorreta de  $k_{La}$  caso a equação tradicional seja utilizada para tratar dados obtidos em um ensaio típico de determinação deste parâmetro. Embora a equação proposta contenha um parâmetro adicional ( $k_d$ ), a determinação deste parâmetro não deve se constituir em óbice para o seu uso uma vez que  $k_d$  pode ser estimado juntamente com  $k_{La}$  por um procedimento de regressão não linear.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática, Transformada de Laplace, Bioprocessos, Antibióticos

### **Introdução**

No desenvolvimento de bioprocessos, além dos objetivos econômicos, busca-se atender às exigências crescentes de confiabilidade e reprodutibilidade dos produtos obtidos, o que vem aumentando a necessidade de melhoria no monitoramento e controle de tais processos, contexto no qual a modelagem matemática e a simulação apresentam-se como importantes ferramentas.

Entre os produtos obtidos por processos biotecnológicos, destacam-se os antibióticos devido à importância clínica que estes representam, permitindo o tratamento de diversas doenças infecciosas e cancerígenas (MENEZES et al., 2000). A produção industrial de antibióticos é realizada utilizando-se fungos e bactérias em processos que, em sua ampla maioria, são aeróbios estritos, embora haja relatos na literatura de estudos sobre a produção destes bioprodutos em condições anaeróbias por bactérias isoladas do solo (EZAKI et al., 2008, BEHNKEN; HERTWECK, 2012)

O oxigênio tem como função, na biossíntese de antibióticos, atuar comoceptor final de elétrons, participando ao término da cadeia respiratória da reoxidação das moléculas transportadoras de elétrons e gerando moléculas de ATP ricas em energia que é utilizada nas reações anabólicas.

Para que ocorra a síntese de ATP é necessário que os microrganismos oxidem uma matéria orgânica tal como são os açúcares, os quais são muito solúveis em água, podendo-se atingir concentrações da ordem de centenas de gramas por litro. Contrariamente, o oxigênio é muito pouco solúvel em água, como também o são os demais gases, podendo-se atingir, no máximo, concentrações da ordem de miligramas por litro (ppm). Desta forma, os bioprocessos de produção de antibióticos são geralmente conduzidos em reatores convencionais de tanque agitado e aerado, submetidos a altas velocidades de agitação visando favorecer a dissolução do oxigênio no meio fermentativo, principalmente quando são utilizados fungos filamentosos, os quais aumentam a viscosidade do meio, o que dificulta a transferência de oxigênio da fase gasosa para a fase líquida (CRUZ, 1996).

A produtividade em fermentações antibióticas é fortemente dependente da concentração de oxigênio dissolvido (OD), sendo a concentração crítica (concentração abaixo da qual ocorre limitação do bioprocessos), por exemplo, em torno de 30% do valor da saturação para a produção de penicilina pelo fungo *Penicillium chrysogenum* (MENEZES et al., 1994). Desta forma, fica clara a necessidade de manter a concentração de OD acima do valor crítico para um determinado microrganismo produtor de antibiótico a fim de evitar que o bioprocessos seja limitado por uma oxigenação insuficiente do meio fermentativo.

O controle da concentração de OD pode ser feito manipulando-se o valor do coeficiente volumétrico de transferência de oxigênio ( $k_{La}$ ), o qual está intimamente relacionado com a agitação e a aeração praticadas no biorreator. Portanto, há a necessidade de se determinar o valor de  $k_{La}$  para um dado sistema de agitação e aeração a fim de se fazerem os ajustes necessários neste parâmetro visando atender à demanda de oxigênio durante o bioprocessos.

Existem alguns métodos de determinação de  $k_{La}$  estabelecidos na literatura, dentre os quais aquele que emprega sondas (eletrodos) para a medida da concentração de OD, gerando dados experimentais que, convenientemente tratados por meio de um modelo matemático adequado, fornecem uma estimativa do valor de  $k_{La}$ . Em se utilizando este método, cuidado se deve ter quanto ao atraso na resposta da sonda caso o valor de  $k_{La}$  a determinar seja elevado, pois caso contrário, a determinação de  $k_{La}$  estará incorreta como será demonstrado no presente trabalho. Este atraso no sinal da sonda é caracterizado por uma constante de *delay* ( $k_d$ ) cujo recíproco fornece uma noção do tempo de atraso no sinal.

Este trabalho visa demonstrar que, dependendo dos valores relativos de  $k_{La}$  e  $k_d$ , o atraso no sinal da sonda interfere na determinação do valor de  $k_{La}$  caso um modelo matemático apropriado não seja empregado para tratar os dados de medidas de OD com atraso. Para tanto, assume-se que a taxa de variação temporal da concentração de OD medida pela sonda ( $C_s$ ) seja proporcional à diferença entre o valor real da concentração de OD ( $C$ ) e aquele medido pela sonda, sendo  $k_d$  a constante de proporcionalidade. Introduzindo-se a expressão  $C=C(t)$ , obtida a partir da integração do balanço de massa de OD em um ensaio típico de determinação de  $k_{La}$ , na equação diferencial que descreve a taxa de variação temporal de  $C_s$ , obtém-se uma nova equação diferencial no tempo, cuja solução, obtida por transformada de Laplace, incorpora os dois parâmetros  $k_{La}$  e  $k_d$ , configurando-se como a equação a ser usada quando o atraso no sinal da sonda não for desprezível.

## Modelagem Matemática

O balanço de massa de oxigênio dissolvido durante o bioprocessos de produção de antibiótico em reator batelada, considerando o suprimento e o consumo deste componente no meio é dado pela seguinte equação (SCHMIDELL, 2001):

$$\frac{dC}{dt} = k_L a(C^* - C) - Q_{O_2} X \quad (1)$$

onde  $C$  é a concentração real de OD,  $C^*$  é a concentração de OD na saturação,  $k_L a$  é o coeficiente volumétrico de transferência de oxigênio,  $Q_{O_2}$  é a velocidade específica de consumo de oxigênio para respiração microbiana e  $X$  é a concentração celular.

No caso do emprego de sondas para a medida da concentração de OD visando à determinação de  $k_L a$  para um dado sistema de agitação e aeração, o que se faz é utilizar o meio isento de células ( $X=0$ ), reduzindo inicialmente a zero a concentração de OD pelo borbulhamento de nitrogênio no meio. Em seguida, agita-se e aera-se o meio, registrando-se a concentração de OD no decorrer do tempo. Em tais condições, a Equação (1) se reduz à Equação (2) (SCHMIDELL, 2001):

$$\frac{dC}{dt} = k_L a(C^* - C) \quad (2)$$

Separando as variáveis na Equação (2), integrando e aplicando a condição inicial  $C(0)=0$ , obtém-se:

$$\frac{C}{C^*} = (1 - e^{-k_L a t}) \quad (3)$$

Os valores de  $C/C^*$  fornecidos pela Equação (3) correspondem à razão entre os valores reais da concentração de OD e aquela de saturação, devendo ser os valores registrados pela sonda caso o atraso no sinal seja desprezível, isto é, a sonda previamente calibrada de 0 a 100 % (saturação) registra a concentração de OD como uma porcentagem daquela de saturação. Entretanto, se o atraso no sinal não puder ser desprezado, uma nova equação deve ser desenvolvida visando à determinação correta do valor de  $k_L a$ . O atraso no sinal da sonda é causado pelas resistências difusionais ao transporte de oxigênio até a superfície do cátodo, onde é reduzido gerando um fluxo de elétrons que é proporcional à sua concentração.

Assumindo que a taxa de variação temporal da concentração de OD medida pela sonda ( $C_s$ ) seja proporcional à diferença entre o valor real da concentração de OD ( $C$ ) e aquele medido pela sonda, pode-se escrever (SCHMIDELL, 2001):

$$\frac{dC_s}{dt} = k_d (C - C_s) \quad (4)$$

onde  $k_d$  é a constante de atraso da sonda,  $C_s(0)=0$  e  $C_s(\infty)=C^*$ .

## Resultados e Discussão

### Solução da equação diferencial representativa do atraso no sinal da sonda

Dividindo ambos os membros da Equação (4) por  $C^*$ , obtém-se:

$$\frac{d(C_s / C^*)}{dt} = k_d (C / C^* - C_s / C^*) \quad (5)$$

Introduzindo  $y = C_s / C^*$  e a Equação (3) na Equação (5), resulta:

$$\frac{dy}{dt} = k_d \left[ (1 - e^{-k_L a t}) - y \right] \quad (6)$$

Reescrevendo a Equação (6) em um outro formato:

$$\frac{dy}{dt} + k_d y = k_d (1 - e^{-k_L a t}) \quad (7)$$

A Equação (7) está sujeita à condição inicial  $y(0)=0$ . Resolvendo esta equação por transformada de Laplace (ZILL, 2014), tem-se:

$$\mathcal{L} \left[ \frac{dy}{dt} + k_d y \right] = \mathcal{L} \left[ k_d (1 - e^{-k_L a t}) \right] \Rightarrow \quad (8)$$

$$\mathcal{L} \left[ \frac{dy}{dt} \right] + k_d \mathcal{L}[y] = k_d \mathcal{L} \left[ (1 - e^{-k_L a t}) \right] \Rightarrow \quad (9)$$

$$sY(s) - \underbrace{Y(0)}_0 + k_d Y(s) = k_d \left\{ \frac{1}{s \left[ \left( \frac{1}{k_L a} \right) s + 1 \right]} \right\} \Rightarrow \quad (10)$$

$$Y(s) = k_d \left\{ \frac{1}{s \left[ \left( \frac{1}{k_L a} \right) s + 1 \right]} \right\} \left\{ \frac{1}{(s + k_d)} \right\} \Rightarrow \quad (11)$$

$$Y(s) = \left\{ \frac{1}{s \left[ \left( \frac{1}{k_L a} \right) s + 1 \right]} \right\} \left\{ \frac{1}{\left[ \left( \frac{1}{k_d} \right) s + 1 \right]} \right\} \quad (12)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace (ZILL, 2014) à Equação (12), obtém-se a solução da Equação (5) como segue:

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left\{ \frac{1}{s \left[ \left( \frac{1}{k_L a} \right) s + 1 \right]} \right\} \left\{ \frac{1}{\left[ \left( \frac{1}{k_d} \right) s + 1 \right]} \right\} \right\} \Rightarrow \quad (13)$$



$$y(t) = I + \left[ \frac{I}{\left(\frac{I}{k_d}\right) - \left(\frac{I}{k_L a}\right)} \right] \left[ \left(\frac{I}{k_L a}\right) e^{-k_L a t} - \left(\frac{I}{k_d}\right) e^{-k_d t} \right] \Rightarrow \quad (14)$$

$$y(t) = I + \left[ \frac{k_d k_L a}{k_L a - k_d} \right] \left[ \left(\frac{I}{k_L a}\right) e^{-k_L a t} - \left(\frac{I}{k_d}\right) e^{-k_d t} \right] \Rightarrow \quad (15)$$

$$y(t) = \frac{C_s}{C^*} = I + \left[ \frac{I}{k_L a - k_d} \right] \left[ k_d e^{-k_L a t} - k_L a e^{-k_d t} \right] \Rightarrow \quad (16)$$

$$\frac{C_s}{C^*} = I + \left( \frac{k_L a}{k_d - k_L a} \right) e^{-k_d t} - \left( \frac{k_d}{k_d - k_L a} \right) e^{-k_L a t} \quad (17)$$

Equação (17) é a que deve ser empregada para tratar dados experimentais de medidas de OD realizadas com sondas com atraso no sinal de resposta.

### Exemplo ilustrativo

Como ilustração, as Equações (3) e (17) foram simuladas para valores de  $k_L a$  e  $k_d$  respectivamente iguais a  $400 \text{ h}^{-1}$  e  $350 \text{ h}^{-1}$ , visando comparar a evolução temporal do nível real de OD ( $C/C^*$ ) e aquele fornecido pela sonda ( $C_s/C^*$ ). Os resultados mostrados na Figura 1 evidenciam claramente que o atraso no sinal da sonda interfere significativamente nos valores medidos do nível de OD, devendo a Equação (17) ser usada para o tratamento dos dados registrados pela sonda visando a estimativa correta do valor de  $k_L a$ .

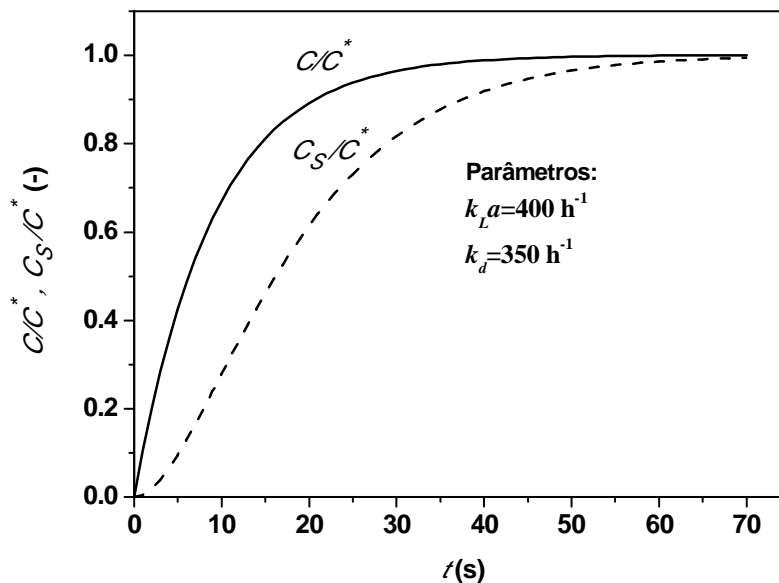


Figura 1: Evolução temporal do nível de OD real e aquele registrado pela sonda

Para se ter uma noção da magnitude do erro cometido na determinação de  $k_{LA}$  quando dados de medidas de OD com atraso são tratados por uma versão linearizada do modelo tradicional (Equação (3)), uma regressão linear dos pontos  $[-\ln(1-C/C^*)]$  versus  $t$  foi realizada (Figura 2), obtendo-se um valor de  $k_{LA}$  (coeficiente angular da reta) igual a  $277 \text{ h}^{-1}$ , resultado que representa um erro relativo percentual de  $-30.75\%$  quando comparado ao valor correto de  $k_{LA}$  ( $400 \text{ h}^{-1}$ ).

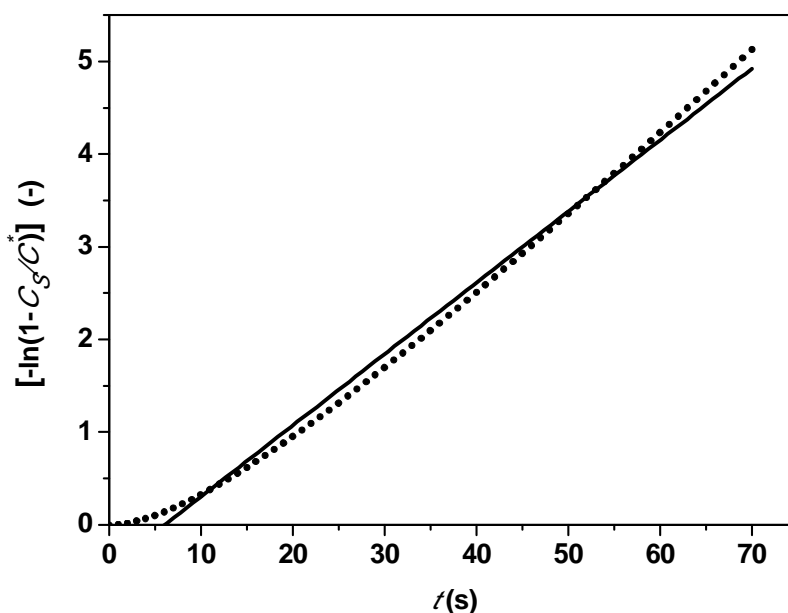


Figura 2: Determinação de  $k_{LA}$  utilizando o modelo tradicional linearizado e as medidas de OD realizadas com atraso pela sonda

A Equação (17), além de conter o parâmetro  $k_{LA}$ , contém o parâmetro  $k_d$ , o qual também deve ser determinado, não constituindo esta determinação uma dificuldade para o uso da equação. Para a determinação de  $k_d$  há duas alternativas possíveis. A primeira, consiste em estimar este parâmetro juntamente com  $k_{LA}$  na etapa de estimação de parâmetros por regressão não linear, uma vez que a Equação (17) não é possível de ser linearizada. A outra alternativa seria determinar experimentalmente este parâmetro realizando um ensaio degrau, no qual a sonda estaria inicialmente em equilíbrio com um meio saturado em nitrogênio ( $OD = 0$ ), sendo em seguida exposta repentinamente a um meio saturado em oxigênio ( $OD = 100\%$ ). Em tais condições, tem-se desde o instante inicial do degrau que  $C = C^*$  na Equação (4), isto é:

$$\frac{dC_s}{dt} = k_d(C^* - C_s) \quad (18)$$

Integração da Equação (18), sujeita a condição inicial  $C_s(0) = 0$ , resulta na Equação (19):

$$\frac{C_s}{C^*} = (1 - e^{-k_d t}) \quad (19)$$

Observa-se na Equação (19) que ao plotar  $[-\ln(1-C_s/C^*)]$  em função do tempo  $t$ , utilizando os dados experimentais obtidos no ensaio descrito, deve-se obter uma reta cujo coeficiente angular representa o valor de  $k_d$ .

De acordo com informações fornecidas pelos fabricantes de eletrodos, uma sonda razoavelmente rápida atinge 90% da resposta em 20 segundos no ensaio degrau, o que permite estimar, pela Equação (19), um valor de  $k_d$  de aproximadamente  $415 \text{ h}^{-1}$ .

Por fim, analisando-se a Equação (17) para os casos em que  $k_d \gg k_{La}$ , verifica-se que  $\left(\frac{k_{La}}{k_d - k_{La}}\right) \rightarrow 0$ ,  $e^{-k_d t} \rightarrow 0$  e  $\left(\frac{k_d}{k_d - k_{La}}\right) \rightarrow 1$ , de modo que a Equação (17) recai na Equação (3), não havendo necessidade de corrigir o sinal do eletrodo em tais condições. A fim de ilustrar numericamente estes casos, tem-se que uma sonda que apresente um  $k_d$  da ordem de  $400 \text{ h}^{-1}$ , permite estimar, com razoável precisão, valores de  $k_{La}$  inferiores a  $200 \text{ h}^{-1}$ . Acima destes valores de  $k_{La}$ , os erros cometidos na determinação deste parâmetro seriam muito elevados, exigindo que a correção proposta fosse efetuada.

## Conclusões

Baseado nos resultados obtidos neste trabalho, as seguintes conclusões podem ser realizadas:

- a transformada de Laplace mostrou-se uma ferramenta muito útil para a resolução da EDO que descreve o atraso no sinal de resposta de sondas empregadas na medição de níveis de OD em bioprocessos de produção de antibióticos, permitindo obter a solução da equação com rapidez, simplicidade e reduzido esforço analítico;
- o atraso no sinal da sonda interfere nas medidas de OD, levando a obtenção de dados experimentais que, se não tratados por uma equação apropriada que considere este atraso, acarretará significativos erros na determinação do coeficiente volumétrico de transferência de oxigênio ( $k_{La}$ );
- a equação desenvolvida para o tratamento de dados de medidas de OD com atraso contém dois parâmetros ajustáveis  $k_{La}$  e  $k_d$ , os quais podem ser determinados simultaneamente por regressão não linear usando-se a própria equação e os dados experimentais obtidos em um ensaio típico de determinação de  $k_{La}$ .

## Agradecimentos

O autor S. C. Oliveira agradece ao CNPq pelo apoio financeiro a esta pesquisa (Processo 455487/2014-6).

## Referências

- BEHNKEN, S.; HERTWECK, C. Applied Microbiology and Biotechnology. **Anaerobic bacteria as producers of antibiotics**, v. 96, n. 1, p. 61-67, 2012.
- CRUZ, A. J. G. **Modelagem fenomenológica e simulação por redes neuronais do bioprocessamento da penicilina-G**. 150f. 1996. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química) – UFSCar, São Carlos, 1996.



EZAKI, M.; MURAMATSU, H.; TAKASE, S.; HASHIMOTO, M. The Journal of Antibiotics. **Naphthalecin, a Novel Antibiotic Produced by the Anaerobic Bacterium, *Sporotalea colonica* sp. nov.**, v. 61, n. 4, p. 207–212, 2008.

MENEZES, J. C.; ALVES, S. S.; LEMOS, J. M.; AZEVEDO, S. F. Journal of Chemical Technology and Biotechnology. **Mathematical modelling of industrial pilot-plant penicillin-G fed-batch fermentations**, v. 61, n. 2, p. 123-138, 1994.

MENEZES, J. C.; ALVES, T. P.; CARDOSO, J. P. Biotecnologia microbiana: a produção de penicilina. In: LIMA, N.; MOTA, M. (Eds.) **Biotecnologia: fundamentos e aplicações**. DIFEL, 2000, cap.12, p.267-282.

SCHMIDELL, W. Agitação e aeração em biorreatores. In: SCHMIDELL, W.; LIMA, U. A.; AQUARONE, E.; BORZANI, W. (Coords.) **Biotecnologia Industrial: engenharia bioquímica**. São Paulo: Edgard Blücher, 2001, v.2, p.277-371.

ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. 2.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.



## Automatic construction of arterial tree models using different power laws

*Lucas Diego Mota Meneses*  
University Federal of Juiz de Fora  
*lucasmeneses@ice.ufjf.br*

*Rafael Alves Bonfim de Queiroz*  
University Federal of Juiz de Fora  
*rafael.bonfim@ice.ufjf.br*

*Patricia Fonseca de Brito*  
University Federal of Juiz de Fora  
*patriciafonseca@ice.ufjf.br*

*Bernardo Martins Rocha*  
University Federal of Juiz de Fora  
*bernardomartinsrocha@ice.ufjf.br*

**Abstract:** Arterial trees are networks of vessels responsible by transport/distribution of oxygen and nutrients to the human body. The study of these trees is justified because of the important role that they play in the circulatory system. Therefore, arterial tree models are often used to gain understanding of the hemodynamics aspects of the cardiovascular system. Among the approaches found in the literature to construct optimized models of arterial tree, there is the Constructive Constrained Optimization (CCO) method. This methodology allows to generate arterial tree models according to a given cost function and a power law that controls the radii of the vessels related to bifurcations during the growth process of the arterial tree. In this paper, we present an algorithm inspired on CCO that is able to generate models of arterial tree considering different power laws that takes into account the amount of proximal bifurcations of a vessel in its formulation. Preliminary results show that 2D/3D models generated by this algorithm satisfactorily reproduces morphometric data of real coronary arterial trees, such as vessel diameter and distribution bifurcation angle.

**Palavras-chave:** Vascular Anatomy. Power Law. Computational Models.

## Introduction

Frequently, computational models of arterial trees have been employed as geometrical substrates for hemodynamic simulation studies. Different class of arterial trees models have been reported in the literature such as: lumped parameter models (MATES et al., 1988), anatomical models (ONUKI; NITTA, 1993), fractal models (BEEK et al., 1989, YANG; WANG, 2012) and optimized models (SCHREINER; BUXBAUM, 1993, KARCH et al., 1999; SCHREINER et al., 2006; BLANCO et al., 2012, 2013; QUEIROZ et al., 2012, 2015; SCHWEN et al., 2015).

In particular, this work is focused in optimized models generated by the Constrained Constructive Optimization (CCO) method (SCHREINER; BUXBAUM, 1993). Arterial tree models generated by CCO are able to mimic important properties of real arterial trees, such as segment radii, branching angle statistics and pressure profiles.

Also, our group contributes with an algorithm based on CCO method that generates arterial tree models considering the Fahraeus-Lindqvist effect (PRIES et al., 1990, BRITO, P. F., 2016), which is an effect where the viscosity of the blood changes with the diameter of the vessel it travels through.



Here we describe an algorithm based on the CCO which is able to generate an arterial tree model with bifurcation exponent taking into account properties of the tree during the growth process. In particular, the proposed algorithm considers the bifurcation level, which is the number of proximal bifurcations along the path from the respective segment to the root segment (main feeding artery).

The remainder of this paper is organized as follows. In Section , the proposed algorithm based on the CCO method is described. In Section 8, results obtained using the algorithm developed here are presented. Finally, Section 8 contains our conclusions and discusses the future directions of this work.

## The algorithm based on CCO method

The algorithm proposed here is based on the assumptions and constraints listed below (SCHREINER; BUXBAUM, 1993, KARCH et al., 1999, QUEIROZ et al., 2015):

- The concept associated with the construction is to minimize the total intravascular volume

$$V = \pi \sum_{s=1}^{K_{tot}} l_s r_s^2, \quad (1)$$

where  $l_s$  and  $r_s$  are the length and radius of the segment  $s$ ,  $K_{tot}$  is the number of segments of the tree in growth stage;

- the arterial tree is modeled as a binary branching system of straight cylindrical tubes (vessel segments);
- the model tree starts at the root segment and it is truncated in the form of terminal segments on prearteriolar level;
- the blood is modeled as an incompressible, homogeneous Newtonian fluid at steady state and laminar flow conditions are considered;
- flow resistance  $R_s$  of each segment of the tree is assumed to follow Poiseuille's law

$$R_s = \left( \frac{8\eta}{\pi} \right) \frac{l_s}{r_s^4}, \quad (2)$$

where  $\eta = 3,6$  cP is the blood viscosity.

- the pressure drop  $\Delta p_s$  along each segment is given by

$$\Delta p_s = R_s Q_s, \quad (3)$$

where  $Q_s$  is the flow through the segment;

- the resistance of the resulting model tree induces a pre-specified perfusion flow  $Q_{perf}$  across the overall pressure drop

$$\Delta p = p_{perf} - p_{term}; \quad (4)$$

- the perfusion flow is  $Q_{perf}$  which is given in the proximal localization  $\mathbf{x}_{prox}$  of the root segment;
- each terminal segment supplies an identical and equal amount of blood flow  $Q_{i,term}$  into the micro-circulatory network, which is not modeled in detail. Thus,

$$Q_{perf} = \sum_{i=1}^{N_{term}} Q_{i,term}, \quad (5)$$

where  $N_{term}$  is the number of terminal segments of the tree;

- the overall pressure drop in the tree is given by  $\Delta p = p_{perf} - p_{term}$ , where  $p_{perf}$  is the perfusion pressure at the inlet of the root segment,  $p_{term}$  is the pressure at the outlet of all the terminal segments.

### Bifurcation law

Next, we describe our contribution to the proposed CCO algorithm that takes into account the bifurcation level for the power law exponent. At each bifurcation the radii of parent ( $r_{parent}$ ) and daughter segments ( $r_{left}, r_{right}$ ) are forced to exactly fulfill a bifurcation law

$$r_{parent}^{\gamma} = r_{left}^{\gamma} + r_{right}^{\gamma}, \quad (6)$$

where  $\gamma$  is a exponent that govern the shrinkage of radii across bifurcations. This power law was derived from morphometric measurements of coronary artery corrosion casts (ZAMIR; CHEE, 1987, ZAMIR, 1988) and also from theoretical considerations (SHERMAN, 1981).

However, several values for the parameter  $\gamma$  have been reported in the literature. Measurements on corrosion casts of human coronary arteries suggested that a value of  $\gamma = 3$  should be used, which would allow for uniform shear stress over all the tree (SHERMAN, 1981; SCHREINER et al., 1996), since shear stress is proportional to  $flow/r^3$ . Conversely, it has also been argued that minimum reflection of pulse waves (ARTS et al., 1979; SCHREINER; BUXBAUM, 1993) would be achieved with  $\gamma = 2,55$ .

Regardless of the particular value of  $\gamma$  given, the CCO method generates an arterial tree model maintaining this exponent constant in all bifurcations throughout the tree.

Here, we propose an algorithm based on CCO which is able to generate an arterial tree model with bifurcation exponent dependent on the bifurcation level (QUEIROZ, R. A. B., 2013). This tree property is defined as the number of proximal bifurcations along the path from the respective segment to the root segment.

Different mathematical relations between exponent  $\gamma$  and bifurcation level can be created (MENESES, L. D. M., 2016). As it is reasonable to accept that this exponent is between 2,55 and 3 for the coronary arterial tree, here we consider Eq. (6) with  $\gamma$  satisfying

$$\gamma = \gamma_k(n) = \begin{cases} 2,55, & \text{for } n \leq k, \\ 3,00, & \text{for } n > k \end{cases}, \quad (7)$$

where  $k$  is the bifurcation level that the user can choose in order to simulate the algorithm and  $n$  denotes the level of the bifurcation in the tree model.

During the generation of model, if adding the terminal segment affects the level of bifurcation of some segments of the tree, then the segments' radii must be rescaled as follows: the tree has to be traversed up to the root segment, starting at all terminal segments, to recalculate the corresponding bifurcation ratios (see Eqs. (9) and (10) in (KARCH et al., 1999)).

### Generation of the arterial tree model

The algorithm of tree generation based on the CCO has previously been described in detail (SCHREINER; BUXBAUM, 1993; KARCH et al., 1999; QUEIROZ et al., 2015). Here we only summarized the main ideas.

The optimized tree model generation starts by planting the root segment with its proximal end  $\mathbf{x}_{prox}$  fixed at the perfusion domain  $\Omega_{perf}$  and the distal  $\mathbf{x}_{new}$  selected randomly within this domain.

Given a tree with  $k_{term}$  terminal segments, the stepwise growing of the tree is as follows. Three fundamental steps are performed:

- Adding the new terminal segment  
Firstly, the location  $\mathbf{x}_{term}$  for a new terminal is selected from a pseudorandom number sequence, uniformly distributed inside the perfusion domain. The prospective location  $\mathbf{x}_{term}$  is accepted as a candidate for a new terminal site only if  $\mathbf{x}_{term}$  satisfy a distance criterion (see (SCHREINER; BUXBAUM, 1993)). Since  $\mathbf{x}_{term}$  has been accepted as a distal end of a new terminal segment, it is temporarily connected to each of the neighboring segments, one after the other. Connecting the new terminal segment to a preexisting segment, consequently causes violation in the boundary condition regarding the terminal flows and it can affect the bifurcation level of the segments of the tree. In order to return the proper terminal flows, the flow resistance of the tree must be adjusted for each temporary connection. This can only be performed by rescaling of the segments' radii (KARCH et al., 1999) equipped with a procedure that adjusts the exponent  $\gamma$  in accordance with the bifurcation level, see Eq. (7).
- Geometric optimization  
The bifurcation site resulting in each temporary connection is optimized in order to minimize the total intravascular volume and dissolved again. When this connection is dissolved, the exponent  $\gamma$  associated the bifurcation level can be adjusted.
- Structural optimization  
After the investigation of all possible connections in the neighborhood of  $\mathbf{x}_{term}$ , the connection that provided the lowest optimization target is adopted as permanent for the new terminal site  $\mathbf{x}_{term}$ . Thus, the tree is grown to  $k_{term} + 1$  terminal segments.

The process of growing the tree summarized above is repeated until  $k_{term} = N_{term}$ , i.e., the preset number of terminals  $N_{term}$  is achieved. The steps described previously are systematized in the Algorithm 1.

---

**Algorithm 1:** Tree generation inspired in the CCO.

---

**Data:**  $Q_{perf}, \Delta p, N_{term}$

- 1 *Planting the root segment;*
- 2  $k_{term} \leftarrow 1;$
- 3 **while** ( $k_{term} < N_{term}$ ) **do**
- 4     Adding the new terminal segment;
- 5     Geometric optimization;
- 6     Structural optimization;
- 7      $k_{term} \leftarrow k_{term} + 1;$
- 8 Obtain computed quantities (length, radius, resistance);

---

## Results

For morphometric comparison with real coronary arterial trees, the Algorithm 1 was applied to generate arterial trees with 250 terminal segments (499 in total) in order to represent the tree of the left anterior descending (LAD) coronary artery.

The arterial tree models were generated under the following conditions (KARCH et al., 1999): perfusion pressure  $p_{perf} = 100$  mmHg, terminal pressure  $p_{term} = 72$  mmHg, total perfusion flow  $Q_{perf} = 500$  mL/min, terminal flows  $Q_{term} = 2$  mL/min, bifurcation exponent given by Eq. (6), spherical volume  $\Omega_{perf} = 100$  cm<sup>3</sup> representing tissue to be perfused (LAD region).

For each simulation with  $k$  fixed in Eq. (6), ten replicates of the tree with 250 terminal segments were generated on the same predefined parameters and the same optimization target function (total intravascular volume). Each tree was generated using a different sequence of pseudorandom numbers for

casting the distal ends of its terminal segments. The same proceeding was done for models using the bifurcation exponent constant ( $\gamma = 2,55$  and  $\gamma = 3,00$ ) throughout the generation of the tree, in order to compare the effect of the created function (Eq. (6)). It is noteworthy that in the literature, authors use this exponent constant (KARCH et al., 1999).

Figs. 1 and 2 display the mean diameter and standard deviation of this mean diameter (SDM) of all vessel segments at a certain bifurcation level, defined as the number of proximal bifurcations of a segment. Triangles and rhombi denote measurements from corrosion casts of the coronary networks of two human hearts (ZAMIR; CHEE, 1987).

The results produced by the models are consistent with the experimental data (ZAMIR; CHEE, 1987). For  $k = 4$  and  $k = 6$  the model predictions for the diameter of the root segment (at level 0). It is observed that increased of the parameter value  $k$  in Eq. (6) resulted in models with higher levels of bifurcation.

Table 1 depicts the relative mean error calculated by

$$E_{rel} = \frac{1}{N_{bif}} \sum_{i=1}^{N_{bif}} \frac{\min\{|d_i - \tilde{d}_i^{sup}|, |d_i - \tilde{d}_i^{inf}|\}}{d_i} \quad (8)$$

where  $N_{bif}$  is the number of bifurcation levels of the tree model,  $d_i$  is the mean diameter in the bifurcation level  $i$  (ZAMIR; CHEE, 1987),  $\tilde{d}_i$  is the mean diameter in the bifurcation level  $i$  of the tree model. Let  $SDM_i$  denotes the standard deviation of  $\tilde{d}_i$ . Thus  $\tilde{d}_i^{sup} = \tilde{d}_i + SDM_i$  and  $\tilde{d}_i^{inf} = \tilde{d}_i - SDM_i$ . For hearts A and B we have  $N_{bif} = 34$  and  $N_{bif} = 30$ , respectively.

One can conclude of this quantitative result that the consider the bifurcation exponent using Eq. (7), the result with  $k = 2$  in produced tree models more close to real coronary arterial trees, but using bifurcation exponent constant  $\gamma = 3,00$  in Algorithm 1 tree models are even closer.

Table 1: Relative mean error ( $E_{abs}$ ) between tree models and real left coronary arterial trees of two humans.

Heart	Parameter $k$ in Equation (7)						$\gamma$	
	2	4	6	8	10	12	2,55	3,00
A	<b>0,2325</b>	0,2583	0,2633	0,2499	0,2747	0,2658	0,2649	<b>0,2291</b>
B	<b>0,2388</b>	0,2570	0,2628	0,2719	0,2900	0,2761	0,2455	<b>0,2383</b>

Table 1 exibs the mean intravascular volume  $V$  (see Eq. (1)) and standard deviation of this mean of ten models arterial trees generated using input data mentioned above. The model that better minimized  $V$  was that used  $k = 2$  in Eq. (6).

Table 2: Mean intravascular volume ( $V$ ) and standard deviation of this mean of models arterial trees generated with different bifurcation exponent.

	Parameter $k$ in Equation (7)						$\gamma$	
	2	4	6	8	10	12	2.55	3.00
$V$	<b>0,6071</b>	0,6085	0,6115	0,6129	0,6142	0,6184	0,6398	0,6079
	$\pm 0,0074$	$\pm 0,0073$	$\pm 0,0073$	$\pm 0,0066$	$\pm 0,0066$	$\pm 0,0097$	$\pm 0,0090$	$\pm 0,0075$

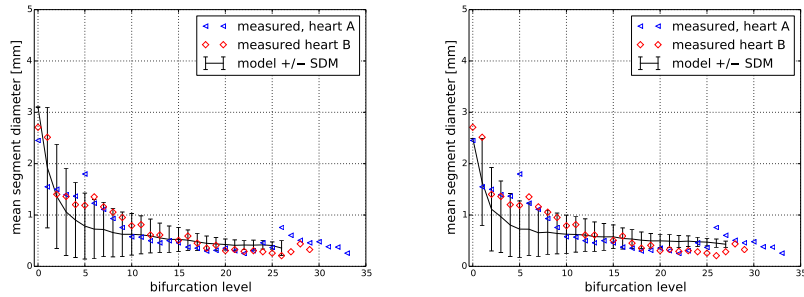


Figure 1: Morphometric comparison between tree models using the bifurcation exponent constant and real left coronary arterial trees of two humans.

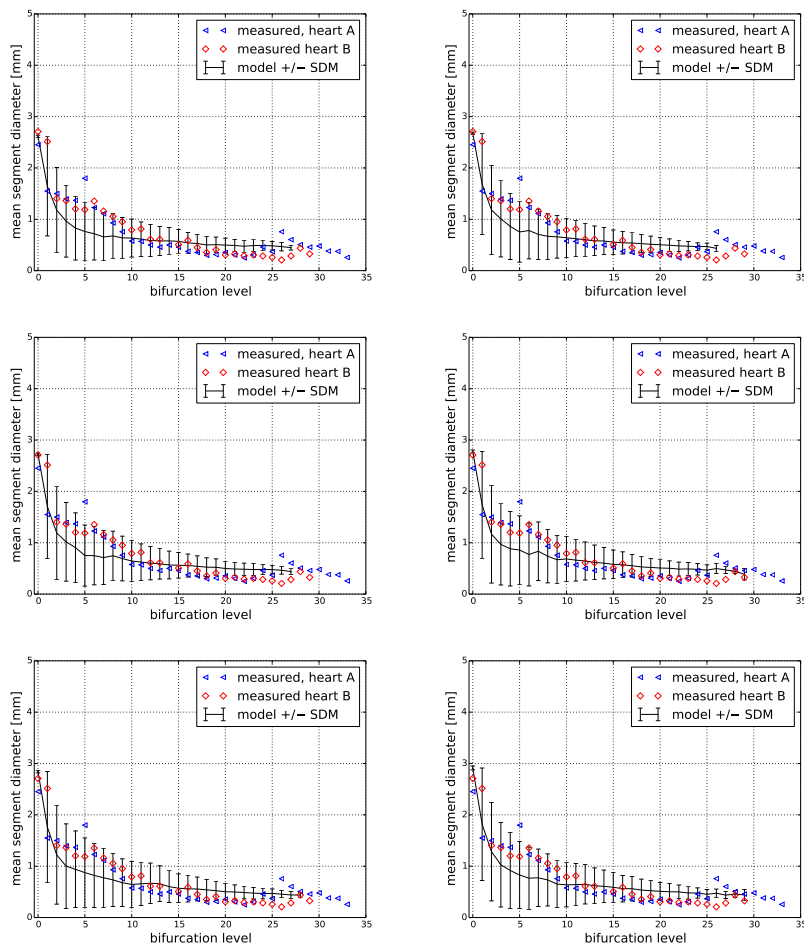


Figure 2: Morphometric comparison between tree models with bifurcation exponent given by Eq. (6) and real left coronary arterial trees of two humans.





## Conclusion

This work presented an algorithm developed which was based on CCO method that is capable of generating arterial tree models taking into account different values for the exponent in the bifurcation law.

The results presented herein are in agreement with real vascular trees with respect to morphometric data. Moreover, the results are consistent with previous work (KARCH et al., 1999) employing the original CCO algorithm for 3D domain.

In future works, we plan to investigate other relations between the exponent  $\gamma$  and bifurcation level and as well as hemodynamic simulations with the tree models generated by proposed algorithm.

## References

- ARTS, T. et al. American Journal of Physiology. **Propagation velocity and reflection of pressure waves in the canine coronary artery**. 237:H469-H474, 1979.
- BEEK J.V.; ROGER S.; AND BASSINGTHWAIGHTE J. American Journal of Physiology. **Regional myocardial flow heterogeneity explained with fractal networks**. 257:H1670-H1680, 1989.
- BLANCO P.; QUEIROZ R. AND FEIJÓO R. International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. **A computational approach to generate concurrent arterial networks in vascular territories**. 29:601-614, 2013.
- BLANCO P. et al. Scientific Computing Applied to Medicine and Healthcare. **Trends in the computational modeling and numerical simulation of the cardiovascular system**, Petrópolis – RJ, 2012.
- BRITO, P.F. **Construção de modelos de árvores arteriais considerando o efeito Fåhræus-Lindqvist**. 2016. 89f. Dissertation (Master of Computational Modelling), UFJF, Juiz de Fora, 2016.
- KARCH, R. et al. Computers in Biology and Medicine. **A tree-dimensional model for arterial tree representation, generated by constrained constructive optimization**, v. 29, p. 19-38, 1999.
- MATES, R. E.; KLOCKE, F.J. AND CANTY, J.M. Progress in Cardiovascular Diseases. **Coronary capacitance**, v. 31, p. 1-15, 1988.
- MENESES, L. D. M. **Construção de modelos de árvores arteriais usando diferentes expoentes para a lei de bifurcação**. 2016. 87f. Dissertation (Master of Computational Modelling), UFJF, Juiz de Fora, 2016.
- ONUKE T. AND NITTA S. Annals of Biomedical Engineering. **Computer simulation of geometry and hemodynamics of canine pulmonary arteries**. 21:107-115, 1993.
- PRIES, A.R. et al. Circulation Research. **Blood flow in microvascular networks, experiments and simulation**. v. 67, p. 826-834, 1990.
- QUEIROZ R.; BLANCO P. AND FEIJÓO R. Multiple vascularization of spatial domains using cco based algorithms. In: 10th WORLD CONGRESS ON COMPUTATIONAL MECHANICS. 2012, São Paulo–SP, Brazil, 2012.
- QUEIROZ, R.A.B. **Construção automática de modelos de árvores circulatórias e suas aplicações na hemodinâmica computacional**. 2013. 196f. Thesis (Doctorate of Computational Modelling), LNCC, Petrópolis, 2013.



- QUEIROZ, R.A.B.; BRITO, P.F.; ULYSSES, J.N.; MENESES, L.D.M. Automatic generation of optimized arterial trees. **Solabima - Congresso Latino Americano de Biomatemática**, Botucatu, 2015.
- SCHREINER W.; BUXBAUM, P. IEEE Transactions on Biomedical Engineering. **Computer-optimization of vascular trees**, v. 40, p. 482-491, 1993.
- SCHREINER, W. et al. Medical Engineering & Physics. **Optimized arterial trees supplying hollow organs**, 28:416-429, 2006.
- SCHREINER, W. et al. Journal of Theoretical Biology. **Structural quantification and bifurcation symmetry in arterial tree models generated by constrained constructive optimization**, 180:161-174, 1996.
- SCHWEN, L. O. et al. Journal of Theoretical Biology. **Algorithmically generated rodent hepatic vascular trees in arbitrary detail**, v. 365, p. 289-300, 2015.
- SHERMAN, T.F. The Journal of General Physiology. **On connecting large vessels to small: the meaning of murray's law**, v. 78, p. 431-453, 1981.
- YANG, J.; WANG, Y.. International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. **Design of vascular networks: A mathematical model approach**, 2012.
- ZAMIR M.; CHEE H. Blood Vessels **Segment analysis of human coronary arteries**. 24:76-84, 1987.
- ZAMIR, M. The Journal of General Physiology. **Distributing and delivering vessels of the human heart**, v.91, p. 725-735, 1988.



## Automatic construction of three-dimensional model of arterial tree incorporating the Fahraeus-Lindqvist effect

*Patricia Fonseca de Brito*

*Graduate Program in Computational Modelling, Federal University of Juiz de Fora  
patriciafonseca@ice.ufjf.br*

*Rafael Alves Bonfim de Queiroz*

*Graduate Program in Computational Modelling, Federal University of Juiz de Fora  
rafael.bonfim@ice.ufjf.br*

*Lucas Diego Mota Meneses*

*Graduate Program in Computational Modelling, Federal University of Juiz de Fora  
lucasmeneses@ice.ufjf.br*

*Rodrigo Weber dos Santos*

*Graduate Program in Computational Modelling, Federal University of Juiz de Fora  
rodrigo.weber@ufff.edu.br*

**Abstract:** Arterial tree models have been successfully used to obtain a better understanding of all aspects hemodynamics of clinically relevant regions of the human body in order to diagnosis and applications in surgical planning. Basically, the models can be classified into: anatomical, lumped parameter, fractal and optimized. This work focuses on the generation of optimized models based on Constructive Constrained Optimization (CCO) method. It is capable of generating arterial tree models that reproduce characteristics of real coronary tree, such as pressure profiles, vessel diameter and distribution bifurcation angle. However, this method does not consider a realistic blood viscosity during the construction of the arterial tree models. In this paper, we investigate the CCO method equipped with a model to account for the Fahraeus-Lindqvist effect, which indicates that the blood viscosity depends on the diameter of the vessel through a nonlinear function. The results obtained were satisfactory when compared with morphometric data of real coronary trees.

**Keywords:** Coronary Arterial Tree, Fahraeus-Lindqvist Effect, Computational Modeling.

## Introduction

Arterial trees serve to the purpose of conveying blood to all sites of a tissue. Hemodynamic simulation studies uses computational models of arterial trees as their geometrical substrate. These studies have been used to gain a better understanding of all aspects related to blood flow, from wave propagation and analysis of pressure pulse can be used for diagnosis and surgical planning applications. To date these simulations can employ one of following class of models of arterial trees: lumped parameter models (MATES, 1988), anatomical models (WATANABE, 2013), fractal models (VAN BEEK, 1989; YANG, 2012) and optimized (SCHREINER, 1993; KARCH, 1999; QUEIROZ, 2015; SCHWEN, 2015; BRITO, 2016).

In particular, this work is interested in optimized models generated by Constrained Constructive Optimization (CCO) (SCHREINER, 1993; KARCH, 1999; QUEIROZ, 2013; BRITO, 2016). Arterial tree models generated by CCO are able to mimic important properties of real arterial trees, such as segment radii, branching angle statistics and pressure profiles. However, the CCO method is not able to take into account the Fahraeus-Lindqvist effect during the generation of the models, which is an effect where the viscosity of the blood changes with the diameter of the vessel it travels through. For example,

there is a decrease of viscosity as the vessel's diameter decreases when the vessel diameter is between 10 and 300 micrometers.

In this context, the purpose of this work is provide an algorithm based on CCO method that generates arterial tree models considering the Fahraeus-Lindqvist effect (PRIES, 1990). The models obtained by the algorithm are compared with morphometric data of real coronary arterial trees.

## The algorithm based on CCO

The algorithm here proposed is based on the assumptions and constraints listed below (SCHREINER, 1993; KARCH, 1999; QUEIROZ, 2013):

- The concept associated with the construction is to minimize the total intravascular volume

$$V = \pi \sum_{i=1}^{K_{tot}} l_i r_i^2, \quad (1)$$

where  $l_i$  and  $r_i$  are the length and radius of the segment  $i$ ,  $K_{tot}$  is the number of segments of the tree in growth stage;

- the tree model is generated on a fixed 2D or 3D domain non necessarily convex that represents a tissue and organ, respectively;
- the proximal localization  $\mathbf{x}_{prox}$  of the root segment (feeding artery) is known and fixed in the boundary of the domain at the beginning of the simulation;
- the arterial tree is modeled as a dichotomously branching (binary) system of straight cylindrical tubes (vessel segments);
- the model tree starts at the root segment (main feeding artery) and it is truncated in the form of terminal segments on prearteriolar level;
- the model tree should take up the space of the perfusion domain as homogeneously as possible without intersection of segments;
- the blood is modeled as an incompressible, homogeneous Newtonian fluid at steady state and laminar flow conditions;
- at bifurcations the radii of parent ( $r_0$ ) and daughter segments ( $r_1, r_2$ ) are forced to exactly fulfill a bifurcation law derived from real coronary trees (ZAMIR, 1988)

$$r_0^\gamma = r_1^\gamma + r_2^\gamma, \quad (2)$$

where  $\gamma$  is a constant exponent with ranging between 2.55 and 3, governing the shrinkage of radii across bifurcations;

- flow resistance  $R$  of each segment of the tree is assumed to follow Poiseuille's law

$$R = \left( \frac{8\eta_i}{\pi} \right) \frac{l_i}{r_i^4}, \quad (3)$$

where  $\eta_i$  is the blood viscosity. The method CCO adopts  $\eta_i = 3.6$  cP (constant). In this work the blood viscosity  $\eta_i(d_i)$  used is described as a non-linear function given by (PRIES, 1990):

$$\eta_i(d_i) = \eta_p \left[ 1 + (\eta_{0.45} - 1) \left( \frac{d_i}{d_i - 1.1} \right)^2 \right] \left( \frac{d_i}{d_i - 1.1} \right)^2, \quad (4)$$

where  $d_i$  is the diameter of the segment  $i$ ,  $\eta_p = 1.1245$  cP is the plasma viscosity, and  $\eta_{0.45}$  is the apparent viscosity of the plasma for a discharge hematocrit of 0.45 given by

$$\eta_{0.45} = 6 \exp(-0.085d_i) + 3.2 - 2.44 \exp(-0.06d_i^{0.645}); \quad (5)$$

- the pressure drop  $\Delta p_s$  along each segment is given by

$$\Delta p_s = RQ, \quad (6)$$

where  $Q$  is the flow through segment;

- each terminal segment supplies an identical and equal amount of blood flow  $Q_{term}$  into the micro-circulatory network, which is not modeled in detail;
- the resistance of the resulting model tree induces a prespecified perfusion flow  $Q_{perf}$  across the overall pressure drop  $\Delta p = p_{perf} - p_{term}$ , where  $p_{perf}$  is the perfusion pressure at the inlet of the root segment,  $p_{term}$  is the pressure at the outlet of all the terminal segments and  $\Delta p$  is constant for the CCO method;
- the radius of the root segment  $r_{iroot}$  is scaled during the growth of the tree model by CCO method as follows:

$$r_{iroot} = \left[ R_{sub,iroot}^* \frac{Q_{perf}}{\Delta p} \right], \quad (7)$$

where  $R_{sub,iroot}^*$  denotes the reduced hydrodynamic resistance of the whole tree (see details in (KARCH,1999)) and  $Q_{perf} = k_{term}Q_{term}$  which  $k_{term}$  denotes the number of terminal segments to be supplied.

The algorithm of tree generation based on CCO has previously been described in detail by Brito (2016). The optimized tree model generation starts by planting the root segment ( $iroot$ ) with its proximal end  $\mathbf{x}_{prox}$  fixed at the perfusion domain  $\Omega_{perf}$  and the distal  $\mathbf{x}_{inew}$  selected randomly within this domain. If this position is not too close to  $\mathbf{x}_{prox}$ ,  $\mathbf{x}_{inew}$  is connected to  $\mathbf{x}_{prox}$ , resulting in a root segment length ( $l_{iroot}$ ). The radius  $r_{iroot}$  of the root segment is such that the hydrodynamic resistance  $R_{sub,iroot}^*$  yields the flow  $Q_{perf} = Q_{term}$  through one terminal segment ( $k_{term} = 1$ ) into the microcirculatory network. At this moment,  $R_{sub,iroot}^* = \frac{8\eta_i}{\pi} l_{iroot}$  and  $\eta_i$  assumes 3.6 cP to calculate radius. In following,  $\eta_i$  is updated using Eq. (4) with  $d_i = 2r_{iroot}$  and again the radius  $r_{iroot}$  is computed. This iterative procedure is repeated until convergence is achieved with precision  $\varepsilon = |r_{iroot}^{n+1} - r_{iroot}^n| < 10^{-5}$  for example, where  $n$  denotes iterations.

Given a tree with  $k_{term}$  terminal segments, the stepwise growing of the tree is as follows. First, the location  $\mathbf{x}_{term}$  for a new terminal is selected from a pseudorandom number sequence, uniformly distributed inside the perfusion domain. The prospective location  $\mathbf{x}_{term}$  is accepted as a candidate for a new terminal site only if  $\mathbf{x}_{term}$  satisfies a distance criterion (SCHREINER, 1993).

Since  $\mathbf{x}_{term}$  has been accepted as a distal end of a new terminal segment, it is temporarily connected to each of the neighboring segments, one after the other. Connecting the new terminal segment to a pre-existing segment, consequently cause violation in the boundary condition regarding the terminal flows. In order to return the proper terminal flows, the flow resistance of the tree must be adjusted for each temporary connection. This can only be performed by rescaling of the segments' radii (KARCH, 1999) equipped with an iterative procedure that estimates and corrects the non-linear viscosity in each segment of the tree.

The bifurcation site resulting in each temporary connection is optimized in order to minimize the total intravascular volume and dissolved again. After assessing all possible connections in the neighborhood of  $\mathbf{x}_{term}$ , the connection that provided the lowest optimization target is adopted as permanent for the new

terminal site  $\mathbf{x}_{term}$ . Thus, the tree is grown to  $k_{term} + 1$  terminal segments. The process of growing the tree summarized above is repeated until  $k_{term} = N_{term}$ , i.e., the preset number of terminals  $N_{term}$  is achieved. The steps described previously are systematized in the Algorithm 1.

---

**Algorithm 1:** Automatic generation of arterial tree models inspired in the CCO.

---

**Data:**  $\Omega_{perf}$ ,  $\mathbf{x}_{prox}$ ,  $Q_{perf}$ ,  $N_{term}$ ,  $\gamma$ .

- 1 Fix the proximal position  $\mathbf{x}_{prox}$  of the root segment into domain  $\Omega_{perf}$ ;
- 2 **repeat**
- 3     Generate the distal position  $\mathbf{x}_{inew}$  for the root segment into domain  $\Omega_{perf}$ ;
- 4     *Distance criterion:* check if this position is not too close to  $\mathbf{x}_{prox}$ ;
- 5     **until** (*distance criterion is met*);
- 6     Connect  $\mathbf{x}_{inew}$  to  $\mathbf{x}_{prox}$  (*planting the root segment*);
- 7     Update the viscosity of root segment through iterative procedure;
- 8      $k_{term} \leftarrow 1$ ;
- 9     **while** ( $k_{term} < N_{term}$ ) **do**
- 10         **repeat**
- 11             Generate the distal position  $\mathbf{x}_{inew}$  for a new terminal segment;
- 12             *Distance criterion:* check if this position is not too close to any of the existing segments;
- 13             **until** (*distance criterion is met*);
- 14             Obtain the neighboring segments  $N_{con}$  of  $\mathbf{x}_{inew}$  for temporary connection;
- 15             **for**  $j \leftarrow 1$  **to**  $N_{con}$  **do**
- 16                 Connect  $\mathbf{x}_{inew}$  to the midpoint  $\mathbf{x}_{ibif}$  of segment  $j$ ;
- 17                 Update the viscosity of segment through iterative procedure;
- 18                 Optimize the bifurcation position  $\mathbf{x}_{ibif}$ ;
- 19                 Perform restriction checks (e.g. segment intersection, segments traversing forbidden domains);
- 20                 Save value of target function, position  $\mathbf{x}_{ibif}$  and results of check in line  $j$  of the *Connection Evaluation Table (CET)*;
- 21                 Remove the bifurcation created;
- 22             Restrict *CET* to allowed connections:  $CET^v$ ;
- 23             **if** ( $CET^v$  is not an empty set) **then**
- 24                 Find optimal connection  $j_{opt}$  from  $CET^v$  (*structural optimization*);
- 25                 Make connection from  $\mathbf{x}_{inew}$  to  $j_{opt}$  permanent;
- 26                 Update the viscosity of segment through iterative procedure;
- 27                  $k_{term} \leftarrow k_{term} + 1$ ;
- 28             **else**
- 29                 Refuse the position  $\mathbf{x}_{inew}$ ;
- 30     Obtain computed quantities (length, radius, resistance, pressure drop);

---

## Results

For morphometric comparison with real coronary arterial trees, the Algorithm 1 was applied to generate arterial trees with 250 terminal segments (499 in total) in order to represent the tree of the left anterior descending (LAD) coronary artery.

The arterial tree models were generated under the following conditions (KARCH,1999): perfusion pressure  $p_{perf} = 100$  mmHg, terminal pressure  $p_{term} = 72$  mmHg, total perfusion flow  $Q_{perf} = 500$



mL/min, terminal flows  $Q_{term} = 2$  mL/min, bifurcation exponent  $\gamma = 3$ , spherical volume  $\Omega_{perf} = 100$  cm<sup>3</sup> representing tissue to be perfused (LAD region).

Ten replicates of the tree with 250 terminal segments were generated on the same predefined parameters and the same optimization target function (total intravascular volume). Each tree was generated using a different sequence of pseudorandom numbers for casting the distal ends of its terminal segments.

Figure 1 shows an arterial tree models generated with viscosity given by Eq (4). Note that the segments with larger radius, blood viscosity (Eq. (4)) approaches 3.6 cP, the value used by Karch (1999) to generate the models.

Figure 2 displays the mean diameter and standard deviation of this mean diameter (SDM) of all vessel segments at a certain bifurcation level, defined as the number of proximal bifurcations of a segment. This figure also shows the mean length and standard deviation of this mean length (SDM). Diamonds and triangles denote measurements from corrosion casts of the coronary networks of two human hearts (ZAMIR,1987).

One can see in Fig. 2 that the results produced by the models are consistent with the experimental data (ZAMIR,1987).

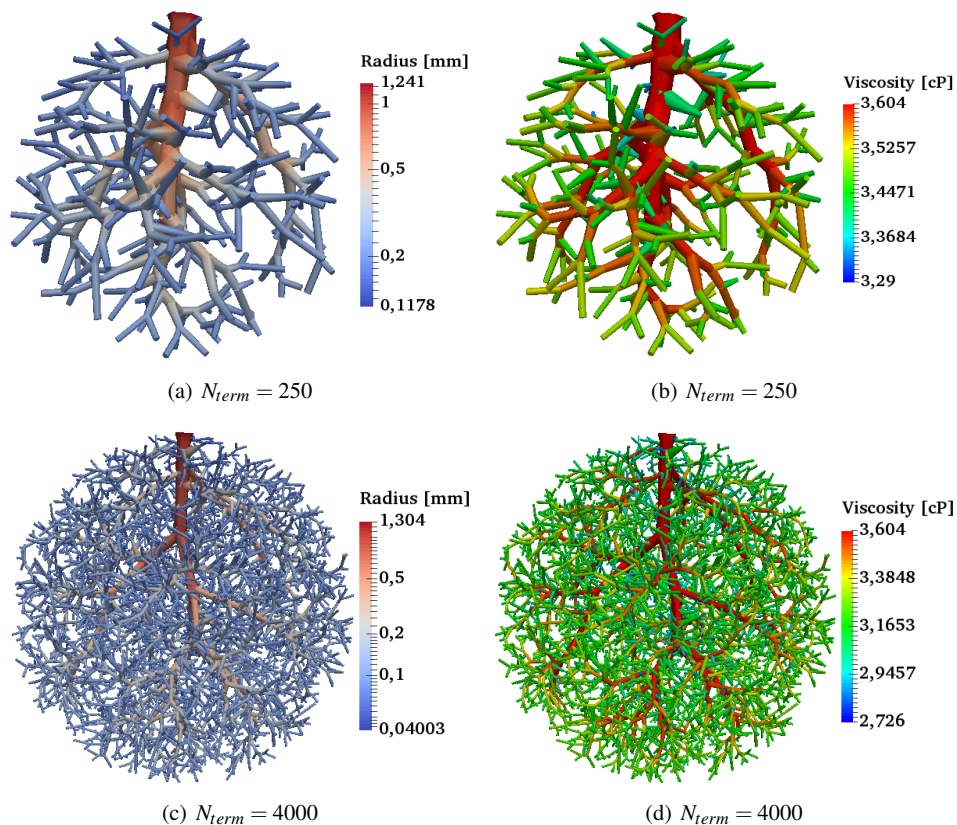


Figura 1: Visual representation of the models of an arterial tree with 250 and 4000 terminal segments.

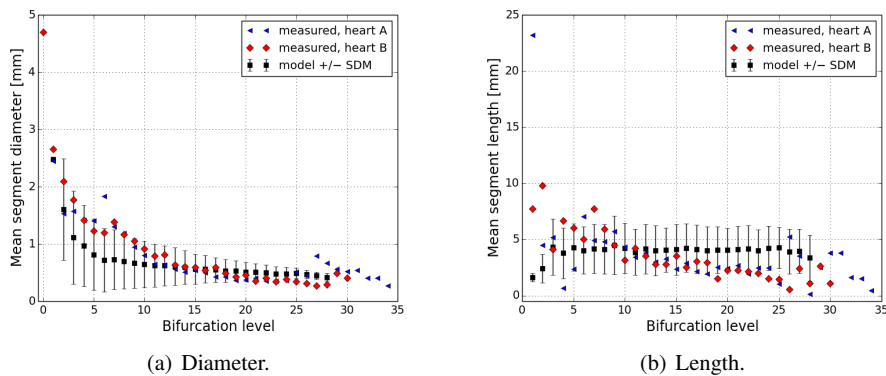


Figura 2: Morphometric comparison between tree models and real left coronary arterial trees of two humans.

## Conclusion and future work

In this work is presented an algorithm developed based on CCO method that is capable of generating tree models taking into account the Fahraeus-Lindqvist effect. These arterial tree models are in agreement with real vascular trees regarding morphometric parameter. In addition, the simulations presented here have the purpose to complement which had been done in Karch (1999) using only constant viscosity.

It should be emphasized that the described algorithm can be improved. In future work, we plan to incorporate elastic representation and collateralization of the vessels. Furthermore, the other hemodynamic simulations will be performed considering as geometric substrate the tree models here constructed.

## Acknowledgement

This work was partially supported by the Brazilian agency FAPEMIG which is gratefully acknowledged (Proc. Num. 00795-14).

## References

- BRITO, P.F. **Construção de Modelos de Árvores Arteriais Considerando o Efeito Fåhræus-Lindqvist**. 2016. 89f. Dissertation (Master of Computational Modelling), UFJF, Juiz de Fora, 2016.
- KARCH, R.; NEUMANN, F.; NEUMANN, M.; SCHREINER, W. Computers in Biology and Medicine. **A tree-dimensional model for arterial tree representation, generated by constrained constructive optimization**, v. 29, p. 19-38, 1999.
- MATES, R.E.; KLOCKE, F.J.; CANTY, J.M. Progress in Cardiovascular Diseases. **Coronary capacitance**, v. 31, p. 1-15, 1988.
- PRIES, A.R.; SECOMB, T.W.; GAEHTGENS, P.; GROSS, J.F. Circulation Research. **Blood Flow in Microvascular Networks, Experiments and Simulation**. v. 67, p. 826-834, 1990.
- QUEIROZ, R.A.B. **Construção Automática de Modelos de Árvores Circulatórias e suas Aplicações na Hemodinâmica Computacional**. 2013. 196f. Thesis (Doctorate of Computational Modelling), LNCC, Petrópolis, 2013.



- QUEIROZ, R.A.B.; BRITO, P.F.; ULYSSES, J.N.; MENESES, L.D.M. Automatic generation of optimized arterial trees. **Solabima - Congresso Latino Americano de Biomatemática**, Botucatu, 2015.
- SCHREINER W.; BUXBAUM, P. IEEE Transactions on Biomedical Engineering. **Computer-optimization of vascular trees**, v. 40, p. 482-491, 1993.
- SCHWEN, L. O.; WEI, W.; GREMSE, F.; EHLING, J.; WANG, L.; DAHMEN, U.; PREUSSER, T. Journal of Theoretical Biology. **Algorithmically generated rodent hepatic vascular trees in arbitrary detail**, v. 365, p. 289-300, 2015.
- VAN BEEK, J.H.G.M.; ROGER, S.A.; BASSINGTHWAIGHTE, J.B. American Journal of Physiology. **Regional myocardial flow heterogeneity explained with fractal networks**, v. 257, p. H1670-H1680, 1989.
- WATANABE, S.M.; BLANCO, P.J.; FEIJÓO, R.A. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. **Mathematical model of blood flow in anatomically detailed arterial network of the arm**, p. 961-985, 2013.
- YANG, J.; WANG, Y.. International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. **Design of vascular networks: A mathematical model approach**, 2012.
- ZAMIR, M.; CHEE, H. Blood Vessels. **Segment analysis of human coronary arteries**, v.24, p. 76-84, 1987.
- ZAMIR, M. The Journal of General Physiology. **Distributing and delivering vessels of the human heart**, v.91, p. 725-735, 1988.



## Cálculo do número básico de reprodução para modelos em *patches* na propagação da dengue

*Gabriela Colovati de Almeida*

Departamento de Bioestatística, IBB, UNESP, Botucatu, SP  
gabriela.colovati@gmail.com

Fernando Luiz Pio dos Santos

Departamento de Bioestatística, IBB, UNESP, Botucatu, SP  
flpio@ibb.unesp.br

**Resumo:** O modelo de equações diferenciais ordinárias não lineares que descreve a interação entre as populações do humano e do vetor é estendido para dois *patches*. Os números básicos de reprodução local e geral são obtidos para os *patches*, através do método de construção da Matriz de Próxima Geração. Com o intuito de verificar como o  $R_0$  afeta no desenvolvimento da doença nos *patches*, a dinâmica de transmissão da dengue é analisada por intermédio de simulações numéricas. Os resultados numéricos das simulações mostram que a mobilidade humana afeta a dinâmica do *patch* que estava inicialmente livre da doença, bem como o valor do  $R_0$  nos *patches* ao longo do tempo. Com base nos resultados, recomenda-se ações de controle no ciclo do vetor, dada a impossibilidade de conter a mobilidade humana.

**Palavras-chave:** Biomatemática. Matriz de Próxima Geração. Mobilidade Humana. Regiões Discretas.

### Introdução

A cada ano as doenças infecciosas propiciam mais mortes em todo o mundo, oferecendo desta maneira, medidas desafiadoras para programas ligados à saúde e a prevenção dessas enfermidades. Os grupos mais importantes de vírus produzidos por artrópodes são os que provocam a dengue, a febre amarela, e mais recentemente o vírus zika e a febre chikungunya. A dengue é uma arbovirose causada por quatro sorotipos do vírus (DEN-1, DEN-2, DEN-3 e DEN-4), pertencentes ao gênero *Flavivirus*. Um tratamento específico contra a dengue não existe, mas é possível amenizar seus sintomas por meio de repouso e hidratação. Na fase de recuperação, o ser humano desenvolve imunidade permanente para o sorotipo adquirido (MINISTÉRIO DA SAÚDE, 2002).

Devido ao contato entre humanos e vetores, a dengue é uma doença infecciosa que se prolifera por todo um território ou uma região. O Brasil se destaca por ser um dos países mais atingidos pela doença, multiplicando os casos a cada ano (ORGANIZAÇÃO MUNDIAL DA SAÚDE, 2016). Uma grande área pode ser fracionada em regiões espacialmente menores e bem definidas (*patches*), em que essas são conectadas pela mobilidade humana.

A mobilidade humana desempenha um papel extremamente importante na disseminação espacial de uma doença. Em áreas urbanas a propagação da dengue acontece devido a migração humana decorrente de todos os dias. Além disso, o Brasil por ser um país subdesenvolvido torna-se mais favorável a desenvolver epidemias de doenças infecciosas devido ao fluxo intenso de pessoas, a população numerosa e a grande urbanização das cidades (STOLERMAN; COOMBS e BOATTO, 2015).

Uma importante medida na dinâmica de epidemias é o *número básico de reprodução*, representado por  $R_0$ . De acordo com Anderson e May (1991), o  $R_0$  é definido como o número médio de infecções secundárias produzidas por um indivíduo infectado introduzido em uma população totalmente suscetível.

Quando  $R_0 < 1$  a doença não prolifera, ou seja, se um indivíduo infectado é introduzido em uma população suscetível, esse indivíduo não consegue repor a si mesmo com novos indivíduos infectados. Se  $R_0 > 1$ , haverá a disseminação da doença e acontecerá uma epidemia, isto é, o número de infectados aumenta a cada geração. Para  $R_0 = 1$ , a doença é endêmica e está presente de forma controlada na população (cada infectado gera apenas um novo infectado) (VAN DEN DRIESSCHE e WATMOUGH, 2008).

A abordagem compartimental facilita o uso da modelagem matemática para representar diversas situações reais (BASSANEZI, 2011). Em modelos epidêmicos compartimentais, o cálculo do  $R_0$  é obtido pela metodologia

da *Matriz de Próxima Geração* ou *Next-Generation Matrix* (NGM). A construção da Matriz de Próxima Geração é o suporte natural para a definição de  $R_0$ , sendo descrita no trabalho de Diekmann, Heesterbeek e Roberts (2009).

Este trabalho visa calcular o número básico de reprodução para o modelo de um e dois *patches*, investigar como o número básico de reprodução interfere na dinâmica de dois *patches* e apurar os importantes efeitos da mobilidade humana na disseminação da doença.

## Modelo matemático para um *patch*

O modelo compartimental de transmissão do vírus da dengue para um *patch* usado inicialmente por Bailey (1975) e Dietz (1974) é regido por um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares dependentes da variável tempo ( $t$ ). Admitiu-se a circulação do vírus da dengue apenas para um único sorotipo. As Tabelas 1 e 2 representam as variáveis de estado e os parâmetros biológicos dados por dia do Sistema (1), respectivamente. Assim, o modelo de Bailey (1975) e Dietz (1974) é expresso por:

$$\begin{cases} S'_h(t) &= \mu_h(1 - S_h) - \frac{b\beta_h\Lambda}{\mu_v N_h} I_v S_h \\ I'_h(t) &= \frac{b\beta_h\Lambda}{\mu_v N_h} I_v S_h - (\eta_h + \mu_h) I_h \\ I'_v(t) &= b\beta_v I_h (1 - I_v) - \mu_v I_v \end{cases} \quad (1)$$

sendo que  $N_h$  é o total da população humana com  $R_h(t) = 1 - S_h(t) - I_h(t)$  e  $S_v(t) = 1 - I_v(t)$ . A população humana é constante e todos os parâmetros referentes ao Sistema (1) são não negativos. Nota-se ainda, a região positivamente invariante  $\Omega = \{(S_h, I_h, I_v) \in \mathbb{R}_+^3 : 0 \leq S_h, 0 \leq I_h, 0 \leq S_h + I_h \leq 1, 0 \leq I_v \leq 1\}$ .

Tabela 1: Variáveis de estado do Sistema (1).

Variável	Descrição da Variável
$S_h$	Densidade de humanos suscetíveis
$I_h$	Densidade de humanos infectados
$R_h$	Densidade de humanos recuperados
$S_v$	Densidade de vetores suscetíveis
$I_v$	Densidade de vetores infectados

Tabela 2: Parâmetros biológicos do Sistema (1).

Parâmetro	Descrição do Parâmetro
$\mu_h$	Taxa per capita de natalidade e mortalidade humana
$\mu_v$	Taxa per capita de mortalidade do vetor
$\eta_h$	Taxa de recuperação do humano
$b$	Taxa de picada que o vetor realiza
$\beta_h$	Probabilidade de transmissão do vetor para o humano
$\beta_v$	Probabilidade de transmissão do humano para o vetor
$\Lambda$	Recrutamento de vetores suscetíveis

Os pontos de equilíbrio do Sistema (1) são adquiridos igualando-se as equações à zero. Desta maneira, constata-se duas possibilidades:  $I_h = 0$  e  $I_h \neq 0$ .

A primeira possibilidade ( $I_h = 0$ ), tem-se o ponto de equilíbrio livre da doença  $E_0 = (1, 0, 0)$ . Este ponto refere-se ao estado de equilíbrio para a ausência da infecção na população do humano e vetor. Além disso, o  $E_0$  é usado na construção da Matriz de Próxima Geração e a obtenção desta é um dos esforços deste trabalho, sendo descrito na subseção seguinte.

O cálculo e a análise do ponto de equilíbrio endêmico obtido da segunda possibilidade ( $I_h \neq 0$ ), pode ser visto nos trabalhos de Esteva e Vargas (1998) e Santos (2016).



### Número básico de reprodução para um *patch*

De acordo com Diekmann, Heesterbeek e Roberts (2009), a construção da Matriz de Próxima Geração será utilizada para estabelecer o  $R_0$  para o Sistema (1). Como o ponto de equilíbrio livre da doença ( $E_0$ ) existe e o modelo é bem definido, o primeiro passo é identificar os compartimentos de doença do Sistema (1), ou seja, os compartimentos com indivíduos infectados pelo vírus da dengue,  $I_h$  e  $I_v$ .

Dada a linearização dos compartimentos de doença em torno do  $E_0$ , obtém-se a matriz  $F$  que corresponde as taxas que aumentam as novas infecções e a matriz  $V$  que representa as taxas que alteram os estados dos compartimentos de doença (morte e recuperação), assim:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{b\beta_h\Lambda}{\mu_v N_h} \\ b\beta_v & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\eta_h + \mu_h} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_v} \end{bmatrix}.$$

Logo, a Matriz de Próxima Geração é dada por:

$$K = FV^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{b\beta_h\Lambda}{\mu_v^2 N_h} \\ \frac{b\beta_v}{\eta_h + \mu_h} & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, neste trabalho, o número básico de reprodução ( $R_0$ ) é determinado como sendo o raio espectral da matriz  $K$ , denotado por  $\rho(K)$ , então:

$$R_0 = \rho(K) = \frac{b^2\beta_h\beta_v\Lambda}{\mu_v^2(\eta_h + \mu_h)N_h}.$$

### Estabilidade do ponto de equilíbrio livre da doença ( $E_0$ )

A matriz jacobiana do sistema linearizado aplicado no ponto de equilíbrio livre da doença ( $E_0$ ) é:

$$Df(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu_h & 0 & -\frac{b\beta_h\Lambda}{\mu_v N_h} \\ 0 & -(\eta_h + \mu_h) & \frac{b\beta_h\Lambda}{\mu_v N_h} \\ 0 & b\beta_v & -\mu_v \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de  $\det(Df(E_0) - \lambda I_n) = 0$ , em que  $I_n$  é a matriz identidade de ordem  $n$ , são obtidos pelo seguinte polinômio característico:

$$P(\lambda) = (-\mu_h - \lambda) \left( \lambda^2 + (\eta_h + \mu_h + \mu_v)\lambda + \mu_v(\eta_h + \mu_h) - \frac{b^2\beta_h\beta_v\Lambda}{\mu_v N_h} \right).$$

Assim, tem-se os seguintes autovalores:

$$\lambda_1 = -\mu_h, \quad \lambda_2 = \frac{-(\eta_h + \mu_h + \mu_v) + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = \frac{-(\eta_h + \mu_h + \mu_v) - \sqrt{\Delta}}{2},$$

no qual

$$\Delta = (\eta_h + \mu_h + \mu_v)^2 - 4 \left[ \mu_v(\eta_h + \mu_h) - \frac{b^2\beta_h\beta_v\Lambda}{\mu_v N_h} \right].$$

Dessa forma,



- Se  $\mu_v(\eta_h + \mu_h) - \frac{b^2\beta_h\beta_v\Lambda}{\mu_v N_h} < 0$ , resulta em  $R_0 > 1$ , então os dois autovalores são distintos e com sinais contrários. Logo,  $E_0$  é instável e corresponde a sobrevivência de uma única espécie, o que é biologicamente inviável.
- Se  $\mu_v(\eta_h + \mu_h) - \frac{b^2\beta_h\beta_v\Lambda}{\mu_v N_h} > 0$ , então  $R_0 < 1$ , resultando em dois autovalores distintos e negativos. Logo,  $E_0$  é assintoticamente estável, ou seja, biologicamente a coexistência de espécies é possível.

Portanto, se  $R_0 < 1$ , então todos os autovalores têm partes reais negativas e o  $E_0$  é localmente assintoticamente estável.

## Modelo matemático para dois patches

Neste trabalho, o Modelo (1) foi ampliado para dois patches com objetivo de encontrar o número básico de reprodução geral para esse novo sistema. Os patches são conectados pela mobilidade humana, sendo que o humano chega ao local de destino conforme a sua situação epidemiológica de origem. Admite-se a circulação para um único sorotipo do vírus e as mesmas características dadas para o Modelo (1). O total da população humana em cada patch é constante no tempo  $t$  e denotado por  $N_{hi}(t)$ , em que  $R_{hi}(t) = 1 - S_{hi}(t) - I_{hi}(t)$  e  $S_{vi}(t) = 1 - I_{vi}(t)$  para  $i = 1, 2$ . Deste modo, adquire-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} S'_{hi}(t) &= \mu_h(1 - S_{hi}) - \frac{b\beta_h\Lambda_i}{\mu_v N_{hi}} I_{vi} S_{hi} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 m_{ij}^S S_{hj} - \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 m_{ji}^S \right) S_{hi} \\ I'_{hi}(t) &= \frac{b\beta_h\Lambda_i}{\mu_v N_{hi}} I_{vi} S_{hi} - (\eta_h + \mu_h) I_{hi} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \gamma_j m_{ij}^I I_{hj} - \gamma_i \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 m_{ji}^I \right) I_{hi} \\ I'_{vi}(t) &= b\beta_v I_{hi}(1 - I_{vi}) - \mu_v I_{vi} \end{cases} \quad (2)$$

O Sistema (2) está bem definido na região positivamente invariante  $\Omega = \{(S_{hi}, I_{hi}, I_{vi}) \in \mathbb{R}_+^6 : 0 \leq S_{hi}, 0 \leq I_{hi}, 0 \leq S_{hi} + I_{hi} \leq 1, 0 \leq I_{vi} \leq 1, \text{ para } i = 1, 2\}$ . As taxas de mobilidade humana entre os dois patches são dadas por  $m_{12}^S, m_{21}^S, m_{12}^I$  e  $m_{21}^I$ . O parâmetro  $\gamma_i \in [0, 1]$  representa a taxa com que as pessoas infectadas se movem de um patch para outro (movem-se de forma diferente devido aos sintomas da infecção) (BOWONG; DUMONT e TEWA, 2013). A seguir será descrito o cálculo do  $R_0$  para o sistema de dois patches.

## Número básico de reprodução para dois patches

O ponto de equilíbrio livre da doença sempre existe para o Sistema (2). Neste equilíbrio,  $I_{h1} = 0, I_{h2} = 0, I_{v1} = 0$  e  $I_{v2} = 0$ . Assim, tem-se o seguinte subsistema:

$$\begin{cases} \mu_h(1 - S_{h1}) + m_{12}^S S_{h2} - m_{21}^S S_{h1} = 0 \\ \mu_h(1 - S_{h2}) + m_{21}^S S_{h1} - m_{12}^S S_{h2} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Desta maneira, resolvendo o Subsistema (3) obtém-se o ponto de equilíbrio livre da doença para o sistema de dois patches,  $E_1 = (S_{h1}, S_{h2}, 0, 0, 0, 0)$ , em que  $S_{h1} = \frac{\mu_h + 2m_{12}^S}{\mu_h + m_{12}^S + m_{21}^S}$  e  $S_{h2} = \frac{\mu_h + 2m_{21}^S}{\mu_h + m_{12}^S + m_{21}^S}$ .

Seguindo os mesmos passos do Sistema (1), descritos anteriormente, para o cálculo do número básico de reprodução ordena-se os compartimentos de doença,  $I_{h1}, I_{h2}, I_{v1}$  e  $I_{v2}$ . A linearização dos compartimentos de doença em torno do  $E_1$  nos cede as matrizes  $F$  e  $V^{-1}$ :

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{b\beta_h\Lambda_1}{\mu_v N_{h1}} S_{h1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{b\beta_h\Lambda_2}{\mu_v N_{h2}} S_{h2} \\ b\beta_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b\beta_v & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & 0 & 0 \\ v_{21} & v_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu_v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_v} \end{bmatrix},$$

sendo  $v_{11} = \frac{\eta_h + \mu_h + \gamma_2 m'_{12}}{(\eta_h + \mu_h)L}$ ,  $v_{12} = \frac{\gamma_2 m'_{12}}{(\eta_h + \mu_h)L}$ ,  $v_{21} = \frac{\gamma_1 m'_{21}}{(\eta_h + \mu_h)L}$  e  $v_{22} = \frac{\eta_h + \mu_h + \gamma_1 m'_{21}}{(\eta_h + \mu_h)L}$ , em que  $L = \eta_h + \mu_h + \gamma_1 m'_{21} + \gamma_2 m'_{12}$ . Como o  $R_0$  é dado pelo raio espectral da matriz  $K = FV^{-1}$ , então os autovalores são obtidos através do seguinte polinômio característico:

$$P(\lambda) = \lambda^4 - \frac{1}{(\eta_h + \mu_h)L} (z_2 R_{01} + z_1 R_{02}) \lambda^2 + \left(\frac{1}{L}\right)^2 (z_2 z_1 R_{01} R_{02} - \gamma_1 m'_{21} \gamma_2 m'_{12} R_{01} R_{02}),$$

no qual  $R_{0i} = \frac{b^2 \beta_h \beta_v \Lambda_i}{\mu_v^2 (\eta_h + \mu_h) N_{hi}}$  para  $i = 1, 2$ ; sendo  $z_1 = \eta_h + \mu_h + \gamma_1 m'_{21}$  e  $z_2 = \eta_h + \mu_h + \gamma_2 m'_{12}$ .

Portanto, o  $R_0$  geral para o sistema de dois *patches* que depende das taxas de mobilidade humana e do número básico de reprodução local de cada *patch* é finalmente dado por:

$$R_0 = \frac{1}{2L} (z_1 R_{02} + z_2 R_{01} + \sqrt{Z}), \quad Z > 0,$$

em que  $Z = (z_1 R_{02} - z_2 R_{01})^2 + 4\gamma_1 m'_{21} \gamma_2 m'_{12} R_{01} R_{02}$ .

## Resultados Numéricos

Para a obtenção dos resultados numéricos do modelo matemático de dois *patches* utilizou-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem, implementado em linguagem C com um passo de tempo  $dt = 0.01$ . Aplicou-se os softwares Matlab e Xmgrace na plotagem dos gráficos.

As condições iniciais das variáveis de estado podem ser vistas na Tabela 3, em que o primeiro *patch* têm condições para doença e o segundo *patch* está livre da doença. A Tabela 4 mostra os valores dos parâmetros biológicos extraídos do trabalho de Esteva e Vargas (1998), aplicados para um período de 12500 dias. Os resultados numéricos são obtidos a partir de dois cenários simulados, conforme a Tabela 5. Para todos os cenários, será observada a influência da mobilidade humana entre os *patches*.

Tabela 3: Condições iniciais para o modelo de dois *patches*.

Patch 1	Patch 2
$S_{h1}(0) = 0.7$	$S_{h2}(0) = 1$
$I_{h1}(0) = 0.3$	$I_{h2}(0) = 0$
$I_{v1}(0) = 0.1$	$I_{v2}(0) = 0$

Tabela 4: Valores dos parâmetros biológicos.

Parâmetros	$\mu_h$	$\mu_v$	$\eta_h$	$b$	$\beta_h$	$\beta_v$
Valores	$4.57 \times 10^{-5}$	0.25	0.1428	0.5	0.75	1.0

Tabela 5: Cenários das simulações numéricas para dois *patches*.

Cenários	$N_{h1}$	$R_{01}$	$N_{h2}$	$R_{02}$
<b>1</b>	$4 \times 10^4$	10.5	$2 \times 10^4$	0.42
<b>2</b>	$2 \times 10^4$	10.5	$4 \times 10^4$	0.42

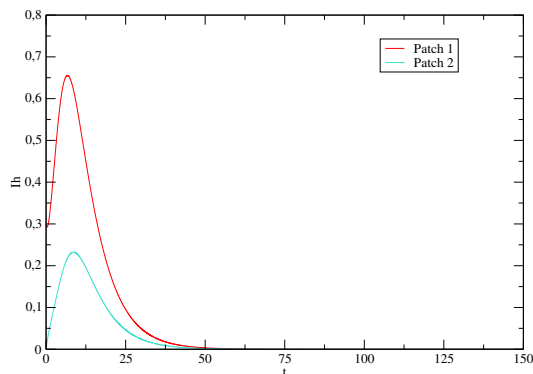


Figura 1: Proporção de humanos infectados para dois *patches* para o cenário 1, com  $\Lambda_1 = 20000$ ,  $\Lambda_2 = 800$  e  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.2$ .

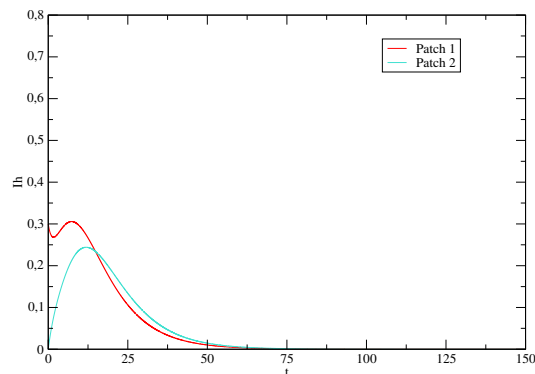


Figura 2: Proporção de humanos infectados para dois *patches* para o cenário 2, com  $\Lambda_1 = 20000$ ,  $\Lambda_2 = 800$  e  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.2$ .

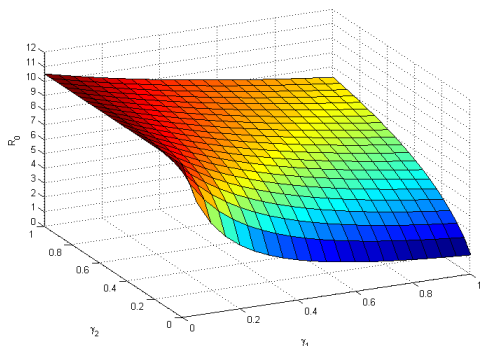


Figura 3:  $R_0$  geral para dois *patches* no cenário 1.

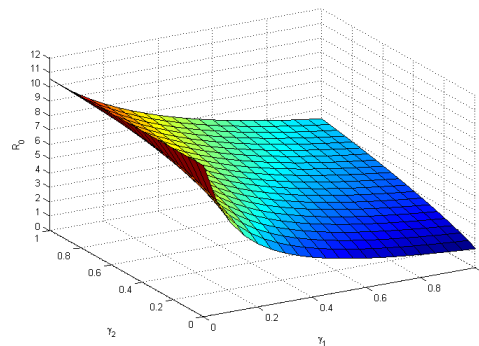


Figura 4:  $R_0$  geral para dois *patches* no cenário 2.

O impacto da mobilidade humana sobre o segundo *patch* que não apresentava inicialmente a doença pode ser visto nas Figuras 1 e 2. Conforme os humanos infectados se movimentam, o número de casos diminui no primeiro *patch* passando a acontecer surtos da doença no *patch* 2.

Comparando as Figuras 3 e 4, verifica-se que  $R_{01} > 1$  e  $R_{02} < 1$  com  $N_{h1} > N_{h2}$  ocorre a propagação da doença, persistindo ao longo do tempo e com maior intensidade se comparado com o cenário de  $R_{01} > 1$  e  $R_{02} < 1$  com  $N_{h1} < N_{h2}$ , isto devido ao impacto da mobilidade humana entre os *patches* 1 e 2.

A Figura 4 exibe que a migração de indivíduos infectados entre as regiões causa um efeito favorável no número básico de reprodução geral para o sistema de dois *patches*. Porém, mesmo que o número básico de reprodução geral decline através da mobilidade, surtos de dengue ocorrem devido o primeiro *patch* possuir  $R_{01} > 1$ .



## Conclusões

Os resultados numéricos mostram que a redução do número básico de reprodução local de cada *patch* ajuda a diminuir o número básico de reprodução geral no sistema de dois *patches*. Além disso, observa-se o impacto da mobilidade humana na dinâmica da doença considerando dois *patches*. O *patch* inicialmente livre da doença passou a ser afetado pela enfermidade. Uma vez que é impossível frear a mobilidade humana, e ainda, o  $R_0$  depende do tamanho total da população humana e da taxa de recrutamento dos vetores suscetíveis, segue como sugestão dos resultados deste trabalho que as ações de controle sejam aplicadas no vetor.

## Agradecimentos

Agradecemos pelo apoio financeiro da agência de fomento CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior).

## Referências

- ANDERSON, R. M.; MAY, R. M. **Infectious diseases of humans: dynamics and control**. USA: Oxford University Press, 1991.
- BAILEY, N. T. J. **The mathematical theory of infectious diseases**. London: Griffin, 1975.
- BASSANEZI, R. C. **Equações diferenciais ordinárias: Um Curso Introdutório**. São Paulo: UFBA-CCMCC, 2011. v. 1. Disponível em: <<http://gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/listas/iedo/notasdeaulas/equacoes-diferenciais-ordinariasrodney.pdf>>. Acesso em: 30 mai. 2016.
- BOWONG, S.; DUMONT, Y.; TEWA, J. J. A patchy model for Chikungunya-like diseases. **Biomath**, v. 2, n. 1, p. 1-19, 2013.
- BRASIL. Ministério da Saúde. **Dengue: aspectos epidemiológicos, diagnóstico e tratamento**. Brasília, DF, 2002.
- DIEKMANN, O.; HEESTERBEEK, J. A. P.; ROBERTS, M. G. The construction of next-generation matrices for compartmental epidemic models. **Journal of the Royal Society Interface**, v. 7, n. 47, p. 873-885, 2009.
- DIETZ, K. Transmission and control of arbovirus diseases. **Proceedings of SIMS Conference on Epidemiology**, p. 104-121, 1974.
- ESTEVA, L.; VARGAS, C. Analysis of a Dengue Disease Transmission Model. **Mathematical Biosciences**, v. 150, n. 2, p. 131-151, 1998.
- ORGANIZAÇÃO MUNDIAL DA SAÚDE. **Dengue and severe dengue**. Geneva: WHO, 2016.
- SANTOS, B. C. **Estudo qualitativo de um modelo de propagação de dengue**. 2016. 79 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - USP, São Paulo, 2016.
- STOLERMAN, L. M.; COOMBS, D.; BOATTO, S. SIR-Network model and its application to dengue fever. **SIAM J. Appl. Math.**, v. 75, n. 6, p. 2581-2609, 2015.
- VAN DEN DRIESSCHE, P.; WATMOUGH, J. Further notes on the basic reproduction number. **Mathematical Epidemiology**. New York: Springer Berlin Heidelberg, p.159 - 178, 2008.



## Conexões de Galois e um exemplo vindo da Lógica

*Cristiane Alexandra Lázaro*  
Unesp; Faculdade de Ciências  
cristiane@fc.unesp.br

*Hércules de Araujo Feitosa*  
Unesp; Faculdade de Ciências  
haf@fc.unesp.br

*Mauri Cunha do Nascimento*  
Unesp; Faculdade de Ciências  
mauri@fc.unesp.br

**Resumo:** Conexão de Galois é um par de funções definidas entre duas estruturas de ordem, com sentidos inversos, que generaliza as funções  $(f, g)$  da Teoria de Galois, que conectam a estrutura dada pelos corpos intermediários de uma extensão de corpos  $K \subseteq L$  com os subgrupos do grupo de automorfismos de  $L$  que fixam o subcorpo  $K$ . Nosso objetivo neste trabalho é apresentarmos a definição de conexão de Galois e algum desenvolvimento desta Teoria. Como elemento original, introduzimos uma conexão de Galois que tem sua motivação na lógica, ao ligar sistemas dedutivos com respectivos espaços de modelos.

**Palavras-chave:** Matemática Discreta. Conexões de Galois. Espaços de Tarski. Espaços de Modelos.

### Introdução

Pares de funções de Galois surgem em muitos tópicos da Matemática. Apresentamos uma definição bastante usual de conexões de Galois sobre estruturas de ordem, além de importantes resultados que envolvem estas conexões, com objetivo de destacarmos os resultados sobre os pares de Galois.

Apresentamos as conexões de Galois segundo a definição e a denominação de Dunn (2001). Observamos que há muitas variações sobre estas definições e então sugerimos também como fontes (Ore, 1944) e (Smith, 2010).

Na última seção, introduzimos uma conexão de Galois como motivação da Lógica, quando associa sistemas dedutivos aos seus respectivos espaços de modelos.

### Conceitos iniciais

Daremos alguns denominações para funções que ocorrem nas teorias sobre os pares de Galois, sendo algumas das apresentações um pouco mais breves, visto que estes nomes têm muitas variações na literatura e escolhemos alguns que julgamos mais convenientes.

**Definição 1** *Seja  $f : (A, \leq_A) \rightarrow (P, \leq_P)$  uma função entre dois conjuntos parcialmente ordenados. Então:*

- (i) *a função  $f$  preserva as ordens se  $a \leq_A b \Rightarrow f(a) \leq_P f(b)$*
- (ii) *a função  $f$  inverte as ordens se  $a \leq_A b \Rightarrow f(b) \leq_P f(a)$ .*

No contexto da análise, usualmente estas funções são chamadas de crescente e decrescente, respectivamente, mas é menos usual esta denominação nos contextos das Conexões de Galois. Outras vezes são chamadas de isótonas e antitônicas. A primeira também ocorre com o nome de monótona.

**Definição 2** Se  $f : (A, \leq_A) \rightarrow (A, \leq_A)$ , então:

- (i) a função  $f$  é idempotente se  $f \circ f = f$
- (ii) a função  $f$  é extensiva ou inflacionária se para todo  $a \in A$ ,  $a \leq f(a)$
- (iii) a função  $f$  é deflacionária se para todo  $a \in A$ ,  $f(a) \leq a$ .

**Definição 3** Se  $f : (A, \leq_A) \rightarrow (A, \leq_A)$ , então:

- (i) a função  $f$  é um operador de Tarski (operador do fecho dedutivo) se  $f$  é extensiva (ou inflacionária), preserva ordens e é idempotente.
- (ii) a função  $f$  é um operador de interior se  $f$  é deflacionária, preserva ordens e é idempotente.

## Conexões de Galois

Apresentamos nesta seção as conexões de Galois e alguns resultados sobre estas. Lembrando que nossas denominações e apresentações estão de acordo com Dunn (2001) e que uma leitura sobre as variações destas definições e de formas de apresentação pode ser muito interessante.

**Definição 4** Dados dois conjuntos parcialmente ordenados  $(A, \leq_A)$  e  $(P, \leq_P)$  e as funções  $f : A \rightarrow P$  e  $g : P \rightarrow A$ , então o par  $(f, g)$  é uma conexão de Galois se, para todo  $a \in A$  e todo  $p \in P$ , temos que:

$$a \leq_A g(p) \iff p \leq_P f(a).$$

Segue desta definição que se  $(f, g)$  é uma conexão de Galois para as ordens parciais  $(A, \leq_A)$  e  $(P, \leq_P)$ , então o par  $(g, f)$  é uma conexão de Galois para as ordens parciais  $(P, \leq_P)$  e  $(A, \leq_A)$ .

**Exemplo 5** Para  $A = P = \mathbb{Z}$ , com a ordem natural dos inteiros, tomando-se a função  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , definida por  $f(x) = -x$  e  $g = f$ , então  $(f, g)$  é uma conexão de Galois para  $(\mathbb{Z}, \leq)$ , pois  $a \leq g(p) \iff a \leq -p \iff p \leq -a \iff p \leq f(a)$ .

**Exemplo 6** Para  $A = P = \mathcal{P}(M)$ , o conjunto das partes de um conjunto  $M$ , com a ordem dada pela inclusão de conjuntos, e com  $f = g$  a função complementar, isto é,  $f(X) = X^C$ , temos que  $(f, g)$  é uma conexão de Galois.

Os exemplos acima são casos particulares da proposição a seguir.

**Proposição 7** Sejam  $(A, \leq_A)$  e  $(P, \leq_P)$  conjuntos parcialmente ordenados e  $f : A \rightarrow P$  uma função bijetiva que inverte as ordens. Então:

- (i)  $f^{-1}$  inverte as ordens;
- (ii)  $(f, f^{-1})$  é uma conexão de Galois.

**Demonstração:** (i) Sejam  $p, q \in P$  de maneira que  $p \leq q$ . Suponhamos que  $f^{-1}(p) < f^{-1}(q)$ . Como  $f$  inverte as ordens e é injetiva, então

$$f(f^{-1}(q)) < f(f^{-1}(p)),$$

ou seja,  $q < p$ , o que contradiz a suposição de que  $p \leq q$ . Assim,  $f^{-1}(q) \leq f^{-1}(p)$  e, portanto,  $f^{-1}$  inverte as ordens.

(ii) Para  $a \in A$  e  $p \in P$ , como  $f$  e  $f^{-1}$  invertem as ordens, temos  $a \leq f^{-1}(p) \iff f(f^{-1}(p)) \leq f(a) \iff p \leq f(a) \iff f^{-1}(f(a)) \leq f^{-1}(p) \iff a \leq f^{-1}(p)$ . Assim,  $(f, f^{-1})$  é uma conexão de Galois. ■



A proposição seguinte nos dá condições para termos uma conexão de Galois. Em geral não indicaremos as ordens  $\leq_A$  e  $\leq_P$ , pois o contexto dará conta de dizer sobre qual conjunto tratamos da ordem em questão.

**Proposição 8** *Sejam  $(A, \leq_A)$  e  $(P, \leq_P)$  duas ordens parciais,  $f : A \rightarrow P$  e  $g : P \rightarrow A$  funções,  $a, b \in A$  e  $p, q \in P$ . Então, o par  $(f, g)$  é uma conexão de Galois se, e somente se, valem as condições:*

- (i)  $a \leq b \Rightarrow f(b) \leq f(a)$
- (ii)  $p \leq q \Rightarrow g(q) \leq g(p)$
- (iii)  $a \leq g(f(a))$
- (iv)  $p \leq f(g(p))$ .

**Demonstração:**  $(\Rightarrow)$  (i) *Seja  $a \leq b$ . Se  $p = f(b)$ , então  $p \leq f(b)$ . Como  $(f, g)$  é uma conexão de Galois, então  $p \leq f(b) \Leftrightarrow b \leq g(p)$  e daí  $a \leq b \leq g(p)$ . Como  $a \leq g(p) \Leftrightarrow p \leq f(a)$ , segue que  $f(b) \leq f(a)$ .*

(ii) *Seja  $p \leq q$  e tomemos  $b = g(q)$ . Assim,  $b \leq g(q)$  e da definição de conexão segue que  $q \leq f(b)$ . Daí,  $p \leq f(b) \Leftrightarrow b \leq g(p)$  e, portanto,  $b = g(q) \leq g(p)$ .*

(iii) *Dado  $a \in A$ , seja  $f(a) = p$ . Daí,  $p \leq f(a) \Leftrightarrow a \leq g(p) = g(f(a))$ .*

(iv) *Dado  $p \in P$ , seja  $g(p) = a$ . Daí,  $a \leq g(p) \Leftrightarrow p \leq f(a) = f(g(p))$ .*

$(\Leftarrow)$   $a \leq_A g(p) \Rightarrow f(g(p)) \leq_P f(a) \Rightarrow p \leq_P f(a) \Rightarrow g(f(a)) \leq_A g(p) \Rightarrow a \leq_A g(p)$ . ■

Temos então uma forma alternativa de definirmos uma conexão de Galois. O par  $(f, g)$  é uma conexão de Galois se as funções  $f$  e  $g$  invertem as ordens e as compostas  $f \circ g$  e  $g \circ f$  são extensivas ou inflacionárias.

**Proposição 9** *Se o par  $(f, g)$  é uma conexão de Galois para as ordens parciais  $(A, \leq_A)$  e  $(P, \leq_P)$ , então:  $f(a) = f(g(f(a)))$  e  $g(p) = g(f(g(p)))$ .*

**Demonstração:** *Da Proposição 8 (iii), temos que  $a \leq g(f(a))$  e assim, pelo item (i),  $f(g(f(a))) \leq f(a)$ . Mas, ainda por (iii),  $f(a) \leq f(g(f(a)))$ . Assim,  $f(a) = f(g(f(a)))$ . A outra igualdade sai de modo semelhante.* ■

**Proposição 10** *Se o par  $(f, g)$  é uma conexão de Galois para  $(A, \leq_A)$  e  $(P, \leq_P)$ , então as duas composições  $g \circ f$  e  $f \circ g$  são operadores de Tarski sobre  $A$  e  $P$ , respectivamente.*

**Demonstração:** *De acordo com a Proposição 8 (iii), para todo  $a \in A$ ,  $a \leq g(f(a))$ . Agora, se  $a \leq b$ , então  $f(b) \leq f(a)$  e, assim,  $g(f(a)) \leq g(f(b))$ . Como, da proposição 9,  $f(g(f(a))) = f(a)$ , então  $g(f(g(f(a)))) = g(f(a))$ .*

*Logo,  $g \circ f$  é um operador de Tarski sobre  $A$ .*

*Para a composição  $f \circ g$ , a justificativa é semelhante.* ■

**Exemplo 11** *Dados dois conjuntos  $E$  e  $F$ , seja  $R$  uma relação de  $E$  em  $F$ , isto é,  $R \subseteq E \times F$ , e consideremos então os conjuntos parcialmente ordenados  $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$  e  $(\mathcal{P}(F), \subseteq)$ .*

*Agora, definamos as seguintes funções:  $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(F)$ , dada por  $A^f = \{b \in F : (\forall x \in A)(xRb)\}$ ; e  $g : \mathcal{P}(F) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ , dada por  $B^g = \{a \in E : (\forall y \in B)(aRy)\}$ .*

*Mostraremos que  $(f, g)$  é uma conexão de Galois.*

*Para tanto, devemos observar que (i)  $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow A_2^f \subseteq A_1^f$ ; (ii)  $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow B_2^g \subseteq B_1^g$ ; (iii)  $B \subseteq (B^g)^f$ ; (iv)  $A \subseteq (A^f)^g$ , conforme Proposição 8.*

*De fato,*

(i) *Consideremos que  $A_1 \subseteq A_2$ . Se  $b \in A_2^f$ , então  $(\forall x \in A_2)(xRb)$ . Da hipótese, temos que  $(\forall x \in A_1)(xRb)$  e, portanto,  $b \in A_1^f$ . Logo  $A_2^f \subseteq A_1^f$ .*

(ii) é similar.

(iii)  $B^g$  é o conjunto de todos os elementos de  $E$  que se relacionam com todos os elementos de  $B$ .

Assim, para todo  $b \in B$ , se  $a \in B^g$ , então  $aRb$ .

$(B^g)^f$  é o conjunto de todos os elementos de  $F$  que se relacionam com todos os elementos de  $B^g$ .

Assim, para todo  $x \in B^g$ , se  $y \in (B^g)^f$ , então  $xRy$ .

Como todos os elementos de  $B$  se relacionam com todos os elementos de  $B^g$ , então  $B \subseteq (B^g)^f$ .

(iv) é similar.

Além disso,  $\emptyset^f = \{b \in F : (\forall x \in \emptyset)(xRb)\} = F$  e  $\emptyset^g = \{a \in E : (\forall x \in \emptyset)(xRa)\} = E$ .

Da proposição 9, segue que  $A^f = ((A^f)^g)^f$  e  $B^g = ((B^g)^f)^g$ .

Da proposição 10, temos que  $g \circ f$  é um operador de Tarski, ou fecho de Tarski sobre  $E$ , e  $f \circ g$  é um operador de Tarski sobre  $F$ .

**Proposição 12** Se o par  $(f, g)$  é uma conexão de Galois para os reticulados  $(A, \wedge, \vee)$  e  $(P, \wedge, \vee)$ , então valem:

$$(i) f(x \vee y) = f(x) \wedge f(y)$$

$$(ii) g(x \vee y) = g(x) \wedge g(y).$$

**Demonstração:** (i) Como  $x \leq x \vee y$  e  $y \leq x \vee y$ , então  $f(x \vee y) \leq f(x)$  e  $f(x \vee y) \leq f(y)$ , donde segue que  $f(x \vee y) \leq f(x) \wedge f(y)$ .

Por outro lado,  $f(x) \wedge f(y) \leq f(x)$  e  $f(x) \wedge f(y) \leq f(y) \Rightarrow x \leq g(f(x) \wedge f(y))$  e  $y \leq g(f(x) \wedge f(y)) \Rightarrow x \vee y \leq g(f(x) \wedge f(y)) \Rightarrow f(x) \wedge f(y) \leq f(x \vee y)$ .

Portanto,  $f(x \vee y) = f(x) \wedge f(y)$ .

(ii) Similar. ■

Na proposição anterior não podemos trocar  $\vee$  por  $\wedge$ , como podemos observar no exemplo a seguir.

**Exemplo 13** No Exemplo 11, sejam  $E = F = \mathcal{P}(\mathbb{R})$  o conjunto das partes de  $\mathbb{R}$  e consideremos a relação  $A R B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ . Se  $A = \{(1, 2)\}$  e  $B = \{(3, 4)\}$ , então:

$$f(A) = \{X \subseteq \mathbb{R} : (1, 2) \cap X = \emptyset\}$$

$$f(B) = \{X \subseteq \mathbb{R} : (3, 4) \cap X = \emptyset\}$$

$$f(A \cap B) = f(\emptyset) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

$$f(A) \cup f(B) = \{X \subseteq \mathbb{R} : (1, 2) \cap X = \emptyset \text{ ou } (3, 4) \cap X = \emptyset\} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}), \text{ pois } (1, 2) \cup (3, 4) \notin f(A) \cup f(B).$$

Assim,  $f(A \cap B) \neq f(A) \cup f(B)$ .

**Proposição 14** Se  $(f, g_1)$  e  $(f, g_2)$  são conexões de Galois para as ordens  $(A, \leq_A)$  e  $(P, \leq_P)$ , então:  $g_1 = g_2$ . Se  $(f_1, g)$  e  $(f_2, g)$  são conexões de Galois para  $(A, \leq_A)$  e  $(P, \leq_P)$ , então:  $f_1 = f_2$ .

**Demonstração:** Dado  $p \in P$ , como  $g_1$  e  $g_2$  são funções, então estão definidos  $g_1(p)$  e  $g_2(p)$ . Pela Proposição 8 segue que para todo  $p \in P$  tem-se:  $p \leq f(g_1(p))$  e  $p \leq f(g_2(p))$ . Logo,  $g_1(p) \leq g_2(p)$  e  $g_2(p) \leq g_1(p)$ . Como isto vale para todo  $p \in P$ , então  $g_1 = g_2$ .

A demonstração da segunda parte é análoga. ■

**Proposição 15** Se o par  $(f, g)$  é uma conexão de Galois para  $(A, \leq_A)$  e  $(P, \leq_P)$ , então valem:

$$(i) a \in g(P) \Leftrightarrow g(f(a)) = a$$

$$(ii) p \in f(A) \Leftrightarrow f(g(p)) = p$$

$$(iii) f(A) = f(g(P))$$

$$(iv) g(P) = g(f(A)).$$

**Demonstração:** (i)  $(\Rightarrow)$  Se  $a \in g(P)$ , então existe  $p \in P$  tal que  $g(p) = a$ . Daí,  $g(f(a)) = g(f(g(p))) = g(p) = a$ .  $(\Leftarrow)$  Se  $g(f(a)) = a$ , então para  $b = f(a)$  temos que  $g(b) = a$  e, portanto,  $a \in g(P)$ .

(ii) Similar.

(iii) Se  $p \in f(A)$ , por (ii)  $p = f(g(p))$  e, portanto,  $p \in f(g(P))$ . Logo  $f(A) \subseteq f(g(P))$ . Agora, como  $g(P) \subseteq A$  então  $f(g(P)) \subseteq f(A)$ .

(ii) Similar. ■

Assim, cada ponto  $a \in g(P)$  é ponto fixo da função  $g \circ f$  e cada ponto  $p \in f(A)$  é ponto fixo da função  $f \circ g$ .

**Proposição 16** Se o par  $(f, g)$  é uma conexão de Galois para  $(A, \leq_A)$  e  $(P, \leq_P)$ , então:

(i)  $f(a) = \max\{p \in P : a \leq g(p)\}$

(ii)  $g(p) = \max\{a \in A : p \leq f(a)\}$ .

**Demonstração:** (i) Dado  $a \in A$ , como  $a \leq g(f(a))$ , então  $f(a) \in \{p \in P : a \leq g(p)\}$ . Agora, se  $c \in \{p \in P : a \leq g(p)\}$ , então  $a \leq g(c)$ , portanto,  $c \leq f(a)$ . Logo,  $f(a) = \max\{p \in P : a \leq g(p)\}$ .

(ii) Dado  $p \in P$ , como  $p \leq f(g(p))$ , então  $g(p) \in \{a \in A : p \leq f(a)\}$ . Agora, se  $c \in \{a \in A : p \leq f(a)\}$ , então  $p \leq f(c)$ , portanto,  $c \leq g(p)$ . Logo,  $g(p) = \max\{a \in A : p \leq f(a)\}$ . ■

Podemos também fazer produto cartesiano para conexões de Galois. Observando que não colocaremos índices nas ordens, para não carregar as notações.

Se  $(f_1, g_1)$  é uma conexão para  $(A_1, \leq)$  e  $(P_1, \leq)$ , e  $(f_2, g_2)$  é uma conexão para  $(A_2, \leq)$  e  $(P_2, \leq)$ , definimos uma conexão de Galois para  $(A_1 \times A_2, \leq)$  e  $(P_1 \times P_2, \leq)$  do seguinte modo.

A ordem do produto cartesiano da forma usual:

$$(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a \leq c \text{ e } b \leq d$$

As funções  $f : A_1 \times A_2 \rightarrow P_1 \times P_2$  e  $g : P_1 \times P_2 \rightarrow A_1 \times A_2$  são dadas por:

$$f(a_1, a_2) = (f_1(a_1), f_2(a_2)) \text{ e } g(p_1, p_2) = (g_1(p_1), g_2(p_2)).$$

Assim,  $(p_1, p_2) \leq f(a_1, a_2) = (f_1(a_1), f_2(a_2)) \Leftrightarrow p_1 \leq f_1(a_1) \text{ e } p_2 \leq f_2(a_2) \Leftrightarrow a_1 \leq g_1(p_1) \text{ e } a_2 \leq g_2(p_2) \Leftrightarrow (a_1, a_2) \leq (g_1(p_1), g_2(p_2)) = g(p_1, p_2)$ .

Portanto, o par  $(f, g)$  é uma conexão de Galois para os conjuntos ordenados  $(A_1 \times A_2, \leq)$  e  $(P_1 \times P_2, \leq)$ .

## Conexão de Galois para uma lógica e respectiva classe de modelos

Consideremos uma lógica de Tarski  $(E, C)$ . Esta pode ser, por exemplo, a lógica proposicional clássica, a lógica clássica de primeira ordem, uma lógica intuicionista ou modal, das bem conhecidas. Esta lógica tem um sistema dedutivo bem estabelecido, que pode ser axiomático, por dedução natural, cálculo de seqüentes, tablôs ou outro qualquer dispositivo de dedução. Por ser um sistema de Tarski,  $C$  é um operador de Tarski, sujeito à definição de tal operador.

De um modo geral, uma lógica fica bem estabelecida quando também admite uma classe de modelos para qual há uma relação de consequência semântica bem precisa.

Indiquemos esta consequência por  $C_{\models}$ . Se  $\Delta \cup \{\psi\}$  é um conjunto de fórmulas desta lógica, então a relação de consequência semântica  $\Delta \models \psi$  vale quando a validade de todos os elementos de  $\Delta$  força a validade de  $\psi$ .

Para esta consequência, interpretarmos ou atribuímos valor aos elementos de  $(E, C)$  em específicas estruturas matemáticas. Temos assim, uma função de *interpretação*, *valoração* ou *atribuição*, que leva cada elemento do contexto sintático, num elemento do contexto semântico.

Estas *estruturas semânticas* ou *modelos* podem estar em classes de modelos bem conhecidas como por exemplo valorações, matrizes lógicas, álgebras, modelos de Kripke, entre outros.

Colocaremos estas noções num contexto bem geral.

Para cada lógica  $(E, C)$ , temos uma classe de estruturas, indicada por  $Est(E)$ , com o mesmo domínio  $E$ , o conjunto das fórmulas da lógica, para o qual esteja definida uma relação de satisfação  $\models \subseteq Est(E) \times E$ , com a caracterização seguinte:  $(\mathcal{C}, x) \in \models$  ou, como usual,  $\mathcal{C} \models x$ , se a estrutura  $\mathcal{C}$  satisfaz o elemento  $x$ ; e  $\mathcal{C} \not\models x$ , se a estrutura  $\mathcal{C}$  não satisfaz o elemento  $x$ .

Com isto, existe uma função de interpretação de  $E$  em  $Est(E)$  que atribui significado às expressões sintáticas de  $E$  em aspectos das estruturas matemáticas de  $Est(E)$ .

**Definição 17** Se  $A \subseteq E$ , então a classe dos modelos de  $A$  é dada por  $Mod(A) =_{df} \{\mathcal{C} \in Est(E) : \text{para todo } x \in A, \mathcal{C} \models x\}$ .

**Definição 18** Dado  $M \subseteq Est(E)$ , a teoria de  $M$  é definida como  $Th(M) =_{df} \{y \in E : \text{para todo } \mathcal{C} \in M, \mathcal{C} \models y\}$ .

Segue destas definições que  $A \subseteq Th(Mod(A))$  e que  $M \subseteq Mod(Th(M))$ .

Se  $M = \{\mathcal{C}\}$ , então  $Th(M) = Th(\mathcal{C}) = \{y \in E : \mathcal{C} \models y\}$ , é o conjunto dos elementos válidos segundo o modelo  $\mathcal{C}$ .

**Proposição 19** Para  $A \subseteq B \subseteq E$ , tem-se que  $Mod(B) \subseteq Mod(A)$ .

**Demonstração:** Se  $\mathcal{C} \in Mod(B)$ , então  $\mathcal{C} \models y$ , para todo  $y \in B$ . Como  $A \subseteq B$ , em particular,  $\mathcal{C} \models x$ , para todo  $x \in A$ . Logo,  $\mathcal{C} \in Mod(A)$ . ■

**Proposição 20** Para  $M \subseteq N \subseteq Est(E)$ , segue que  $Th(N) \subseteq Th(M)$ .

**Demonstração:** Se  $x \in Th(N)$ , então, para toda  $\mathcal{C} \in N$ , vale que  $\mathcal{C} \models x$ . Como  $M \subseteq N$ , então, para todo  $\mathcal{C} \in M$ ,  $\mathcal{C} \models x$ . Logo,  $x \in Th(M)$ . ■

Consideremos as duas estruturas de ordem  $\langle \mathcal{P}(E), \subseteq \rangle$  e  $\langle \mathcal{P}(Est(E)), \subseteq \rangle$  para as quais tomamos as funções  $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(Est(E))$  definida por  $A^f = Mod(A)$  e  $g : \mathcal{P}(Est(E)) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  definida por  $M^g = Th(M)$ .

Como vimos,  $A \subseteq Th(Mod(A))$  e que  $M \subseteq Mod(Th(M))$ . Das duas proposições anteriores, segue que  $f$  e  $g$  invertem as ordens de  $\langle \mathcal{P}(E), \subseteq \rangle$  e  $\langle \mathcal{P}(Est(E)), \subseteq \rangle$ . Portanto, dos nossos desenvolvimentos anteriores, Proposição 8, temos que  $(f, g)$  é uma conexão de Galois para estas estruturas de ordem.

Segue da Proposição 10 que,  $Th \circ Mod = g \circ f$  é um operador de consequência sobre  $E$ .

**Definição 21** Dado  $A \subseteq E$ , as consequências de  $A$ , módulo a classe de estruturas  $Est(E)$ , é definida por:

$$C_{\models}(A) =_{df} Th(Mod(A)).$$

Mas também  $Mod \circ Th = f \circ g$  é um operador de Tarski sobre  $Est(E)$ . A nossa teoria aponta para este resultado, mas pouco cuidamos desta consequência.

Para cada  $A \subseteq E$ , o conjunto  $Th(Mod(A))$  é fechado em  $(E, C_{\models})$  e é uma teoria desta estrutura.

Se  $(E, C)$  é uma lógica e  $A \cup \{x\} \subseteq E$ , então a expressão  $A \models x$  denota que todo modelo de  $A$  é também modelo de  $x$ . Assim,  $A \models x$  é outra forma de indicar que  $x \in C_{\models}(A)$ . Além disso,  $A \models x$  é equivalente a  $Mod(A) \subseteq Mod(\{x\})$ .



Consideremos que dada uma lógica  $(E, C)$  existe uma classe de estruturas  $Est(E)$  a qual está associada uma outra lógica abstrata como acima, denotada por  $(E, C_{\models})$ .

**Definição 22** O elemento  $x \in E$  é um teorema se  $x \in C(\emptyset)$  e  $x$  é válido, o que é denotado por  $\models x$ , se  $x \in C_{\models}(\emptyset)$ . A lógica  $(E, C)$  é correta segundo  $(E, C_{\models})$ , se  $C(\emptyset) \subseteq C_{\models}(\emptyset)$ , isto é, todo teorema de  $(E, C)$  é válido em  $(E, C_{\models})$ ; ela é completa se  $C_{\models}(\emptyset) \subseteq C(\emptyset)$ , isto é, todo membro válido em  $(E, C_{\models})$  é um teorema de  $(E, C)$ ; ela é adequada se é correta e completa, ou seja, se  $C(\emptyset) = C_{\models}(\emptyset)$ . A lógica  $(E, C)$  é fortemente adequada segundo  $(E, C_{\models})$  se, para todo  $A \subseteq E$ , tem-se  $C(A) = C_{\models}(A)$ .

## Conclusões

Neste trabalho tratamos de conexões de Galois, que são funções com sentidos contrários entre duas estruturas de ordem. Certamente, o nome decorre de uma generalização de pares de funções que ocorrem entre corpos intermediários para uma extensão de corpos de dimensão finita e o grupo determinado por imersões que fixam um dos corpos da extensão.

Os pares de Galois são dados pelas quatro combinações possíveis para a equivalência  $a \leq_A g(p) \iff p \leq_P f(a)$ . Estas equivalências podem ser retratadas de modo equivalente pela Proposição 8. Contudo, ao olharmos para estas condições equivalentes desta proposição, naturalmente observamos que poderíamos ter outros pares de funções com sentidos contrários entre duas estruturas de ordem, mas distintas dos quatro pares de Galois.

## Referências

- D'OTTAVIANO, I. M. L.; FEITOSA, H. A. Deductive systems and translations. In: Jean-Yves Béziau; Alexandre Costa Leite (Org.). **Perspectives on universal logic**, Monza: Polimetrica International Scientific Publisher, 2007, p. 125-157.
- DUNN, J. M.; HARDEGREE, G. M. **Algebraic methods in philosophical logic**. Oxford: Oxford University Press, 2001.
- EBBINGHAUS, H. D.; FLUM, J.; THOMAS, W. **Mathematical logic**. New York: Springer-Verlag, 1984.
- FEITOSA, H. A.; D'OTTAVIANO, I. M. L. Annals of Pure and Applied Logic. **Conservative translations**, v. 108, p. 205-227, 2001.
- HERRLICH, H.; HUSEK, M. Journal of Pure and Applied Algebra. **Galois connections categorically**, v. 68, p. 165-180, 1990.
- MIRAGLIA, F. **Cálculo proposicional: uma interação da álgebra e da lógica**. Campinas: UNICAMP/CLE. (Coleção CLE, v. 1), 1987.
- ORE, O. Transactions of the American Mathematical Society. **Galois connections**, v. 55, p. 493-513, 1944.
- ORLOWSKA, E.; REWITZKY, I. Fuzzy Sets and Systems. **Algebras for Galois-style connections and their discrete duality**, v. 161, p. 1325-1342, 2010.
- SMITH, P. **The Galois connection between syntax and semantics**. Technical report. Cambridge: University of Cambridge, 2010.





## Contribuições de atividades de raciocínio lógico para o desenvolvimento de habilidades matemáticas requeridas no Pisa 2015

*Luiz Henrique da Cruz Silvestrini*

*Universidade Estadual Paulista - Unesp; Faculdade de Ciências  
silvestrini@fc.unesp.br*

*Marcelo Reicher Soares*

*Universidade Estadual Paulista - Unesp; Faculdade de Ciências  
reicher@fc.unesp.br*

*Leticia Leite Pavanello*

*Universidade Estadual Paulista - Unesp; Faculdade de Ciências  
leticialpavanello@gmail.com*

**Resumo:** Os resultados divulgados pelo Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa), com base nos resultados da avaliação de 2015, mostraram uma vertiginosa queda na média dos estudantes na área de matemática, com destaque negativo para o raciocínio lógico dos estudantes brasileiros, os quais, aparentemente, raciocinam de forma linear, sem ser capazes de inferir a partir de abstrações mínimas. O Brasil apresentou, na edição do Pisa 2015, a primeira piora na área de matemática desde 2000, início da série histórica da avaliação, e constatou que sete em cada dez alunos brasileiros, com idade entre 15 e 16 anos, estão abaixo do nível básico de conhecimento. A partir deste trágico resultado, abordaremos frentes de investigação vinculadas ao Projeto de Extensão “Raciocínio lógico, analítico e quantitativo: uma ferramenta para a inclusão racional” realizado pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Unesp, câmpus de Bauru. Nesta apresentação, mostraremos como a aquisição de elementos de raciocínio lógico, particularmente, a dedução via condicionais, previamente adquirida através do Teste de Wason, pode contribuir na capacidade do aluno em resolver problemas lógicos/matemáticos em contextos quaisquer, como é o caso das avaliações do Pisa.

**Palavras-chave:** Ensino. Raciocínio Lógico. Demonstrações. Avaliação Pisa.

### Introdução

O Brasil apresentou, na edição de 2015, a primeira piora na área de matemática desde 2003, início da série histórica da avaliação do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, o conhecido Pisa, exame mundial sobre a qualidade da educação, que reuniu na última edição 35 países membros da Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), além de países convidados/parceiros, como é o caso do Brasil.

Trata-se de uma avaliação trienal de estudantes entre 15 anos e três meses (completos) e 16 anos e 2 meses (completos) no início do período de aplicação da avaliação matriculados a partir do 7º ano. O resultado é classificatório e, infelizmente, em todas as edições ficamos entre os últimos da lista. O *score* (pontuação) médio dos jovens brasileiros de 15 anos na avaliação de matemática foi de 377 pontos, valor significativamente inferior à média dos estudantes dos países membros da OCDE (490).

O Pisa elabora provas que consistem de atividades de leitura, as quais são frequentemente realizadas dentro e fora da escola. A Escala Geral de Leitura é uma escala síntese dos conhecimentos e habilidades dentre as três subescalas (leitura, matemática, ciências), distribuídas em cinco níveis de proficiência.



No Brasil, a coordenação do Pisa é do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Segundo o “Relatório Nacional Pisa 2012: resultados brasileiros”, o letramento matemático é definido de modo que raciocinar e argumentar, utilizar linguagem e operações simbólicas, formais e técnicas, sejam capacidades fundamentais da matemática. Dentre as proficiências apresentadas destacamos a necessidade do uso de inferência e a consideração de diversas condições (hipóteses).

A OCDE, que promove o Pisa, divulgou o resultado da edição de 2015, na qual, pela primeira vez, a avaliação foi aplicada a 23.141 estudantes e em 841 escolas. A avaliação classifica os estudantes segundo uma escala de proficiência da OCDE, a qual contém 6 (seis) níveis. Por exemplo, no nível 2, os estudantes são capazes de interpretar e reconhecer situações em contextos que não exigem mais do que uma inferência direta. São capazes de extrair informações relevantes de uma única fonte e de utilizar um modo simples de representação. Os estudantes situados neste nível conseguem empregar algoritmos, fórmulas, procedimentos ou básicos para resolver problemas que envolvem números inteiros.

O resultado do Pisa 2015, segundo o Sumário Executivo divulgado pelo MEC (2016) mostrou que 70,3% dos estudantes brasileiros estão abaixo do nível 2 em Matemática, patamar que a OCDE estabelece como necessário para que o estudante possa exercer plenamente sua cidadania. Esse percentual é maior na República Dominicana (90,5%) e menor na Finlândia (13,6%). Dos estudantes brasileiros 43,74% estão abaixo do nível 1, o que representa completa ausência de habilidades específicas.

Desde a edição de 2012, o destaque negativo foi para o raciocínio lógico de nossos estudantes, que, aparentemente, raciocinam de forma linear, sem ser capazes de inferir a partir de abstrações mínimas.

A deficiência em raciocínio lógico apresentada pelos indivíduos implicará em um desempenho insuficiente em: (i) produção de textos; (ii) interpretação de textos; e (iii) matemática aplicada.

O desenvolvimento de proficiência em raciocínio lógico tornou-se tão patente que nas provas dos concursos públicos, vestibulares e do ENEM, de um modo geral, já se encontram questões específicas desta competência, como é o caso do Teste de Wason frequentemente contemplado nestas provas e que abordaremos adiante. O raciocínio lógico tem como objetivo aproximar argumentação e lógica, sendo esta última vista como ferramenta de análise e crítica do discurso.

O raciocínio lógico, em que o indivíduo é capaz de reconhecer e formular bons argumentos, promove o pensamento crítico, e isto é uma prática fundamental para o exercício pleno da cidadania e da democracia.

Segundo Carnielli e Epstein (2011, p. xi), os truques do mercado, as falácias da internet, os argumentos tendenciosos da mídia, em que precisamos agir e tomar decisões, nos levam a justificar o ensino do pensamento crítico. Nesse sentido, ao invés de o aluno decorar uma definição matemática, por exemplo, que mal compreende, ele pode “perceber por que as coisas são como são”, por meio do raciocínio lógico.

Uma vez que compartilhamos desse ponto de vista e tendo por objetivo intervir nessa realidade, propusemos o Projeto de Extensão “Raciocínio lógico, analítico e quantitativo: uma ferramenta para a inclusão racional” (RacioLog) realizado pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Unesp, câmpus de Bauru, vigente desde 2014.

O RacioLog é destinado a alunos que estão cursando o último ano do ensino médio ou o ensino técnico, nele realizamos encontros regulares para o desenvolvimento de atividades relacionadas ao raciocínio lógico.

Nesta apresentação, pretendemos divulgar algumas possibilidades de investigação a partir deste projeto de extensão universitário, o qual recebe a colaboração de alunos bolsistas e voluntários. Destacaremos o uso da condicional lógica, e mostraremos como a aquisição de elementos de raciocínio lógico, particularmente, a dedução via condicionais, previamente adquirida através do Teste de Wason,

podem contribuir na capacidade do aluno em resolver problemas lógicos/matemáticos em contextos quaisquer, como é o caso das avaliações do Pisa.

Trata-se de um trabalho teórico-prático e a presente pesquisa tem como meta intervir na realidade atual capacitando os indivíduos a desenvolver o raciocínio lógico, e assim obter uma importante ferramenta para a sua “inclusão racional”. Desse modo, utilizamos os princípios da lógica clássica, como por exemplo, a não contradição, bem como suas operações (conjunção, disjunção e implicação material) para promover o desenvolvimento do raciocínio formando uma base teórica que possibilite o estudo de conceitos algébricos e geométricos que são considerados muito abstratos, além de desenvolver o pensamento crítico (confira Carnielli e Epstein, 2011).

## O Pisa 2015

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) promovido pela OCDE, com base nos resultados da avaliação de 2015, divulgados no Sumário Executivo pelo MEC (2016), constatou que o Brasil está estacionado há dez anos entre os países com pior desempenho. O Pisa, na edição de 2015, mediu o conhecimento dos estudantes de 72 países em leitura, ciências e matemática. Nas três áreas, a média dos estudantes brasileiros ficou abaixo da obtida pelos demais países membros da OCDE.

Além disso, a Tabela 1 mostra que a pontuação média dos estudantes brasileiros em matemática que historicamente foi crescente, desabou na edição de 2015.

	Pisa 2000	Pisa 2003	Pisa 2006	Pisa 2009	Pisa 2012	Pisa 2015
Número de alunos participantes	4.893	4.452	9.295	20.127	18.589	23.141
Leitura	396	403	393	412	410	407
Matemática	334	356	370	386	391	377
Ciências	375	390	390	405	405	401

Tabela 1: escore da avaliação Pisa por área do conhecimento.

## A implicação lógica e o teste de Wason

O raciocínio lógico está ligado às habilidades que capacitam a organização e elucidação das situações cotidianas, preparando os estudantes para circunstâncias mais complexas.

Segundo o construtivismo (de Piaget), a Matemática ensinada por meio da imposição de fórmulas, exercícios repetitivos e conceitos limitados, impossibilitam o aprendizado, gerando alunos passivos, desinteressados e com falta de criatividade.

A partir de uma exposição sobre a relevância do ensino da lógica no nível médio de ensino, defendida por Velasco (2009, 2010) no artigo intitulado “Sobre o Lugar da Lógica na Sala de Aula”, promovemos algumas possibilidades de pesquisas a partir do Projeto de Extensão Raciolog, a saber:

(i) Análise do rigor da linguagem (natural e simbólica artificial) da lógica-matemática; (ii) Análise do uso da matemática em argumentos falaciosos, e (iii) Análise de questões típicas de raciocínio lógico por meio da implicação lógica. Para este último item, uma questão típica de concurso público é o Teste de Wason, o qual será formalizado a seguir.

O conectivo lógico que mais gera polêmica na sua definição formal é a condicional material, ou seja, as implicações lógicas, entendidas como sentenças com condições suficientes ou necessárias. O habitual “se ..., então ...”, formalizado aqui pelo símbolo lógico “ $\rightarrow$ ”.

Como atividade prevista do RacioLog, abordamos tal conectivo primeiramente através do Teste das Cartas ou Tarefa de Wason (cf. Evans *et al.*, 1993), conforme Figura 1.

As cartas são formadas do seguinte modo: cada carta tem de um lado (face) um número e do outro lado (face) uma letra. Alguém afirmou que:

“Se existe uma vogal de um lado, então haverá um número par do outro lado” (#)

Quais cartões da Figura 1 seriam suficientes virar para verificar se a afirmação (#) é verdadeira ou falsa?



Figura 1: A Tarefa de Wason

A suposta regra (#) das cartas é uma implicação lógica, em que para verificar se ela é verdadeira, é suficiente virar as cartas em que não ocorra *vacuidade* (quando o antecedente da implicação é falso) ou *trivialidade* lógica (quando o consequente da implicação é verdadeiro). Neste caso, será suficiente virar as cartas E e 7. Para a carta E, se não há um número par do outro lado desta carta, então a regra não é apropriada. Para a carta 7, se há uma vogal do outro lado da carta, a regra não é verdadeira.

O resultado obtido inicialmente, antes dos conteúdos propostos, foi de 9% de acertos. Após o término das atividades, houve um aumento considerável na porcentagem de acertos que passou a ser 70%.

Segundo Evans *et al.* (1993), trata-se de um teste lógico proposto inicialmente por Peter Wason, no ano de 1960. O teste de seleção das cartas revela que menos de 10% dos participantes raciocinam corretamente sobre sentenças condicionais.

## Resultados e Discussão

Durante o projeto de extensão RacioLog, promovemos a definição da implicação lógica e esta é bastante explorada dentro da lógica proposicional clássica presente nos concursos. Analisamos o caso das equivalências de proposições condicionais e negações de proposições que fazem o uso do conectivo “se ..., então...”.

Esta frequente utilização de uma implicação lógica é atribuída ao equívoco provocado ao pensar intuitivamente na resposta. Geralmente, pessoas que não possuem noções da formalização da condicional,  $A \rightarrow B$  (Se A, então B), no cálculo proposicional clássico, optam, erroneamente, pela alternativa que estabelece a negação da condição e, ao mesmo tempo, da consequência de uma proposição condicional, ou seja,  $\neg A \rightarrow \neg B$  (Se não A, então não B); ou a alternativa que fixa uma conjunção obtida a partir da negação da condição e também da consequência na condicional dada inicialmente, i.e.,  $\neg A \wedge \neg B$  (não A e não B).

O teste de Wason é aplicado no início dos módulos (1ª Avaliação) do projeto RacioLog e ao final deles (2ª Avaliação), ou seja, após a aquisição das definições dos operadores lógicos e equivalências lógicas trabalhadas a partir da implicação. Com efeito, temos um aumento significativo de aprovação na seleção correta das cartas, conforme ilustrado na Figura 2.

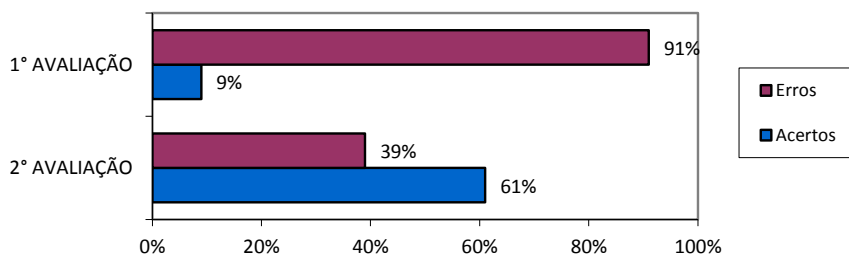


Figura 2:  
das

do Teste de Wason durante o RacioLog.

Gráfico  
aplicações

Como observado no gráfico acima, houve um aumento de 52% no número de acertos entre ambas as avaliações. Tal resultado demonstra o desenvolvimento efetivo dos alunos que participaram dos módulos oferecidos no curso e sugere o estímulo que o conteúdo apresentado incide sobre o pensamento crítico e de dedução do indivíduo, tornando o aluno mais hábil quanto à interpretação e análise de argumentos apresentados, habilidades requeridas pelas avaliações do Pisa.

## Conclusões

A utilização do raciocínio lógico na formação educacional dos jovens estudantes gera pessoas críticas com capacidade argumentativa, e é através dessas características que desenvolveremos alunos capazes de criar, interpretar, responder e explicar situações problemas envolvendo matemática. A utilização desse recurso metodológico acarreta em resultados positivos, contribuindo em três aspectos básicos: ler, escrever e resolver problemas. Aspectos estes que, após a sequência de estudos lógicos, passam a representar novas sistematizações: aprender a ler bem e aprender a resolver problemas matemáticos bem.

Neste trabalho mostramos algumas possibilidades de pesquisas envolvendo raciocínio lógico, particularmente o uso da implicação lógica via Teste de Wason, a partir do projeto de extensão RacioLog, vigente desde o início de 2014. Desse modo, evidenciamos a indissociabilidade entre ensino, pesquisa e extensão, a qual contribui para a formação integradora do aluno, bolsista ou voluntário, oriundo do curso de Licenciatura em Matemática.

## Agradecimentos

Agradecemos à PROEX pela bolsa e recursos concedidos e ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências, Unesp, câmpus de Bauru.

## Referências

CARNIELLI, W. A.; EPSTEIN, R. L. **Pensamento crítico: o poder da lógica e da argumentação**. 3. ed. São Paulo: Rideel, 2011, 371 p.



COPI, I. M. **Introdução à lógica**. São Paulo: Editora Mestre Jou, 1978.

EVANS, J. S. B. T.; NEWSTEAD, S. E.; BYRNE, R. M. J. **Human reasoning: the psychology of deduction**. LEA Publishers, 1993. p. 99-134.

FEITOSA, H. A.; PAULOVICH, L. **Um prelúdio à lógica**. São Paulo: Editora UNESP, 2005.

FIRJAN, S. **O que falta ao trabalhador brasileiro**. Diretoria de Desenvolvimento Econômico e Associativo Gerência de Pesquisas e Estatística. Julho de 2011. Disponível em: <<http://www.firjan.org.br/main.jsp?lumPageId=2C908CE9215B0DC40121793770A2082A&lumItemId=2C908CEC30E85C950131254D82554909>>. Acesso em 6/08/2014.

MARTINS, M. da S. **Noções básicas de lógica para concursos: teoria concisa e mais de 400 exemplos e exercícios**. 1. ed. São Paulo: Ciência Moderna, 2014.

MEC/ INEP. **Brasil no Pisa 2015: Análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros**. INEP 2016. Disponível em: <[http://download.inep.gov.br/acoes\\_internacionais/pisa/resultados/2015/pisa2015\\_completo\\_final\\_baixa.pdf](http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2015/pisa2015_completo_final_baixa.pdf)>. Acesso em: 20 mar. 2017.

MEC/ INEP. **Brasil no Pisa 2015: Sumário executivo**. INEP 2016. Disponível em: <[http://download.inep.gov.br/acoes\\_internacionais/pisa/documentos/2016/pisa\\_brasil\\_2015\\_sumario\\_executivo.pdf](http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/documentos/2016/pisa_brasil_2015_sumario_executivo.pdf)>. Acesso em: 20 mar. 2017.

MEC/ INEP. **Relatório nacional PISA 2012: Resultados brasileiros**. ISBN: 978-85-63489-17-3. Disponível em: <<http://www.moderna.com.br/lumis/portal/file/fileDownload.jsp?fileId=8A8A8A834466313F01446AA2F84C3F8A>>.

SILVESTRINI, L. H. C.; SOARES, M. R.; DUA, A. Raciocínio lógico e a linguagem artificial matemática. In: V Congresso Brasileiro de Educação: Pesquisa e Formação de Professores: políticas e programas, 2015, Bauru. **Anais do V CBE**. Bauru: FC/Unesp, 2015.

VELASCO, P. D. N. **Sobre o lugar da lógica na sala de aula**. Revista Sul-Americana de Filosofia da Educação – RESAFE. Número 13: novembro/2009 – abril/2010.





## Derivadas fracionárias: critérios para classificação

*Graziane Sales Teodoro*

*Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP; IMECC  
graziane.teodoro@dex.ufla.com*

*Edmundo Capelas de Oliveira*

*Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP; IMECC  
capelas@ime.unicamp.br*

**Resumo:** O cálculo fracionário, nomenclatura utilizada para cálculo de ordem não inteira, tem se mostrado importante e, em muitos casos, imprescindível na discussão de problemas de diversas áreas da ciência, ganhando popularidade e importância considerável durante as últimas três décadas. Existe mais de uma formulação para a derivada fracionária e esse número de definições vem aumentando com o passar do tempo, sendo cada uma delas mais adequada a um contexto físico. No entanto, questionamentos que surgem naturalmente são se todas essas derivadas realmente podem ser consideradas derivadas fracionárias e quais propriedades essas devem satisfazer para serem classificadas como tal. Caminhando nessa direção, em 1974, Ross propôs um critério, composto por cinco propriedades, que um operador deve satisfazer para que este possa ser chamado de derivada fracionária. Em 2015, Ortigueira e Machado reformularam esse critério tendo em vista a necessidade de uma derivada fracionária satisfazer a generalização da regra de Leibniz. A fim de exemplificar um operador que satisfaz esse critério, apresentamos a derivada de Grünwald-Letnikov e justificamos através do critério proposto por Ortigueira e Machado que esta pode ser considerada derivada fracionária.

**Palavras-chave:** Cálculo Fracionário e Aplicações. Critérios. Derivada de Grünwald-Letnikov.

## Introdução

Em 1695, numa famosa carta, L'Hôpital pergunta a Leibniz o significado de uma derivada de ordem meio, com a resposta de Leibniz, temos o início do cálculo fracionário. A partir de então, o cálculo fracionário chamou a atenção de outros importantes matemáticos, tais como, Euler, Laplace, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Laurent entre outros. Devido à contribuições destes e de outros matemáticos, a teoria de operadores generalizados atingiu um nível de formalismo suficiente para dar início aos estudos mais modernos (CAMARGO, 2009). O cálculo fracionário tem se mostrado importante na discussão de problemas advindos de diversas áreas do conhecimento. Uma vantagem de sua utilização em aplicações é a sua propriedade não-local, ou seja, o próximo estado de um sistema não depende apenas de seu estado atual, mas sim de todos os seus estados anteriores, traduzindo assim melhor a realidade da natureza.

O cálculo fracionário vem ganhando popularidade e importância considerável nas últimas três décadas devido principalmente a suas aplicações atraentes em campos da ciência e engenharia (SCHERER et al, 2011). Há um grande número de formulações para derivada fracionária (OLIVEIRA; MACHADO, 2014) e esse número vem aumentando (RODRIGUES; OLIVEIRA, 2015). Com isso nos deparamos com a seguinte questão: Que critérios um operador deve satisfazer para que este possa ser considerado uma derivada fracionária?

A fim de responder esse questionamento Bertram Ross (ROSS, 1975) propõem cinco propriedades que um operador deve satisfazer para ser considerado uma derivada fracionária, são elas:

1. A derivada fracionária de uma função analítica é analítica;
2. A derivação fracionária, quando a ordem é um inteiro positivo  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , deve produzir o mesmo resultado da  $n$ -ésima derivação ordinária e quando a ordem é um inteiro negativo  $-n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  deve produzir o mesmo resultado da repetição  $n$ -ésima da integração ordinária;



3. A derivada de ordem zero de uma função é a própria função;
4. A derivada fracionária é um operador linear;
5. A lei dos expoentes  $D^\alpha D^\beta f(x) = D^{\alpha+\beta} f(x)$  é satisfeita para  $\alpha < 0$  e  $\beta < 0$ . (Usaremos a notação  $D^\alpha$  para representar uma derivada fracionária de ordem  $\alpha$ ).

Ortigueira e Machado reformularam o critério proposto por Ross tendo em vista a necessidade da derivada fracionária do produto de duas funções satisfazer a regra de Leibniz em sua versão fracionária (ORTIGUEIRA; MACHADO, 2015). Esse novo critério também é constituído de cinco propriedades, são elas:

1. A derivada fracionária é um operador linear;
2. A derivada de ordem zero de uma função é a própria função;
3. A derivação fracionária, quando a ordem é um inteiro positivo  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , deve produzir o mesmo resultado da  $n$ -ésima derivação ordinária e quando a ordem é um inteiro negativo  $-n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  deve produzir o mesmo resultado da repetição  $n$ -ésima da integração ordinária;
4. A lei dos expoentes  $D^\alpha D^\beta f(x) = D^{\alpha+\beta} f(x)$  é satisfeita para  $\alpha < 0$  e  $\beta < 0$ ;
5. Vale a generalização da regra de Leibniz, a saber,  $D^\alpha (f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} D^k f(x) D^{\alpha-k} g(x)$ ,  
sendo  $\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)k!}$ .

Na próxima seção apresentaremos a derivada fracionária de Grünwald-Letnikov bem como mostraremos que ela satisfaz o critério proposto por Manuel Ortigueira e Tenreiro Machado em 2015.

## Derivada de Grünwald-Letnikov

Nessa seção apresentaremos a derivada fracionária segundo Grünwald-Letnikov, essa formulação tem grande importância em problemas numéricos e foi baseada na generalização da diferenciação ordinária, conforme veremos abaixo.

**Lema 1.** A derivada  $n$ -ésima,  $n \in \mathbb{N}$ , de uma função  $f$  pode ser escrita como

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh). \quad (1)$$

**Demonstração.** Vamos mostrar que vale a Eq.(1) por indução. Pela definição de derivada temos que  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ , considerando a mudança  $z = x+h$  podemos escrever  $f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(z-h)}{h}$  e portanto vale a Eq.(1) para  $n = 1$ . Suponhamos que vale a Eq.(1) para  $n = m$  sendo  $m \in \mathbb{N}$ , ou seja,

$$\frac{d^m}{dx^m} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^m} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(x - kh).$$

mostraremos que vale a Eq.(1) para  $n = m + 1$ . De fato,

$$\begin{aligned} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} f(x) &= \frac{d}{dx} \frac{d^m}{dx^m} f(x) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^m(x) - f^m(x-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^m} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(x-kh) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^m} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(x+h-kh)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(x-kh) - \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(x+h-kh)}{h^{m+1}}, \end{aligned}$$

fazendo a mudança  $k \rightarrow k - 1$  no segundo somatório podemos escrever,

$$\begin{aligned} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(x-kh) + \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^k \binom{m}{k-1} f(x-kh)}{h^{m+1}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(x-kh) + \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k-1} f(x-kh)}{h^{m+1}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^m (-1)^k \left[ \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \right] f(x-kh)}{h^{m+1}}. \end{aligned}$$

Observemos que,

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \frac{m!}{(m-k)!k!} + \frac{m!}{(m-k+1)!(k-1)!} = \frac{m!(m-k+1+k)}{(m-k+1)!k!} = \frac{(m+1)!}{(m-k+1)!k!} \binom{m+1}{k}.$$

Assim,

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m+1}{k} f(x-kh)}{h^{m+1}},$$

ou seja, vale a Eq.(1) para  $n = m + 1$  e portanto vale a Eq.(1) para qualquer  $n \in \mathbb{N}$  conforme queríamos mostrar. ■

Tendo em vista o **Lema 1** apresentamos a derivada de Grünwald-Letnikov:

**Definição 1.** A derivada de Grünwald-Letnikov de ordem  $\alpha$  de uma função  $f$  é definida através do limite de uma série, a saber,

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x-kh). \quad (2)$$

Agora mostraremos que a derivada de Grünwald-Letnikov, conforme definida pela Eq.(2) satisfaz o critério proposto por Ortigueira e Machado.

**Linearidade.** De fato a derivada de Grünwald-Letnikov é um operador linear, pois para  $f$  e  $g$  funções reais de variável real,  $a$  e  $b$  escalares temos

$$\begin{aligned} D^\alpha [af + bg](x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} [af + bg](x-kh) \\ &= a \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x-kh) \right) + b \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} g(x-kh) \right) \\ &= aD^\alpha f(x) + bD^\alpha g(x). \end{aligned}$$

**Derivada de ordem zero.** Vamos calcular a derivada de Grünwald-Letnikov de ordem zero de uma função  $f$ ,

$$D^0 f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^0} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{0}{k} f(x - kh).$$

Observemos que o coeficiente binomial  $\binom{0}{k}$  só será diferente de zero quando  $k = 0$  e nesse caso vale um. Portanto,

$$D^0 f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x - kh) = f(x),$$

logo a derivada de Grünwald-Letnikov de uma função quando a ordem é zero é a própria função.

**Derivada de ordem inteira.** Como vimos no **Lema 1** a derivada de Grünwald-Letnikov está baseada na generalização da diferenciação ordinária, portanto quando a ordem é  $n \in \mathbb{N}$  produz o mesmo resultado da derivação ordinária. Para mostrar que a derivada de Grünwald-Letnikov quando a ordem é um inteiro negativo produz o mesmo resultado da  $n$ -ésima integração precisamos primeiro considerar o seguinte resultado.

**Lema 2.** Sejam  $\alpha \in \mathbb{C}$  e  $n \in \mathbb{N}$  então

$$\frac{(-\alpha)_n}{n!} = (-1)^n \binom{\alpha}{n}, \quad (3)$$

sendo  $(\alpha)_n = (\alpha)(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n - 1) = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)}$  o símbolo de Pochhammer.

**Demonstração.** De fato temos,

$$\begin{aligned} \frac{(-\alpha)_n}{n!} &= \frac{(-\alpha)(-\alpha + 1) \cdots (-\alpha + n - 1)}{n!} \\ &= \frac{(-1)^n (\alpha)(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!} \\ &= \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - n + 1) n!} \\ &= (-1)^n \binom{\alpha}{n}, \end{aligned}$$

conforme queríamos mostrar. ■

Quando a ordem da derivada é um inteiro negativo, ou seja,  $\alpha = -n$  com  $n \in \mathbb{N}$  temos,

$$D^{-n} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{-n}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-n}{k} f(x - kh)$$

e pela Eq.(3) podemos escrever,

$$\begin{aligned} D^{-n} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{n}{k}}{k!} f(x - kh) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + k)}{\Gamma(n) k!} f(x - kh). \end{aligned}$$

Rearranjando a equação acima considerando  $t = kh$  e admitindo que essa série converge uniformemente obtemos

$$D^{-n}f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{h \rightarrow 0} h^n \frac{\Gamma(n + \frac{t}{h})}{\Gamma(n)\Gamma(\frac{t}{h} + 1)} f(x-t).$$

Usando a relação  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Gamma(n + \frac{t}{h})}{\Gamma(\frac{t}{h} + 1)} = \left(\frac{t}{h}\right)^{n-1}$  (ORTIGUEIRA; MACHADO, 2015), temos

$$\begin{aligned} D^{-n}f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{t}{h})^{n-1}}{\Gamma(n)} f(x-t) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)} f(x-t)h. \end{aligned}$$

E portanto,

$$D^{-n}f(x) = \int_0^{\infty} \frac{f(x-t)t^{n-1}}{\Gamma(n)} dt,$$

que é a  $n$ -ésima integral de  $f$  de acordo com a fórmula de integrais iteradas de Cauchy. E assim, quando a ordem é um inteiro negativo temos que a derivada de Grünwald-Letnikov produz o mesmo resultado da  $n$ -ésima integração de  $f$ .

**Lei dos expoentes.** A quarta propriedade do critério de Ortigueira e Machado é que uma derivada fracionária satisfaz a lei dos expoentes  $D^{\alpha}D^{\beta}f(x) = D^{\alpha+\beta}f(x)$  para  $\alpha, \beta < 0$ , no entanto, vamos mostrar que a derivada de Grünwald-Letnikov satisfaz a lei dos expoentes para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , para isso usaremos a relação (ORTIGUEIRA, 2011):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{m-n} \binom{\beta}{n} = \binom{\alpha+\beta}{m}. \quad (4)$$

Assim,

$$D^{\alpha}D^{\beta}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} \left[ \frac{1}{h^{\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\beta}{n} f(x-kh-nh) \right].$$

Considerando a mudança de variável  $k = m - n$  no primeiro somatório e a Eq.(4) podemos escrever,

$$\begin{aligned} D^{\alpha}D^{\beta}f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\alpha+\beta}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m-n} \binom{\alpha}{m-n} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\beta}{n} f(x-mh) \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\alpha+\beta}} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{m-n} \binom{\beta}{n} \right] (-1)^m f(x-mh) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\alpha+\beta}} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha+\beta}{m} (-1)^m f(x-mh) \\ &= D^{\alpha+\beta}f(x), \end{aligned}$$

e assim a derivada de Grünwald-Letnikov satisfaz a lei dos expoentes.

**Generalização da regra de Leibniz.** Vamos primeiro considerar um resultado que será importante para mostrar que a derivada de Grünwald-Letnikov satisfaz a generalização da regra de Leibniz:

**Lema 3.** Se  $\alpha \in \mathbb{C}$  e  $k, i \in \mathbb{N}$  então

$$\binom{k+i}{i} \binom{\alpha}{k+i} = \binom{\alpha}{i} \binom{\alpha-i}{k}. \quad (5)$$

**Demonstração.** Utilizando a Eq.(3) podemos escrever

$$\binom{k+i}{i} \binom{\alpha}{k+i} = \binom{k+i}{i} \frac{(-\alpha)_{k+i}}{(k+i)!(-1)^{k+i}} = \frac{(k+i)!}{k!i!} \frac{(-\alpha)_{k+i}}{(k+i)!(-1)^{k+i}}.$$

Observemos que

$$(-\alpha)_{i+k} = (-\alpha)(-\alpha+1)\cdots(-\alpha+i-1)(-\alpha+1)\cdots(-\alpha+i+k-1) = (-\alpha)_i(\alpha+i)_k,$$

assim

$$\binom{k+i}{i} \binom{\alpha}{k+i} = \frac{1}{(-1)^{k+i}} \frac{(-\alpha)_i}{i!} \frac{(-\alpha+i)_k}{k!}.$$

Utilizando a Eq.(3) duas vezes obtemos o resultado desejado. ■

Vamos agora mostrar que a derivada de Grünwald-Letnikov satisfaz a generalização da regra de Leibniz. Com o intuito de simplificar a notação consideremos  $(\Delta_h^\alpha f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x-kh)$ , assim

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\Delta_h^\alpha f)(x)}{h^\alpha}.$$

Sejam  $f$  e  $g$  funções reais de variável real e  $n \in \mathbb{N}$  temos  $(\Delta_h^n f)(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x-kh)$  e portanto,  $f(x-kh) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (\Delta_h^i f)(x)$ . Assim,

$$\begin{aligned} (\Delta_h^\alpha g f)(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} g(x-kh) f(x-kh) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} g(x-kh) \left[ \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (\Delta_h^i f)(x) \right] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\Delta_h^i f)(x) \sum_{k=i}^{\infty} (-1)^k \binom{k}{i} \binom{\alpha}{k} g(x-kh). \end{aligned}$$

Considerando a mudança  $k \rightarrow k-i$  temos,

$$(\Delta_h^\alpha g f)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\Delta_h^i f)(x) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+i} \binom{k+i}{i} \binom{\alpha}{k+i} g(x-(k+i)h).$$

Utilizando a Eq.(5) podemos escrever

$$\begin{aligned} (\Delta_h^\alpha g f)(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} (\Delta_h^i f)(x) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{i} \binom{\alpha-i}{k} g(x-(k+i)h) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} (\Delta_h^i f)(x) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha-i}{k} g(x-(k+i)h). \end{aligned}$$

Considerando a convergência uniforme da série temos,

$$\begin{aligned}
 D^\alpha(gf)(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\Delta_h^\alpha gf)(x)}{h^\alpha} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} (\Delta_h^i f)(x) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha-i}{k} g(x - (k+i)h) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\Delta_h^i f)(x)}{h^i} \right] \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\alpha-1}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha-i}{k} g(x - (k+i)h) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} f^{(i)}(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\alpha-1}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha-i}{k} g(x - kh) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} f^{(i)}(x) D^{\alpha-i} g(x),
 \end{aligned}$$

dessa forma vale a generalização da regra de Leibniz.

Logo, como a derivada de Grünwald-Letnikov satisfaz as cinco propriedades do critério de Ortigueira e Machado, temos que essa derivada pode ser considerada fracionária. Na próxima seção apresentaremos um operador que não cumpre todos esses critérios: a derivada fracionária unificada.

## Derivada Fracionária Unificada

Nessa seção apresentaremos a derivada fracionária unificada, essa derivada generaliza a derivada fracionária de Grünwald-Letnikov, no entanto não cumpre o critério proposto por Ortigueira e Machado, em particular não satisfaz a regra dos expoentes para quaisquer  $\alpha, \beta < 0$ .

**Definição 2.** Seja  $f$  uma função de uma variável real, a derivada fracionária unificada de  $f$  é definida por

$$D_\theta^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha+1) f(x - kh + \frac{\gamma h}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+\theta}{2} - k + 1) \Gamma(\frac{\alpha-\theta}{2} + k + 1)},$$

sendo  $h$  um número real positivo,  $\alpha \in \mathbb{C}$  a ordem da derivada e  $\theta$  um parâmetro que determina a simetria da derivada.

Observemos que se tomarmos  $\theta = \alpha$  e  $\gamma = 0$  na definição da derivada fracionária unificada recuperamos como caso particular a derivada de Grünwald-Letnikov. Uma das propriedades do critério proposto por Ortigueira e Machado é que um operador deve satisfazer a lei dos expoentes,  $D^\alpha D^\beta f(x) = D^{\alpha+\beta} f(x)$  para  $\alpha < 0$  e  $\beta < 0$ , para ser considerado uma derivada fracionária. No entanto, a derivada fracionária unificada, só satisfaz essa lei para caso específicos de  $\alpha$  e  $\beta$ , a saber, quando  $\alpha + \beta > -1$  (ORTIGUEIRA, TRUJILLO, 2012).

## Conclusões

Tento em vista o crescente número de definições envolvendo o conceito de derivada fracionária faz-se necessário um critério que um operador deve satisfazer para que esse possa ser chamado de derivada fracionária. Nesse trabalho, foram apresentados dois critérios, um proposto em 1975 por Ross e outro em 2015 por Ortigueira e Machado, ambos são compostos de cinco propriedades. Além disso, apresentamos dois operadores conhecidos na literatura como derivadas fracionárias, a saber, a derivada de Grünwald-Letnikov e a derivada fracionária unificada, na qual o primeiro satisfaz o critério propostos por Ortigueira e Machado e o segundo não satisfaz esse critério para uma ordem qualquer, salvo em casos especiais (TEODORO, 2017).





## Referências

- CAMARGO, R. F. **Cálculo Fracionário e Aplicações**. 2009. Tese (Doutorado em Matemática) – Unicamp, Campinas, 2009.
- ORTIGUEIRA, M. D., MACHADO, J.A.T. Journal of Computational Physics. **What is a fractional derivative?**, v. 293, p. 4-13, 2015.
- OLIVEIRA, E. C.; MACHADO, J.A.T. Mathematical Problems in Engineering. **A Review of Definitions for Fractional Derivatives and Integral**, p. 1-6, 2014.
- ORTIGUEIRA, M.D.; TRUJILLO, J.J. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. **A unified approach to fractional derivatives**, v. 17, p. 5151-5157, 2012.
- ORTIGUEIRA, M. D. **Fractional Calculus for Scientists and Engineers**. 1. ed. New York: Springer, 2011.
- RODRIGUES, F.G; OLIVEIRA, E. C. Revista Brasileira de Ensino de Física. **Introdução às técnicas do cálculo fracionário para estudar modelos da física matemática.**, v. 37, p. 1-12, 2015.
- ROSS, B. Fractional Calculus and its Applications. **A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus**, v.57, p. 1-36, 1975.
- SCHERER, R.; KALLA, S. L.; TANG Y.; HUANG, J. Computers and Mathematics with Applications. **The Grünwald-Letnikov method for fractional differential equations**, v. 62, p. 902-9147, 2011.
- TEODORO, G. S. **Sobre derivadas fracionárias**. 2017. Tese (Doutorado em andamento em Matemática Aplicada) – Unicamp, Campinas, 2017.



## Desenvolvimento de um programa interativo para aplicação das Redes Neurais Artificiais em problemas de classificação de dados

*Marcio Presumido Junior*

*Faculdade de Ciências e Engenharia - FCE - UNESP Tupã  
presumidojr@gmail.com*

*Leandro Souto de Oliveira*

*Faculdade de Ciências e Engenharia - FCE - UNESP Tupã  
leandrosouto182@hotmail.com*

*Giovane Ferreira da Cunha*

*Faculdade de Ciências e Engenharia - FCE - UNESP Tupã  
giovane\_ferreir@hotmail.com*

*Alfredo Bonini Neto*

*Faculdade de Ciências e Engenharia - FCE - UNESP Tupã  
bonini@tupa.unesp.br*

**Resumo:** Hoje em dia, a busca por ferramentas que facilitam e até mesmo substituem o trabalho humano tem ganhado grande destaque mundial. As redes neurais artificiais (RNAs) é uma dessas ferramentas, pois apresentam um grande poder de aplicações, principalmente quando se trata de classificação de dados, reconhecimento de padrões, análise de imagens, entre outros. Com este intuito, o objetivo deste trabalho foi desenvolver um programa interativo por meio de uma interface gráfica para aplicação das RNAs em problemas de classificação de dados. A ideia foi montar uma interface que facilite o usuário na montagem da rede, bem como na obtenção dos resultados. Com isso, auxiliar e facilitar o aprendizado dos estudantes dos cursos de graduação e de pós-graduação em disciplinas envolvendo inteligência artificial, tornando também o programa desenvolvido adequado para fins educativos.

**Palavras-chave:** Interface gráfica. Educação. Inteligência artificial. Classificação de dados.

### Introdução

Nos dias de hoje, trabalhos envolvendo Redes Neurais Artificiais (RNAs) têm aumentado significativamente em todas as áreas do conhecimento. No entanto, em áreas como agrárias e biológicas, suas aplicações apresentam muitas interrogações por parte dos pesquisadores e também uma certa dificuldade na hora de sua aplicação. Neste contexto, uma alternativa é apresentar as RNAs de forma mais interativa, para que os profissionais consigam visualizar e ao mesmo tempo ter uma melhor compreensão do assunto.

Em Proto (2009) foi proposto o desenvolvimento de uma interface gráfica voltada para a resolução do problema de planejamento da expansão das linhas de transmissão. A grande dificuldade encontrada por usuários ao interagir com estes programas, motivou o desenvolvimento de uma aplicação com interface gráfica. Já em Góes et al. (2015), foi desenvolvida uma interface gráfica capaz de otimizar a utilização de métodos numéricos. A ideia consistiu na utilização de um grupo de painéis, sendo que, cada painel abriga a interface de um determinado método.

Não apenas nessa área, mas em muitas outras a interface gráfica tem demonstrado seu poder de aplicação.

Recentemente, em Gabriel Filho et al. (2016) foi desenvolvido um software utilizando a lógica *fuzzy* para a comparação da massa corporal de bovinos entre si e identificação dos grupos para abate, e

dos que necessitam de alimentação mais intensa, utilizando-se das variáveis “massa” e “altura”, e a saída IMCFuzzy.

Vários outros trabalhos envolvendo interface gráfica foram desenvolvidos nos últimos anos. (BONINI NETO et al., 2012, GASPARINI, 2012, LEAL NETO, 2007, SILVA et al., 2010 e TEIXEIRA, 2011).

Neste contexto, o objetivo deste trabalho é desenvolver uma interface gráfica para classificação de dados em qualquer área do conhecimento via RNAs e assim, auxiliar e facilitar o aprendizado dos estudantes dos cursos de graduação e de pós-graduação em disciplinas, bem como pesquisadores com assuntos envolvendo inteligência artificial (classificação de dados, reconhecimento de padrões, análise de imagens, entre outros).

## Metodologia

O ambiente MATLAB (MATHWORKS, 2016), foi utilizado para desenvolver o software, ou seja, programar a interface gráfica. Também foi utilizado o *Neural Network Toolbox* como complemento da interface gráfica. O elemento básico de informação no MATLAB é a matriz, a qual não requer dimensionamento prévio e permite a resolução de muitos problemas numéricos em apenas uma fração do tempo que se gastaria para escrever um programa semelhante em uma outra linguagem como o Fortran, o Basic ou C++. Apesar da existência de outras alternativas atraentes, a escolha foi baseada nas seguintes considerações (MATHWORKS, 2016):

- ✓ É uma linguagem comercial de alto nível e amplamente difundida nos cursos de engenharia;
- ✓ Apresenta uma estrutura de dados na forma de matrizes, sem exigir dimensionamento prévio;
- ✓ Inclui uma vasta seleção de *Toolboxes*: controle, redes neurais, otimização, simulink;
- ✓ Apresenta a disponibilidade de processos numéricos de alta qualidade, incluindo técnicas de esparsidade;
- ✓ Apresenta um ambiente de visualização e programação simples;
- ✓ Possui recursos para o desenvolvimento de interfaces gráficas portáteis e poderosas;
- ✓ Permite a criação dinâmica de links para subrotinas em C ou Fortran.

Portanto, o MATLAB não só é um software interativo de alta performance voltado para o cálculo numérico e científico, como também integra análise numérica, cálculo com matrizes, processamento de sinais e construção de gráficos num ambiente fácil de usar, onde problemas e soluções podem ser expressos como eles são escritos na matemática ou na forma de uma linguagem de programação. A interface gráfica foi implementada aplicando a função *Figure* e suas propriedades (*Color*, *Units*, *MenuBar*, *NumberTitle*, *Position*, *Resize* e *Name*). Também utilizou o comando de controle *Uicontrol* e suas propriedades: (*Units*, *Position*, *String*, *Style*, *Enable*, *CallBack*, *Visible*, *BackgroundColor*, *ForegroundColor* e *HorizontalAlignment*) (MATHWORKS, 2016).

A Figura 1 apresenta uma janela desenvolvida com a função *Figure* e seus parâmetros devidamente configurados (alguns destes parâmetros serão mostrados a seguir).

```
dx=0.2850;
dy=0.2200;
pos = [(1-dx)*0.5, (1-dy)*0.5, dx, dy];
h0 = figure('Color',[ 0.800 0.800 0.800], ...
           'Units','normalized', ...
           'MenuBar','none', ...
           'NumberTitle','off', ...
           'Position',pos, ...
```

```
'Resize','off', ...
'name','");
```

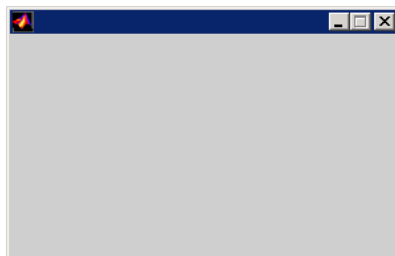


Figura 1: Exemplo da função *Figure*.

O *Uicontrol* é um comando de controle para a janela que está ativa. Para criar os controles, deve-se configurar apropriadamente seus parâmetros. Os parâmetros e a Figura 2 a seguir apresentam o exemplo do comando *Uicontrol*.

```
h1 = uicontrol('Parent',h0, ...
    'Units','normalized', ...
    'BackgroundColor',[ 1 1 1], ...
    'ForegroundColor',[0.000 0.000 0.502],...
    'HorizontalAlignment','center', ...
    'Position',[0.0787 0.7678 0.8287 0.1547], ...
    'String','Sistemas:', ...
    'FontSize',17,...
    'Fontname','Arial',...
    'Style','text', ...
    'Tag','StaticText1');
```

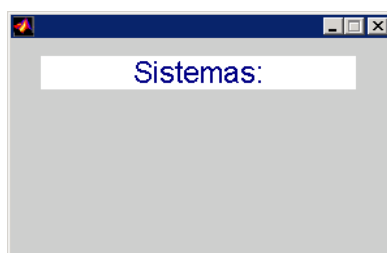


Figura 2: Exemplo do *BackgroundColor*.

Todos os outros comandos descritos anteriormente e utilizados para desenvolver a interface gráfica presente neste trabalho, podem ser encontrados em Mathworks (2016).

## Resultados

Os dados para teste do programa desenvolvido neste trabalho foram de um experimento realizado em uma casa de vegetação no campus da UNESP em Botucatu, no ano de 2013. São 108 amostras com 4 variáveis de entrada cada, representadas pela temperatura média, umidade, velocidade do vento e radiação. A fórmula utilizada para calcular a evapotranspiração de referência (ET<sub>o</sub> - perda de água do solo por evaporação e a perda de água da planta por transpiração, ou seja, perda de água de uma cultura para realizações de processos naturais sob condições determinadas) em função das

variáveis de entrada foi baseado no método clássico de Penman-Monteith, que pode ser visto na equação (1) (ALLEN et al., 1998). Esses dados de ETo são representados pela saída desejada da RNA.

$$ET_o = \frac{0,408\Delta(R_n - G) + \gamma \frac{900}{T + 273} u_2 (e_s - e_a)}{\Delta + \gamma(1 + 0,34u_2)} \quad (1)$$

em que:

- ETo - evapotranspiração de referência ( $\text{mm d}^{-1}$ );
- $R_n$  - saldo de radiação à superfície da cultura ( $\text{MJ m}^{-2} \text{d}^{-1}$ );
- $G$  - densidade do fluxo de calor do solo ( $\text{MJ m}^{-2} \text{d}^{-1}$ );
- $T$  - temperatura do ar a 2 m de altura ( $^{\circ}\text{C}$ );
- $u_2$  - velocidade de vento a 2 m de altura ( $\text{m s}^{-1}$ );
- $e_s$  - pressão de vapor de saturação (kPa);
- $e_a$  - pressão parcial de vapor (kPa);
- $\Delta$  - declividade da curva de pressão de vapor de saturação ( $\text{kPa } ^{\circ}\text{C}^{-1}$ ),
- $\gamma$  - coeficiente psicrométrico ( $\text{kPa } ^{\circ}\text{C}^{-1}$ ).

A janela inicial do programa com o respectivo botão para início da formação da rede é apresentada na Figura 3. Clicando no botão “REDES NEURAS ARTIFICIAIS (RNAs)”, outra tela se abre para inserção dos dados de entrada e os dados de saída desejada da rede, Figura 4.

Para o exemplo tomado neste trabalho, a matriz de entrada possui dimensão de  $4 \times 108$ , 108 amostras com 4 variáveis cada (temperatura média, umidade, velocidade do vento e radiação) e a matriz de saída desejada possui dimensão  $1 \times 108$ , 108 amostras representando a ETo. Inserindo os dados e clicando no terceiro botão “Verificar dados no command window”, informações sobre os dados (dimensão das matrizes de entrada e saída) aparecerão na janela de inserção dos dados, Figura 5(a) e no *command window* do MATLAB (os valores de entrada e saída), Figura 5(b). Caso o usuário deseje limpar os dados de entrada e de saída desejada na janela de inserção dos dados, basta clicar no segundo botão “Limpar dados” que a janela voltará em seu estado inicial, figura 4.

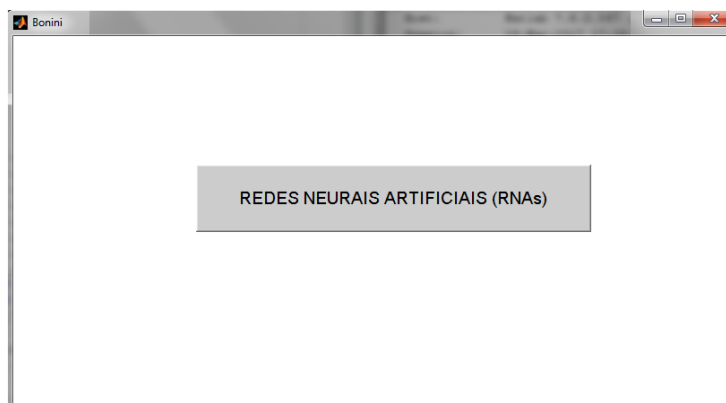


Figura 3: Janela inicial do programa.

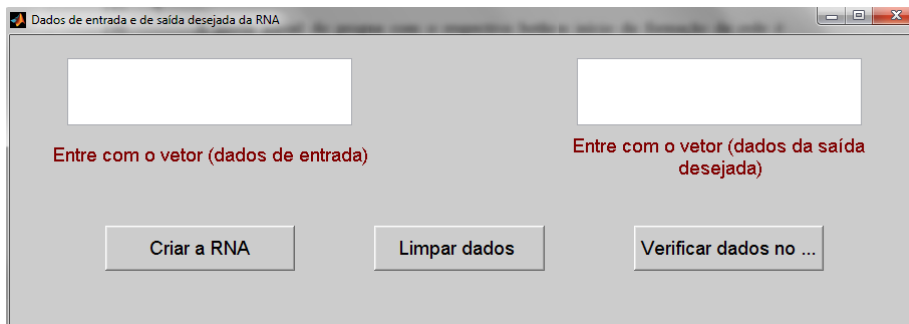
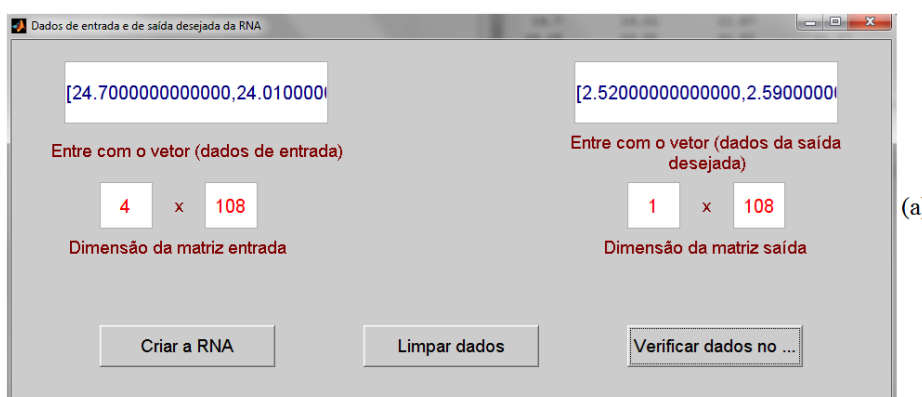
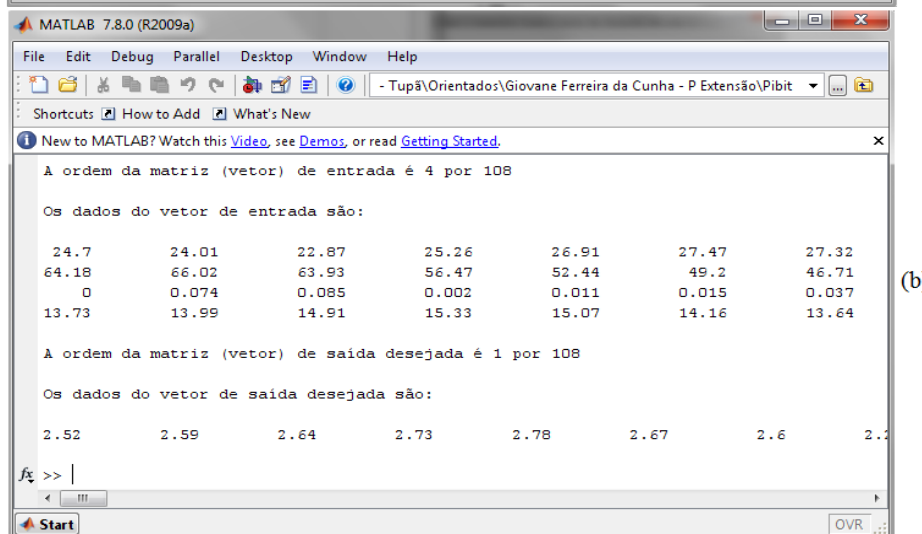


Figura 4: Janela para inserção dos dados de entrada e saída.



(a)



(b)

Figura 5: (a) Janela para inserção dos dados de entrada e saída e dimensão das matrizes, (b) Tela do *command window* do MATLAB com os valores de entrada e saída da rede.

Caso o usuário erre na inserção dos dados (tamanho dos vetores) um lembrete de erro aparecerá avisando do erro cometido, conforme a Figura 6, outros tipos de erro também são apresentados, como no caso do usuário esquecer de colocar os dados de saída por exemplo, entre outros.

Depois de inseridos os dados, clicamos no botão “Criar a RNA”, uma nova janela, Figura 7 se abrirá para criação da rede, onde o usuário poderá escolher o número de camadas intermediárias (1 ou 2 camadas). Escolhendo por exemplo 1 camada, outra janela se abrirá para escolha do número de neurônios na camada intermediária (5, 10 ou 15 neurônios), Figura 8.



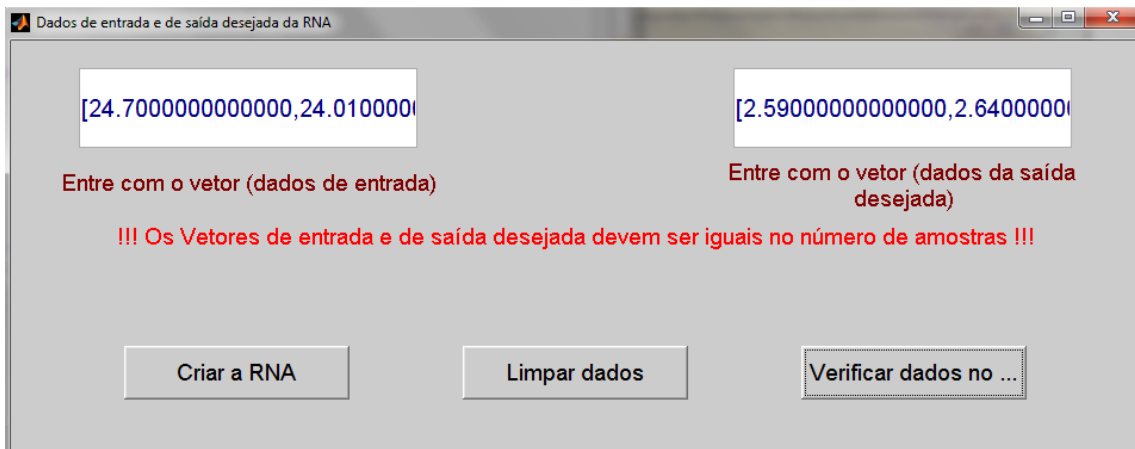


Figura 6: Mensagem de erro caso o usuário erro na inserção dos dados.

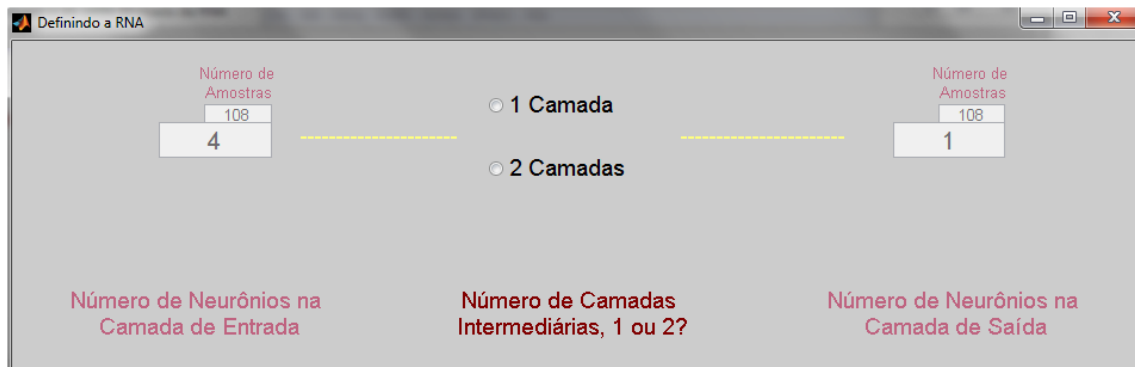


Figura 7: Janela para criação da rede, escolha do número de camadas.

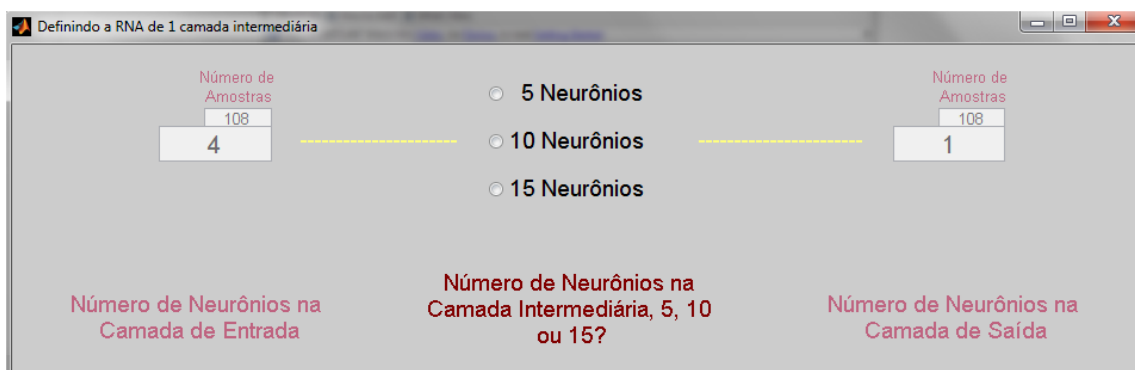


Figura 8: Janela para criação da rede, escolha do número de neurônios na camada intermediária.

Caso o usuário escolha por exemplo 5 neurônios, a Figura 9 se abre para escolha da função de transferência, algoritmos de aprendizado e parâmetros de treinamento da rede. Após estas escolhas, basta clicar em “Treinar” para que a rede desenvolvida ajuste todos os pesos conforme as escolhas feitas na figura 9. A Figura 10 apresenta os resultados do treinamento, nota-se que a saída obtida ficou praticamente em cima da saída desejada, com erro de  $4,65 \times 10^{-2}$ , acarretando em um ótimo treinamento. Neste caso a rede ficou pronta para a fase de operação, ou seja, classificar amostras que não fizeram parte do treinamento.

Definindo as funções de transferência, os algoritmos de aprendizado e os parâmetros da RNA

Número de Amostras: 108

Número de Neurônios na Camada de Entrada: 4

Número de Neurônios na Camada Intermediária: 5

Número de Neurônios na Camada de Saída: 1

**Funções de Transferência:**

**Camada Intermediária:**

- Linear
- Tangente hiperbólica
- Sigmóide
- Linear com saturação
- Nova função

**Camada de Saída:**

- Linear
- Tangente hiperbólica
- Sigmóide
- Linear com saturação
- Nova função

**Algoritmos de Aprendizado:**

- Backpropagation Levenberg-Marquardt
- Backpropagation de gradiente decrescente
- Backpropagation de gradiente decrescente com momentum
- Backpropagation de gradiente decrescente com taxa adaptativa
- Backpropagation de gradiente decrescente com momentum e tax...
- Novo algoritmo

**Parâmetros de treinamento**

Número máximo de épocas de treinamento: 100

Erro desejado: 0.001

Taxa de aprendizado: 0.05

Tempo máximo para o treinamento (s): 20

Redefinir Treinar

Figura 9: Escolha da função de transferência, algoritmos de aprendizado e parâmetros de treinamento da rede.

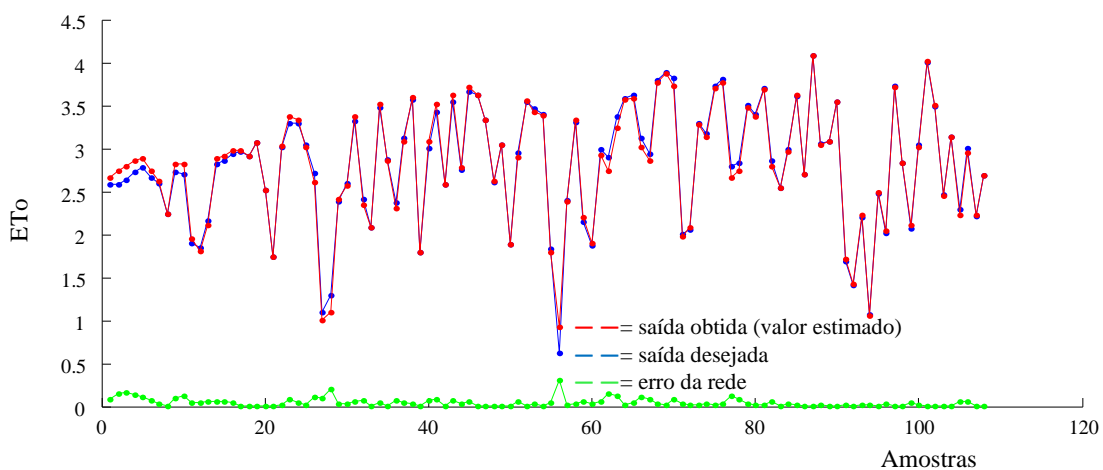


Figura 10: Desempenho do treinamento da RNA com erro médio de  $4,65 \times 10^{-2}$ .

## Conclusões

Neste trabalho foi apresentada uma interface gráfica via RNA para classificação de dados. Foi possível verificar o desempenho do programa e da rede ao comparar a saída obtida com a saída

desejada segundo Penman-Monteith, com erro de  $4,65 \times 10^{-2}$  para o treinamento. Neste caso, a rede ficou pronta para classificar amostras que não fizeram parte do treinamento. Todas estas características tornam o programa desenvolvido adequado para fins educativos e para pesquisas.

## Agradecimentos

Os autores agradecem a Faculdade de Ciências e Engenharia – FCE – UNESP – campus de Tupã pelo apoio.

## Referências

- ALLEN, R. G.; PEREIRA, L. S.; RAES, D.; SMITH, M. **Crop evapotranspiration: guidelines for computing crop water requirements**. Roma: FAO, 1998. 300 p. (FAO. Irrigation and Drainage Paper, 56). Disponível em: <[https://appgeodb.nancy.inra.fr/biljou/pdf/Allen\\_FAO1998.pdf](https://appgeodb.nancy.inra.fr/biljou/pdf/Allen_FAO1998.pdf)>. Acesso em 02 de março de 2017.
- BONINI NETO, A.; PUTTI, F. F.; SANT'ANA, R. C. G.; BONINI JUNIOR, N. A. Brazilian Journal of Biosystems Engineering. **Descriptive Statistics for Data Analysis (Soy Production) via Iterative Program**, v. 6, n. 2, p. 61-70, 2012.
- GABRIEL FILHO, L. R. A.; PUTTI, F. F.; CREMASCO, C. P.; BORDIN, D.; CHACUR, M. G. M.; GABRIEL, L. R. A. Engenharia Agrícola (Online). **Software to Assess Beef Cattle Body Mass Through the Fuzzy Body Mass Index**, v. 36, p. 179-193, 2016.
- GASPARINI, R. T. **Desenvolvimento de um Software em Ambiente Matlab para Simulação de Campo Ultrassônico**. Dissertação apresentada à UNICAMP. 107p. 2012.
- GÓES, D. B. R.; DA SILVA, G. M.; GUEDES, D. L.; SILVA, O. F. **Desenvolvimento de Interface em MATLAB para Aprendizado e Comparação de Métodos Numéricos**. XXXV CNMAC - Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics. vol. 3, n. 1, 2015.
- LEAL NETO, V. **Desenvolvimento de uma Interface Gráfica de Usuário para Modelos Computacionais de Exposição Externa**. Dissertação apresentada à Universidade Federal de Pernambuco. 81p. 2007.
- MATHWORKS. **MATLAB (MATrix LABoratory)** Disponível em: <<http://www.mathworks.com>>. Acesso em 17 de fevereiro de 2016.
- PROTO, A. B. **Interface Gráfica para o Planejamento da Expansão da Transmissão de Energia Elétrica**. Dissertação apresentada à UNESP – Campus de Ilha Solteira. 102p. 2009.
- SILVA, L. H. S.; MISHINA, K. D. V.; FARIAS, C. T. T.; RODRIGUES, M. C.; RIBEIRO, I. S. **Desenvolvimento de uma Interface Gráfica no Ambiente Matlab para Avaliação do Risco em Oleodutos On-Shore**. VI Congresso Nacional De Engenharia Mecânica. 2010.
- TEIXEIRA, A. S. B. **Desenvolvimento de uma Interface Gráfica para Classificadores de Imagem**. Dissertação apresentada ao Instituto Politécnico de Castelo Branco. 74p. 2011.



## Educação financeira: uma introdução através de um software

*Carina Brabo da Silva Caramelo*  
Professora da rede estadual de ensino  
carina.bs2@gmail.com

*Renata Zotin Gomes de Oliveira*  
UNESP; DM - IGCE - Rio Claro - SP  
rzotin@rc.unesp.br

**Resumo:** A Matemática Financeira está presente na vida de todos os cidadãos e grande parte deles não tem conhecimento necessário para ter um controle financeiro, tomar decisões como comprar à prazo ou guardar dinheiro para comprar à vista. O objetivo desse trabalho, que é parte da dissertação de mestrado pelo programa PROFMAT, é ressaltar a importância do estudo da Matemática financeira no Ensino Médio, trazendo uma proposta de ensino para tratar desse assunto através do uso de um software educacional livre. Espera-se com isso motivar e despertar o interesse dos alunos para esse assunto que é de extrema importância e que vai refletir no cotidiano deles e de seus familiares.

**Palavras-chave:** Ensino. Matemática financeira. Software.

### Introdução

Este trabalho traz uma proposta para se trabalhar conteúdos da Matemática Financeira com o auxílio de um software, com o intuito de despertar maior interesse nos alunos para esse conteúdo, que é tão importante. Ao trabalhar, discutir e resolver a situação-problema abordada pelo software é importante adequar e introduzir outras situações do cotidiano, trabalhar com valores e taxas reais, para levar o aluno a refletir sobre a importância de fazer um planejamento na aquisição de algum bem material. A proposta de ensino apresentada pressupõe que em cada atividade do software haverá a intervenção do professor, comentando o passo a passo dos cálculos necessários para se obter os valores pedidos em cada etapa.

Para a aplicação da proposta é necessário que os alunos tenham conhecimento de alguns conteúdos preliminares, como: razão, porcentagem e juros simples. Para o professor, seria importante também algum conhecimento sobre equações de diferenças (CIPOLLI, 2012).

### Software - descrição

O M3 - Matemática multimídia - é um portal com recursos multimídia para auxiliar o ensino da matemática no Ensino Médio. Foi desenvolvido pela Unicamp, com financiamento do FNDE (Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação), SED (Secretaria Escolar Digital), MCT (Ministério da Ciência e Tecnologia) e MEC (Ministério da Educação).

O portal possui recursos como vídeos, áudios, experimentos e softwares que abordam conteúdos do Ensino Médio. O software utilizado na proposta chama-se: "Como comprar sua moto". Neste software o aluno irá simular a compra de uma moto, levando em consideração a necessidade de poupar dinheiro para dar de entrada na compra da moto e o financiamento do saldo devedor.

Os objetivos do software são: aplicar o conceito de juros compostos, introduzir o conceito de empréstimos sob juros e mostrar aplicações de progressão geométrica na matemática financeira.

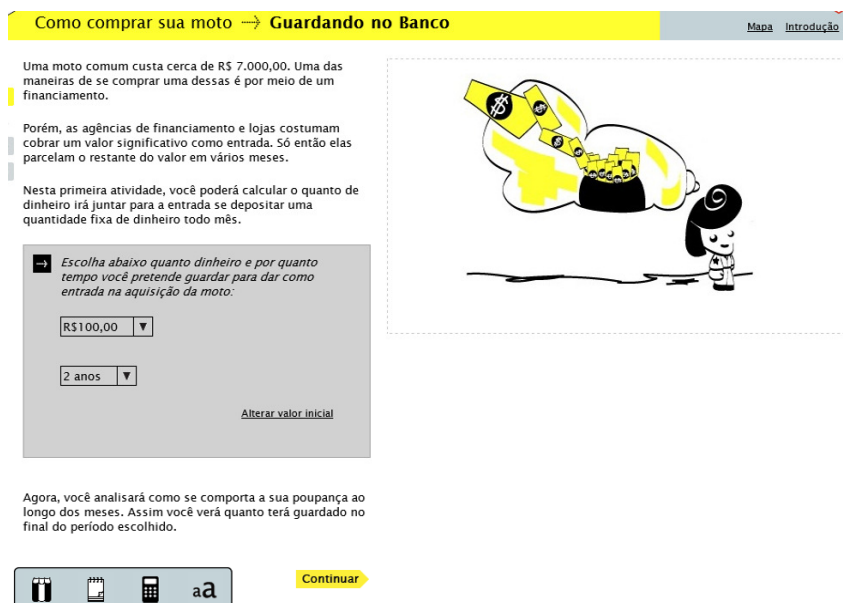
## Desenvolvimento da proposta

A proposta será desenvolvida da seguinte forma: após uma breve revisão dos conteúdos preliminares, será apresentada a situação problema que o software aborda “como comprar sua moto”. O software é composto por duas atividades e cada uma delas possui algumas etapas a serem cumpridas, onde o aluno precisará fazer algumas escolhas e realizar alguns cálculos. Em Caramelo (2016) é apresentado o passo a passo dos cálculos necessários para obter os valores pedidos e as sugestões de intervenções que deverão ser feitas pelo professor, assim como algumas telas do software. Nesse texto apresentamos apenas algumas atividades e sugestões de intervenção. Se o docente usar o software apenas como aplicação da Matemática Financeira, quatro aulas de 50 minutos são suficientes para o desenvolvimento da proposta. No entanto, se o docente for introduzindo conceitos matemáticos como exponenciais e logaritmos, o software pode ser utilizado durante todo esse período.

### 1ª atividade: guardando no banco

Nessa primeira atividade o aluno irá analisar a importância de se poupar dinheiro para aquisição de algum bem material, a diferença em acumular um determinado valor com a aplicação de juros compostos e o acúmulo desse mesmo valor sem juros algum.

1. Antes de realizar a compra de uma moto é necessário poupar dinheiro, pois as agências financiadoras e lojas costumam cobrar um valor significativo como entrada. Então é proposto ao aluno escolher entre dois valores (R\$50,00 ou R\$100,00) para poupar durante 1, 2 ou 3 anos. A taxa de juros utilizada no software é de 1%.



The screenshot shows a software interface with a yellow header titled "Como comprar sua moto → Guardando no Banco". Below the header, there is a navigation bar with "Menu" and "Introdução". The main content area contains the following text:

Uma moto comum custa cerca de R\$ 7.000,00. Uma das maneiras de se comprar uma dessas é por meio de um financiamento.

Porém, as agências de financiamento e lojas costumam cobrar um valor significativo como entrada. Só então elas parcelam o restante do valor em vários meses.

Nesta primeira atividade, você poderá calcular o quanto de dinheiro irá juntar para a entrada se depositar uma quantidade fixa de dinheiro todo mês.

Below the text is a form with two dropdown menus: "Escolha abaixo quanto dinheiro e por quanto tempo você pretende guardar para dar como entrada na aquisição da moto:" with options "R\$100,00" and "2 anos". A button "Alterar valor inicial" is located below the form.

To the right of the text is an illustration of a person thinking about saving money, with a thought bubble containing a piggy bank and coins.

At the bottom of the interface, there is a navigation bar with icons for a calculator, a document, a calculator, and a text editor, followed by a "Continuar" button.

Figura 1: Tela da 1ª atividade do software.

Após a escolha, o professor deve pedir ao aluno para calcular o valor acumulado nos primeiros meses:

- Valor inicial: R\$100,00.

- Início do 2º mês: temos o novo depósito de R\$100,00 mais o valor inicial com a aplicação dos juros.

$$100 + 100 * 1,01 = 201.$$

Total acumulado: R\$201,00.

- Início do 3º mês: temos o novo depósito de R\$100,00 mais o valor acumulado no mês anterior com a aplicação dos juros.

$$100 + 201 * 1,01 = 303,01.$$

Total acumulado: R\$303,01.

- Início do 4º mês: temos o novo depósito de R\$100,00 mais o valor acumulado no mês anterior com a aplicação dos juros.

$$100 + 303,01 * 1,01 = 406,04$$

Total acumulado: R\$406,04.

É importante o professor ressaltar que essa forma de utilização de juros é o chamado juro composto.

2. Após os cálculos terem sido realizados, o aluno poderá responder as questões 1 e 2 propostas pelo software e efetuar o comando “corrigir” do próprio software. Na sequência, o aluno poderá visualizar graficamente o valor acumulado com a aplicação dos juros.
3. Com os cálculos feitos anteriormente, os alunos irão perceber que é necessário o valor do mês anterior para obter o valor acumulado do mês seguinte. Nesse momento é importante que o professor faça perguntas do tipo: “Qual será o valor acumulado daqui 30 meses?”. “Será que precisamos fazer os cálculos mês a mês?”. “E daqui a  $n$  meses?”.

Essas questões irão levar o aluno a refletir sobre a necessidade de termos uma fórmula que calcula o valor acumulado em função do número de períodos  $V(n)$ . Vamos colocar os dados obtidos anteriormente em uma tabela para uma melhor visualização, tomando  $V(1)$  como valor inicial.

Tabela 1: Valor acumulado no mês  $n$  em função do mês  $n - 1$ .

Tempo ( $n$ )	Valor acumulado $V(n)$
1	$V(1) = 100$
2	$V(2) = 100 + V(1) * 1,01 = 201$
3	$V(3) = 100 + V(2) * 1,01 = 303,01$
4	$V(4) = 100 + V(3) * 1,01 = 406,04$
5	$V(5) = 100 + V(4) * 1,01 = 510,10$
⋮	⋮
30	$V(30) = 100 + V(29) * 1,01$
⋮	⋮
$n$	$V(n) = 100 + V(n - 1) * 1,01$

Nesse momento o professor pode conduzir alguns questionamentos na tentativa de obter o valor acumulado em qualquer tempo  $n$ . É necessário que o professor, junto com os alunos, trabalhe as expressões utilizadas anteriormente para facilitar essa percepção.



Tabela 2: Cálculo do valor acumulado em função do tempo.

Tempo ( $n$ )	Cálculo do valor acumulado $V(n)$
1	$V(1) = 100$
2	$V(2) = 100 + 100 * 1,01$
3	$V(3) = 100 + 100 * 1,01 + 100 * (1,01)^2$
4	$V(4) = 100 + 100 * 1,01 + 100 * (1,01)^2 + 100 * (1,01)^3$
5	$V(5) = 100 + 100 * 1,01 + 100 * (1,01)^2 + 100 * (1,01)^3 + 100 * (1,01)^4$
⋮	⋮
$n$	$V(n) = 100 + 100 * 1,01 + 100 * (1,01)^2 + \dots + 100 * (1,01)^{n-1}$

Vamos organizar os dados obtidos em uma tabela para uma melhor visualização:

Vale lembrar que é de extrema importância a construção do conhecimento do aluno para que ele consiga associar o padrão descrito na tabela anterior como a soma de uma PG de  $n$  termos e razão 1,01. Na tela do software correspondente às questões 3 e 4 têm-se ainda dois *links* contento a definição de PG, a fórmula do termo geral de uma P.G. e a dedução da fórmula da soma dos termos de uma PG. Assim, esses conceitos podem ser trabalhados antes ou durante essa atividade. Feito isso, ele poderá finalmente escrever a fórmula do valor acumulado em função do tempo

$$V(n) = \frac{100 * [(1,01)^n - 1]}{1,01 - 1} = \frac{100}{0,01} * [(1,01)^n - 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(n) = 10^4 * [(1,01)^n - 1] \quad (1)$$

e responder as próximas questões do software:

**Questão 3:** Seguindo o padrão dos casos acima, qual seria o valor acumulado no início do 4o. mês? a) 400,00 b) 103,03 c) 104,06 d) 406,04 e) 510,10.

**Questão 4:** Perceba que, para saber o total acumulado em cada mês, basta saber o primeiro termo e a razão dessa P.G. Com base nisso, responda: a) Qual é a razão ( $q$ ) dessa P.G.? b) Qual é o seu primeiro termo ( $a_1$ )?

4. No próximo passo o software traz uma ferramenta que mostra o gráfico dos valores que foram acumulados em cada mês até o final do período escolhido para guardar o dinheiro. Mas antes de utilizar a ferramenta, o ideal é que o professor peça aos alunos para responderem os itens da questão 5 fazendo os cálculos e utilizando a fórmula encontrada anteriormente. Essa questão diz: “Verifique qual será o total acumulado no banco em cada um dos seguintes meses: 8o. mês, 12o. mês e 24o. mês”.

Após realizar os cálculos através da fórmula, os alunos devem utilizar a ferramenta para conferir seus resultados.

5. O próximo item (questão 6) traz questões que levam o aluno a comparar e perceber a diferença entre aplicar o dinheiro na poupança ou guardar o dinheiro em casa.

Valor com juros:  $V(24) = 2.697,35$ , já calculado na questão 5.

Valor acumulado sem aplicação dos juros:  $100 * 24 = 2.400$ .

Diferença entre as duas aplicações:  $2.697,35 - 2.400 = 297,35$ .

A razão entre o valor acumulado no último mês na poupança (*VAP*) e o acumulado no último mês em casa (*VAC*) é dado por:  $\frac{VAP}{VAC} = \frac{2.697,35}{2.400} = 1,12$ .

Nessa mesma tela têm-se uma ferramenta com dois gráficos que ilustram os valores que a pessoa teria caso resolvesse guardar dinheiro em casa e os valores acumulados em poupança.

Para finalizar a 1ª atividade, essa mesma tela do software apresenta algumas questões que devem ser respondidas no caderno do aluno. O professor deve pedir que eles pesquisem entre seus colegas, os que fizeram opções diferentes de valores e período de tempo, para comparar e refletir os resultados obtidos.

## 2ª atividade: o financiamento

Nessa 2ª atividade o aluno vivencia a situação de poupar o dinheiro para dar de entrada na compra da moto e financiar o restante. É apresentado um contexto fictício em que o aluno toma um empréstimo com sua avó e se compromete a pagar mensalmente com parcelas iguais e com juros até que a dívida seja quitada.

1. Sua avó, como é muito boazinha e ama seu neto, irá emprestar o restante do valor da moto; porém ela irá cobrar os juros de 1% referente ao rendimento que ela teria, caso esse dinheiro estivesse aplicado em uma poupança (vale lembrar que atualmente o rendimento da poupança é inferior a 1%). Supondo o valor da moto de R\$7.000,00 e que o valor poupado (1ª atividade) foi de R\$2.697,35 ainda faltam R\$4.302,65, que é o montante que sua avó irá emprestar.

O aluno poderá escolher o valor da parcela que irá pagar por mês, entre: R\$200,00, R\$250,00, R\$300,00, R\$350,00 ou R\$400,00.

Nessa primeira página da segunda atividade o aluno também estima quantas parcelas ele pagaria, caso não houvesse cobrança de juros. Como o montante a ser emprestado é de R\$4.302,65 e a opção escolhida do valor da parcela é de R\$200,00, temos que:  $\frac{4.302,65}{200} = 21,51325$ . Logo, se não houvesse cobrança de juros, teríamos 21 parcelas de R\$200,00, totalizando R\$4.200,00. Além disso, teríamos mais 1 parcela de R\$102,65 ( $4.302,65 - 4.200 = 102,65$ ). Então, seriam 22 parcelas.

Após a escolha do valor da parcela, o professor deve pedir para seus alunos realizarem os cálculos para ver como sua dívida irá se comportar nos primeiros meses, levando em conta a situação problema e considerando que a avó não irá cobrar juros no primeiro mês. Na tabela a seguir podemos observar os cálculos:

Com os cálculos realizados, nessa etapa o aluno poderá responder as questões seguintes e visualizar graficamente o comportamento dessa dívida, quando tem-se a aplicação dos juros e o pagamento da parcela.

Após o aluno acompanhar o comportamento da dívida nos primeiros meses, o professor deve conduzir o aluno a perceber que a cada mês sua dívida aumenta, devido a aplicação de juros, e se sua parcela fosse menor que esse rendimento de juros, sua dívida cresceria todo mês.

2. Com os cálculos realizados para estimar o valor da dívida nos primeiros meses, os alunos poderão observar que é necessário o valor da dívida do mês anterior para obter o valor da dívida do mês

### Como comprar sua moto → O Financiamento

1 Nesta atividade, considerando que, depois de juntar dinheiro para dar como entrada no pagamento da sua moto, você já é maior de idade para poder dirigi-la e, além disso, possui um emprego que lhe possibilita pagar o valor restante em prestações, você explorará nessa atividade um financiamento alternativo: a ajuda da sua avó.

Tendo em vista sua ansiedade para comprar a moto, mas consciente de que as lojas cobram altos juros nos financiamentos, sua avó lhe ofereceu um dinheiro para pagar o valor total restante (4302.65 reais).

Porém, apesar de muito boazinha, ela vai cobrar de você o rendimento que ela deixará de ter por não estar com esse dinheiro investido em uma poupança.

→ Para te ajudar, sua avó deixou você decidir o quanto quer pagar por mês até sanar a dívida. Escolha um valor dentre os disponíveis na lista abaixo.

R\$ 200.00	▼
<b>R\$ 200.00</b>	
R\$ 250.00	
R\$ 300.00	
R\$ 350.00	
R\$ 400.00	

Definir valor da parcela

Figura 2: Tela inicial da segunda atividades do software.

Tabela 3: Valor da dívida no tempo  $n$  em função de  $n - 1$ .

Tempo(n)	Valor da dívida D(n)
0	$D(0)=4.302,65$
1	$D(1) = D(0) - 200 = 4.102,65$
2	$D(2) = D(1) * 1,01 - 200 = 3.943,68$
3	$D(3) = D(2) * 1,01 - 200 = 3.783,11$
4	$D(4) = D(3) * 1,01 - 200 = 3.620,94$
5	$D(5) = D(4) * 1,01 - 200 = 3.457,15$
⋮	⋮
15	$D(15) = D(14) * 1,01 - 200$
⋮	⋮
n	$D(n) = D(n - 1) * 1,01 - 200$

seguinte. De modo análogo à atividade 1, organizamos os valores obtidos da dívida nos primeiros meses em uma tabela, para facilitar a visualização.

A seguir o professor novamente irá auxiliar seus alunos para que eles associem parte do padrão descrito acima como a soma de uma P.G., podendo escrever uma fórmula mais simplificada para calcular o valor da dívida em função do tempo,

Tabela 4: Cálculo do valor da dívida em função do tempo.

Tempo(n)	Valor da dívida D(n)
1	$D(1) = D(0) - 200$
2	$D(2) = D(0) * 1,01 - 200 * (1 + 1,01)$
3	$D(3) = D(0) * (1,01)^2 - 200 * [1 + 1,01 + (1,01)^2]$
4	$D(4) = D(0) * (1,01)^3 - 200 * [1 + 1,01 + (1,01)^2 + (1,01)^3]$
5	$D(5) = D(0) * (1,01)^4 - 200 * [1 + 1,01 + (1,01)^2 + (1,01)^3 + (1,01)^4]$
⋮	⋮
n	$D(n) = D(0) * (1,01)^{n-1} - 200 * [1 + 1,01 + (1,01)^2 + \dots + (1,01)^{n-1}]$

$$D(n) = D(0) * (1,01)^{n-1} - 200 * \frac{[(1,01)^n - 1]}{0,01}. \quad (2)$$

Lembrando que  $D(0)$  é o valor inicial da dívida e 200 é o valor fixo da parcela a ser paga.

A seguir, através de uma ferramenta do software, o aluno poderá visualizar graficamente o valor da sua dívida mês a mês, mas o ideal é que antes o professor faça algumas perguntas, (como a do exemplo a seguir) e peça para que seus alunos respondam utilizando a fórmula encontrada. Após os cálculos conferir suas respostas através do aplicativo do software.

*Exemplo: Qual o valor da dívida no 15º mês?*

$$D(15) = 4.302,65 * (1,01)^{14} - 200 * \frac{[(1,01)^{15} - 1]}{0,01} = 1.726,41. \quad (3)$$

Nessa mesma tela do software temos 3 questões que poderiam ser respondidas, apenas visualizando a ferramenta do software, mas os alunos podem responder utilizando a fórmula encontrada em (2), referente ao valor da dívida em função do tempo.

$$\begin{aligned} D(n) = 0 &\Rightarrow 4.302,65 * (1,01)^{n-1} - 200 * \frac{[(1,01)^n - 1]}{0,01} = 0 \\ &\Rightarrow 4.302,65 * (1,01)^{n-1} + 20.000 * [(1,01)^n - 1] = 0 \\ &\Rightarrow (1,01)^{n-1} = 1,2581. \end{aligned}$$

Para resolver essa equação é necessário introduzir o estudo de função exponencial e logarítmica. Após ser introduzido e trabalhado a função exponencial e logarítmica, os alunos poderão calcular o tempo necessário para quitar a dívida. Logo,

$$(1,01)^{n-1} = 1,2581 \Rightarrow \log_{1,01} 1,2581 = n - 1.$$

Fazendo mudança de base temos:  $\log_{1,01} 1,2581 = n - 1 \Rightarrow \frac{\log_{10} 1,2581}{\log_{10} 1,01} = n - 1 \Rightarrow 23,07 = n - 1 \Rightarrow n = 24,07$ .

Com isso pode-se concluir que no 24º mês a dívida não estará quitada. Porém, o valor da dívida será menor que o valor das parcelas pagas nos meses anteriores (R\$200,00). Logo, o último mês em que a dívida será positiva é no 24º mês. Como foi calculado na questão 5A, que o último mês em que a dívida é positiva é o 24º mês, vamos calcular  $D(24)$ .

$$D(24) = 4.302,65 * (1,01)^{23} - 200 * \frac{[(1,01)^{24} - 1]}{0,01} = 14,44.$$



Foram pagas 24 parcelas de R\$200,00 e uma parcela de R\$14,44. Logo:

$$24 * 200 + 14,44 = 4.814,44$$
$$4.814,44 - 4.302,65 = 511,79.$$

Ao responder essas questões é importante que os alunos percebam que o valor pago foi maior que o valor emprestado e isso se deve à aplicação de juros.

3. Na próxima tela do software é a finalização da atividade. Nessa parte o software traz as informações do valor total pago pela moto, que depende dos valores escolhidos nas **duas atividades**: na primeira, o valor a ser poupado e em qual período de tempo, e na segunda, o valor da parcela paga mensalmente para saldar a dívida, que é a diferença entre o valor da moto e o acumulado na poupança.

Antes de finalizar é interessante pedir aos alunos que pesquisem entre seus colegas, os que escolheram outros valores para efetuar o pagamento, para ter essa troca de informações. O ideal seria que o professor junto com os alunos levantassem todas as possibilidades possíveis, para poder comparar os diferentes resultados, com o intuito do aluno perceber claramente que a diferença do pagamento da moto vai depender em proporção direta do valor da parcela paga a cada mês.

Para finalizar a atividade é interessante que o professor leve seus alunos a uma reflexão quanto a importância de fazer um planejamento financeiro para a aquisição de algum bem, podendo dar outros exemplos e até mesmo simular outras situações como a compra de um celular, uma festa de formatura, uma viagem, ou até mesmo uma situação onde é necessário fazer algumas mudanças nas fórmulas utilizadas no software.

## Referências

CIPOLLI, V. G. **Sistemas Dinâmicos Discretos - análise de estabilidade**. 2012. 147 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – UNESP, Rio Claro, 2012.

CARAMELO, C. B. S. **Matemática Financeira no Ensino Médio**. 2016. 80 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – UNESP, Rio Claro, 2016.

MATEMÁTICA MULTIMÍDIA. Software Como comprar sua moto. 2015. Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1236>. Acesso em: 10 set. 2015.



## Estimação da dissipação energética e da sobrepressão com uso de baixo-explosivos

Vinícios Munari Dewes

Universidade Federal de Santa Catarina; Centro de Ciências Físicas e Matemáticas  
viniciosdewes@gmail.com

**Resumo:** É crescente o número de ocorrências envolvendo o uso de explosivos, seja na explosão de máquinas (em bancos) ou abandono em via pública. Existem modelos que garantem uma distância mínima de segurança para explosivo com grande potencial energético (alto-explosivo). Porém, para baixo-explosivos, não existem muitas referências de distância segura. A intenção deste texto é desenvolver um modelo empírico que delimita a dissipação da energia liberada com o uso em situações com uso de baixo-explosivos, baseado em modelos já existentes e propor uma relação para simulação da sobrepressão no ambiente livre de barreiras e sem reflexão de ondas de choque. Através de manipulações, a sobrepressão poderá ser estimada através de dois modelos: a sobrepressão  $\Delta P$  em função da quantidade de baixo-explosivos  $Q$ , de uma variável  $k$ , da distância  $D$  e a energia dissipada  $E$  no ambiente livre em função da quantidade de baixo-explosivos  $Q$ , do variável  $k$  e da distância  $D$ .

**Palavras-chave:** Matemática Aplicada à Engenharia. Baixo-Explosivos.

### Introdução

A incidência de ocorrências com envolvimento de explosivos químicos sólidos tem aumentado consideravelmente nas últimas décadas, como pode ser visualizado em mídias televisivas, encontrados nos mais diversos tipos de embalagens (SILVA, 2007). O mau uso e a quantificação exacerbada por parte dos criminosos acaba muitas vezes inviabilizando o próprio sucesso da ação, a exemplo dos caixas eletrônico em agências bancárias. Além disso, fábricas de produtos pirotécnicos podem ser acometidas por incêndios, ocasionais ou não, e ainda, a confecção de artefatos ilegais, tal como pólvora negra, podem gerar problemas.

Os agentes do estado que primeiro chegam ao local do crime são, em geral, policiais militares responsáveis pelo serviço de policiamento ostensivo motorizado. Nesse âmbito, existe um procedimento que regulamenta as atividades das unidades especializadas (PMSC, 2016). Indicam os materiais que serão utilizados, assim como a cadeia de comando a ser seguida e demais necessidades da atuação. No texto do documento, um item é responsável pela indicação do isolamento da área, porém não especifica a área segura.

Neste texto é indicado um modelo empírico para mensuração dos riscos envolvendo a proximidade com objeto explosivo, baseado na quantidade e no tipo de explosivos. O escopo deste texto contempla a avaliação apenas do modelo usado em explosivos classificados como baixo-explosivos, tendo em vista que para outros tipos de explosivos existe uma literatura vasta.

A nossa realidade indica que grande parte do uso destes materiais ocorre em ambientes fechados, tais como bancos ou salas total ou parcialmente fechadas, muitas vezes noticiados. Porém, a suspeita destes objetos ocorre também em via pública, onde a dissipação da energia poderia atingir muitas pessoas.

### Revisão de Conceitos

O conceito de explosivo químico utilizado indica que é uma mistura de substâncias ou substância única, em qualquer estado físico, que quando interagem com calor ou choque mecânico, com valores mínimos suficientes, converte a matéria em gás, gerando uma enorme quantidade de energia e altíssimas pressões, no mínimo intervalo de tempo. São divididos em baixo-explosivos e alto-explosivos (MORAES, 2004; SILVA, ILHA, FERREIRA, 2007).



O efeito dos explosivos vem do volume que o gás ocupa quando comparado a um objeto sólido. Na transformação do sólido para o gasoso são liberadas ondas de choque (SILVA, 2007; NEGRINI NETO, 2010). Segundo Silva (2007) e Silva, Ilha e Ferreira(2007) a energia liberada é diretamente proporcional a massa do explosivo utilizado.

Quando possuem velocidade de queima suficiente, os explosivos detonam, gerando também calor. Caso contrário, apenas ocorre a deflagração (queima rápida) com a liberação do calor (SILVA, ILHA, FERREIRA, 2007). Iniciada a detonação, ondas de choque partem da localização inicial dos explosivos em forma hemisférica, modificando a forma conforme chegam na zona de estragos nula, assumindo uma forma cada vez menos definida, propagam-se em todas as direções, a partir do epicentro (SILVA, 2007). Atrás da onda de choque, ocorre uma pressão dinâmica, proveniente da movimentação sofrida pelo ar (SILVA, 2007; COSTA NETO, 2015). Em geral, quanto mais longe do centro da explosão, menores serão os efeitos destrutivos, pois a energia é dissipada conforme são propagadas a onda de choque e a energia calorífica (BARROS, 2008). Casagrande (2006) afirma que alterações no tipo de explosivo, relevo ou altitude modificam a onda de choque e sua relação com estruturas durante a colisão. A caracterização usual é válida para os diversos tipos de explosivos.

Bauer e Crosby (1990) apud Barros (2008) assumem que o fator de escala é proveniente do efeito da dispersão geométrica do movimento da detonação. Esparza, 1985, apud Barros (2008) conduziu experiências com seis tipos de alto-explosivos e foi utilizada raiz cúbica ao invés da quadrada mensuração da distância escalonada.

Conforme Silva, Ilha e Ferreira (2007), os efeitos da explosão são proporcionais ao cubo do raio  $\left(\frac{D(Q_A)^3}{D_0^3}\right)$  da esfera formada pela detonação de  $Q_A$  indicando a propagação hemisférica das ondas de choque.  $D(Q_A)$  é dado em metros, medidos do final da explosão ao epicentro.  $Q_A$  é a quantidade de alto-explosivos, em kg, e  $D_0$  é dado em  $m/\sqrt[3]{kg}$  representa a distância em escala, para uso na comparação dos tipos de alto-explosivo. Esta é a lei denominada "Hopkinson-Cranz law of blast scaling" e é obtida elevando as equações na potência  $1/3$  e isolando  $D_0$  na descrição inicial:

$$Q_A = \frac{D(Q_A)^3}{D_0^3} \Rightarrow D(Q_A) = D_0 \sqrt[3]{Q_A} \quad (1)$$

$$D_0 = \frac{D(Q_A)}{\sqrt[3]{Q_A}} \quad (2)$$

A classificação em baixo-explosivos é proveniente do comportamento do material, que possui baixa velocidade de reação e queima em aberto rápida, produzindo muito calor e poucas ondas de choque (NEGRINI NETO; 2010). A principal diferença, se comparado ao alto-explosivo, é a velocidade de queima, quando deflagrados (SILVA, ILHA, FERREIRA; 2007). Como exemplo, Valença et al (2013) cita propelentes ou pólvoras (negra, base simples, base dupla, base tripla).

Os efeitos da onda de choque podem comprometer a estrutura do ambiente assim como ceifar vidas. O autor Negrini Neto (2010) subdivide em três sub-regiões em zonas de estrago: forte ( $0 < D_0 \leq 5$ ), moderada ( $5 < D_0 \leq 10$ ) e fraca ( $10 < D_0 \leq 15$ ), conforme proximidade do local da explosão.

O modelo matemático empírico para delimitação das zonas de estrago e distância de segurança para baixo-explosivos, denotado por  $Q$ , mensurado em kg, é descrito por Negrini Neto (2010), é distinto do utilizado por Silva (2007) e Silva, Ilha e Ferreira(2007) para alto-explosivos:

$$D(Q) = D_0 \sqrt{Q} \quad (3)$$

Observa-se que a zona de estragos nula não é citada por Negrini Neto (2010), porém é plausível que se a pessoa se encontra a uma distância maior que a distância máxima numa zona de estrago fraca, o risco tende a ser nulo. Silva, Ilha e Ferreira(2007) assumem que para um pico de sobrepressão, denotado por  $\Delta P$ , menor que 0,07 Bar não ocasiona lesões significativas. Se o modelo que estima  $D$  for muito complexo, elaborado com muitas regras de associação que a relacionam com a quantidade de explosivos,

algum cuidado deve ser tomado devido convergência individual dos termos quando os valores tendem a ser muito grandes ou muito pequenos. Por exemplo, conforme Lima (2011), a convergência do produto de seqüências, que individualmente convergem para infinito e zero, não pode ser definida se não por análise individual de cada modelo finalizado.

Para qualquer quantidade de explosivos representado por um valor contido no conjunto dos números reais, a seqüência  $\sqrt[i]{Q_A} = Q_A^{1/i}$ , com  $1/i$  representando uma potência pertencente ao conjunto dos números reais, vai resultar numa menor explicação de  $D$  por parte de  $Q_A$  se  $i$  assumir um valor muito alto. Pode-se dizer que se a razão  $1/i$  for muito pequena ( $i$  muito grande), a seqüência  $\sqrt[i]{Q_A}$  vai se aproximar de 1 e a distância mínima de segurança vai ser explicada somente pela distância escalada, gerando um absurdo pois as pesquisas indicam que é proporcional a quantidade de explosivos.

Para Barros (2008), quando a sobrepressão é menor que a pressão ambiente,  $P_0$ , a sobrepressão refletida (quando ocorre a colisão frontal entre a onda de choque e a superfície do material)  $\Delta Pr$  é aproximada como sendo duas vezes a valor da sobrepressão causada pela explosão sem reflexão. Quando a sobrepressão causa pela explosão for maior que  $P_0$ , a sobrepressão refletida pode chegar até oito vezes o valor da sobrepressão inicial.

## A equivalência ao TNT

Dado o comportamento da raiz quadrada no intervalo quando  $0 < Q < 1$ , será considerado válido para toda quantidade de explosivos maior ou igual que 1 kg para explosivos com velocidades de queima mais altas, o modelo que delimita o afastamento mínimo, proveniente de modificações na equação (2) (MORAES 2004; SILVA, 2007; SILVA, ILHA, FERREIRA, 2007):

$$D(Q_A) = 120\sqrt[3]{Q_A} \quad (4)$$

Quando  $Q_A$  representa o TNT, o calor de explosão,  $E_0$ , gera 4520 kJ/kg de energia a cada quilo (SILVA, 2007). No entanto, para Valença et al (2013) o TNT possui calor de explosão é de 4080 kJ/kg. O mesmo autor garante que a determinação experimental apresenta valores divergentes, variando conforme as condições laboratoriais e da quantidade de oxigênio envolvido. Como objetivo é delimitar a distância mínima de segurança, o maior valor será considerado. Para abranger os diversos tipos de explosivos, será mantido a variável  $E_0$ , ao invés do valor de 4520 kJ/kg que representa o TNT. A viabilidade disso esta na coerência ao se utilizar a equivalência ao TNT para diversos alto-explosivos. Para clarear, o  $E_0$  referente ao alto-explosivo C4 é  $1,185 \times 4520 = 5356,2$  kJ/kg.

Ainda, Silva (2007) assegura que para este tipo de material, em zona aberta, a distância mínima é de 90 metros. Novamente, quando  $0 < Q_A < 1$  a função apresenta comportamento diferenciado, por se tratar de raiz cúbica. Por ser um dos tipos de alto-explosivos mais estudados, uma relação de equivalência entre a quantidade de baixo-explosivos e alto-explosivos pode ser estabelecida, considerando os valores energéticos do TNT ( $Q_{AT}$ ) já apresentados:

Tabela 1: Relação de equivalência ao TNT de alguns explosivos.

Explosivos	Relação de Equivalência
RDX	1,600
Dinamite de Nitroglicerina	0,600
C4	1,185
Pólvora	0,550

O único baixo-explosivo identificado na tabela 1 com valores extraídos de (SILVA, 2007; BARROS 2008) é a pólvora, mas não é especificado nenhum tipo específico deste material. Isso pode representar

um viés nas características dos baixo-explosivos existentes, pois para Valença et al (2013) existem pelo menos quatro tipos de pólvora: negra, base simples, base dupla e base tripla.

Com base na tabela 1, aplicado ao método da equivalência do TNT, pode-se dizer que os mesmos efeitos causados por 1kg de TNT a 120 metros ( $D_0 = 120$ ) podem ser comparados a aproximadamente  $D_{0EQ} = 98,32$  metros utilizando-se a pólvora:

$$D_0 = \frac{120}{\sqrt[3]{1}} = \frac{D_{0EQ}}{\sqrt[3]{0,55}} \Rightarrow D_{0EQ} = \frac{120 \times \sqrt[3]{0,55}}{\sqrt[3]{1}} \Rightarrow D_{0EQ} = 98,32 \quad (5)$$

Baseado na velocidade de reação de um baixo-explosivo, o valor de 98,32 metros aparenta estar super estimado. Veja que, se utilizado a dinamite de nitroglicerina, que possui fator de equivalência ao TNT de 0,6, próximo ao da pólvora, obteríamos uma distância Equivalente  $D_{0EQ} = 101,21$  metros, gerando um absurdo conceitual ao tornar muito próximas as diferentes características dos alto e baixo-explosivos.

Para determinação de uma referência segura sobre a equivalência do TNT com qualquer baixo-explosivo, vai ser igualado na equação (4) e na equação (3), considerando a zona de estragos nula no caso da equação (3):

$$120 \sqrt[3]{Q_A} = 15 \sqrt{Q} \quad (6)$$

Obtêm-se as relações entre quantidade de baixo e alto-explosivos :

$$Q = 64(Q_A^{2/3}) \quad (7)$$

$$Q_A = \frac{Q^{3/2}}{512} \quad (8)$$

Na equação (7) fica visível a comparação entre as quantidades de explosivo para que haja a distância de segurança em cada caso. Nesse caso, como a igualdade envolve raiz cúbica e quadrada, ocorre uma relação não linear no trato das equivalências com relação ao poder destrutivo do TNT. Especificamente, quando  $Q_A = 64^3 = 8^6$ , os valores  $Q$  e  $Q_A$  se igualam, o que novamente gera um absurdo devido as propriedades físico-químicas deste material.

## O Modelo Proposto

Agora considerando que a variação da energia dissipada  $E$  no entorno do epicentro após detonação é inversamente proporcional ao cubo da distância  $D$  do epicentro, pode-se inferir que a energia total descrita  $E$  é dada inicialmente pelo produto da energia liberada por cada quilo de explosivo  $Q_A$  e sua energia específica  $E_0$  sendo dispersada ao cubo de  $D$  na equação (9):

$$\frac{d(E)}{d(D)} = -\frac{E_0 Q_A}{D^3} \quad (9)$$

Integrando ambos os lados e reagrupando:

$$E \pm A = -E_0 Q_A \left( \pm C - \frac{1}{2D^2} \right) \quad (10)$$

Uma possível primitiva da equação (9) esta representada na equação (10). Como  $\pm A$  representa uma variação da energia não contemplada neste texto será considerado zero. Modelos que envolvem a perda de energia no decorrer da explosão, ou até mesmo a variação da energia devido ao tipo específico de explosivo podem considerar esta valor e outras constantes ou variáveis, porém necessitam de maiores recursos para elaboração. A variável  $\pm C$  é proveniente da integração do termo  $\frac{1}{D^3}$  e aponta uma variação

da distância ao epicentro e por isso será considerada zero. Em situações análogas as descritas para A poderá ser diferente de zero. Logo:

$$E(Q_A, D) = \frac{E_0 Q_A}{2D^2} \quad (11)$$

Na equação (11) a energia é estimada fixando a energia específica  $E_0$  que pode representar qualquer alto-explosivo, sua carga e a distância ao epicentro. Isolando  $Q_A$  na equação (11) pode ser estimada a carga de explosivos, em kg, considerando a distância do epicentro e a energia requisitada nessa distância:

$$Q_A(D, E) = \frac{2D^2 E}{E_0} \quad (12)$$

Quando é igualada a equação (8) e na equação (12) e reordenado, pode-se estabelecer os valores energéticos através das variáveis quantidade de baixo-explosivos e distância, sendo visualizado a equação da equação (13) e da equação equação (14):

$$E(Q, D) = \frac{Q^{3/2} E_0}{1024 D^2} \quad (13)$$

$$Q(D, E) = \sqrt[3]{\left(\frac{1024 D^2 E}{E_0}\right)^2} \quad (14)$$

Através da equação (13) pode se estimar a quantidade energética baseado na quantidade de TNT sem necessariamente utilizar o método de equivalência ao TNT. Do contrário, poderia simplesmente adaptar o fator  $E_0$  conforme o tipo de explosivo, multiplicando pelo fator equivalente e substituir em modelos já existentes.

### O cálculo da sobrepressão

Busca-se no modelo de Newmark e Hansen (1961) apud Barros (2008), o valor que indica a sobrepressão em alto-explosivos é proporcional ao cubo da distancia ao epicentro e a quantidade de explosivos (TNT) em tonelada, sendo o valor da sobrepressão obtido em Bar. Para Hussein (2010) esse modelo calcula a máxima sobrepressão de alto-explosivos detonados na superfície terrestre.

Necessário corrigir a quantidade de  $Q_A$ , dividindo por 1.000 pois (8) e (14) estão em kg e (15) em tonelada. O modelo original pode ser visualizado na 15:

$$\Delta P(Q_A, D) = 6784 \frac{Q_A}{D^3} + 93 \sqrt{\frac{Q_A}{D^3}} \quad (15)$$

Substituindo (8) em (15):

$$\Delta P(Q, D) = \frac{0,01325 Q^{3/2}}{D^3} + \frac{0,1300 Q^{3/4}}{D^{3/2}} \quad (16)$$

Por fim, a sobrepressão pode ser dimensionada em função da energia expelida com uso de baixo-explosivos. Quando substituída (14) em (16) pode-se estimar um modelo para obter sobrepressão proveniente da dissipação energética do uso de baixo-explosivo, sem necessidade de corrigir a quantidade energética que já esta dimensionada, conforme igualdade indicada em (6):

$$\Delta P(E, D) = \frac{13,568 E}{E_0 D} + \frac{4,1591 E^{1/2}}{(E_0 D)^{1/2}} \quad (17)$$

De fato, no desenvolvimento das equações há uma suposição de que a energia já liberada no decorrer da explosão pelos alto e baixo-explosivos seja muito similar, convergindo para igualdade quando o explosivo já totalmente foi detonado. No entanto, divergem quanto a equivalência quantitativa e a maneira de detonação.

Os modelos apresentam amplitude da sobrepressão muito distintos, sendo o que se utiliza da equivalência ao TNT apresenta comportamento semelhante ao próprio, como era de se esperar, corrigido apenas por uma constante.

Apesar de possuir maiores valores de sobrepressão quando mais próximo do epicentro, o método de equivalência ao TNT apresenta um decaimento muito alto da sobrepressão, concentrando altíssimos valores no entorno da explosão, fatores característicos de alto-explosivos, onde há uma grande expansão gasosa e detonação, além de outros fatores não elencados neste trabalho. Ainda, a elevação cúbica da distância é fator determinante para a grande baixa dos valores medidos referentes a sobrepressão quando ocorre afastamento do epicentro.

Do contrário, no modelo proposto há um menor viés dos valores de sobrepressão, com amplitude menor, que pode estar associado a explosivos com baixa velocidade de detonação, muitas vezes apenas deflagrados ou detonados com velocidade limite entre a deflagração e detonação.

Quando ocorre a deflagração, muita energia é dissipada apenas em forma de calor, com a queima do material, sem possuir a mesma expansão gasosa dos alto-explosivos.

### A generalização do modelo

Generalizando o algoritmo iniciado na equação (6) podemos escrever:

$$kD_0\sqrt[3]{Q_A} = D_0\sqrt{Q} \quad (18)$$

Que gera:

$$Q_A = \frac{Q^{3/2}}{k^3} \quad (19)$$

$$Q = Q_A^{2/3}k^2 \quad (20)$$

$$k = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt[3]{Q_A}} \quad (21)$$

Uma restrição ao valor de  $k$  de ver ser feita, para que a quantidade de baixo-explosivo seja sempre maior que a de alto-explosivo, pois afinal rendem menos e uma maior quantidade deve ser considerada para, pelo menos, igualar o fenômeno quando explodido. Partindo do fato que  $Q$  e  $Q_A$  representam massas, com  $Q > Q_A$ , deve-se chegar num valor já estabelecido para obtenção de um parâmetro: elevando ambos os lados da desigualdade na potência  $3/2$  e dividindo por  $k^3$ , chega-se num valor já visualizado na equação (19) reordenada e resulta em  $k > \sqrt[6]{Q_A}$ .

Analogamente, conduzindo a restrição para que ela fique em função de  $Q$ , pela hipótese inicial:  $Q > Q_A$ , elevando dois lados da desigualdade em  $2/3$  e multiplicando por  $k^2$ , obtêm-se a equação (20), que resulta no fato de que  $k > \sqrt[6]{Q}$ : Se por hipótese,  $Q > Q_A$ , então  $\sqrt[6]{Q} > \sqrt[6]{Q_A}$ .

Uma análise criteriosa de outras 4 desigualdades envolvendo  $k$  confirmam o resultados obtidos acima. Supondo  $k < \sqrt[6]{Q}$  e  $k < \sqrt[6]{Q_A}$  quando substituído na equação (18) apresenta a quantidade de alto-explosivo estritamente maior que a quantidade de baixo-explosivos. Quando  $k = \sqrt[6]{Q}$  e  $k = \sqrt[6]{Q_A}$  o desenvolvimento indica o valor de  $Q = Q_A$ .

Assim a interseção das soluções corretas  $k > \sqrt[6]{Q_A}$  e  $k > \sqrt[6]{Q}$ , indica que  $k$  deve ser sempre maior que a raiz sexta da quantidade de baixo-explosivos, pois mesmo sendo maior que a raiz sexta da quantidade de alto-explosivos, pode ser menor ou igual a raiz sexta de baixo-explosivos.



Significa que o limite máximo, em kg, de baixo-explosivos, que o valor de  $k$  comporta sem gerar absurdo  $Q < Q_A$  é definido pelo valor de  $k^6$ , sendo  $k$  qualquer valor real maior que 1. Nota-se que o valor de  $k$  no intervalo limita apenas a quantidade máxima de baixo-explosivo que se pode estimar através da quantidade de alto-explosivos, pelo método proposto, não sendo referente a qualidade do baixo-explosivo quando comparado ao alto-explosivo.

Cada explosivo comparado é testado empiricamente, corresponderá a um valor de  $k$ , e a quantidade, em kg, utilizada por este deverá respeitar a limitação do intervalo  $Q : (1, k^6] \rightarrow \mathfrak{R}$ .

Quando  $k$  converge para 1,  $Q$  converge  $Q_A$ . Se  $k=1$  representa o modelo idealizado na equação (11) para  $Q_A$ .

Substituindo a equação (19) na equação (11), resulta em mais uma variável para determinação do valor energético dissipado, respeitando os intervalos  $E : (1, k^6] \rightarrow \mathfrak{R}_+$ ,  $D : (1, D_0\sqrt{k^6}] \rightarrow \mathfrak{R}_+$ ,  $Q : (1, k^6] \rightarrow \mathfrak{R}_+$  e  $k \in (1, \infty)$ :

$$E(Q, D, k) = \frac{E_0 Q^{3/2}}{2D^2 k^3} \quad (22)$$

A sobrepressão fica representada pela equação (23) quando a equação (19) é substituída na equação (15) e dividida por 1000, limitada ao intervalos:  $\Delta P : (1, k^6] \rightarrow \mathfrak{R}_+$ ,  $D : (1, D_0\sqrt{k^6}] \rightarrow \mathfrak{R}_+$ ,  $Q : (1, k^6] \rightarrow \mathfrak{R}_+$  e  $k \in (1, \infty)$ :

$$\Delta P(Q, k, D) = 6,7840 \frac{Q^{3/2}}{k^3 D^3} + 2,9409 \sqrt{\frac{Q^{3/2}}{k^3 D^3}} \quad (23)$$

## Observações Finais

A busca por conceitos básicos sobre explosões químicas para explosivos sólidos auxiliou na obtenção dos modelos idealizados e interpretação dos coeficientes obtidos. Fatores como quantidade de oxigênio na reação influenciam a determinação da energia específica, assim como a altitude, o tipo de explosivo e o relevo alteram o tipo de onda de choque liberada.

A nova proposta para mensuração da sobrepressão sugere uma modificação do método comparativo em equivalência a quantidade de TNT e propõe uma relação não linear na comparação destes quantitativos. Para mesmas quantidades de baixo-explosivos, os dois métodos estimam distintos valores de sobrepressão, a uma mesma distância.

A amplitude do pico de pressão entre os métodos também difere, de modo que no modelo proposto há uma menor variação da sobrepressão, enquanto que no método que usa equivalência o baixo-explosivo apresenta comportamento característico dos alto-explosivos, o que gera um absurdo conceitual, dada velocidade da queima e expansão gasosa dos materiais componentes dos dois tipos de explosivos.

A generalização do modelo proposto indicou que a variável  $k$  influi fortemente na obtenção da energia dissipada, quando aplicada em conjunto com a distância do epicentro da explosão e quantidade de explosivos. Quando obtidos dados experimentais, o valor de  $k$  poderá ser melhor avaliado, não sendo estabelecido apenas com base em modelos existentes e poderá ser específico para cada tipo de baixo-explosivo. Contudo, a restrição do valor de  $k$  deve ser observada para que a quantidade de baixo-explosivos não seja inferior a quantidade de alto-explosivos, contrapondo as definições iniciais a características distintas dos materiais.

Estes valores podem ser utilizados em incêndios de fábricas que utilizam produtos pirotécnicos, onde a quantidade de explosivos estocada é muito grande, assim como em artefatos caseiros feitos com materiais com comércio liberado.

Recomenda-se a mensuração dos valores através de experimentos práticos, para comparação com os valores estimados e a utilização de softwares específicos e computadores com alto rendimento para apuração de resultados, além da análise da sensibilidade do fatores  $k$ ,  $D$  e  $Q$ .





## Referências

- [1] BARROS, Márcio Luiz Siqueira Campos. **Modelo de Aferição da Velocidade de Partículas Através do Parâmetro Energético**. 2008. Tese (Doutorado). Universidade de Pernambuco. CTG. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, 2008.
- [2] CASAGRANDE, André Schaan. **Estudo de Cargas Impulsivas com Ênfase em Explosões: Estratégias de Análises Utilizando Métodos Numéricos**. 2006. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Departamento de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Por Alegre, 2006
- [3] COSTA NETO, Murilo Limeira. **Um Estudo de Fenômeno Explosão e das Ondas de Choque Utilizando a Fluidodinâmica Computacional**. 2015. 103 f. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília/ DF, 2015.
- [4] COSTA NETO, Murilo Limeira. **Um Estudo de Fenômeno Explosão e das Ondas de Choque Utilizando a Fluidodinâmica Computacional**. 2015. 103 f. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília/ DF, 2015.
- [5] HUSSEIM, Assal T. **Noon Linear Analysis of SODF; Sysytem under blast Load**. European Journal os Scientific Research, 2010. P. 430-37.
- [6] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise: Vol. 1**. Rio de Janeiro: Associação do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2011. p.99-160.
- [7] MORAIS, Juarez Lopes de. **Simulação da Fragmentação de Rochas Por Explosivos**. 2004, 224f. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Minas Gerais, 2004.
- [8] NEGRINI NETO, Osvaldo. **CapítuloXII: Análises Físicas e Químicas de Explosivos Químicos. Incêndios e Explosivos: Uma Introdução a Engenharia Forense**. Ranvier Feitosa Aragão Campinas, SP: Millenium Editora, 2010. Páginas 398-423.
- [9] PMSC - Polícia Militar de Santa Catarina. **Procedimento em Ocorrências com Bombas e Artefatos Explosivos -POP 701.3**.Verificado em maio de 2016.
- [10] SILVA, Wilson Carlos Lopes. **Blast: Efeitos da Onda de Choque no Ser Humano e nas Estruturas**. 2007. 107f. Tese de Mestrado. Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2007.
- [11] SILVA, Wilson Carlos Lopes; ILHA, Koshun; FERREIRA, Paulo Cesar Misco. **Dimensionando Explosivos em cabeça de Guerra para Efeito Sopro. 2007. Simpósio de Aplicações Operacionais em Áreas de Defesa**. Instituto Tecnológico da Aeronáutica - ITA, São José dos Campos - SP, 2007.
- [12] VALENÇA, Ubirajara da Silva et al. **Engenharia dos Explosivos: Um Enfoque Dual**. Rio de Janeiro, Instituto Militar de Engenharia: Fundação Ricardo Franco Coleção Disseminar, 2013. 740 p.

## Estudo de singularidades da matriz Jacobiana no fluxo de carga continuado através de uma técnica de parametrização geométrica

*Leandro Souto de Oliveira*

*Faculdade de Ciências e Engenharia - FCE - UNESP Tupã  
leandrosouto182@hotmail.com*

*Marcio Presumido Junior*

*Faculdade de Ciências e Engenharia - FCE - UNESP Tupã  
presumidojr@gmail.com*

*Alfredo Bonini Neto*

*Faculdade de Ciências e Engenharia - FCE - UNESP Tupã  
bonini@tupa.unesp.br*

**Resumo:** O fluxo de carga continuado (FCC) é uma poderosa ferramenta no estudo da estabilidade estática de tensão, utilizado para obter toda curva P-V (potência versus tensão) em sistemas elétricos de potência. Essas curvas são representadas por duas partes, estável (margem de carregamento, estabilidade do sistema) e instável (instabilidade do sistema), ligadas a um ponto em comum, denominado de ponto de máximo carregamento (PMC) ou ponto crítico. Ao tentar obter esse ponto que define a estabilidade da instabilidade, a matriz Jacobiana do fluxo de carga continuado torna-se singular, necessitando de modificações no método para remover essa singularidade e com isso ter uma aproximação do ponto crítico tão boa quanto se queira. A matriz Jacobiana no FCC é definida pelas derivadas parciais das equações não lineares de potência ativa e reativa em relação as variáveis ângulo das tensões nodais e magnitude das tensões nodais. Nesse contexto, este trabalho tem por objetivo estudar e remover essas singularidades utilizando uma técnica de parametrização geométrica via equações da reta.

**Palavras-chave:** Equações de reta. Singularidade. Matriz Jacobiana. Ponto crítico.

### Introdução

Hoje em dia, estudos envolvendo estabilidade estática de tensão, vêm ganhando destaque mundial, pois o setor elétrico vem passando por várias transformações (ABBOTT, 2007), decorrente principalmente do aumento da demanda de eletricidade e também devido a crise hídrica que o país vem sofrendo, fazendo com que os níveis dos reservatórios fiquem abaixo da média (ONS, 2015). Devido a essas transformações, muitos dos sistemas elétricos estão operando próximos de seus limites operacionais, onde qualquer aumento de potência pode levar a uma instabilidade no sistema. Diante disso, visando assegurar uma condição segura de operação para os sistemas elétricos de potência, surgem os métodos de análise da estabilidade estática de tensão que é utilizado neste trabalho e foi inicializado em Bonini e Alves (2008).

Ao estudar a estabilidade estática de tensão é necessário obter o perfil de tensão de todo o sistema, estes perfis são obtidos por meio de uma curva denominada curva P-V, que representa a tensão em função da potência consumida em uma determinada barra (usina ou centro de consumo). Estas curvas são de grande importância, pois permitem o entendimento das condições de operação do sistema para diferentes níveis de carregamentos (BONINI NETO; ALVES, 2010), (CROW, 2009) e (MONTICELLI, 1983). Outro fator importante relacionado a curva P-V, é o ponto crítico que elas possuem, denominado ponto de máximo carregamento (PMC), que define a região estável da instável no sistema.

No entanto, para obter esse ponto, é necessário remover a singularidade da matriz Jacobiana (**J**). Em Bonini e Alves (2016) foi analisada várias técnicas existentes na literatura que objetiva a remoção

da singularidade da matriz Jacobiana no PMC. Também foi apresentado um algoritmo que permite visualizar geometricamente os valores dos determinantes dessa matriz para sistemas de grande porte.

O primeiro trabalho que teve grande destaque mundial envolvendo o traçado completo da curva P-V sem problemas de singularidade da matriz Jacobiana (**J**), foi proposto cerca de 15 anos atrás por Ajarappu e Christy (1992).

Desde então, outros trabalhos envolvendo estudos dos pontos críticos em sistemas de potência foram surgindo, como Rosehart; Roman (2004), Han et al. (2011), Bonini e Alves (2010) e Milano (2010).

Neste contexto, objetivo deste trabalho é utilizar uma técnica de parametrização geométrica diferente da que foi proposta em Bonini e Alves (2016) via equações da reta para estudar os pontos em que as singularidades ocorrem de acordo com as posições (coeficiente angular) de cada reta utilizada. Uma das alternativas de verificar a singularidade da matriz **J** é através da inversão do sinal do determinante no PMC, ou seja, o determinante é nulo exatamente no PMC, podendo ser verificado por meio do gráfico dos valores numéricos do determinante em função do carregamento.

## Metodologia

Para este trabalho, os limites de geração de potência reativa foram desconsiderados. Neste caso, a matriz **J** torna-se singular em pontos de máximo carregamento representados por Bifurcações Sela-Nó. Caso os limites fossem considerados, o ponto de máximo carregamento também poderia acontecer em Bifurcações Induzidas por Limites, as quais não são caracterizadas pela matriz Jacobiana singular, o que não foi estudado neste trabalho.

As equações convencionais do fluxo de carga continuado (FCC) são:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}, \lambda) &= \mathbf{0}, \text{ ou} \\ \Delta \mathbf{P} &= \lambda \mathbf{P}^{\text{esp}} - \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}) = \mathbf{0} \\ \Delta \mathbf{Q} &= \lambda \mathbf{Q}^{\text{esp}} - \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1)$$

sendo

$$\begin{aligned} P_k(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}) &= V_k \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \\ Q_k(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}) &= V_k \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \end{aligned} \quad (2)$$

onde  $\lambda$  representa o fator de carregamento do sistema,  $\boldsymbol{\theta}$  e  $\mathbf{V}$  são os respectivos vetores de ângulo de fase e magnitude de tensão nodal;  $\mathbf{P}^{\text{esp}}$  é o vetor da diferença entre os vetores de potência ativa, gerada ( $\mathbf{P}_g^{\text{esp}}$ ) e consumida ( $\mathbf{P}_c^{\text{esp}}$ ), especificada para as barras de carga ( $PQ$ ) e geração ( $PI$ ); e  $\mathbf{Q}^{\text{esp}}$  é o vetor de potência reativa consumida especificada para as barras  $PQ$ . Os elementos  $G_{km}$  e  $B_{km}$  são as matrizes condutância e susceptância nodal (MONTICELLI, 1983).

A Equação (1) assume que o carregamento da rede é proporcional ao do caso base e considera o fator de potência constante.  $\mathbf{P}^{\text{esp}}$  e  $\mathbf{Q}^{\text{esp}}$  também pode ser definido como sendo igual a  $(\mathbf{k}_{Pg} \mathbf{P}_g^{\text{esp}} + \mathbf{k}_{Pc} \mathbf{P}_c^{\text{esp}})$  e  $\mathbf{k}_{Qc} \mathbf{Q}_c^{\text{esp}}$ , respectivamente. Os vetores  $\mathbf{k}_{Pg}$ ,  $\mathbf{k}_{Pc}$  e  $\mathbf{k}_{Qc}$  são parâmetros fixos usados para caracterizar um específico cenário de carga.

A resolução do sistema de equações (1) pelo método de Newton é feita através da linearização da função  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ , em que  $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = [\Delta \mathbf{P}, \Delta \mathbf{Q}]' = [G_1, G_2, \dots]'$  e  $\mathbf{x} = [\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}]$ , para  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^i$  considerando os dois primeiros termos da série de Taylor:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}^i + \Delta \mathbf{x}^i) \cong \mathbf{G}(\mathbf{x}^i) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^i) \Delta \mathbf{x}^i \quad (3)$$

sendo a matriz jacobiana **J** dada por:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1} & \frac{\partial G_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial G_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial G_n}{\partial x_1} & \frac{\partial G_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial G_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (4)$$

O vetor de correção  $\Delta \mathbf{x}$  é calculado impondo-se que:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}^i) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^i)\Delta \mathbf{x}^i = \mathbf{0} \quad (5)$$

e na forma matricial representa:

$$\begin{bmatrix} G_1(x_1^i, x_2^i) \\ G_2(x_1^i, x_2^i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1} & \frac{\partial G_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}^{(i)} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(i)} \\ \Delta x_2^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

A nova solução  $\mathbf{x}^{(i+1)}$  é:

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \Delta \mathbf{x}^i \quad (7)$$

e

$$\Delta \mathbf{x}^i = -[\mathbf{J}(\mathbf{x}^i)]^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{x}^i) \quad (8)$$

Através de sucessivas soluções de (1), o traçado da curva P-V pode ser obtido via técnicas de parametrização geométrica. Adotando  $\lambda$  como parâmetro, obtém-se valores próximo ao PMC. A partir do caso base ( $\lambda = 1$ ), seu valor é aumentado gradualmente até um valor para o qual nenhuma solução seja obtida, ou seja, para qual o processo iterativo do fluxo de carga não convirja ou diverja, Figura 1. No entanto, a divergência do FCC é uma consequência da singularidade da matriz Jacobiana ( $\mathbf{J}$ ) de (1) no PMC e, portanto, seu valor não pode ser determinado com precisão. A fim de eliminar as dificuldades numéricas resultantes da singularidade de  $\mathbf{J}$  e permitir a determinação do PMC, foram propostas diferentes posições de retas para o FCC. Como o sistema (1) apresenta uma variável a mais ( $\lambda$ ) do que equação, é necessário acrescentar mais uma equação. Logo, a partir da Equação (1) acrescenta-se uma equação da reta à equação do FCC acarretando em (9).

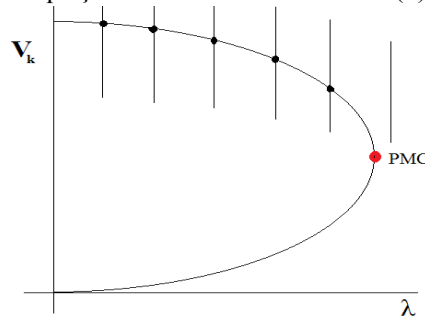


Figura 1: Curva P-V e retas utilizando o fator de carregamento  $\lambda$  como parâmetro.

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{P} = \lambda \mathbf{P}^{\text{esp}} - \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}) = \mathbf{0} \\ \Delta \mathbf{Q} = \lambda \mathbf{Q}^{\text{esp}} - \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{W}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}, \lambda, \alpha) = \alpha (\lambda - \lambda^0) - (V_k - V_k^0) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

em que  $\alpha$  representa o coeficiente angular da reta e  $\lambda^0$  e  $V_k^0$ , representam as coordenadas iniciais da reta para abscissa e ordena respectivamente, Figura 2.  $k$  representa a barra utilizada para obter a curva P-V. A matriz  $\mathbf{J}$  da metodologia utilizada neste trabalho é apresentada pela Equação (10) a seguir.

$$\mathbf{J}_m = \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{p}^{esp} \\ -1_k & 0_k & \alpha \end{bmatrix} \quad (10)$$

O sistema utilizado para obtenção dos resultados foi um sistema de três barras encontrado em Montecelli (1983).

A priori, não se conhece a curva P-V a ser obtida. Neste caso, obtém-se o ponto “P” denominado caso base com  $\lambda = 1$  por meio do FCC e escolhe um valor inicial para o ponto “O”. Uma vez encontrados os pontos “P” e “O”, obtém-se o valor de  $\alpha$  por meio da Equação 11. A partir dessa reta, as singularidades foram encontradas ou removidas através de variações de  $V_k$  ( $V_k + \text{passo}$ ), ou seja, para cada valor do passo dado, um novo ponto de intersecção da reta com a curva trajetória de soluções é encontrado, obtendo assim a curva P-V que a priori não se conhecia.

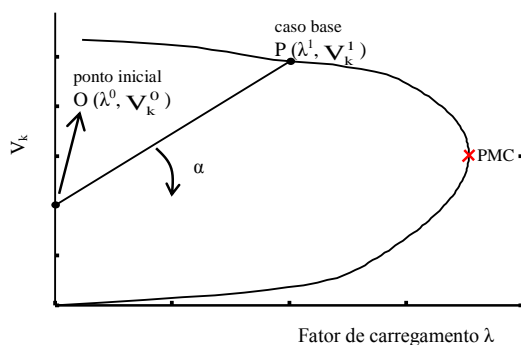


Figura 2: Reta inicial que passa por um ponto inicial da reta  $O(\lambda^0, V_k^0)$  e o de caso base  $P(\lambda^1, V_k^1)$  na curva P-V.

$$\alpha = \frac{V_k^1 - V_k^0}{(\lambda^1 - \lambda^0)} \quad (11)$$

O sistema estudado e as curvas P-V da barra 2 e 3 são mostrados na Figura 3(a) e (b) respectivamente e os dados das barras e linhas de transmissão são mostrados nas Tabelas 1 e 2 segundo Montecelli (1983).

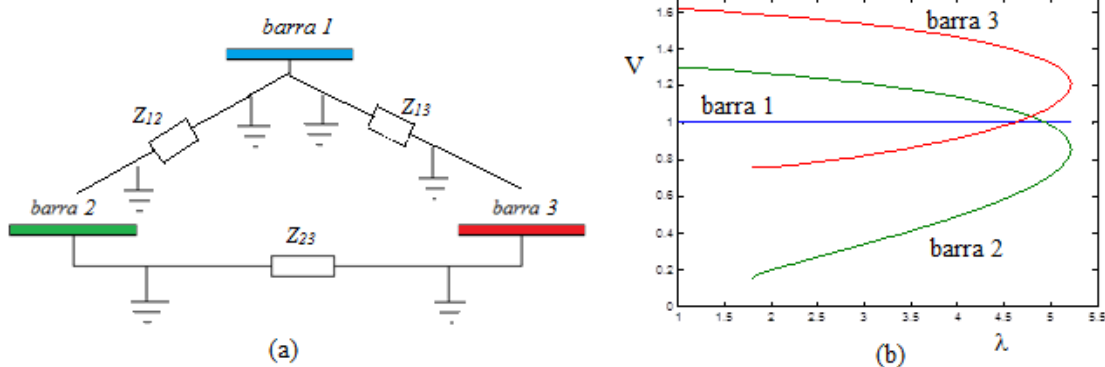


Figura 3: (a) Sistema estudado de três barras, (b) curvas P-V do sistema estudado.

Tabela 1: Dados das barras em p.u.

Barra	Tipo	P	Q	V	$\theta$
1	V $\theta$ (referência)	---	---	1,0	0,0
2	PQ (carga)	-0,05	-0,02	---	---
3	PV (geração)	-0,15	---	0,98	---

Tabela 2: Dados das linhas de transmissão em p.u.

Linha	r	x	$b^{sh}$
1-2	0,1	1	0,01
1-3	0,2	2	0,02
2-3	0,1	1	0,01

## Resultados

Para todos os testes o valor da tensão  $V_k^1$  do caso base (ponto “P”) com  $\lambda = 1$  foi de 1,299 para a barra 2 e 1,616 para a barra 3. O passo adotado neste trabalho para obter as soluções do FCC (curva P-V) foi de 0,01. A Figura 4(a) apresenta resultados do traçado da curva P-V para a barra de carga 2 do sistema estudado na Figura 3, com  $V_2^0 = 0,7$ . Na Figura 4(b) é apresentado a região do PMC ampliada para melhor visualização do problema de tangência e consequentemente da singularidade da matriz  $\mathbf{J}$ . Observa-se que a matriz  $\mathbf{J}$  não é singular no PMC (ponto “a”) e sim no ponto “b” devido a inclinação inicial da reta que foi de 0,599 acarretando numa reta tangente neste ponto e conforme o gráfico dos determinantes da matriz  $\mathbf{J}$  na Figura 4(c). A Tabela 3 apresenta os valores do fator de carregamento  $\lambda$  e de  $|\mathbf{J}|$  para os pontos “a” e “b” da Figura 4.

Mudando a inclinação inicial da reta, a singularidade também muda de ponto, conforme apresentado na Figura 5. Foi utilizado  $V_2^0 = 1,4$  para mostrar essas mudanças. O valor do coeficiente angular foi de -0,1001. Observa-se na Figura 5(a) que houve problemas de singularidade da matriz  $\mathbf{J}$  bem antes do PMC, ponto “c”, conforme o gráfico de  $|\mathbf{J}|$  apresentado na Figura 5(b).

No caso em que  $V_2^0 = 1,299 = V_k^1$ , ou seja, coeficiente angular  $\alpha = 0$ , não houve problemas de singularidade da matriz  $\mathbf{J}$  em nenhuma região da curva P-V. Conforme apresentado na Figura 6(a), pode-se observar que para cada passo adotado, há uma intersecção da reta com a curva trajetória de soluções (curva P-V). O gráfico dos determinantes apresentado na figura 6(b) reforçam esses resultados.

A Figura 7 apresenta resultados para a barra de geração 3 do sistema de três barras estudado neste trabalho. Resultados similares à barra 2 são apresentados para a barra 3. A Figura 7(a) mostra o desempenho do método com  $V_3^0 = 1,4$  e  $V_3^1 = 1,616$  acarretando em  $\alpha = 0,216$ . A singularidade ocorreu após o PMC (ponto “a”) no ponto “b” com valor de 4,9634 para  $\lambda$ . O gráfico dos determinantes de  $\mathbf{J}$  é mostrado na Figura 7(b). A Tabela 4 apresenta os valores do fator de carregamento  $\lambda$  e de  $|\mathbf{J}|$  para os pontos “a” e “b” da Figura 7.



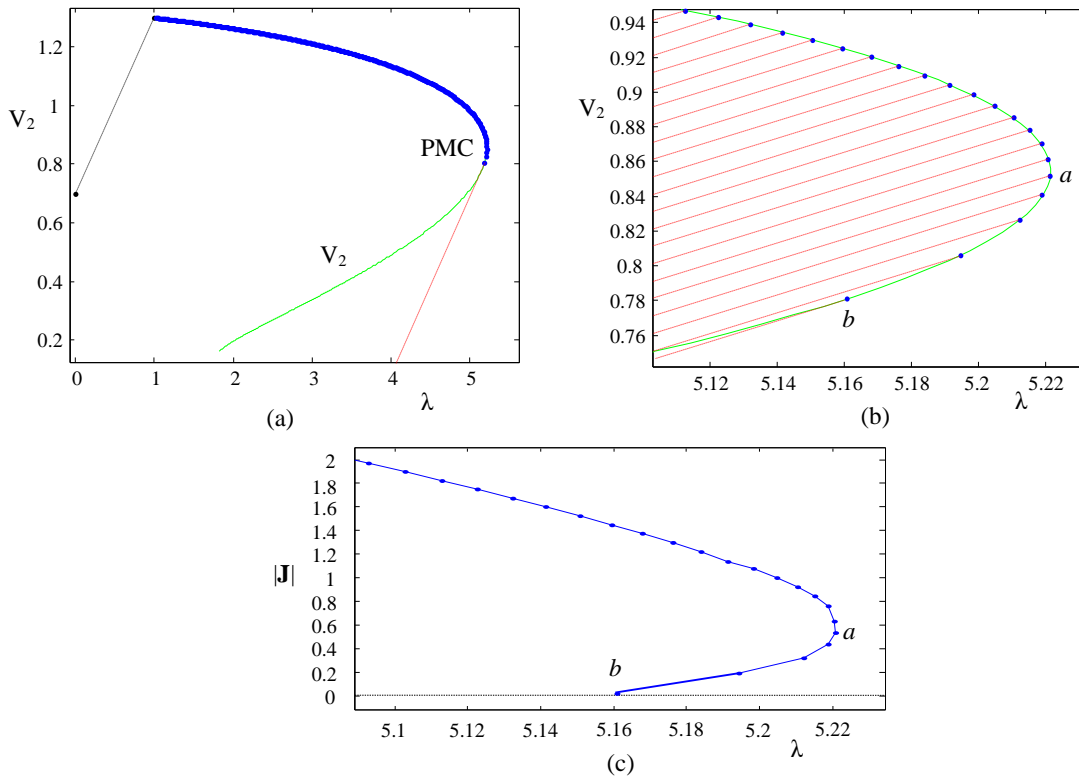


Figura 4: (a) Desempenho do método com  $\alpha = 0,599$ , (b) região do PMC ampliada, (c) gráfico dos determinantes de  $\mathbf{J}$ ,  $|\mathbf{J}|$ .

Tabela 3: Valores do fator de carregamento  $\lambda$  e  $|\mathbf{J}|$  para a barra 2.

	$\lambda$	$ \mathbf{J} $
	5,2204	0,6313
<i>a</i>	5,2209	0,5361
	5,2187	0,4346
	5,2120	0,3226
	5,1944	0,1898
<i>b</i>	5,1602	0,0083

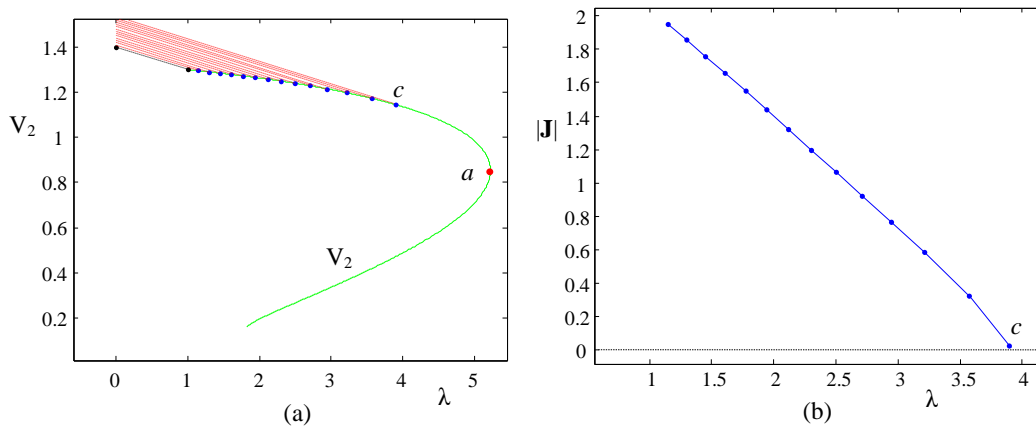


Figura 5: (a) Desempenho do método com  $\alpha = -0,1001$ , (b) gráfico dos determinantes de  $\mathbf{J}$  em função de  $\lambda$ .

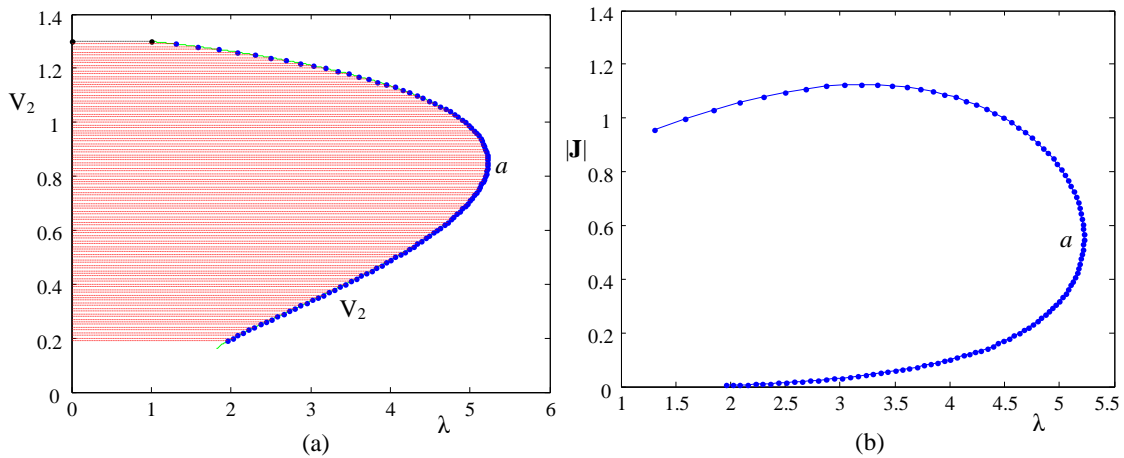


Figura 6: (a) Desempenho do método com  $\alpha = 0,0$ , (b) gráfico dos determinantes de  $\mathbf{J}$  em função de  $\lambda$ .

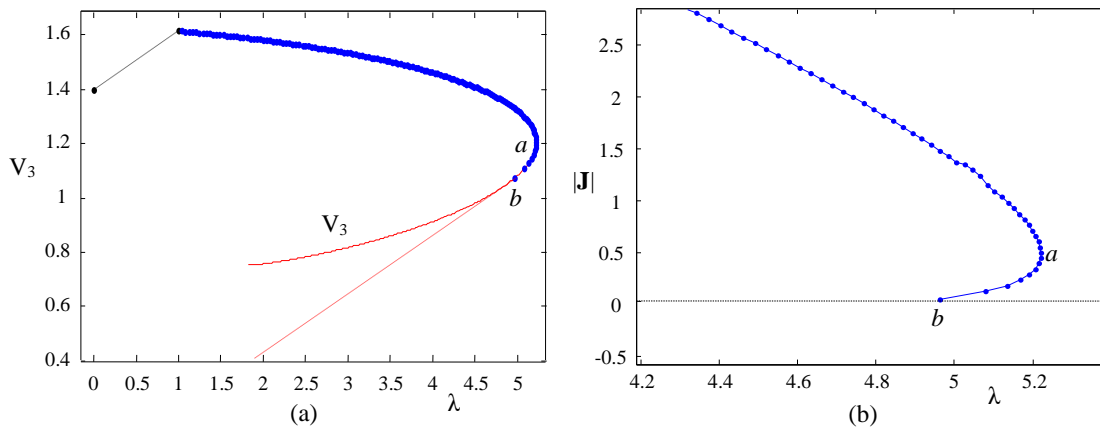


Tabela 4: Valores do fator de carregamento  $\lambda$  e  $|\mathbf{J}|$  para a barra 3.

	$\lambda$	$ \mathbf{J} $
$a$	5,2210	0,5014
	5,2199	0,4488
	5,2153	0,3963
	5,2062	0,3438
	5,1914	0,2909
	5,1687	0,2375
	5,1341	0,1830
	5,0788	0,1261
$b$	4,9634	0,0179

## Conclusões

Neste trabalho foi apresentado estudos de singularidade para o FCC em um sistema de três barras. Foi possível verificar que dependendo da posição da reta (do valor do coeficiente angular da reta), a singularidade da matriz Jacobiana pode ser removida, ou seja, com uma simples mudança na inclinação da reta foi possível resolver problemas que em torno de 15 anos atrás era considerado um grande desafio em estudos de fluxo de carga continuado.



## Agradecimentos

Os autores agradecem a Faculdade de Ciências e Engenharia – FCE – UNESP pelo apoio.

## Referências

ABBOTT, M. The Electricity Journal. **Electricity reform and gains from the reallocation of resources**, Atlanta, v. 20, 72-78, 2007.

AJJARAPU V. and CHRISTY C. IEEE Trans. on Power Systems. **The Continuation Power Flow: a Tool for Steady State Voltage Stability Analysis.**, v.7, n.1, p. 416-423, 1992.

BONINI NETO, A.; ALVES, D. A. Controle & Automação (Impresso). **Técnica de Parametrização Geométrica para o Fluxo de Carga Continuado Baseado nas Variáveis Tensão Nodal e Fator de Carregamento**, v. 19, p. 350-366, 2008.

BONINI NETO, A.; ALVES, D. A. Controle & Automação (Impresso). **Técnicas de Parametrização Global para o Fluxo de Carga Continuado**, v. 21, p. 323-337, 2010.

BONINI NETO, A.; ALVES, D. A. IET Generation, Transmission & Distribution. **Improved geometric parameterization techniques for continuation power flow**, v. 4, p. 1349-1359, 2010.

BONINI NETO, A.; ALVES, D. A. Revista IEEE América Latina. **Singularities Analysis of the Jacobian Matrix Modified in the Continuation Power Flow: Mathematical Modeling**, v. 14, p. 4750-4756, 2016.

CROW M. **Computational Methods for Electric Power Systems**, CRC Press, 2009.

HAN, F. C.; LI, X. X.; LI, S. H.; YANG, Y. **A New Method for Identifying Bifurcation Points in Steady-State Voltage Stability Analysis**. Power and Energy Engineering Conference (APPEEC), Asia-Pacific, 2011.

MILANO, F. **Power System Modelling and Scripting**. New York: Springer, 2010.

MONTICELLI, A. J. **Fluxo de carga em Redes de Energia Elétrica**, Edgard Blucher, São Paulo, 1983.

ONS - OPERADOR NACIONAL DO SISTEMA. **Plano Anual da Operação Energética – PEN 2011: relatório executivo**. Rio de Janeiro, 2012. Disponível em: <[www.ons.com.br](http://www.ons.com.br)>. Acesso em: 29 de setembro de 2015.

ROSEHART, W.; ROMAN, C. **Static Stability Optimization with Complementarity Models**, Bulk Power System Dynamics and Control - VI, Cortina d'Ampezzo, Italy, August 22-27, 2004.

## Extensão de modelo hidrodinâmico incluindo condições de fronteira não homogêneas para a pressão

*Alfredo Jaramillo Palma*  
Universidade de São Paulo; ICMC  
ajaramil@icmc.usp.br

*Gustavo Buscaglia*  
Universidade de São Paulo; ICMC  
gustavo.buscaglia@icmc.usp.br

**Resumo:** A diminuição da perda de energia num motor de combustão tem sido fonte de interesse para vários trabalhos publicados durante a última década. A equação de Reynolds, que é uma aproximação das equações de Navier-Stokes, é usada junto com um modelo de cavitação na determinação do comportamento dinâmico-tribológico dos anéis. A conservação da massa tem sido provada como sendo uma propriedade essencial neste tipo de estudos. Neste sentido, o modelo de Elrod-Adams representa o estado da arte na modelação da cavitação. Embora isto, este modelo não admite condições de fronteira não-homogêneas para a pressão. Condições não-homogêneas para a pressão hidrodinâmica podem se encontrar em distintos mecanismos tribológicos, entre eles, os anéis de pistão num motor de combustão. Focado no regime de lubrificação hidrodinâmica, este trabalho procura estender o modelo de cavitação de Elrod-Adams para acomodar tais condições não-homogêneas. Para isto, um modelo discreto é proposto e um algoritmo numérico encontrado na literatura é adaptado para o modelo estendido. Os primeiros resultados mostram que a acomodação correta da condição de fronteira para a pressão hidrodinâmica pode ter um impacto importante na predição da dinâmica dos anéis de um pistão e, portanto, nas suas características tribológicas.

**Palavras-chave:** Lubrificação Hidrodinâmica. Pressão da câmara de combustão. Tribologia. Mecânica dos Fluidos e Aplicações.

### Introdução

O sistema Anel-Cilindro (ver Figura 1) é um mecanismo tribológico de interesse industrial e acadêmico. Números trabalhos têm sido publicados nos últimos 20 anos estudando a resposta tribológica (e.g., atrito e mínima distância entre as superfícies) deste sistema quando variando a geometria das superfícies e propriedades dos materiais envolvidos.

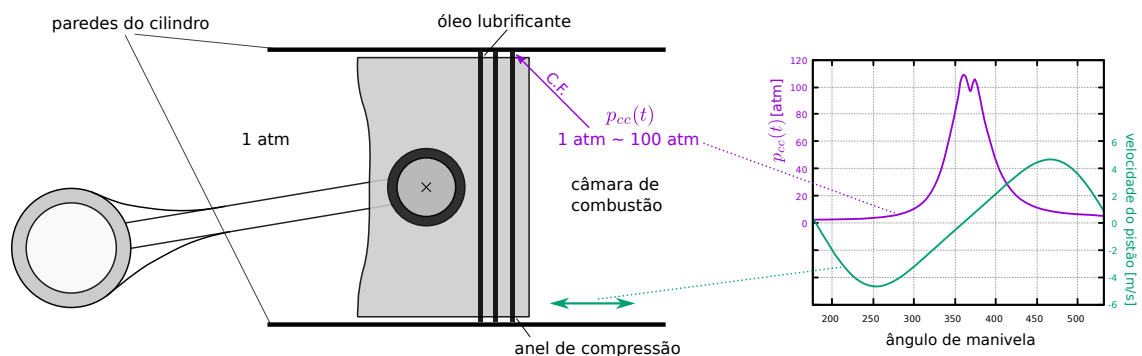


Figura 1: Esquerda: Esquema do sistema Pistão-anel. Direita: Velocidade do pistão e pressão da câmara de combustão em função do ângulo da manivela.

Vários fatores devem ser considerados na modelação do sistema Anel-Cilindro. Forças envolvidas, texturização das superfícies, rugosidade das superfícies, e condições de fronteira para pressão e para o fluxo de lubrificante são exemplos desses fatores, fazendo desta modelação um problema desafiante. Por exemplo, durante a etapa de compressão, a pressão da câmara de combustão atinge valores na ordem de 100 atm, o que pode ter importantes consequências na dinâmica dos anéis. Por outro lado, regiões divergentes do espaço entre as superfícies e movimento de *squeeze* produzem tensões de stress que podem gerar uma ruptura local do filme lubrificante, isto constitui um fenômeno não linear conhecido como *cavitação*. Várias regiões cavitadas podem aparecer quando considerando texturização das superfícies ou rugosidades (Brenner, 1995). Nesse caso, Ausas (2007) mostrou que o uso de um modelo conservativo é essencial para a obtenção de resultados precisos.

Estudos experimentais e numéricos mostram que a texturização das superfícies (e as rugosidades) podem ter um efeito positivo ou negativo sobre a perda de energia em mecanismos tribológicos. Estes estudos baseiam-se principalmente na análise do atrito quando variando parâmetros geométricos que definem as texturas e quando variando o número de Stribeck (*velocidade*  $\times$  *viscosidade* / *força aplicada*), e.g., Etsion (2005), Tomanik (2008), Dobrica (2010), Gadeschi (2012), Kovalchenko (2014), Checo (2014).

No caso do sistema Anel-Cilindro, a maioria dos trabalhos numéricos publicados não levam em conta os efeitos que a variação da pressão da câmara de combustão pode ter no comportamento tribológico do sistema. E os poucos trabalhos que consideram este efeito usam um modelo não conservativo. Este trabalho apresenta os primeiros passos para a obtenção de um modelo de cavitação que permita assumir condições de fronteira para a pressão que sejam não homogêneas e dependentes do tempo.

## Modelação matemática

Um esquema unidimensional se apresenta na Figura 2. No caso 2-dimensional, o domínio computacional é definido como  $\Omega = [0, L] \times [0, W]$ , onde  $L$  corresponde ao comprimento do anel no eixo  $x_1$  e  $W$  corresponde ao comprimento do anel no eixo  $x_2$ . Definimos também as bordas  $\Gamma_e = \{(0, x_2) : x_2 \in [0, W]\}$  e  $\Gamma_d = \{(1, x_2) : x_2 \in [0, W]\}$ . Consideramos a posição do anel no eixo  $x_1$  fixa no tempo e assumimos que a parede do cilindro possui um movimento no eixo  $x_1$  de velocidade constante denotada por  $U > 0$ . Entre estas superfícies um filme de óleo lubrificante desenvolverá um comportamento hidrodinâmico, sendo as incógnitas:  $p(x_1, x_2, t)$ , a pressão hidrodinâmica, e  $\theta(x_1, x_2, t)$ , a variável de saturação que pode ser interpretada como a fração de fluido ocupando o espaço entre as superfícies localmente ( $\theta = 1$  corresponde a um filme completo e  $\theta < 1$  corresponde a um filme parcial devido à

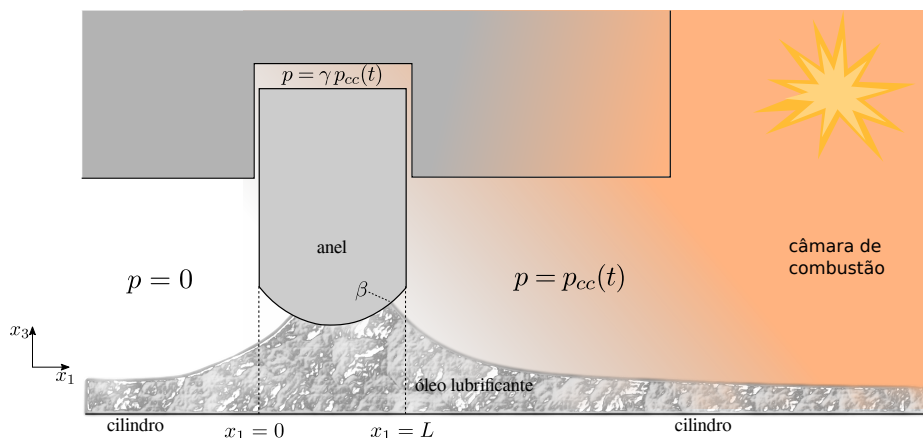


Figura 2: Esquema do unidimensional do sistema Pistão-anel.

presença de gás/vapor).

O modelo de Elrod-Adams inclui numa única formulação a equação de Reynolds e as condições de fronteira de Jacobson-Floberg-Olsson, que estabelecem condições para a delimitação das regiões cavitadas. Junto com condições complementares, o modelo de Elrod-Adams pode-se escrever:

$$\operatorname{div} \left( \frac{h^3}{12\mu} \nabla p - \frac{U}{2} h \theta \hat{e}_1 \right) = \frac{\partial h \theta}{\partial t}, \quad \text{on } \Omega, \quad (1)$$

$$p \geq p_{cav}, 0 \leq \theta \leq 1, \quad \text{on } \Omega, \quad (2)$$

$$(p - p_{cav})(1 - \theta) = 0, \quad \text{on } \Omega, \quad (3)$$

$$p(0, x_2, t) = p_{cav}(0, x_2, t), \quad \text{on } \Gamma_\ell, \quad (4)$$

$$p(L, x_2, t) = p_{cav}(L, x_2, t), \quad \text{on } \Gamma_r, \quad (5)$$

$$h(x_1, x_2, t) \theta(x_1, x_2, t) = h_e, \quad \text{on } \Gamma_\ell, \quad (6)$$

onde  $h$  é a distância entre as superfícies,  $\mu$  denota a viscosidade do fluido,  $\hat{e}_1$  é um vetor unitário orientado na direção de movimento e  $h_e$  denota a altura de lubrificante entrando no domínio. A função de fluxo se escreve neste caso como

$$J(x_1, x_2) = -\frac{h^3}{12\mu} \nabla p + \frac{U}{2} h \theta \hat{e}_1, \quad (7)$$

onde o primeiro termo corresponde ao fluxo de Poiseuille e o segundo ao fluxo de Couette. No caso do modelo de Elrod-Adams, a pressão de cavitação é constante e pode-se escrever como  $p_{cav} \equiv 0$  em  $\Omega$ .

No caso estendido, a pressão de cavitação é modelada por um operador  $T$  tal que

$$\begin{aligned} T : L^\infty(\Omega) &\mapsto L^\infty(\Omega) \\ \theta &\mapsto p_{cav} = T(\theta). \end{aligned}$$

Definimos  $\Lambda^t = \{(x_1, x_2) \in \Omega : \theta(x_1, x_2, t) < 1\}$  e denotamos por  $\Lambda_r^t$  a união das componentes conexas de  $\Lambda^t$  tais que  $\Lambda^t \cap \Gamma_r \neq \emptyset$ . Assim, neste trabalho  $T$  é definido como

$$(T\theta)(x_1, x_2) = \begin{cases} p_{cc}(t) & \text{se } (x_1, x_2) \in \Lambda_r^t \\ 0 & \text{se } (x_1, x_2) \notin \Lambda_r^t \end{cases}. \quad (8)$$

Um exemplo da ação do operador  $T$  é mostrado na Figura 3.

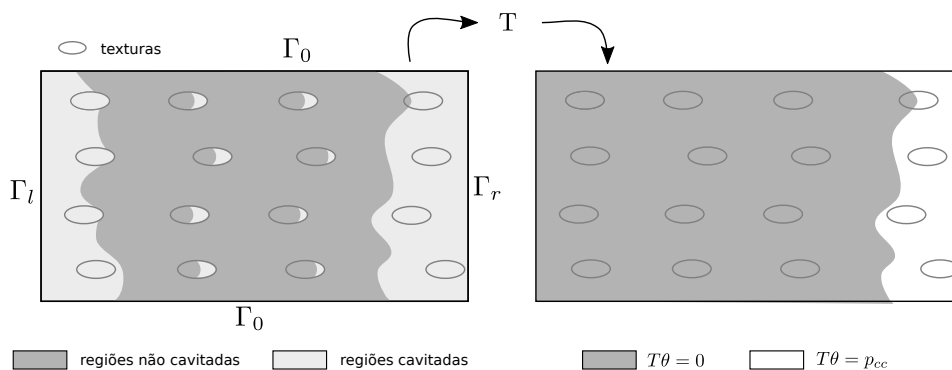


Figura 3: Exemplo da ação do operador  $T$  sobre a função  $\theta$  tal que  $T(\theta)$  modela a pressão de cavitação no domínio  $\Omega$ .

## Discretização

Dividimos  $\Omega$  em  $N_{x_1} \times N_{x_2}$  celas e denotamos por  $I$  o conjunto de celas internas (onde se encontram as incógnitas). Um esquema de volumes finitos é usado para discretizar a Equação (1). Para o anterior, a



componente  $x_1$  do fluxo indo da cela  $(i-1, j)$  à cela  $(i, j)$  é discretizada como

$$-\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{U}{2} h\theta \approx -\frac{1}{12\mu} \frac{(h_{i-1,j}^n)^3 + (h_{i,j}^n)^3}{2} \frac{p_{i,j}^n - p_{i-1,j}^n}{\Delta x_1} + \frac{U}{2} h_{i-1,j}^n \theta_{i-1,j}^n, \quad (9)$$

na qual um esquema *upwind* é usado para o termo de Couette. Após discretizar o tempo através de um esquema implícito e balançar os fluxos obtemos o seguinte sistema de equações (para cada  $(i, j) \in I$ )

$$a_{i,j}^{00} p_{i,j}^n + e_{i,j}^{00} \theta_{i,j}^n = C_{i,j}(\mathbf{p}^n, \boldsymbol{\theta}^n), \quad (10)$$

$$\mathbf{p}_{cav}^n = T(\boldsymbol{\theta}), \quad (11)$$

$$p_{i,j}^n \geq p_{cav,i,j}^n, \quad (12)$$

$$0 \leq \theta_{i,j}^n \leq 1, \quad (13)$$

$$(p_{i,j}^n - p_{cav,i,j}^n)(1 - \theta_{i,j}^n) = 0, \quad (14)$$

no qual

$$C_{i,j}(\mathbf{p}^n, \boldsymbol{\theta}^n) = -a_{i,j}^{-0} p_{i-1,j}^n - a_{i,j}^{+0} p_{i+1,j}^n - a_{i,j}^{0+} p_{i,j+1}^n - a_{i,j}^{0-} p_{i,j-1}^n - e_{i,j}^{-0} \theta_{i-1,j}^n + f_{i,j}^n, \quad (15)$$

e

$$\begin{aligned} a_{i,j}^{00} &= s_{i+1,j}^n + s_{i-1,j}^n + (\Delta x_1 / \Delta x_2)^2 (s_{i,j+1}^n + s_{i,j-1}^n), & e_{i,j}^{00} &= (S\Delta x_1 + 2\Delta t / \Delta x_1) h_{i,j}^n, \\ a_{i,j}^{+0} &= -s_{i+1,j}^n, & a_{i,j}^{-0} &= -s_{i-1,j}^n, \\ a_{i,j}^{0-} &= -(\Delta x_1 / \Delta x_2)^2 s_{i,j-1}^n, & a_{i,j}^{0+} &= -(\Delta x_1 / \Delta x_2)^2 s_{i,j+1}^n, \\ e_{i,j}^{-0} &= -S\Delta x_1 h_{i-1,j}^n, & s_{i\pm 1,j\pm 1}^n &= \frac{1}{6\mu} \left( (h_{i,j}^n)^3 + (h_{i\pm 1,j\pm 1}^n)^3 \right), \\ f_{i,j}^n &= 2\Delta x_1 / \Delta t h_{i,j}^{n-1} \theta_{i,j}^{n-1}. \end{aligned}$$

Os termos  $a_{i,j}^{00}, e_{i,j}^{00}$  são não negativos e os termos  $a_{i,j}^{+0}, a_{i,j}^{-0}, a_{i,j}^{0+}, a_{i,j}^{0-}, e_{i,j}^{-0}$  são não positivos, portanto  $C_{i,j}(\mathbf{p}^n, \boldsymbol{\theta}^n) \geq 0$ . Este tipo de sistemas foi estudado por Alt (1980), ele propôs um algoritmo de tipo ponto-fixa para resolvê-lo no caso  $T \equiv 0$  (correspondente ao modelo de Elrod-Adams). Marini e Pietra (1986) também estudaram este tipo de sistemas, eles mostraram a convergência do algoritmo proposto por Alt (1980) à solução do sistema discreto (10-14) no caso  $T \equiv 0$ .

## Experimentos numéricos

Na Tabela 1 se apresenta uma adaptação do algoritmo proposto por Alt (1980). Nos casos apresentados fixamos  $U = 10$  m/s,  $\mu = 4 \times 10^{-3}$  Pa·s e  $L = 1$  mm.

### Teste 1

Devido à diferença de pressão entre ambos lados do anel (ver Figura 2), o material presente na câmara de combustão pode escapar pelo espaço entre o anel e o cilindro (também pelo espaço entre o anel e o pistão), este é um efeito não desejado chamado de *blow-by* (Wang, 2013). Neste teste, tentamos achar uma condição limite para o *blow-by* se produzir. Para isto, estabelecemos um caso unidimensional em que a geometria do anel está determinada pela expressão

$$h_{anel}(x_1) = \frac{(x_1 - 0.5 \times 10^{-3} [m])^2}{2R}, \quad (16)$$

na qual  $R$  corresponde à curvatura do anel. A parede do cilindro é suposta como sendo plana, assim, a distância entre as superfícies (que supomos não dependente do tempo) pode-se escrever

$$h(x_1) = h_0 + h_{anel}(x_1), \quad (17)$$

na qual  $h_0 = 1 \mu\text{m}$  é a distância mínima entre as superfícies. A pressão da câmara de combustão é assumida constante no tempo  $p_{cc}(t) \equiv p_{cc}$ . Procuramos então uma solução estacionária, para isto, integramos a equação de Reynolds, obtendo,

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 6\mu U \frac{(h-C)}{h^3}, \quad \text{em } [0, \beta], \quad (18)$$

onde  $0 < \beta < L$  denota o ponto de separação do fluido (Figura 2) e  $C$  é uma constante de integração. Impondo continuidade do fluxo de Couette ( $S/2 \cdot h\theta$ ) obtemos a seguinte condição para o gradiente da pressão no ponto  $\beta$ :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x_1} \right|_{x_1=\beta} = 0. \quad (19)$$

Usando esta última equação podemos obter a constante  $C$ . Integrando novamente e usando a condição  $p(0) = 0$  obtemos (junto com a condição para a pressão à esquerda)

$$p(x_1) = 6\mu U \int_0^{x_1} \frac{h(s) - h(\beta)}{h(s)^3} ds, \quad 0 < x_1 \leq \beta \quad (20)$$

$$p(\beta) = p_{cc}, \quad (21)$$

$$p(x_1) = p_{cc}, \quad \beta < x_1 \leq L/2 \quad (22)$$

as primeiras duas equações podem ser resolvidas numericamente para encontrar  $\beta$ . Seguidamente, provamos que este ponto  $\beta$  existe e que ele deve pertencer ao conjunto  $[L/2, \beta_0]$  onde  $\beta_0 : L/2 < \beta_0 < L$  será apropriadamente definido.

Tabela 1: Adaptação do algoritmo estudado proposto por Alt (1980).

<b>Algorithm 1:</b> Algoritmo numérico proposto para resolver o sistema (10)-(14).
<p><b>Input:</b> <math>h; p^0, \theta^0</math> (pressão e saturação iniciais)</p> <p><b>begin</b></p> <p style="padding-left: 20px;"><math>k = 1;</math></p> <p style="padding-left: 20px;"><math>p^1 = p^0; \theta^1 = \theta^0;</math></p> <p style="padding-left: 20px;"><b>while</b> <math>change &gt; tol</math> <b>do</b></p> <p style="padding-left: 40px;">calcular <math>p_{cav}^k = T(\theta^k);</math></p> <p style="padding-left: 40px;"><b>for</b> <math>i = 1 \dots N_{x_1}, j = 1 \dots N_{x_2}</math> <b>do</b></p> <p style="padding-left: 60px;"><b>if</b> <math>(C_{i,j} - e_{i,j}^{00}) / a_{i,j}^{00} \geq p_{cav:i,j}^k</math> <b>then</b></p> <p style="padding-left: 80px;"><math>p_{i,j}^k = (C_{i,j} - e_{i,j}^{00}) / a_{i,j}^{00};</math></p> <p style="padding-left: 80px;"><math>\theta_{i,j}^k = 1;</math></p> <p style="padding-left: 60px;"><b>else</b></p> <p style="padding-left: 80px;"><math>\theta_{i,j}^k = (C_{i,j} - a_{i,j}^{00} p_{cav:i,j}^k) / e_{i,j}^{00};</math></p> <p style="padding-left: 80px;"><math>p_{i,j}^k = p_{cav:i,j}^k;</math></p> <p style="padding-left: 60px;"><b>end</b></p> <p style="padding-left: 40px;"><b>end</b></p> <p style="padding-left: 40px;">atualizar <math>a</math> e <math>e;</math></p> <p style="padding-left: 20px;"><b>end</b></p> <p style="padding-left: 20px;">calcular <math>change = \ p^k - p^{k-1}\  + \ \theta^k - \theta^{k-1}\ ;</math></p> <p style="padding-left: 20px;"><math>p^{k+1} = p^k; \theta^{k+1} = \theta^k;</math></p> <p style="padding-left: 20px;"><math>k = k + 1;</math></p> <p style="padding-left: 20px;"><b>end</b></p> <p style="padding-left: 20px;">retornar <math>p^{k+1}, \theta^{k+1}, p_{cav}^{k+1} \equiv T(\theta^{k+1});</math></p> <p><b>end</b></p>

### Proposição

Existe um conjunto maximal de pressões não negativas  $[0, p^*]$  e uma função injetiva decrescente  $\gamma: [0, p^*] \rightarrow [0, L]$  tal que, para cada  $p_{cc} \in [0, p^*]$ , a função  $p$  definida em (20) satisfaz (19) e (21) com  $\beta = \gamma(p_{cc})$ . Adicionalmente, se tem

$$p^* = 6\mu U \int_0^{L/2} \frac{h(s) - h(L/2)}{h(s)^3} ds.$$

**Prova:** É claro que a função  $p$  satisfaz (19). Agora, seja a função  $f(\lambda) = 6U\mu \int_0^\lambda \frac{h(s) - h(L/2)}{h(s)^3} ds$  com  $\lambda \in [0, L]$ . Temos que  $f$  é contínua,  $f(L/2) > 0$  e  $f(L) < 0$ , o que prova a existência de  $\beta_0 \in ]L/2, L[$  tal que  $f(\beta_0) = 0$ , definimos então  $\gamma(0) = \beta_0$ . Definimos agora a função  $g: [0, \beta_0 - L/2] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(\lambda) = 6U\mu \int_0^{\beta_0 - \lambda} \frac{h(s) - h(\beta_0 - \lambda)}{h(s)^3} ds$ . Temos então

$$\frac{dg}{d\lambda} = K \int_0^{\beta_0 - \lambda} \frac{h(s) - \frac{\partial h}{\partial \lambda}(\beta_0 - \lambda)}{h^3(s)} ds - \frac{h(\beta_0 - \lambda) - h(\beta_0 - \lambda)}{h^3(\beta_0 - \lambda)} = K \int_0^{\beta_0 - \lambda} \frac{h(s) + \frac{\partial h}{\partial x_1}(\beta_0 - \lambda)}{h^3(s)} ds > 0,$$

na qual usamos a regra de Leibniz e o fato de que  $h'(x_1) > 0$  em  $]L/2, L[$ . Temos então que  $g$  é contínua e estritamente crescente no intervalo  $[0, \beta_0 - L/2]$ . Portanto, para todo  $p_{cc} \in [0, g(\beta_0 - L/2)]$  existe um único ponto  $\gamma(p_{cc}) = \beta_0 - g^{-1}(p_{cc})$  tal que a condição (21) é satisfeita pela função  $p$  definida em (20) com  $\beta = \gamma(p_{cc})$ . Denotamos  $p^* = g(\beta_0 - L/2)$ . Para provar que o conjunto  $[0, p^*]$  é maximal suponhamos possível que um ponto  $\beta^* \in [0, L/2[$  seja ponto de separação e cumpra a condição (19). Então, a função de fluxo em  $\beta^*$  se escreve  $J(\beta^*) = \frac{\partial p}{\partial x_1}(\beta^*) + S/2h(\beta^*)\theta(\beta^*) = S/2h(\beta^*)$ . Adicionalmente, dado que  $\beta^* < L/2$ , temos  $J(L/2) = S/2h(L/2)\theta(L/2) \leq S/2h(L/2) < S/2h(\beta^*)$ , o que é absurdo.  $\square$

Temos então que  $p^*$  é um valor crítico, isto é, não existe solução para o modelo estendido para valores de  $p_{cc} > p^*$ . Como exemplo do anterior, na Figura 4 se apresentam perfis de pressão obtidos fixando  $h_0 = 1 \mu\text{m}$  e  $R = 64 \text{ mm}$ . Numericamente, observou-se convergência das soluções obtidas com o algoritmo da Tabela 1, além disso, não se observa convergência para valores de  $p_{cc}$  maiores a  $p^* = 117 \text{ atm}$ .

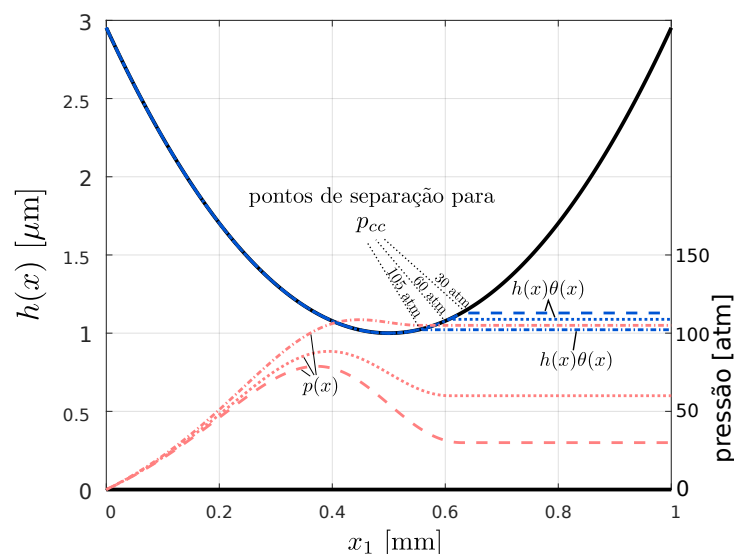


Figura 4: Perfis de pressão exatos do modelo estendido para  $p_{cc} = 30, 60$  e  $105 \text{ atm}$ . Neste caso  $p^* = 117 \text{ atm}$ .

## Teste 2

Neste teste é resolvido um problema dinâmico para o qual a distância entre as superfícies se escreve

$$h(x_1, t) = Z(t) + h_{anel}(x_1), \quad (23)$$

na qual  $Z(t)$  é a distância mínima entre as superfícies e  $h_{anel}$  está definida em (16). As forças atuando sobre o anel ao longo do eixo  $x_3$  são:  $\mathbf{W}^{ps}$ , a resposta elástica do anel (aqui assumida como 40 N/m);  $\mathbf{W}^{sp}$ , a força devida à pressão entre o anel e o pistão, aqui modelada por  $W^{sp}(t) = -0.9 p_{cc}(t)$ ;  $\mathbf{W}^h$ : a força devida a pressão hidrodinâmica  $p(x_1, x_2, t)$  desenvolvida no filme lubrificante entre o anel e o cilindro, e dada por  $W^h = \int_{\{\theta=1\}} p dx_1$ ;  $\mathbf{W}^m$ : a força devida à pressão mecânica entre o anel e o cilindro, dada pela expressão  $W^m = \int_{\{\theta < 1\}} p dx_1$ .

Ao longo do eixo  $x_1$  a força de atrito por unidade de largura pode ser computada pela expressão

$$F(t) = - \int_0^L \left( \frac{\mu U}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x_1} - p \frac{\partial h}{\partial x_1} \right) dx_1 \quad (24)$$

na qual o primeiro termo da integral corresponde ao termo de Couette, o segundo ao termo de Poiseuille e o último a uma projeção da pressão. Neste exemplo a pressão da câmara de combustão é modelada pela expressão  $p_{cc}(t) = 50 \cdot \exp\left(-1.3 \times 10^5 [s^{-2}] \cdot (t - 15 \times 10^{-3} [s])^2\right)$ , que representa um pulso Gausseano de 50 atm de amplitude.

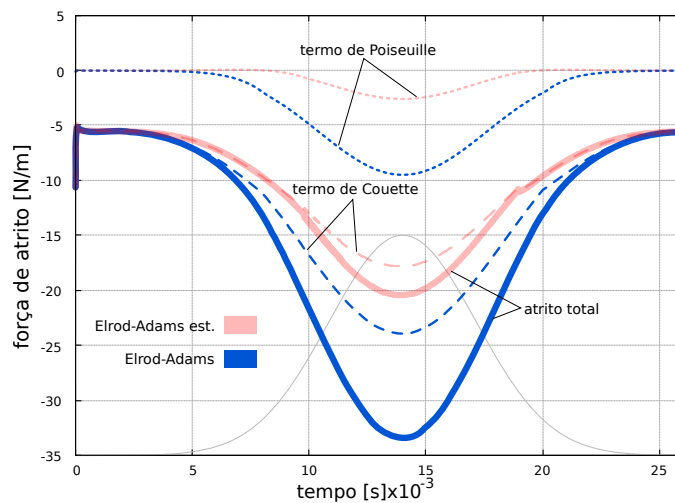


Figura 5: Força de atrito transitória em resposta a uma explosão modelada por um pulso Gausseano e 50 atm de amplitude. Em azul se apresenta a resposta do sistema quando considerando o modelo de Elrod-Adams, em vermelho quando considerando o modelo estendido.

Na Figura 5 se apresentam os resultados obtidos para ambos os modelos de Elrod-Adams (que só considera  $p_{cc}$  na força  $W^{sp}$ ) e os resultados do modelo estendido. A energia perdida predita pelo modelo estendido é aproximadamente 30% menor do que a predita pelo modelo de Elrod-Adams.

## Conclusões

A extensão do modelo de Elrod-Adams proposta tenta incluir as condições de borda apropriadas para a pressão. O modelo estendido prediz um valor crítico para a pressão da câmara de combustão, tendo-se uma primeira predição de valores de  $p_{cc}$  que poderiam produzir *blow-by* numa situação estacionária.



Adicionalmente, esta extensão é provada como sendo importante na precisão do cômputo da força de atrito, encontrado-se uma diferença de 30% entre a perda de energia predita pelo modelo que considera a condição de borda correta ( $p_{cc}$ ) e o modelo que considera uma condição de borda homogênea nula. O anterior mostra a importância do presente estudo na melhora da modelação da dinâmica do sistema Anel-Pistão.

## Agradecimentos

Os autores agradecem o financiamento de CAPES (processo PROEX-8434433/D) e CNPq (processo 447904/2011-0).

## Referências

- ALT, H., Numer. Math. **Numerical solution of steady-state porous flow free boundary problems**, v. 36, n. 6, p. 73-98, 1980.
- AUSAS, R.; RAGOT P.; LEIVA, J.; JAI, M.; BAYADA, G.; BUSCAGLIA, G. ASME J. Tribol. **The impact of the Cavitation model in the Analysis of Micro-Textured Lubricated Journal Bearing**, v. 129, n. 4, p. 868-875, 2007.
- BRENNER, C. **Cavitation and Bubble Dynamics**. Oxford University Press. 1995.
- CHECO, H.; AUSAS, R.; JAI, M.; CADALEN, J.; CHOUKROUN, F.; BUSCAGLIA, G. Tribol. Int. **Moving textures: simulation of a ring sliding on a textured liner**, v. 72, p. 131-142, 2014.
- DOBRICA, M.; FILLON, M.; PASCOVICI, M.; CICONE, T. Proc. Inst. Mech. Eng. Part J, J. Eng. Tribol. **Optimizing surface texture for hydrodynamic lubricated contacts using a mass-conserving numerical approach**, v. 224, n. 8, p. 737-750, 2010.
- ETSION, I. State of the art in laser surface texturing, In: LUO J.; MENG Y.; SHAO T.; ZHAO Q. (Edit.). **Advanced Tribology**. Berlin; Heidelberg: Springer. 2009. p. 761-762.
- GADESCHI, G.; BACKHUAS, K.; KNOLL, G. ASME J. Tribol. **Numerical analysis of laser-textured piston-rings in the hydrodynamic lubrication regime**, v. 134, n. 4, p. 1-8, 2012.
- KOVALCHENKO, A.; AJAYI, O.; ERDEMIR, A.; FENSKE, G.; ETSION, I. Tribology Transactions. **The effect of laser texturing of steel surfaces and speed-load parameters on the transition of lubricated regime from boundary to hydrodynamic**, v. 47, n. 2, p. 299-307, 2004.
- MARINI, L.; PIETRA, P. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **Fixed-point algorithms for stationary flow porous media**, v. 56, n. 1, p. 17-45, 1986.
- MORRIS, N.; LEIGHTON, M.; DE LA CRUZ, M.; RAHMANI, R.; RAHNEJAT, H.; HOWELL-SMITH, S. Proc. Inst. Mech. Eng. Part J, J. Eng. Tribol. **Combined numerical and experimental investigation of the micro-hydrodynamics of chevron-based textured patterns influencing conjunctive friction of sliding contacts.**, v. 229, n. 4, p. 316-335, 2014.
- MORRIS, N., RAHMANI, R., RAHNEJAT, H., KING, P., HOWELL-SMITH, S. J. Tribol. **A numerical model to study the role of surface textures at top dead center reversal in the piston ring to cylinder liner contact.**, v. 138, n. 2, 2015.
- TOMANIK, E. Tribol. Int. **Friction and wear bench test of different engine liner surface finishes**, v. 41, n. 11, p. 1032-1038, 2008.
- WANG Q.; CHUNG Y. **Encyclopedia of Tribology**. Springer, 2013.



## Funções Completamente Monótonas no Cálculo Fracionário

*Ester Cristina Fontes de Aquino Rosa*  
Unicamp; IMECC  
ra991706@ime.unicamp.br

*Edmundo Capelas de Oliveira*  
Unicamp; IMECC  
capelas@ime.unicamp.br

**Resumo:** Considerando as equações diferenciais de relaxação cinéticas associadas, respectivamente, aos modelos de Debye, Cole-Cole, Cole-Davidson e Havriliak-Negami, introduzimos nelas um operador diferencial fracionário em termos da derivada de Riemann-Liouville de ordem  $\gamma$ , onde  $0 < \gamma \leq 1$ . Obtemos, com isso, novas equações cinéticas, agora, diferenciais fracionárias. Essas equações têm como soluções as funções de relaxação cinéticas fracionárias, dadas em termos das funções de Mittag-Leffler e que generalizam as funções soluções das equações cinéticas, onde  $\gamma = 1$ , as quais chamamos funções de relaxação cinéticas.

Sendo assim, nosso objetivo é estudar a completa monotonicidade das funções de relaxação cinéticas e, a partir daí, investigar o comportamento das funções de relaxação cinéticas fracionárias na variável tempo.

**Palavras-chave:** Cálculo Fracionário e Aplicações. Modelos de Relaxação. Funções Completamente Monótonas. Funções de Relaxação Fracionárias.

### Introdução

O cálculo fracionário vem sendo desenvolvido nos últimos anos no meio científico e se firmando como uma generalização do clássico cálculo diferencial e integral (OLIVEIRA; CAMARGO, 2015). Nas últimas três décadas a investigação nesse ramo se intensificou encontrando aplicações em vários ramos da ciência como na física, na matemática, na química, nos sistemas de finanças, na economia e na engenharia (MACHADO et. al, 2010). Para exemplificar mencionamos as seguintes aplicações: no controle fracionário de sistemas de engenharia; no avanço de cálculo das variações e controle ótimo para sistemas dinâmicos fracionários; em ferramentas e técnicas analíticas e numéricas; nas explorações fundamentais das relações constitutivas mecânicas, elétricas e térmicas e outras propriedades de diversos materiais de engenharia, tais como polímeros visco-elásticos, espumas, géis, e tecidos de origem animal; em compressão fundamental da onda e fenômenos de difusão, suas medições e verificações; na bioengenharia e aplicações biomédicas; na modelagem térmica de sistemas de engenharia, tais como freios e máquinas-ferramentas e, por fim, em imagem e processamento de sinal (MAINARDI, 2010).

A abordagem matemática do processo de relaxação em dielétricos vem sendo investigada com o uso das ferramentas do cálculo fracionário (OLIVEIRA et al., 2014).

As propriedades dos materiais dielétricos são usualmente representadas pelas funções empíricas de susceptibilidade conforme modeladas, primeiramente, por Debye (D) em 1929, depois pelos irmãos Cole (C-C) e, posteriormente, nos trabalhos de Cole-Davidson (C-D) e Havriliak-Negami (H-N).

Baseado no conceito de memória desenvolvido no formalismo de Mori-Zwanzig é possível derivar as equações cinéticas para as funções relaxação associadas à essas funções empíricas (KHAMZIN et al., 2014). Essas equações obtidas são dadas em termos da derivada fracionária de Riemann-Liouville e das funções de Mittag-Leffler. Essas últimas aparecem, ainda, como representativas nas soluções dessas equações cinéticas.

Nesse trabalho consideramos as equações cinéticas fracionárias com um parâmetro de derivação  $\gamma$  onde  $0 < \gamma \leq 1$  como sendo uma generalização das equações cinéticas associadas aos processos de relaxação em dielétricos. Nesse caso, as equações cinéticas representam casos particulares das equações fracionárias no caso em que  $\gamma = 1$ .

Um outro aspecto bastante explorado na bibliografia é a completa monotonicidade de funções. A completa monotonicidade de algumas funções foi tópico de estudo desenvolvido entre 1920 e 1930 por S. Bernstein (BERNSTEIN, 1929), F. Hausdorff (HAUSDORFF, 1921) e V. Widder (WIDDER, 1931), ao que eles chamavam de problema de momento. Funções completamente monótonas são funções não-negativas com derivadas de todas as ordens também não-negativas. Widder apresenta um relato detalhado sobre as propriedades das funções completamente monótonas e suas caracterizações (WIDDER, 1941), enquanto Feller discute a completa monotonicidade



das funções através de sua relação com medidas infinitamente divisíveis (FELLER, 1970).

Assim, as funções completamente monótonas têm aplicações notáveis em diferentes ramos da ciência. Por exemplo, elas desempenham um importante papel na teoria do potencial, na teoria da probabilidade, na física, em análises numérica e assintótica e em combinatória (DEBNATH, 2003).

Na literatura encontramos alguns textos onde se discute a completa monotonicidade das funções de Mittag-Leffler (MAINARDI; GARRAPA, 2015), advindas do cálculo fracionário (MACHADO et al., 2011).

Nesse contexto, investigamos nesse trabalho, a completa monotonicidade das soluções dessas equações cinéticas e cinéticas fracionárias, usando, como ferramenta teórica, o teorema de Bernstein, a fórmula de Titchmarsh e, também, análises gráficas das mesmas, bem como de suas respectivas distribuições espectrais.

## Preliminares Teóricas

Com o último objetivo exposto, ou seja, discutir a completa monotonicidade das soluções das equações cinéticas e cinéticas fracionárias, apresentamos, nessa seção, as definições, os teoremas e as fórmulas nos quais se embasam a análise da completa monotonicidade de funções, a destacar, o teorema de Bernstein, que estabelece condições acerca do sinal da função distribuição espectral associada à função a ser estudada e, com isso, reduz o problema a uma desigualdade.

**Definição 0.1** Dizemos que uma função  $f(t)$ , com  $t$  um número real não-negativo, é completamente monótona (CM) se possui derivadas  $f^{(n)}(t)$  para todo  $n = 0, 1, 2, \dots$  e se suas derivadas alternam o sinal, isto é,

$$(-1)^n f^{(n)}(t) \geq 0, \quad t > 0. \quad (1)$$

O limite  $f^{(n)}(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(n)}(t)$ , sendo finito ou infinito, existe.

O teorema a seguir desempenha um papel fundamental no estudo da completa monotonicidade das funções na medida em que se constitui ferramenta poderosa na demonstração da monotonicidade de muitas delas, em particular aquelas que envolvem as funções de Mittag-Leffler (SCHNEIDER, 1996).

**Teorema 0.2** Uma função  $f(t)$  é CM se, e somente se, ela pode ser representada como a transformada de Laplace (TL) de uma função não negativa (generalizada), ou seja,

$$f(t) = \int_0^\infty e^{-rt} K(r) dr, \quad K(r) \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

onde  $K(r)$  é chamada de função distribuição espectral.

A fórmula da inversão de Titchmarsh (TITCHMARSH, 1948), junto com o teorema de Bernstein, fornece um recurso matemático apropriado e necessário para estudar a completa monotonicidade de diversos tipos de funções. Essa fórmula estabelece a seguinte relação:

$$K(r) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \{h(s)\}_{s=r \exp(i\pi)}, \quad (3)$$

onde  $h(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$  e, pela Equação (2), a função  $f(t)$  é dada por  $f(t) = \mathcal{L}[K(r)](t)$ .

Com as relações dadas por essas equações, tornou-se possível provar a completa monotonicidade de várias funções, entre elas, as funções definidas em termos das funções de Mittag-Leffler, as quais emergem como soluções, ou envolvida nas soluções, de equações diferenciais fracionárias (OLIVEIRA et al., 2014).

Assim, por exemplo, considerando a função definida por:

$$\rho(t) = E_{\alpha,1}^\lambda(-t^\alpha), \quad \text{com } t \geq 0, \quad (4)$$

com  $\text{Re}(\alpha) > 0$  e  $\text{Re}(\lambda) > 0$ .

Podemos fazer uma primeira investigação sobre sua completa monotonicidade através da sua função distribuição espectral.

Com isso, usando a relação dada na Equação (3) obtemos:

$$K_{\alpha,1}^\lambda(r) = \frac{r^{\alpha\lambda-1}}{\pi} \frac{\text{sen}[\theta\lambda + \pi(1-\alpha\lambda)]}{[1 + 2r^\alpha \cos(\alpha\pi) + r^{2\alpha}]^{\lambda/2}}, \quad (5)$$

onde

$$\theta = \arctan \left[ \frac{r^\alpha \sin(\alpha\pi)}{r^\alpha \cos(\alpha\pi) + 1} \right], \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (6)$$

Observando o comportamento gráfico da função distribuição  $K_{\alpha,1}^\lambda(r)$ , com  $r$  fixo, na Figura , podemos concluir que, sendo essa função distribuição não-negativa para  $0 < \alpha \leq 1$  e  $0 < \lambda \leq 1$ , a função  $\rho(t)$  associada a ela, é CM nessa limitação dos parâmetros.

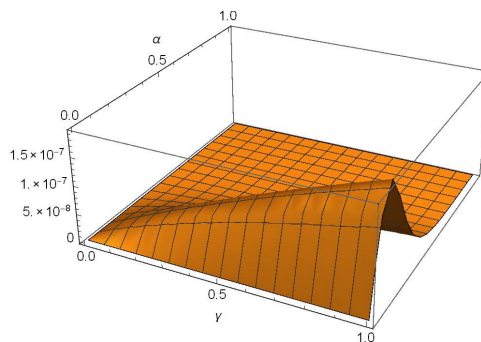


Figura 1: A distribuição espectral da função  $\rho(t)$ .

## As Equações de Relaxação Cinéticas

As leis empíricas clássicas associadas aos modelos de Debye (D), Cole-Cole (C-C), Cole-Davidson (C-D) e Havriliak-Negami (H-N) são dadas, respectivamente, por

$$\tilde{\epsilon}_D(s) = \frac{1}{1 + \sigma s}, \quad (7)$$

$$\tilde{\epsilon}_{CC}(s) = \frac{1}{1 + (\sigma s)^\alpha}, \quad (8)$$

$$\tilde{\epsilon}_{CD}(s) = \frac{1}{(1 + \sigma s)^\beta}, \quad (9)$$

$$\tilde{\epsilon}_{HN}(s) = \frac{1}{(1 + (\sigma s)^\alpha)^\beta}. \quad (10)$$

No estudo do processo de relaxação, concluiu-se que as leis que governam a função correlação dipolar  $\phi(t)$  estão diretamente relacionadas com as propriedades cinéticas e estruturais macroscópicas do nosso sistema dielétrico em questão, representado pela função  $\varphi(t)$  (WILLIAMS, 1972). Então podemos igualar a função relaxação  $\varphi(t)$  e a função correlação dipolar macroscópica  $\phi(t)$  como segue:

$$\varphi(t) \simeq \phi(t) = \frac{\langle \mathcal{M}(t) \mathcal{M}(0) \rangle}{\langle \mathcal{M}(0) \mathcal{M}(0) \rangle}, \quad (11)$$

onde  $\mathcal{M}(t)$  é o momento dipolar macroscópica flutuante.

Essa função correlação dipolar definida acima é um caso particular da função correlação temporal.

Sob a ótica da teoria dos operadores de projeção desenvolvidos, anteriormente, por Mori (MORI, 1965) e Zwanzig (ZWANZIG, 1961) temos a seguinte equação integrodiferencial da função correlação temporal  $\phi(t)$  associada à essa função memória  $\kappa(t)$ , conhecida como *equação da função memória*:

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = - \int_0^t \kappa(x) \phi(t-x) dx, \quad (12)$$

Introduzindo o conceito de função memória integral dada por  $M(t) = \int_0^t \kappa(x)dx$  e usando o fato de a função relaxação  $\varphi(t)$  também satisfazer a Equação (12) obtemos, então, a seguinte relação para a função  $\varphi(t)$ :

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_0^t M(t-x)\varphi(x)dx \equiv -\frac{d}{dt} [M(t) * \varphi(t)], \quad (13)$$

onde \* denota o produto de convolução.

Sabemos que existe, ainda, a seguinte conexão, dada pela TL, entre função relaxação  $\varphi(t)$  e a constante dielétrica  $\tilde{\epsilon}(s)$ :

$$\tilde{\epsilon}(s) = \int_0^\infty \left( -\frac{d\varphi}{dt} \right) e^{-st} dt = \mathcal{L} \left[ -\frac{d\varphi(t)}{dt} \right] (s). \quad (14)$$

Assim, da Equação (13) e Equação (14) e das leis empíricas dadas pelas Equações (7)-(10), obtemos as seguintes equações cinéticas

$$D \quad \frac{d\varphi(t)}{dt} + \frac{1}{\sigma} \varphi(t) = 0, \quad (15)$$

$$C-C \quad \frac{d\varphi(t)}{dt} + \frac{1}{\sigma^\alpha} D_t^{1-\alpha} \varphi(t) = 0, \quad (16)$$

$$C-D \quad \frac{d\varphi(t)}{dt} + \frac{1}{\sigma^\beta} \frac{d}{dt} \left\{ e^{-t/\sigma} \int_0^t (t-x)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}^1 \left[ \left( \frac{t-x}{\sigma} \right)^\beta \right] e^{x/\sigma} \varphi(x) dx \right\} = 0, \quad (17)$$

$$H-N \quad \frac{d}{dt} \left\{ \varphi(t) + \sum_{k=0}^\infty \int_0^t \frac{(t-x)^{\alpha\beta(k+1)-1}}{\sigma^{\alpha\beta(k+1)}} E_{\alpha,\alpha\beta(k+1)}^{\beta(k+1)} \left[ -\left( \frac{t-x}{\sigma} \right)^\alpha \right] \varphi(x) dx \right\} = 0. \quad (18)$$

A notação  $D_t^\gamma f(t)$  é a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville definida como segue:

$$D_t^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(x)}{(t-x)^\gamma} dx, \quad 0 < \gamma \leq 1. \quad (19)$$

Resolvendo a Equação (18) associada ao modelo de H-N através da TL, obtemos a solução:

$$\varphi_{HN}(t) = 1 - \left( \frac{t}{\sigma} \right)^{\alpha\beta} E_{\alpha,\alpha\beta+1}^\beta \left[ -\left( \frac{t}{\sigma} \right)^\alpha \right]. \quad (20)$$

Procedendo, de forma análoga, com as Equações (15)-(17) obtemos as respectivas soluções:

$$D \quad \varphi_D(t) = e^{-t/\sigma}, \quad (21)$$

$$CC \quad \varphi_{CC}(t) = E_\alpha \left[ -\left( \frac{t}{\sigma} \right)^\alpha \right], \quad (22)$$

$$CD \quad \varphi_{CD}(t) = 1 - \left( \frac{t}{\sigma} \right)^\beta E_{1,\beta+1}^\beta \left[ -\frac{t}{\sigma} \right]. \quad (23)$$

É imediato observar que se considerarmos  $\alpha = 1$  na solução dada pela Equação (20) recuperamos a solução dada pela Equação (23). Se, por outro lado, tomarmos  $\beta = 1$  na solução dada pela Equação (20) obtemos a Equação (22).

Ainda, se considerarmos, na Equação (20),  $\alpha = \beta = 1$ , recuperamos a solução dada pela Equação (21).

As representações gráficas das soluções conforme Equação (21), Equação (22) e Equação (23) podem ser vistas nas Figuras 2, 3 e 4, respectivamente.

## As Funções de Relaxação Cinética

Com o fim de facilitar a explanação sobre o estudo da completa monotonicidade dessas funções, consideramos, sem perda de generalidade,  $\sigma = 1$ . Antes de tudo, é importante salientar que os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , emergentes das equações cinéticas, pertencem ao intervalo real  $(0, 1]$ . Começando com a função de Debye dada por  $\varphi_D(t) = e^{-t}$ , conseguimos concluir, diretamente da definição, que essa função é CM.

De fato,

$$(-1)^n D^n [\varphi_D(t)] = (-1)^{2n} e^{-t} = e^{-t} = \varphi_D(t) > 0, \quad t \geq 0. \quad (24)$$

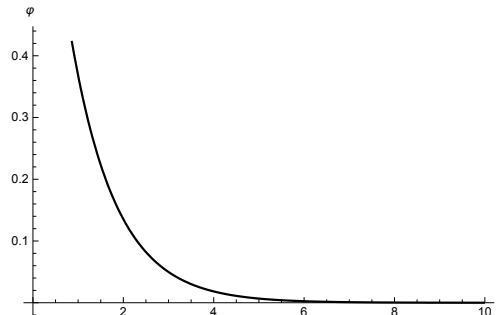


Figura 2: Função de Debye.

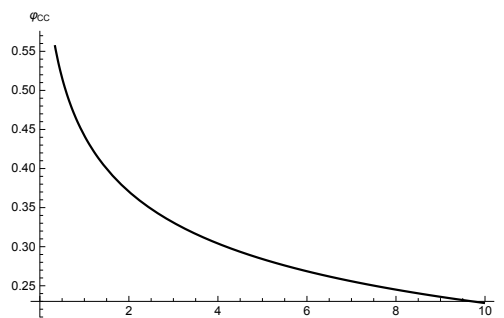


Figura 3: Função de Cole-Cole  $\varphi_{CC}(t) = E_{\alpha}(-t^{\alpha})$  com  $\alpha = 0.4$ .

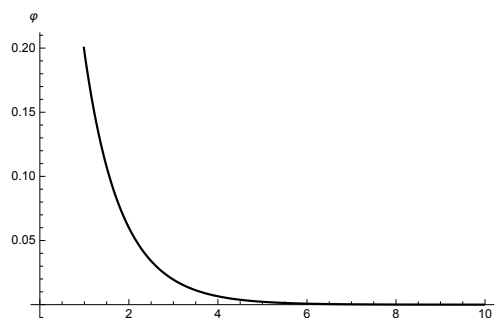


Figura 4: A função de Cole-Davidson  $\varphi_{CD}(t) = 1 - t^{\beta} \times E_{1, \beta+1}^{\beta}(-t)$  para  $\beta = 0.6$ .

Além disso, sua função distribuição espectral, conforme a Equação (2) do Teorema (0.2) é a função delta de Dirac  $\delta(r-1)$ , que é, portanto, positiva.

Consideremos, agora, a função C-C, como vimos, é definida por

$$\varphi_{CC}(t) = E_{\alpha}(-t^{\alpha}), \text{ com } t \geq 0. \quad (25)$$

Nesse caso, a função em questão coincide com o caso da função de Mittag-Leffler com um único parâmetro, a saber,  $\alpha$ . Nesse trabalho, vemos essa função como um caso particular da função dada pela Equação (4), onde  $\lambda = 1$ . Sendo assim, discutimos, na seção anterior, sua completa monotonicidade com a aplicação da fórmula de Titchmarsh. Concluímos que essa função é CM para  $0 < \alpha \leq 1$ .

Consideremos, agora, a função C-D dada como

$$\varphi_{CD}(t) = 1 - t^{\beta} E_{1, \beta+1}^{\beta}(-t), \text{ com } t \geq 0. \quad (26)$$

Essa função envolve uma função de Mittag-Leffler de três parâmetros, os quais estão em função de  $\beta$ . Podemos, portanto, mostrar que ela é CM para  $0 < \beta \leq 1$ .

De fato, seja  $\tilde{\varphi}_{CD}(s) = \mathcal{L}[\varphi_{CD}(t)](s)$ , a TL da função  $\varphi_{CD}(t)$ , a qual é dada por

$$\tilde{\varphi}_{CD}(s) = \frac{1}{s} \left[ 1 - \frac{1}{(s+1)^\beta} \right], \quad (27)$$

temos que sua função distribuição espectral é da forma

$$K_\beta(r) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \{ \tilde{\varphi}_{CD}(s) |_{s=re^{-i\pi}} \} \quad (28)$$

Logo,  $K_\beta(r) = 0$  quando  $r < 1$  e

$$K_\beta(r) = \frac{1}{\pi r} \frac{\text{sen}(\beta\theta)}{(r-1)^{2\beta}}, \quad \text{para } r > 1, \quad (29)$$

com

$$\theta = \arctan \left( \frac{r \text{sen} \pi}{1 + r \cos \pi} \right). \quad (30)$$

Considerando o complexo

$$\rho e^{i\theta} = 1 + r e^{i\pi}, \quad (31)$$

se tomarmos  $\theta = 0$ , obtemos, dessa última equação,  $\rho = 1 - r$ , o que não convém, pois, pela Equação (29),  $r > 1$  e isso tornaria  $\rho$  negativo.

De outro modo, admitindo  $\theta = \pi$  na Equação (31) temos  $\rho = r - 1$ , com  $r > 1$  e, nesse caso, o raio  $\rho$  admite valores positivos.

Logo,

$$K_\beta(r) = \frac{1}{\pi r} \frac{\text{sen}(\beta\pi)}{(r-1)^{2\beta}}. \quad (32)$$

Tomemos, agora, o modelo mais geral de função de relaxação que é a função H-N, a qual é definida na forma

$$\varphi_{HN}(t) = 1 - t^{\alpha\beta} E_{\alpha, \alpha\beta+1}^\beta(-t^\alpha), \quad \text{com } t \geq 0. \quad (33)$$

Podemos aplicar o teorema de Bernstein com o fim de analisar sua completa monotonicidade e, através da análise gráfica, é possível também obter algumas conclusões importantes.

Sendo assim, calculando, pela fórmula dada pela Equação (3), a função distribuição espectral associada à função H-N, obtemos:

$$K_{\alpha, \beta}(r) = \frac{\text{sen}[\beta\vartheta]}{\pi r (1 + 2r^\alpha \cos(\alpha\pi) + r^{2\alpha})^{\beta/2}}, \quad (34)$$

onde  $\vartheta = \vartheta(r, \alpha)$  é dada por

$$\vartheta = \arctan \left( \frac{r^\alpha \text{sen}(\alpha\pi)}{1 + r^\alpha \cos(\alpha\pi)} \right), \quad 0 < \vartheta \leq \pi. \quad (35)$$

Como  $0 < \beta \leq 1$ , então  $0 < \beta\vartheta \leq \pi$ , logo a função distribuição  $K_{\alpha, \beta}$ , associada ao modelo de H-N, será sempre positiva, uma vez que, nesse caso,  $\text{sen}[\beta\vartheta] \geq 0$ . Lembrando que o denominador da função distribuição dada pela Equação (34) é sempre positivo e, portanto, não altera o sinal da função.

## As funções de relaxação cinética fracionárias

No trabalho (ROSA; OLIVEIRA, 2015;) é apresentada uma generalização do modelo de relaxação através da equação diferencial fracionária dada por:

$$D_t^\gamma \varphi(t) = -D_t^\gamma \{M(t) * \varphi(t)\}, \quad \text{com } \gamma \in (0, 1] \quad (36)$$

onde o operador  $D_t^\gamma$  é a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville apresentada na Equação (19).

Impondo, sobre a função de relaxação  $\varphi(t)$ , a normalização

$$D_t^{\gamma-1} \varphi(0) = 1, \quad (37)$$

obtem-se as equações cinéticas fracionárias através das funções memória. As soluções das equações cinéticas fracionárias são as chamadas funções de relaxação cinética fracionárias, cuja monotonicidade vamos discutir. Assim, considerando as equações diferenciais fracionárias dadas por

$$\text{D-F} \quad D_t^\gamma \varphi_{DF}(t) = -D_t^\gamma \{M_D * \varphi_{DF}(t)\} = -D_t^\gamma \left\{ \frac{1}{\sigma} * \varphi_{DF}(t) \right\}, \quad (38)$$

$$\text{C-C-F} \quad D_t^\gamma \varphi_{CCF}(t) = -D_t^\gamma \{M_{CC} * \varphi_{CCF}(t)\} = -D_t^\gamma \left\{ \frac{t^{\alpha-1}}{\sigma^\alpha \Gamma(\alpha)} * \varphi_{CCF}(t) \right\}, \quad (39)$$

$$\text{C-D-F} \quad D_t^\gamma \varphi_{CDF}(t) = -D_t^\gamma \{M_{CD} * \varphi_{CDF}(t)\} = -D_t^\gamma \left\{ \left[ e^{-\frac{t}{\sigma}} \sigma^{-\beta} t^{\beta-1} E_{\beta,\beta} \left[ -\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\beta \right] \right] * \varphi_{CDF}(t) \right\}, \quad (40)$$

$$\text{H-N-F} \quad D_t^\gamma \varphi_{HNF}(t) = -D_t^\gamma \left\{ \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^{-\alpha k(\beta+1)} t^{\alpha\beta(k+1)-1} E_{\alpha,\alpha\beta(k+1)}^\beta \left[ -\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\alpha \right] \right] * \varphi_{HNF}(t) \right\}. \quad (41)$$

Cujas soluções são dadas pelas funções cinéticas fracionárias dadas por

$$\text{D-F} \quad \varphi_{DF}(t) = t^{\gamma-1} E_{1,\gamma}(-t), \quad (42)$$

$$\text{C-C-F} \quad \varphi_{CCF}(t) = t^{\gamma-1} E_{\alpha,\gamma}(-t^\alpha), \quad (43)$$

$$\text{C-D-F} \quad \varphi_{CDF}(t) = \frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} - t^{\beta+\gamma-1} E_{1,\beta+\gamma}^\beta(-t), \quad (44)$$

$$\text{H-N-F} \quad \varphi_{HNF}(t) = \frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} - t^{\alpha\beta+\gamma-1} E_{\alpha,\alpha\beta+\gamma}^\beta(-t^\alpha), \quad (45)$$

para  $t \geq 0$ .

Como vemos, as soluções das equações cinéticas fracionárias dependem dos dois parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$ , além do parâmetro de derivação fracionária  $\gamma$ . Além disso, suas expressões são dadas em termos das funções do tipo Prabhakar.

## Conclusão

As expressões algébricas e os gráficos das funções de relaxação, as quais são soluções das equações cinéticas, mostram que a completa monotonicidade dessas funções depende dos parâmetros nelas envolvidos. Por isso, analisamos a variação desses parâmetros com o fim de delimitar quais as restrições que devem ser impostas para garantirem a completa monotonicidade dessas funções.

No caso da função de Debye, que independe desses parâmetros, a conclusão sobre sua completa monotonicidade segue imediatamente da definição. Já para as funções de relaxação associadas aos modelos de C-C, C-D e H-N, o estudo sobre sua completa monotonicidade segue da desigualdade trigonométrica, oriunda da fórmula da inversão de Titchmarsh envolvendo a função distribuição espectral (ROSA, 2017).

Sendo assim, o nosso objetivo atual é estudar e analisar o comportamento gráfico das funções de relaxação cinéticas fracionárias e, assim como fizemos com as funções de relaxação cinéticas, determinar as restrições sobre os parâmetros que garantem a completa monotonicidade dessas primeiras funções mencionadas.

## Agradecimentos

(ECFAR) agradece à CAPES por uma bolsa de pesquisa.

## Referências

BERNSTEIN, S. Acta Math. **Sur les fonctions absolument monotones**, v. 52, p. 1-66, 1929.

DEBNATH, L. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. **Recent applications of fractional calculus to science and engineering**, v. 2003, n.54, p. 3413-3442, 2003.

Caderno de trabalhos completos e resumos do IV ERMAC – Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional - Unesp, Bauru/SP, 2017.





- FELLER, W. **An Introduction to Probability Theory and Its Applications**, John Wiley and Sons, New York, 1970.
- HAUSDORFF, F. *Math. Z.* **Summationsmethoden und Momentfolgen I**, Singapore, p. 74-109, 1921.
- KHAMZIN; A. A.; NIGMATULLIN, R. R.; POPOV, I. I. *Fract. Calc. and Appl. Anal.* **Justification of the empirical laws of the anomalous dielectric relaxation in the framework of the memory function formalism**, v. 17, p. 247-258, 2014.
- MACHADO, J. A. Tenreiro et al. *Mathematical Problems in Engineering*. **Some Applications of Fractional Calculus in Engineering**, v. 2010, 2010.
- MACHADO, J. T.; KIRYAKOVA, V.; MAINARDI, F. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. **Recent history of fractional calculus**, v.16, n. 3, p. 1140-1153, 2011.
- MAINARDI, F. **Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity**, Imperial College Press, London, 2010.
- MAINARDI F.; GARRAPA, R. J. *Comput. Phys.* **On complete monotonicity of the Prabhakar function and non-Debye relaxation in dielectrics**, v. 293, p. 70-80, 2015.
- MORI, H. *Prog. Theor. Phys.* **A continued-fraction representation of the time-correlation functions**, v. 34, p. 399-416, 1965.
- OLIVEIRA, E. Capelas de; MAINARDI, F.; JUNIOR, J. V. *New Trends in Fluid and Solid Mechanical Models*. **Fractional models of anomalous relaxation based on the Kilbas and Saigo function**, v. 49, p. 2049-2060, 2014.
- OLIVEIRA, E. Capelas de; MAINARDI, F.; JUNIOR, J. V. *The European Physical Journal*. **Models based on Mittag-Leffler functions for anomalous relaxation in dielectrics**, v. 193, p. 261-171, 2014.
- OLIVEIRA, E. Capelas de; CAMARGO, R. de Figueiredo **Cálculo Fracionário**, Livraria da Física, São Paulo, 2015.
- ROSA, E. C. F. A.; OLIVEIRA, E. Capelas de. *J. Phys. Math.* **Relaxation Equations: Fractional Models**, v. 6, n. 146, 2015.
- ROSA, E. C. F. A. **Funções Completamente Monótonas Advindas do Cálculo Fracionário**. 2017. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada, em andamento) - IMECC/UNICAMP, Campinas, 2017.
- SCHNEIDER, W. R. *Expositiones Math.* **Completely monotone generalized Mittag-Leffler functions**, v. 54, n. 14, p. 003-016, 1996.
- TITCHMARSH, E. C. **Introduction to the Theory of Fourier Integrals**, Oxford University Press, London, 1948.
- WIDDER, D. V. *Trans. Amer. Math. Soc.* **Necessary and sufficient conditions for the representation of a function as a Laplace integral**, v. 40, p. 851-862, 1931.
- WIDDER, D. V. **The Laplace Transform**, Princeton University Press, Princeton, 1941.
- WILLIAMS, G. J. *Chem. Rev.* **Use of the dipole correlation function in dielectric relaxation**, v. 72, p. 55-69, 1972.
- ZWANZIG, R. **Lectures in Theoretical Physics**, Interscience, New York, 1961.



## Hepatite B - Investigação numérica de modelos de ordem não inteira

*Lislaine Cristina Cardoso*

*Instituto de Biociências, UNESP - Botucatu*

*lislaine@ibb.unesp.br*

*Fernando L. P. dos Santos*

*Instituto de Biociências, UNESP - Botucatu*

*flpio@ibb.unesp.br*

*Rubens F. Camargo*

*Depto. de Ciências, Unesp - Bauru*

*rubens@fc.unesp.br*

**Resumo:** O propósito deste trabalho é apresentar dois modelos para hepatite B, dados por meio de equações diferenciais de ordem não inteira. O primeiro modelo é formulado sem a presença de terapia, enquanto que o segundo apresenta parâmetros que correspondem ao efeito de alguma droga na dinâmica da doença. Para ambos os modelos calculamos a razão de reprodução básica e apresentamos simulações numéricas via esquemas de diferenças finitas não clássico. Os resultados numéricos mostram que as soluções para ambos os modelos convergem para o ponto de equilíbrio.

**Palavras-chave:** Cálculo fracionário. Hepatite B. Razão de reprodução básica. Simulação numérica.

### Introdução

A hepatite B é uma doença transmitida pelo vírus HBV, que infecta as células do fígado. A pessoa infectada pode desenvolver hepatite aguda, hepatite crônica (ou ambas) ou hepatite fulminante (uma forma rara da doença que pode ser fatal). A transmissão pode ocorrer por meio de relações sexuais e transmissão sanguínea. Entre os principais sintomas estão febre, fadiga, perda de apetite, náuseas, vômitos, dor abdominal, urina escura, dor nas articulações, entre outros (Ferreira et al. 2000).

Do ponto de vista matemático, novas ferramentas vem sendo desenvolvidas que auxiliam no entendimento da dinâmica da doença, dentre essas ferramentas podemos destacar o cálculo de ordem não inteira, tradicionalmente chamado de Cálculo Fracionário, visto que este apresenta importantes e promissores resultados em várias áreas do conhecimento, sobretudo quando utilizado para modelar eventos com dependência temporal (Camargo, R. F.; Oliveira, E. C. 2015).

O cálculo de ordem não inteira apresenta resultados promissores em várias áreas do conhecimento, como a biomatemática (Podlubny, 1999).

A modelagem matemática no estudo de doenças é feita através de equações que descrevem a interação entre a população e o ambiente, resultando numa descrição detalhada a respeito da doença. Com isso, uma ferramenta comumente utilizada para analisar a dinâmica da doença é a razão de reprodução básica ( $R_0$ ). Tal parâmetro, embora seja uma medida de ordem teórica, permite definir as condições pelas quais uma doença se manterá ou não em uma população.

Então a proposta desse trabalho é apresentar de forma sucinta o cálculo do  $R_0$  para dois modelos de hepatite B de ordem não inteira, levando em conta a ausência/presença de terapia, bem como mostrar simulações numéricas.

### Conceitos Preliminares

Nesta seção vamos utilizar a generalização do conceito de fatorial, feito através da função gama, para introduzir a integral fracionária de Riemann-Liouville.

**Definição 0.1** Seja  $f(t)$  uma função integrável. A integral de Riemann-Liouville de ordem  $\alpha \in \mathbb{C}$  com  $\text{Re}(\alpha) > 0$ , de  $f(t)$ , denotada por  $I^\alpha f(t)$ , é definida como

$$I^\alpha f(t) = \phi_\alpha(t) * f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau. \quad (1)$$

na qual o símbolo  $*$  denota a convolução de Laplace e  $\phi_\alpha(t)$  a Gel'fand-Shilov, definida para  $\alpha \notin \mathbb{Z}_-$ , como

$$\phi_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad \text{e } \Gamma(\alpha) \text{ a função Gama definida por } \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt. \text{ Por conveniência, definimos } I^0 f(t) = f(t).$$

Segue, como consequência da definição, que  $I^\alpha t^\beta = \frac{t^{\beta+\alpha}\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}$ .

**Definição 0.2** Sejam  $f(t)$  uma função diferenciável,  $m \in \mathbb{N}$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$  tais que  $m-1 < \text{Re}(\alpha) \leq m$ . A derivada de ordem  $\alpha$  no sentido de Caputo é definida como sendo a integral fracionária de uma derivada de ordem inteira, de forma que a lei dos expoentes faça sentido, isto é

$$D^\alpha f(t) = I^{m-\alpha} D^m f(t) = \phi_{m-\alpha} * D^m f(t). \quad (2)$$

Como  $I^0 f(t) = f(t)$ , para  $\alpha \in \mathbb{N}$  temos a definição usual de derivada. Como consequência da definição, que  $D^\alpha t^\beta = \frac{t^{\beta-\alpha}\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}$ , que recupera o resultado clássico quando  $\alpha = n$  e  $\beta = m$ , com  $n, m \in \mathbb{N}$ , inclusive quando  $\beta$  é zero, ou seja, quando temos uma função constante.

O próximo operador é de grande utilidade em problemas envolvendo resoluções que necessitam de soluções numéricas.

**Definição 0.3** O operador de Grünwald – Letnikov (GL) para derivadas fracionárias é definido como

$$D_{GL}^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow \infty} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{[k]} w_j^{(\alpha)} f(t-jh) \quad t \in [0, t_f], \quad (3)$$

em que  $0 < \alpha < 1$ ,  $[k]$  é a parte inteira de  $k = \frac{t-a}{h}$ , com  $a$  e  $t$  sendo os limites reais do operador  $D^\alpha$ , o qual denota a derivada fracionária,  $h$  é o espaçamento e  $w_j^{(\alpha)}$  é o coeficiente GL definido como

$$w_0^{(\alpha)} = 1, \quad w_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{1+\alpha}{j}\right) w_{j-1}^{(\alpha)}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4)$$

$$w_0^{(\alpha-1)} = 1, \quad w_j^{(\alpha-1)} = \left(1 - \frac{\alpha}{j}\right) w_{j-1}^{(\alpha-1)}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (5)$$

**Lema 0.1** Sejam  $0 < \alpha < 1$  e  $w_n^{(\alpha)}, w_n^{(\alpha-1)}$  os coeficientes do operador GL. Para  $n = 1, 2, \dots$  tem-se:

- i)  $-1 < w_n^{(\alpha)} < 0$ ;
- ii)  $0 < w_n^{(\alpha-1)} < 1$ .

## Modelos de ordem não inteira

Na literatura há vários modelos matemáticos que descrevem a dinâmica da hepatite B. Tais modelos, normalmente, são dados por meio de um sistema de equações diferenciais ordinárias e em alguns casos contam com parâmetros que indicam a presença de terapia contra a doença em sua formulação (Lewin, S. R. et al, 2001; Forde, J. E. et al, 2016).

A seguir apresentamos dois modelos para hepatite B, dados por meio de equações diferenciais de ordem não inteira. O primeiro modelo é formulado sem a presença de terapia, enquanto que o segundo apresenta parâmetros que correspondem ao efeito de alguma droga na dinâmica da doença. Ambos os sistemas são construídos com base no modelo de ordem inteira apresentado por Lewin (2001) e utilizando os seguintes parâmetros e variáveis de estudo do problema.

- $T, I, V$ : células não infectadas, células infectadas, vírus livres, respectivamente, no tempo  $t \geq 0$ .
- $d$ : taxa de morte de células;
- $\delta'$ : taxa de morte de células infectadas;
- $\rho$ : taxa de cura;
- $c$ : taxa de liberação de vírus livres;
- $\delta = \delta' + \rho$ : taxa de desaparecimento total de células infectadas;
- $p$ : taxa de produção de vírus por célula infectada;
- $\beta$ : taxa de infecção de novas células infectadas;
- $s$ : taxa de produção de novas células alvo;

$$\begin{cases} D^\alpha T(t) &= s - dT - \beta VT + \rho I \\ D^\alpha I(t) &= \beta VT - \delta' I - \rho I \\ D^\alpha V(t) &= pI - cV \end{cases} \quad (6)$$

Nos últimos anos, diversas drogas têm sido usadas no tratamento da hepatite B e a eficácia de cada uma delas apresenta resultados bastante variáveis. O principal objetivo no tratamento da infecção crônica pelo HBV é o de suprimir a replicação viral antes que ocorra dano irreversível ao fígado. Entre os principais medicamentos contra Hepatite B, podemos destacar o Interferon  $\alpha$  e a Lamivudine (Lewin, S. R. et al 2001, Ferreira, S. M. 2000)

Para analisar a influência dessas drogas no comportamento da solução do modelo fracionário (6) foram incorporados parâmetros que apontam a presença das mesmas no modelo. Sob a ação de alguma droga o sistema de defesa do organismo do paciente impede a formação de novos vírus. Isso significa que sob terapia a taxa de produção de novos vírus  $p$  é decrescente. A eficácia da droga,  $\varepsilon$ , é definida tal que a taxa de produção de vírus sob terapia é  $(1 - \varepsilon)p$ . Quando a droga é 100% eficiente, ou seja,  $\varepsilon = 1$ , ocorre a suspensão da produção viral.

Para incorporar a possibilidade da droga afetar a infecção, nós introduzimos o parâmetro que fornece a eficácia da droga em bloquear novas infecções,  $\eta$ , então a taxa de infecção na presença da droga é  $(1 - \eta)\beta$ .

Assim o modelo para hepatite B de ordem fracionária sob a ação de terapia é dado por

$$\begin{cases} D^\alpha T(t) &= s - dT(t) - (1 - \eta)\beta V(t)T(t) + \rho I(t) \\ D^\alpha I(t) &= (1 - \eta)\beta V(t)T(t) - \delta' I(t) - \rho I(t) \\ D^\alpha V(t) &= (1 - \varepsilon)pI(t) - cV(t) \end{cases} \quad (7)$$

Para ambos os modelos,  $D^\alpha$  representa a derivada de Caputo de ordem  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ .

**Teorema 0.1** *O sistema 6 apresenta os pontos de equilíbrio  $\bar{P}_0 : \left(\frac{s}{d}, 0, 0\right)$  que é o ponto livre da doença e  $\bar{P}_1 : \left(\frac{c(\delta' + \rho)}{\beta p}, \frac{\beta ps - cd\delta' - cd\rho}{\beta\delta'p}, \frac{\beta ps - cd\delta' - cd\rho}{\beta\delta'c}\right)$  que é o ponto infeccioso.*

**Teorema 0.2** *O sistema 7 apresenta os pontos de equilíbrio  $P_0 = \left(\frac{s}{d}, 0, 0\right)$  que é ponto de equilíbrio livre da doença e  $P_1 = \left(\frac{-c(\delta' + \rho)}{p(1 - \eta)\beta(1 - \varepsilon)}, \frac{(1 - \eta)\beta(1 - \varepsilon)ps - cd(\delta' - \rho)}{(1 - \eta)\beta(1 - \varepsilon)p\delta'}, \frac{s(1 - \varepsilon)p}{\delta'c} - \frac{d(\delta' - \rho)}{(1 - \eta)\beta\delta'}\right)$  que é o ponto com infecção por hepatite.*

**Definição 0.4** *A razão de reprodução básica,  $R_0$ , é definida como o número de infecções secundárias produzidas por cada indivíduo infectado dentro de uma categoria particular de risco, logo após o início de uma enfermidade.*

Para a hepatite B o  $R_0$  pode ser visto como o número de novas células infectadas que surgirão a partir de uma única célula infectada.

Para processos infecciosos simples este parâmetro determina um limite, ou seja, quando  $R_0 > 1$  uma infecção típica gera uma infecção secundária, levando a proliferação da doença. Em contraste, quando  $R_0 < 1$ , células

infectadas normalmente dão origem a menos de uma infecção secundária e a prevalência da infecção não pode aumentar (Dietz, H. 1983).

Este parâmetro leva em consideração as equações que descrevem a produção de novas infecções e mudanças no estado de indivíduos infectados, ou seja, depende de três parâmetros: taxa de contato entre as populações, duração do período infeccioso e a probabilidade de que o contato entre um infectado e um suscetível levará a infecção (Diekmann, O. et al 2009).

A seguir é apresentado de forma sucinta alguns passos para o cálculo do  $R_0$  (Dietz, H., 1983).

1. Escrever o subsistema que descreve somente a produção de novas infecções e/ou a mudança no estado dos indivíduos já infectados;
2. Construir as matrizes  $T$  que é a matriz de transmissão (descreve a produção de novas infecções) e a matriz  $\Sigma$  que é a matriz de transição (descreve a mudança de estado);
3. Calcular a matriz Jacobiana de  $T = F$  e  $\Sigma = V$  no ponto de equilíbrio livre da doença;
4. Calcular a matriz  $K = -V^{-1}F$  e seus respectivos autovalores. A razão de reprodução básica será o maior autovalor da matriz  $K$ .

Utilizando os passos acima, apresentamos o cálculo do  $R_0$  para o modelo 6. Considere o subsistema

$$\begin{cases} D^\alpha I(t) &= \beta V(t)T(t) - \delta' I(t) - \rho I(t) \\ D^\alpha V(t) &= \rho I(t) - cV(t) \end{cases} \quad (8)$$

Daí

$$T = \begin{vmatrix} \beta VT \\ \rho I \end{vmatrix} \quad e \quad \Sigma = \begin{vmatrix} -\delta' I - \rho I \\ -cV \end{vmatrix}, \quad (9)$$

Calculando a matriz Jacobiana de  $T$  e  $\Sigma$  no ponto de equilíbrio livre da doença, obtemos:

$$F = \begin{vmatrix} 0 & \beta \frac{s}{d} \\ p & 0 \end{vmatrix} \quad e \quad -V = \begin{vmatrix} \delta' + \rho & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix}, \quad (10)$$

Logo  $K = V^{-1}F = \begin{vmatrix} 0 & \beta \frac{s}{d(\delta' + \rho)} \\ \frac{p}{c} & 0 \end{vmatrix}$ , cujos autovalores são:

$$\lambda_i = \pm \sqrt{\frac{p\beta s}{c(\delta' + \rho)d}}, \quad i = 1, 2.$$

Portanto,

$$R_0^2 = \frac{p\beta s}{cd(\delta' + \rho)}.$$

De modo análogo, para o sistema 7 obtemos:

$$R_0^2 = \frac{p\beta s(1 - \eta)(1 - \varepsilon)}{cd(\delta' + \rho)}.$$

## Resultados numéricos

As simulações numéricas foram feitas utilizando o esquema de diferenças finitas não clássico (NSFD) (Cardoso, L. C. et al 2017; Mickens, R., Smith, A. 1990). Esse método numérico é construído utilizando o operador GL, dado pela equação 3, e consiste na diferenciação de uma função com um dado conjunto finito de valores da variável dependente em determinados pontos conhecidos da variável independente. Além disso, tal método diferentemente do método clássico, que utiliza um espaçamento  $h$  fixo, leva em conta uma função denominador dependendo de  $h$  e de um conjunto de parâmetros  $\lambda$ , isto é,  $\phi = \phi(h, \lambda)$  (Mickens, R., Smith, A. 1990; Ongun, M. Y., Arslan, D., Garrapa, A. 2013).

Os parâmetros biológicos utilizados estão descritos na Tabela 1. Os parâmetros numéricos foram  $h = 0,1$  e  $\mu = 3$ , para a função denominador  $\phi(h, \mu + 1)$ .

Tabela 1: Parâmetros para simulação

Parâmetros	$\mu$	$r$	$d$	$\beta$	$\delta$	$\delta'$	$p$	$c$	$s$
Valores	3	1	0,5	$1,22 \times 10^{-10}$	1,9	0,1	0,0008	0,7	10

As Figuras 1, 2 e 3 apresentam a solução numérica para diferentes valores de  $\alpha$  para o modelo 6. O ponto de equilíbrio infeccioso é  $(T(t), I(t), V(t)) = (0,71; 96,41; 1,10)$  e  $R_0 = 1,46$ . Observamos que há a convergência para o ponto de equilíbrio infeccioso. Além disso, como  $R_0 > 1$ , com o passar do tempo ocorrerá a proliferação da doença. Para este caso, quanto menor o valor do expoente  $\alpha$  mais rápida será a convergência para equilíbrio.

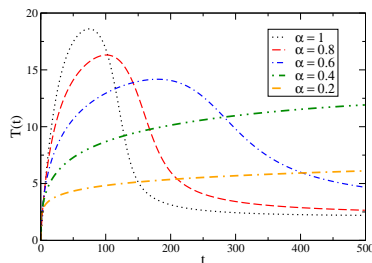


Figura 1: Solução para  $T(t)$ .

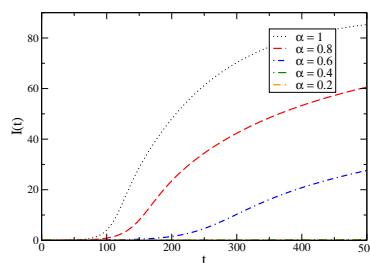


Figura 2: Solução para  $I(t)$ .

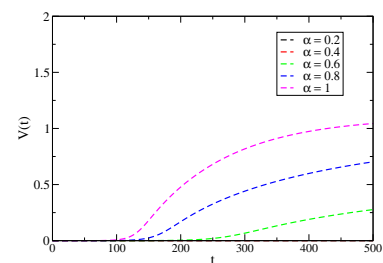


Figura 3: Solução para  $V(t)$ .

As Figuras 4, 5 e 6 mostram a solução numérica para o modelo 7 para diferentes valores de  $\alpha$ . Utilizamos  $R_0 = 0,46$ . Podemos observar que a solução converge para o ponto de equilíbrio livre da doença. Como  $R_0 < 1$  a doença tende a desaparecer. O valor do expoente  $\alpha$  influencia na velocidade de convergência da solução para o equilíbrio, pois valores menores de  $\alpha$  convergem de forma mais lenta.

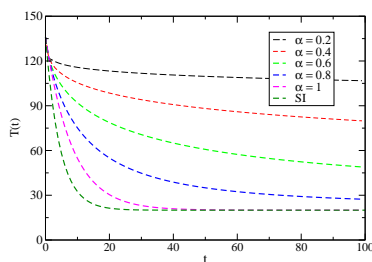


Figura 4: Solução para  $T(t)$ .

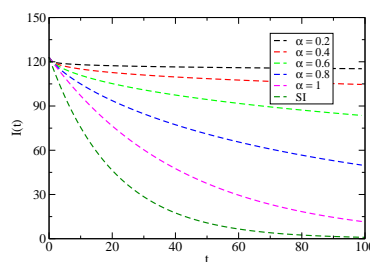


Figura 5: Solução para  $I(t)$ .

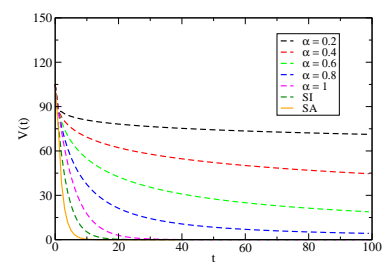


Figura 6: Solução para  $V(t)$ .

Nas Figuras 7, 8 e 9 comparamos a solução numérica para o modelo sem terapia (ST) e o modelo com terapia (CT), para  $\alpha = 0,6; 0,8; 1$ . Foi utilizado  $R_0 = 27,33$ . Observamos que quando  $\alpha = 0,6$  o número de células não infectadas  $T(t)$  começa a decrescer por volta do dia 200, para o modelo sem terapia (ST), a medida que o número de células infectadas e vírus livres começam a crescer por volta do mesmo dia. Para  $\alpha = 0,8$  essa mesma análise ocorre por volta do dia 100 para o modelo ST e por volta do dia 600 para o modelo CT. Para  $\alpha = 1$  tal comportamento ocorre antes do dia 100 para o modelo ST e por volta do dia 200 para o modelo CT.

Do ponto de vista biológico, o mais viável é um modelo para hepatite B com terapia e com  $\alpha = 0,6$  visto que a doença, possivelmente, não evoluirá para sua forma crônica.



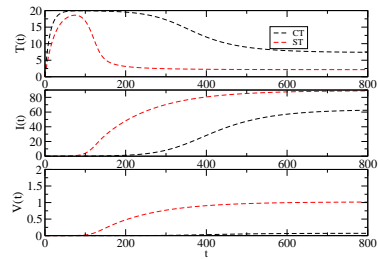
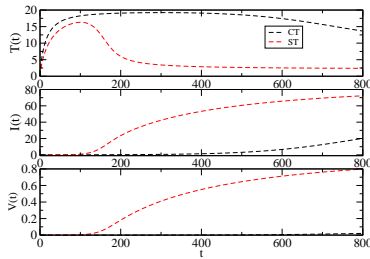
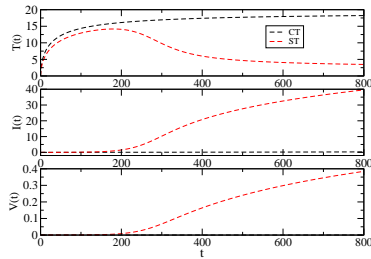


Figura 7: Solução com  $\alpha = 0,6$ . Figura 8: Solução com  $\alpha = 0,8$ . Figura 9: Solução com  $\alpha = 1$ .

A Figura 10 apresenta o comportamento para o modelo 7. Até o dia 45, admitimos  $\eta = \varepsilon = 0$  na formulação do modelo. Após esse dia assumimos tais valores como  $\eta = \varepsilon = 0,9$ .

Tal comportamento era esperado, visto que a partir do momento que uma droga é administrada, espera-se que o número de células infectadas,  $I(t)$ , e vírus livres,  $V(t)$ , diminuam. Consequentemente o número de células não infectadas,  $T(t)$ , tende a aumentar.

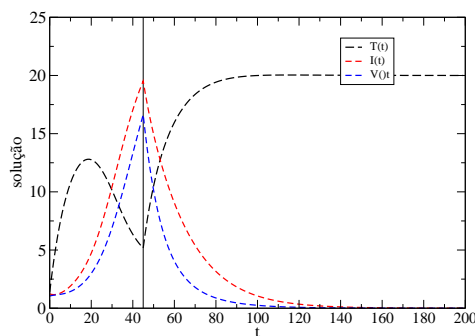


Figura 10: Solução numérica para  $T, I, V$  com  $\alpha = 1$  e  $\eta = \varepsilon = 0$  para  $t \leq 45$  dias e  $\eta = \varepsilon = 0,9$  para  $t > 45$  dias.

## Conclusões

Por meio de investigação numérica de modelos fracionários em hepatite B, observamos que a razão de reprodução básica é um valor limite que determina a dinâmica local da doença, pois quando  $R_0 < 1$  há extinção da enfermidade e quando  $R_0 \geq 1$  ocorre a infecção. Além disso, notamos pelas simulações numéricas que diferentes valores da ordem da derivada permitem comportamentos distintos da solução, sobretudo no tempo de convergência para o estado de equilíbrio. A ausência/presença de terapia nos modelos investigados também é um fator determinante no comportamento da solução.

Como trabalhos futuros espera-se fazer uma comparação dos modelos apresentados com dados reais, visando encontrar o valor de  $\alpha$  que descreve melhor os dados. Além disso, espera-se estudar o sistema onde derivadas de  $T, I$  e  $V$  tenham ordens distintas, isto é,  $\alpha, \beta, \gamma$ .

## Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES pelo auxílio financeiro e RFC agradece ao CNPq (Universal 455920/2014-1).



## Referências

- CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C. **Cálculo Fracionário**, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.
- CARDOSO, L. C.; SANTOS, F. L. P.; CAMARGO, R. F. Revista Eletrônica Paulista de Matemática. **Método de diferenças finitas não clássico aplicado ao cálculo fracionário**, v. 7, p. 45-54, 2017.
- DEMIRCI, E.; OZALP, N. Journal of Computational and Applied Mathematics. **A method for solving differential equations of fractional order**, v. 236, n. 11, p. 2754-2762, 2012.
- DIEKMANN, O.; HEESTERBEEK, A.P.; and ROBERTS, G. M. Journal of the Royal Society Interface. **The construction of next-generation matrices for compartmental epidemic models**, v. 7, p. 873 - 885, 2009.
- DIETHELM, K. Lecture Notes in Mathematics. **The analysis of fractional differential equations**, 2004.
- DIETZ, H. Statistical Methods in Medical Research. **The estimation of the basic reproduction number for infectious diseases**, 1983.
- FERREIRA, S. M. Revista da Sociedade Brasileira de Medicina Tropical. **Diagnóstico e tratamento da Hepatite B**, v. 33, p. 389-400, 2000.
- FORDE, J. E., CIUPE, S. M., ARIAS, A. C. and LENHART, S. Applied Sciences. **Optimal control of drug therapy in a Hepatitis B model**. v. 6, p. 1-18, 2016.
- LEWIN, S. R.; RIBEIRO, R. M.; WALTERS, T. and LAU, G. K. Hepatology. **Analysis of Hepatitis B viral load decline under potent therapy: complex decay profiles observed**. v. 34, p. 1012-1019, 2001.
- MICKENS, R.; SMITH, A. Journal Franklin Institute. **Finite-difference models of ordinary differential equations: influence of denominator functions**. v. 327, p. 143-149, 1990.
- ONGUN, M. Y.; ARSLAN, D.; GARRAPPA, R. Advances in Difference equations. **Nonstandard finite difference schemes for a fractional order Brusselator system**, 2013.
- PODLUBNY, I. **Fractional Differential equation**. **Mathematics in Science and Engineering**, 198, San Diego: Academic Press, 1999.

## Jogo digital para o ensino de métodos numéricos

*Marcos Henrique de Paula Dias da Silva*

*Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”; Faculdade de Ciências  
[dificildedizer@gmail.com](mailto:dificildedizer@gmail.com)*

**Resumo:** Os métodos numéricos são auxiliares básicos na resolução de problemas científicos modelados matematicamente. Os livros de cálculo numérico chegam a abordar minuciosamente alguns exemplos de casos para fins didáticos. Ainda estes casos já estejam ilustrados, contextualizados e até mesmo representados passo a passo, não há um tratamento lúdico destes métodos, mantendo sua aplicação contínua distante do estudante. Contudo, jogo é um meio lúdico com o qual o conteúdo pode ser aprendido pelo seu jogador ao mesmo tempo que gera um significado sobre esta aprendizagem. Com o intuito de aproximar os estudantes de conteúdos do cálculo numérico, uma disciplina comum à diversas ciências exatas, criamos um jogo digital com uma dinâmica de ação, onde o jogador pode mover seu personagem pelo cenário enquanto arrasta objetos para resolver problemas a partir de métodos numéricos. Construir este material foi um processo complexo, já que lida com a construção de métodos como a bissecção, exige um preparo prévio do jogador ao longo de seus níveis ou até mesmo fora do jogo. Apresentamos neste trabalho como o jogo proporciona o desenvolvimento de conceitos relacionados ao cálculo numérico, oferecendo recursos necessários dentro e fora do jogo para sua aprendizagem, como também seus desafios, proporcionam situações onde o jogador precisará avaliar a eficiência e praticidade de seus métodos perante o problema.

**Palavras-chave:** Jogo Digital. Ensino. Métodos Numéricos.

### Introdução

Os jogos geralmente trazem benefícios únicos para o indivíduo, principalmente porque eles fazem com que sua percepção sobre o assunto ocorra de forma mais aberta, fazendo a aprendizagem mais interativa (ARAÚJO; RIBEIRO; SANTOS, 2012). De todo modo, ainda que os jogos estejam presentes na cultura humana desde 3.000 a.C. (HUIZINGA, 2010), não há uma simples definição para este termo. Guerreiro (2015) apresenta um quadro dos elementos das definições de jogo e como estes conflitam-se variando os autores conceituados sobre jogos. Assumiremos a postura que Salen e Zimmerman (2012) propõem ao utilizar a compreensão comum designada pelo termo jogar um jogo, para se tratar do jogo como “um sistema no qual os jogadores se envolvem em um conflito artificial, definido por regras que implica um resultado quantificável” (SALEN; ZIMMERMAN, vol 1, p. 95, 2012).

Desde muitos séculos atrás, jogos e os matemáticos caminham juntos. Essa ligação aparece tanto como uma forma de tratar problemas, como também um modo de explicar algumas propriedades (PETKOVIC, 2009). Usar jogos para o ensino da matemática, quando bem planejado, auxilia sua aprendizagem. Pois o ato de jogar mesclado a conteúdos matemáticos, estimula nos jogadores habilidades como observação, análise, levantamento de hipóteses, busca de suposições, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização, o que promovem um melhor entendimento dos conceitos tratados (DINIZ; SMOLE; MILANI, 2007).

Com o advento dos computadores emergiram tecnologias para suportar jogos em formato digital, que incorporam as seguintes qualidades: Interatividade imediata, mas restrita; Manipulação da informação; Sistemas complexos e automatizados; Comunicação em rede (SALEN; ZIMMERMAN, vol 1, p. 101 – 107, 2012). Da mesma forma, estas tecnologias também tornaram viável o desenvolvimento do cálculo numérico e do uso de métodos numéricos para a resolução de problemas, que até antes demandavam grande esforço humano ou mesmo sobre-humano. Os métodos numéricos

podem ser entendidos como algoritmos que envolvem apenas um sistema de operações elementares dadas a priori, utilizadas um número finito de vezes e que construirão todo o processo de cálculo envolvido. Já o cálculo numérico é um campo da matemática que trata do desenvolvimento de métodos numéricos para a resolução aproximada de problemas que podem ser representados por um modelo matemático (CLÁUDIO; JUSSARA, 2000).

O conceito inicial de um jogo é uma pergunta passada à equipe de desenvolvimento como um problema a ser resolvido (CHANDLER, 2012). Este artigo apresenta um jogo digital com o seguinte conceito inicial: Como o jogador poderia usar métodos numéricos dentro de uma dinâmica de ação?

## Estrutura do jogo

Ao planejarmos o jogo *Handles in Scratch 2.0*, pensamos numa estrutura que permitisse ao jogador dentro de uma dinâmica de ação, usar métodos numéricos para resolver problemas de natureza prática. Contudo, os métodos numéricos envolvem diversos conceitos importantes da ciência da computação que poderiam ser entendidos como pré-requisitos para este jogo. Nesse sentido, ao invés de inserir pelo jogo dúzias de tutoriais sobre conceitos de computação e programação de computadores, optamos em construí-lo na linguagem de programação visual *Scratch 2.0*, desenvolvida pelo Lifelong Kindergarten Group do M.I.T. (Massachusetts Institute of Technology). Pois, esta é uma linguagem disponível em mais de 70 idiomas e voltada para a aprendizagem mediada ou independente, de conceitos da programação de computadores (MARJI, 2014).

Esta linguagem também viabiliza que o jogador edite o jogo, aprendendo a partir de explorações na própria estrutura do jogo, novos conceitos de programação necessários para jogar. E pensando no caso de professores e outros *game designers*, que podem editar ou aproveitar dinâmicas deste material para seus próprios fins. Também organizamos o código de modo claro com variáveis nomeadas em português ou usando emoticons de caracteres. O software encontra-se distribuído a partir de seus atores, facilitando assim que o próprio jogador tente compreendê-lo.

Após completar todos os níveis, o jogador é parabenizado numa tela. Nela a personagem “Amanda” que atua no jogo todo como mecanismo de feedback ao jogador, expressa bastante entusiasmo. O jogo pergunta se o jogador gostaria de editá-lo explicando como acessar seu código.



Figura 1: Software do jogo aberto para edição (fonte própria).

Sua curva de aprendizagem foi desenvolvida para que o jogador adquira até o final do jogo, habilidades necessárias para planejar e executar diversos algoritmos computacionais. A dinâmica do jogo envolve controlar um skatista que desenhado de forma simples (feito de palitinho) em um cenário 2D, segurando objetos, fazendo verificações e levando-os até um aparelho, que julga se acertou ou errou de acordo com a missão dada. Existem 2 tipos de objetos seguráveis, os números e os bolinhos.

## Busca linear

A busca linear ou sequencial é um método de busca que verifica elemento por elemento dentro de uma lista. Seu principal uso ocorre em situações onde não há ordem entre os elementos ou quando a lista é pequena já que sua implementação é bastante simples (WIRTH, 1989). Este vem a ser o primeiro dos métodos que o jogador encontrará, pois precisará verificar os objetos para selecionar os adequados à missão. Se bem escolhida a forma de verificá-los, a lista várias vezes se torna pequena.

Na tela do jogo por onde o personagem consegue se mover, surgem objetos ao início ou reinício de cada nível. Quando estes objetos são números, eles podem variar de 0 à 29. Para segurá-los existem duas condições a serem verificadas:

1. A carga total que o personagem consegue carregar é menor do que a carga que ele está carregando?
2. O valor associado ao personagem é um divisor do número que ele tenta segurar?



Figura 2: Situação do 1º nível do jogo, antes e depois de segurar um número (fonte própria).

Os desafios envolvendo números visivelmente distinguíveis, compõe 21 dos 42 níveis. Neles o jogador consegue identificar visualmente os números, ainda que as vezes estejam sobrepostos. Com propriedades de divisão, o jogador deve selecionar os números adequados associando ao seu personagem valores que viabilizem isto, como por exemplo:

1. Para segurar apenas os pares, o personagem pode ter um valor associado igual à 2 ou -2.
2. Para segurar apenas os ímpares, o personagem pode inicialmente isolar todos os pares da tela.
3. Para segurar apenas os 0, o personagem pode ter um valor associado em módulo maior que 29.



Figura 3: Situação de selecionar os pares e de selecionar os 0 (fonte própria).

A partir do 22º nível, os números se tornam indistinguíveis visualmente, exigindo que o jogador determine os números corretos a partir de suas propriedades de divisão, como por exemplo:



1. O 15 não é um par (isto evita que o 0 seja segurado) e é divisível por 15.
2. O 14 não é divisível por 4 (isto evita que o 0 e o 28 sejam segurados) e é divisível por 14.

Do 25º ao 30º nível, a ordem dos números passa a ser relevante. Exigindo que o jogador ordene do maior ao menor, todos os números que compartilham a propriedade pedida na missão. Aparecendo assim o algoritmo de busca linear. Embora seja um processo lento, nesta etapa do jogo é esperado que o jogador produza rotinas de repetição usando as propriedades de programação do personagem colocando-o para verificar cada possibilidade automaticamente. Nesta situação, nosso interesse é que o jogador perceba como o recurso computacional pode facilitar a busca pela solução.

Entretanto, no nível 31º colocamos ao jogador a missão de levar apenas os números 1 para o aparelho. Nessa situação, o jogador pode utilizar a abordagem automática ou manual, respectivamente:

1. Isolar todos os números que possuem divisores variando de 2 até 29. Exige 28 verificações.
2. Isolar todos os números que possuem divisores primos. Exige 10 verificações.

Este vem a ser um caso onde o jogador tem a alternativa manual mais eficiente que a automatizada.



Figura 4: Situação de selecionar os 1 e após abordagem automatizada (fonte própria).

## Busca linear vs método da bissecção

Embora a busca linear seja um método simples, intuitivo e em diversos casos, necessário. Quando há uma ordem entre os elementos e o tamanho da lista aumenta, seu uso é substituído por métodos mais eficientes como a bissecção (WIRTH, 1989).

A partir do 32º nível, todos os problemas passam a envolver bolinhos, dessa forma para segurar um objeto, passamos a verificar apenas se a carga total do personagem é menor que seu total. Assim o personagem deixa de atuar como um verificador e com isso acrescentamos à mecânica do jogo e de acordo com o nível, um instrumento externo ao personagem que possibilite cumprir a missão.

Até o 34º nível, a missão é relativa a colocar no aparelho apenas os bolinhos contaminados. Para descobrir quando um bolinho está contaminado, inserimos no jogo o instrumento “escâner”, que mostra uma luz vermelha quando ao menos um dos bolinhos em contato com ele está contaminado, em seguida o escaner empurra todos os bolinhos para a sua direita. Estes níveis podem ser resolvidos a partir da verificação automática de bolinho por bolinho. Entretanto, como podemos reunir os bolinhos uniformemente acima de um intervalo fechado da reta e cada vez que verificarmos um destes intervalos, descobriremos se o bolinho contaminado se encontra lá ou não. O que enquadra nosso problema na condição do Teorema de Bolzano, permitindo que apliquemos o método da bissecção, com o qual, a cada etapa eliminamos até metade do total de bolinhos.

**Teorema de Bolzano.** *Se  $y = f(x)$  é uma função contínua e muda de sinal no intervalo  $[a, b]$ , então existe pelo menos um ponto  $x \in [a, b]$  tal que  $f(x) = 0$  (CUNHA, p.74, 2003).*





Figura 5: Situações do escaner detectando e não detectando contaminação (fonte própria).

### Método da trisseccção

A partir do 35º nível surgem desafios envolvendo o peso dos bolinhos. Assim o “escaner” desaparece e no centro da tela surge outro instrumento, uma “balança de pratos”. O prato da balança com maior peso, cai se afastando do centro da balança. Nesse tipo de situação apenas um bolinho possui peso diferente dos demais. Este nível pode ser resolvido a partir da verificação automática de bolinho por bolinho permanecendo na balança o bolinho mais pesado. Mas, podemos reunir os bolinhos uniformemente acima de um intervalo fechado da reta e cada vez que verificarmos dois intervalos de mesmo tamanho, descobriremos em qual intervalo o bolinho mais pesado se encontra. Se enquadrando na condição do Teorema de Bolzano. Assim, podemos usar o método da bissecção.

Contudo, esta situação permite uma abordagem melhor, utilizando o método da trisseccção. Já que podemos dividir nosso total de bolinhos em 3 e comparar 2/3 deles, se a balança cair para um dos lados, descartamos o 1/3 do outro lado da balança e o 1/3 do total de bolinhos que não foi colocado na comparação. Se a balança ficar em equilíbrio, descartamos os 2/3 de bolinhos que foram colocados na balança. Assim, a cada etapa eliminaríamos 2/3 do total de bolinhos.

**Algoritmo:** método da trisseccção

**Dados**  $f(x)$ ,  $a$  e  $b$  tais que  $f(a)f(b) < 0$ ,  $\max$ ,  $\text{tol}$

1. Para  $k = 0$ :  $\max$ , **faça**
2. Se  $|b-a| < \text{tol}$  **então**  $x^* = (b-a)/2$ , **pare**
3. **Caso contrário**
4.  $x = a + |b-a|/3$
5.  $y = a + 2|b-a|/3$
6. Se  $f(a)f(x) < 0$  ||  $f(x)f(y) < 0$  **então**
7. Se  $f(a)f(x) < 0$  **então**
8.  $b = x$
9. **Caso contrário**
10.  $a = x$
11.  $b = y$
12. **Caso contrário**
13.  $a = y$

Embora computacionalmente este método não seja tão interessante, pois seu custo computacional é superior ao da bissecção. O uso do algoritmo da trisseccção é comum em alguns desafios matemáticos, onde precisamos descobrir com apenas duas pesagens qual dentre 9 bolas idênticas é a única com um

peso diferente. No caso do jogo onde temos uma balança que realiza o passo 6 do algoritmo “método da trisseccção” e a cada uso temos uma situação onde o algoritmo da trisseccção passa a ser proveitoso.



Figura 6: Situações da balança vazia em equilíbrio e da balança caindo à esquerda (fonte própria).

### Considerações finais

Essa percepção sobre a diferença entre os métodos é nosso maior interesse em explorar no jogo, pois uma das qualidades essenciais aos métodos numéricos é sua eficiência (CLÁUDIO; JUSSARA, 2000). Como exemplo temos a Regra de Cramer, que é ensinada no Ensino Básico para a resolução de um sistema com  $N$  equações e  $N$  incógnitas e envolve o cálculo de  $N + 1$  determinantes de ordem  $N$ . E também o método da Eliminação de Gauss, que consiste em transformar o sistema linear original num sistema linear equivalente com a matriz de coeficientes triangular superior, tendo assim, uma resolução imediata (RUGGIERO; LOPES, 1996).

Tabela 1: Comparação de eficiência entre algoritmos (CLÁUDIO; JUSSARA, p. 23, 2000).

	$N = 5$	$N = 10$	$N = 20$
Cramer (determinantes pela definição)	2.5 s	3.4 dias	20 bilhões de anos
Cramer (determinantes por Laplace)	0.4 s	6 minutos	5 meses
Eliminação de Gauss	36 ms	0.22 s	1.5 s

No caso do jogo, frente às situações onde vários métodos são possíveis, cabe ao jogador julgar qual melhor se enquadra para solucionar seu problema, tendo em conta tanto a praticidade de sua construção, quanto sua eficiência. Abaixo apresentamos a comparação de quantas verificações são necessárias no jogo para problemas de pesar os bolinhos, onde apenas um tem um peso diferente. Sendo o  $N$  o número de bolinhos iniciais.

Tabela 2: Comparação de eficiência entre métodos com a balança no jogo.

	$N = 20$	$N = 200$	$N = 2000$
Busca linear	19 verificações	199 verificações	1999 verificações
Método da bissecção	5 verificações	15 verificações	45 verificações
Método da trisseccção	3 verificações	5 verificações	7 verificações

Este jogo foi produzido para que os jogadores desenvolvam o chamado pensamento computacional,



definido por Wing (2006), como o conjunto de habilidades e atitudes que cientistas da computação utilizam no tratamento de problemas, para que estes possam ser resolvidos por computadores. A importância do pensamento computacional se estende além dos cientistas da computação, uma vez que este é o pensamento que usamos para encontrar o melhor método de resolver um problema, tendo como recursos a astúcia e imaginação humana junto com a velocidade e capacidade de armazenamento do computador.

Nesse sentido, até mesmo alguns livros de cálculo numérico, pouco abordam a praticidade de um método contra sua eficiência. Pois, em casos simples, resolver um problema manualmente é conveniente e não exige a implementação de um método. Entretanto, em outros casos podemos isolar a solução em algumas propriedades e aplicar bons métodos numéricos. Contudo, sempre haverá situações onde a força bruta será necessária, isto é, a exigência de um processo exaustivo para a obtenção da resposta. Fazer com que o jogador adquira a percepção sobre como um problema pode ser resolvido e se auto-avaliar a cerca de sua eficiência, são nossos objetivos com este jogo.

## Referências

ARAÚJO, N. M. S.; RIBEIRO, F. R.; SANTOS, S. F. dos. **Jogos pedagógicos e responsividade: ludicidade, compreensão leitora e aprendizagem.** Bakhtiniana, Rev. Estud. Discurso [online]. vol.7, n.1, pp. 4-23, 2012.

CHANDLER, H. M. **Manual de produção de jogos digitais**; 2.ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

CLÁUDIO, D. M.; JUSSARA, M. M. **Cálculo numérico computacional: teoria e prática.** 3. ed. São Paulo: Atlas, 2000.

CUNHA, C. **Métodos numéricos.** 2 ed. Campinas. UNICAMP, 2003.

DINIZ, M. I., SMOLE, K. S, MILANI, E. **Cadernos Mathema: Jogos de matemática de 6º a 9º ano.** Porto Alegre: Artmed. 2007. 102 p.

GUERREIRO, M. A. S. **Os efeitos do Game Design no processo de criação de Jogos Digitais utilizados no Ensino de Química e Ciências – O que devemos considerar?** Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências, Bauru, 2015.

HUIZINGA, J. **Homo Ludens.** 6. ed. São Paulo: Editora Perspectiva, 2010.

MARJI, M. **Learn to Program with Scratch – A Visual Introduction to Programming with Games, Art, Science, and Math.** No Starch Press, Inc. San Francisco, 2014.

PETKOVIC, M. S. **Famous puzzles of great mathematicians.** American Mathematical Society, 2009.

RUGGIERO, M. A. G., LOPES, V. L. R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais.** 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996.



Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional  
De 2 a 5 de Maio de 2017  
Unesp, Faculdade de Ciências - Bauru/SP

SALEN, K., ZIMMERMAN, E. **Regras do jogo: fundamentos do design de jogos**. Blucher, vol 1, 2012.

WING J. M. **Computational Thinking**. Commun. ACM, 49 (3): 33–35, 2006.

WIRTH, N. **Algoritmos e Estruturas de Dados**. Rio de Janeiro: LTC, 1989.



## Método da Transformada Diferencial Generalizada no Modelo Fracionário de Malthus

*Lucas Kenjy Bazaglia Kuroda*

*UNESP, Instituto de Biociências de Botucatu  
lucaskuroda@ibb.unesp.br*

*Alexys Bruno-Alfonso*

*UNESP, Faculdade de Ciências de Bauru  
alexys@fc.unesp.br*

*Rubens de Figueiredo Camargo*

*UNESP, Faculdade de Ciências de Bauru  
rubens@fc.unesp.br*

**Resumo:** O método da transformada diferencial generalizada é aplicado para resolver o problema de Malthus. Primeiramente, representa-se a função incógnita como série de potências em que os expoentes são múltiplos da ordem de derivação. Em seguida, a equação diferencial é transformada num sistema de equações algébricas para os coeficientes da série. O sistema de equações é resolvido exatamente, reproduzindo a solução usualmente obtida mediante a transformada de Laplace.

**Palavras-chave:** Cálculo Fracionário e Aplicações. Modelo de Malthus. Modelagem Fracionaria. Método da Transformada Diferencial Generalizada.

### Introdução

A modelagem matemática é a área do conhecimento que estuda a simulação de sistemas reais a fim de prever o comportamento dos mesmos, ou seja, consiste em descrever matematicamente um fenômeno. Segundo Zill (2001), esta descrição compreende as etapas de identificação das variáveis do problema e de um conjunto de hipóteses razoáveis sobre o sistema. Assim, quanto mais variáveis essa equação possuir, maior será a dificuldade em encontrar sua solução.

A obtenção de uma equação diferencial cuja solução descreve bem a realidade traz grande dificuldade. Normalmente, quanto mais próximos estamos de descrever um problema real, maior será o número de variáveis envolvidas e a complexidade das equações. Com o objetivo de descrever um fenômeno com maior precisão, o Cálculo Fracionário, conhecido também como cálculo de ordem não-inteira, assume um papel de destaque. Diversos problemas descritos em termos de equações diferenciais fracionárias fornecem uma descrição mais apropriada do que a respectiva equação de ordem inteira, como visto em Camargo & Oliveira (2015) e Kuroda et al. (2015). Um dos modelos matemáticos bem conhecidos é o modelo apresentado por Malthus, conhecido também como modelo malthusiano, pode ser utilizado na modelagem de crescimento populacional sem agentes influenciando na mortalidade dos mesmo (competição, alimento,...), ou seja, a população cresce proporcionalmente ao número de indivíduos presentes naquele instante.

Um dos modelos matemáticos mais estudados é o modelo populacional de Malthus. Ele pode ser utilizado na modelagem de crescimento populacional, sem agentes que influenciem a mortalidade dos indivíduos (competição, alimento). Assim, a população cresce proporcionalmente ao número de indivíduos presentes em cada instante.

Considerando a equação diferencial proposta por Malthus, uma maneira comum de usar a modelagem fracionária é substituir a derivada de ordem inteira por uma derivada de ordem não-inteira, geralmente

menor ou igual que 1. Assim, a derivada ordinária pode ser recuperada como um caso particular (KURODA et al., 2015). O principal desafio passa ser o desenvolvimento de técnicas e métodos de resolução tanto analíticos quanto numéricos. Por exemplo, se tratando de equações lineares de ordem fracionárias, como o Modelo Malthusiano original, pode-se utilizar a metodologia da transformada de Laplace. No entanto, é difícil estender esse método para uma ampla classe de equações que são não lineares.

Dentre os métodos disponíveis para o tratamento de equações não lineares de ordem fracionária está o “Método da Transformada Diferencial Generalizada” (GDTM, em Inglês). O método é uma generalização do Método da Transformada Diferencial, diretamente relacionado com a série de Taylor (KURODA, 2016). Ele tem sido aplicado em tratamentos numéricos computacionais por vários autores, dentre eles, Abdel-Halim Hassan (2008), Arshad et al. (2015), Freihat & Momani (2012), Mirzaee (2011), Odibat et al. (2010) e Kuroda (2016).

Neste trabalho, resolvemos o modelo de Malthus de ordem fracionária, com a derivada definida por Caputo. Faremos isto mediante o GDTM e mostraremos que a solução coincide com a usualmente obtida mediante a transformada de Laplace.

## Derivada fracionária de Caputo

Neste trabalho, as derivadas fracionárias serão calculadas segundo Caputo, visto em Camargo & Oliveira (2009), com limite de integração inferior igual a  $t_0$ . Para cada função  $u$  definida em  $(t_0, +\infty)$ , a derivada de ordem  $\beta$  de  $u$ , em cada  $t$  com  $t > t_0$ , é dada por

$$D_{t_0}^{\beta} u(t) = \frac{1}{(\bar{\beta} - \beta - 1)!} \int_{t_0}^t u^{(\bar{\beta})}(\tau) (t - \tau)^{\bar{\beta} - \beta - 1} d\tau, \quad (1)$$

em que  $\bar{\beta} = \min\{p \in \mathbb{Z} : p \geq \beta\}$  pode-se chamar de teto (inteiro) do número real  $\beta$ . Quando  $\beta \notin \mathbb{Z}$ , temos  $\bar{\beta} - 1 < \beta < \bar{\beta}$ , ou seja,  $-1 < \beta - \bar{\beta} < 0$ . Além disso, estamos usando  $z! = \Gamma(z + 1)$ .

## Transformada Diferencial Generalizada

Considerando uma função  $u$  da variável real  $t$ , definida para  $t \geq t_0$ , há situações em que convém representar  $u(t)$  mediante uma série de potências de  $t - t_0$  em que os expoentes são múltiplos de um número real  $\beta$ , com  $\beta > 0$ . Nesse caso, temos

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k^{(\beta)} (t - t_0)^{\beta k}. \quad (2)$$

Os coeficientes formam uma sequência que é chamada de Transformada Diferencial Generalizada de ordem  $\beta$ , com centro em  $t_0$ , da função  $u$ . Avaliando em  $t = t_0$ , verifica-se que  $U_0^{(\beta)} = u(t_0)$ .

Se introduzirmos a variável  $r = (t - t_0)^{\beta}$ , temos que

$$u(t_0 + r^{1/\beta}) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k^{(\beta)} r^k. \quad (3)$$

Como o lado direito dessa equação é a série de Taylor de  $g(r) = u(t_0 + r^{1/\beta})$  com centro em  $r = 0$ , concluímos que

$$U_k^{(\beta)} = \frac{g^{(k)}(0)}{k!}. \quad (4)$$



Isto garante a unicidade, uma vez garantida a existência, da transformada generalizada. Para tanto, é necessário determinar o conjunto de valores de  $t$  nos quais a série converge para a função  $u(t)$ .

Para compreender a transformada generalizada, convém considerar a ordem  $\beta = 1/2$  e a função  $u(t) = e^{t+\sqrt{t}}$  centrada em  $t_0 = 0$ . A função auxiliar é  $g(r) = u(t_0 + r^{1/\beta}) = u(r^2) = e^{r^2+r}$  e a transformada generalizada é dada por

$$U_k^{(\frac{1}{2})} = \frac{g^{(k)}(0)}{k!}. \quad (5)$$

No entanto, em lugar de calcular as derivadas, pode-se usar a série de Taylor da exponencial para obter

$$U_k^{(\frac{1}{2})} = \sum_{q=0}^{[k/2]} \frac{1}{q!(k-2q)!}, \quad (6)$$

em que os colchetes denotam a função parte inteira. Truncando a série em  $k = 10$ , obtemos

$$u(t) \approx 1 + \sqrt{t} + \frac{3t}{2} + \frac{7t^{3/2}}{6} + \frac{25t^2}{24} + \frac{27t^{5/2}}{40} + \frac{331t^3}{720} + \frac{1303t^{7/2}}{5040} + \frac{1979t^4}{13440} + \frac{5357t^{9/2}}{72576} + \frac{19093t^5}{518400}. \quad (7)$$

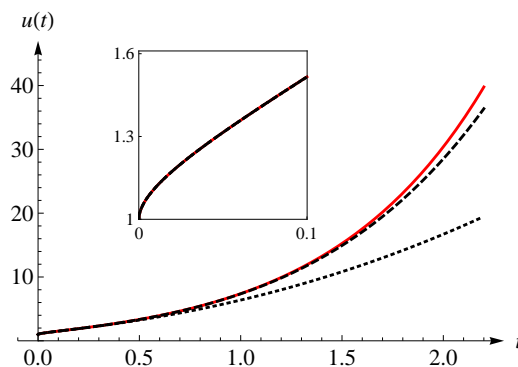


Figura 1: Gráficos da função  $u(t) = e^{t+\sqrt{t}}$  (linha contínua) e da sua série generalizada. A série foi truncada em  $k = 5$  (linha pontilhada) e  $k = 10$  (linha tracejada), como na Equação 7.

A comparação entre os gráficos da função e da série truncada pode ser feita com auxílio da Fig. 1. Observa-se que há excelente acordo para  $k = 5$ , quando  $0 \leq t \leq 0.6$  e para  $k = 10$ , desde que  $0 \leq t \leq 1.2$ . O gráfico inserido é uma ampliação do principal, para  $0 \leq t \leq 0.1$ . A primeira derivada tende a  $+\infty$  quando  $t \rightarrow 0^+$ .

A Tabela 1 apresenta as principais propriedades da transformada diferencial generalizada. As propriedades (i) e (ii) exprimem a linearidade da transformada. A (iii) diz que a transformada do produto é a convolução discreta das transformadas dos fatores. A (iv) estabelece como calcular a transformada da derivada de Caputo.

## Método da Transformada Diferencial Generalizada (GDTM)

Consideremos o problema de condição inicial dado por  $u(t_0) = u_0$  e

$$D_{t_0}^\beta u(t) = f(t, u(t)), \quad (8)$$

Tabela 1: Propriedades da Transformada Diferencial Generalizada. Considera-se que  $U_k^{(\beta)}$  e  $W_k^{(\beta)}$  são as transformadas de  $u(t)$  e  $w(t)$ , enquanto  $\alpha$  é uma constante.

Propriedade	Função Original	Transformada Diferencial Generalizada
i	$f(t) = \alpha u(t)$	$F_k^{(\beta)} = \alpha U_k^{(\beta)}$
ii	$f(t) = u(t) \pm w(t)$	$F_k^{(\beta)} = U_k^{(\beta)} \pm W_k^{(\beta)}$
iii	$f(t) = u(t) w(t)$	$F_k^{(\beta)} = \sum_{q=0}^k U_q^{(\beta)} W_{k-q}^{(\beta)}$
iv	$f(t) = D_{t_0}^\beta u(t)$	$F_k^{(\beta)} = \frac{((k+1)\beta)!}{(k\beta)!} U_{k+1}^{(\beta)}$

para  $t > t_0$ . A transformada diferencial generalizada de  $f(t, u(t))$  depende da transformada  $U^{(\beta)}$ . Denotando-a por  $F_k^{(\beta)}(U^{(\beta)})$ , a Equação 8 transforma-se em

$$\frac{((k+1)\beta)!}{(k\beta)!} U_{k+1}^{(\beta)} = F_k^{(\beta)}(U^{(\beta)}), \quad (9)$$

para todo  $k \geq 0$ . Trata-se de um sistema de equações algébricas que pode ser muito difícil de resolver. No entanto, há situações de interesse em que  $F_k^{(\beta)}(U^{(\beta)})$  depende apenas dos valores dos termos  $U_q^{(\beta)}$ , com  $0 \leq q \leq k$ , ou seja,

$$F_k^{(\beta)}(U^{(\beta)}) = F_k^{(\beta)}(U_0^{(\beta)}, U_1^{(\beta)}, \dots, U_k^{(\beta)}). \quad (10)$$

Então, pode-se calcular cada valor da transformada a partir dos anteriores, de acordo com

$$U_{k+1}^{(\beta)} = \frac{(k\beta)!}{((k+1)\beta)!} F_k^{(\beta)}(U_0^{(\beta)}, U_1^{(\beta)}, \dots, U_k^{(\beta)}), \quad (11)$$

para todo número natural  $k$ , com  $U_0^{(\beta)} = u_0$ . Isto estabelece uma relação de recorrência mediante a qual podem ser gerados todos os valores da transformada. A solução do problema será dada pela Equação 2.

## Aplicação do GDTM no modelo fracionário de Malthus

Consideramos o modelo fracionário de Malthus, com derivada de Caputo de ordem  $\beta$ , sendo  $0 < \beta \leq 1$  (CAMARGO & OLIVEIRA, 2015). O problema a resolver é dado por

$$D_{t_0}^\beta u(t) = \alpha u(t), \quad (12)$$

e  $u(t_0) = u_0$ , sendo  $\alpha$  e  $u_0$  certas constantes positivas.

Para aplicar método apresentado na seção anterior, identificamos  $f(t, u(t)) = \alpha u(t)$ . De acordo com a propriedade (i) da Tabela 1, a transformada dessa função é

$$F_k^{(\beta)}(U_k^{(\beta)}) = \alpha U_k^{(\beta)}. \quad (13)$$

Portanto, a relação de recorrência na Equação 11 adota a forma

$$U_{k+1}^{(\beta)} = \frac{(k\beta)!}{((k+1)\beta)!} \alpha U_k^{(\beta)}, \quad (14)$$

enquanto a condição inicial é

$$U_0^{(\beta)} = u_0. \quad (15)$$

A Tabela 2 mostra os valores da transformada diferencial obtidos a partir da condição inicial e da relação de recorrência, para  $k$  de 0 a 4. Mediante a tabela, pode-se fazer a conjectura de que para todo  $k \geq 0$  vale

$$U_k^{(\beta)} = \frac{\alpha^k u_0}{(k\beta)!}. \quad (16)$$

Tabela 2: Primeiros cinco valores da Transformada Diferencial Generalizada da solução do modelo fracionário de Malthus.

$k$	$U_k^{(\beta)}$
0	$u_0$
1	$\frac{(0\beta)!}{((0+1)\beta)!} \alpha U_0^{(\beta)} = \frac{\alpha u_0}{\beta!}$
2	$\frac{(1\beta)!}{((1+1)\beta)!} \alpha U_1^{(\beta)} = \frac{\alpha^2 u_0}{(2\beta)!}$
3	$\frac{(2\beta)!}{((2+1)\beta)!} \alpha U_2^{(\beta)} = \frac{\alpha^3 u_0}{(3\beta)!}$
4	$\frac{(3\beta)!}{((3+1)\beta)!} \alpha U_3^{(\beta)} = \frac{\alpha^4 u_0}{(4\beta)!}$

A conjectura pode ser demonstrada pelo método de indução. Primeiramente, a validade para  $k = 0$  é garantida pela Equação 15. Para finalizar, deve-se verificar que a validade da Equação 16 garante a validade de

$$U_{k+1}^{(\beta)} = \frac{\alpha^{k+1} u_0}{((k+1)\beta)!}. \quad (17)$$

A verificação é simples com base na Equação 14. De fato, se a proposição na Equação 16 for verdadeira, então

$$U_{k+1}^{(\beta)} = \frac{(k\beta)!}{((k+1)\beta)!} \alpha \frac{\alpha^k u_0}{(k\beta)!} = \frac{\alpha^{k+1} u_0}{((k+1)\beta)!}. \quad (18)$$

Conclui-se, assim, que a conjectura é válida.

A solução de problema é obtida ao substituir a Equação 16 na Equação 2, isto é,

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k u_0}{(k\beta)!} (t-t_0)^{\beta k} = u_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha(t-t_0)^\beta)^k}{\Gamma(k\beta+1)} = u_0 E_\beta((\alpha(t-t_0)^\beta), \quad (19)$$

em que

$$E_\beta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k\beta+1)} \quad (20)$$



é a função de Mittag-Leffler visto em Camargo & Oliveira (2015). É muito importante salientar que o resultado apresentado na Equação 20 coincide com a solução usualmente obtida pelo método da transformada de Laplace pelos trabalhos de Camargo & Oliveira (2015) e Kuroda (2016). Esta solução recupera a forma exponencial no caso  $\beta = 1$ .

## Conclusões

Apresentamos brevemente a derivada fracionária de Caputo, a transformada diferencial generalizada e o método de resolução de equações diferenciais de ordem fracionária baseado nessa transformada. O método foi aplicado à resolução do modelo fracionário de Malthus e a solução obtida coincide com os resultados reportados na literatura em que aplica-se o método da transformada de Laplace. O procedimento é análogo para sistemas de equações.

Deve-se ressaltar que os dois métodos são igualmente eficientes na hora de tratar modelos fracionários lineares como o de Malthus. No entanto, o Método da Transformada Diferencial Generalizada tem sido aplicado com sucesso para resolver modelos não lineares. Nesse caso, não é simples obter uma fórmula explícita para os termos da transformada, mas a série de potências pode ser aproximada mediante truncamento.

## Agradecimentos

Os autores agradecem o CNPq pelo apoio financeiro. Também agradecem o grupo de pesquisa CF@FC - Cálculo Fracionário, da Unesp, por discussões úteis.

## Referências

- ABDEL-HALIM HASSAN, I. H. Application to Differential Transformation Method for Solving Systems of Differential Equations. **Applied Mathematical Modelling**, v.32, n.12, p. 2552-2559, 2008.
- ARSHAD, S.; SOHAIL, A.; JAVED, S. Dynamical Study of Fractional Order Tumor Model. **International Journal of Computational Methods**, v.12, n.5, p.12, 2015.
- CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C. **Cálculo Fracionário**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. 184p.
- FREIHAT, A.; MOMANI, S. Application of Multistep Generalized Differential Transform Method for the Solutions of the Fractional-Order Chua's System. **Discrete Dynamics in Nature and Society**, v. 2012, n. 427393, p.12, 2012.
- KURODA, L. K. B. **Cálculo Fracionário Aplicado em Dinâmica Tumoral: Método da Transformada Diferencial Generalizada**. 2016. 105f. Dissertação (Mestrado em Biometria) - IBB/UNESP, Botucatu, 2016.
- KURODA, L. K. B.; GOMES, A. V.; TAVONI, R.; MANCERA, P. F. A.; VARALTA, N.; CAMARGO, R. F. Unexpected Behavior of Caputo Fractional Derivative. **Computational and Applied Mathematics**, p. 11, 2015. doi:10.1007/s40314-015-0301-9.
- MIRZAEI, F. Differential Transform Method for Solving Linear and Nonlinear Systems of Ordinary Differential Equations. **Applied Mathematical Sciences**, v.5, n.70, p.3465-3472, 2011.



Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional  
De 2 a 5 de Maio de 2017  
Unesp, Faculdade de Ciências - Bauru/SP

ODIBAT, Z.; BERTELLE, C.; AZIZ-ALAOUI, M.; DUCHAMP, G. H. E. A Multi-step Differential Transform Method and Application to Non-chaotic or Chaotic Systems. **Computer and Mathematics with Applications**, v.12, p.15, 2010.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**. 3 Ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.

## Método de perturbação homotópica e a transformada sumudu num modelo dinâmico

*Luverci do Nascimento Ferreira*  
Universidade de Campinas; IMECC  
luverci@ime.unicamp.br

*Edmundo Capelas de Oliveira*  
Universidade de Campinas; IMECC  
capelas@ime.unicamp.br

**Resumo:** Apresentam-se aplicações da transformada sumudu<sup>1</sup> no método numérico intitulado Método de Perturbação Homotópica (MPH) em modelos dinâmicos descritos por equações diferenciais parciais fracionárias não-lineares. Mostramos que as soluções numéricas encontradas são eficientes do ponto de vista computacional.

**Palavras-chave:** Cálculo Fracionário. Transformada sumudu. Dinâmica populacional. Dinâmica dos fluidos.

### Introdução

O modelo dinâmico estuda processos cuja evolução é dada por uma lei matemática tendo como objetivo fornecer uma teoria matemática que permita compreender e prever a evolução destes processos. Neste trabalho analisamos dois modelos dinâmicos, o populacional e dos fluidos.

A dinâmica populacional procura analisar a expansão e a contração de uma população em um ambiente tendo como prováveis variáveis a densidade populacional, as taxas de natalidade, mortalidade, imigração, emigração e outras variáveis que contribuem para o tamanho da população.

Aqui estudamos um modelo que utiliza uma equação parabólica degenerada para a difusão espacial de uma população biológica (uma população de uma determinada espécie animal), no qual utiliza o fato de ocorrer dispersão ou imigração da população em uma determinada região (difusão). Este modelo fracionário de dinâmica populacional foi apresentado no X ENAMA 2016 [FERREIRA; CAPELAS DE OLIVERIA, 2016].

Sendo assim considere a seguinte equação diferencial parcial fracionária não-linear para a densidade populacional  $\rho$ ,

$$\frac{d^\alpha \rho}{dt^\alpha} = \frac{\partial^2 \rho^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho^2}{\partial y^2} + h\rho^a(1 - r\rho^b), \quad t \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

onde  $0 < \alpha \leq 1$  para  $t \geq 0$  e  $a, b, h, r, x, y \in \mathbb{R}$  e com condição inicial dada por  $\rho(x, y, 0)$ . Se  $\alpha = 1$  a equação se reduz a um modelo clássico de dinâmica populacional (GURTIN; MACCAMY, 1977).

Por outro lado, o modelo de fluidos considera o movimento estável e unidimensional de um fluido viscoso através de um tubo. A equação de movimento que regula o campo de fluxo no tubo é a equação de Navier-Stokes.

Sendo assim considere a equação diferencial parcial fracionária não-linear em coordenadas cilíndricas para a velocidade de um fluido

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = P + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad t \geq 0, \quad r \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

<sup>1</sup>Sumudu é uma palavra no idioma sinhala que significa suave.



onde  $0 < \alpha \leq 1$  e  $P = -\frac{\partial p}{\rho \partial z}$  com  $p$  a pressão,  $\nu$  a viscosidade cinemática e  $\rho$  a densidade. Se  $\alpha = 1$  temos a equação de Navier-Stokes (KUMAR; KUMAR; ABBASBANDY; RASHIDI, 2014).

Vamos analisar a dinâmica desses modelos através da formulação da modelagem fracionária, relativa ao tempo, empregando a transformada sumudu no MPH.

## Preliminares e resultados

Nesta seção expomos algumas definições e resultados básicos do cálculo fracionário (OLDHAM; SPANIER, 1974) e (CAMARGO; CAPELAS DE OLIVEIRA) e da transformada sumudu (WATUGALA, 1993) e (KILIÇMAN; ELTAYEB, 2010) que serão empregados ao longo do trabalho.

### Cálculo Fracionário

**Definição 1 (Integral fracionária)** O operador integral fracionária de ordem  $\alpha > 0$  de uma função real de variável real  $f(t) \in C_\mu$ ,  $\mu \geq -1$  é dada por

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \text{ com } \alpha \geq 0. \quad (3)$$

**Definição 2 (Derivada fracionária de Caputo)** A derivada fracionária de Caputo é dada por

$${}^*D_t^\alpha f(t) := J_t^{m-\alpha} \circ D_t^m f(t),$$

com  $\alpha > 0$  e  $m \in \mathbb{N}$ , ou seja

$${}^*D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}}, & m-1 < \alpha < m, \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), & \alpha = m. \end{cases} \quad (4)$$

**Definição 3 (Função de Mittag-Leffler)** Definimos a seguinte representação em série de potência para a função de Mittag-Leffler de um parâmetro para todo  $z \in \mathbb{C}$ :

$$E_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak+1)}, \text{ Re}(a) > 0. \quad (5)$$

### Transformada sumudu

A transformada sumudu é uma transformada integral similiar à clássica transformada de Laplace, introduzida no início da década de 90 por [WATUGALA, 1993] para resolver equações diferenciais envolvendo problemas de controle em engenharia.

**Definição 4 (Transformada sumudu)** Considere o conjunto de funções

$$A = \{f(t) : \exists M, \tau_1, \tau_2 > 0, |f(t)| < M e^{\frac{t}{\tau_1}}, \text{ se } t \in (-1)^j \times [0, \infty)\},$$

tal que para  $f(t) \in A$  temos:

$$S[f(t); u] = G_s(u) = \int_0^\infty f(ut) e^{-t} dt, \quad u \in (-\tau_1, \tau_2). \quad (6)$$

**Teorema 1 (Dualidade)** *Seja  $f(t) \in A$  com transformada de Laplace  $F(s)$  e transformada de sumudu  $G(u)$  então temos que*

$$G(u) = \frac{F(1/u)}{u} \quad e \quad F(s) = \frac{G(1/s)}{s}. \quad (7)$$

**Teorema 2 (Integral fracionária)** *Se  $F(u)$  é a transformada sumudu de  $f(t)$ , então a transformada sumudu da integral fracionária de  $f(t)$  de ordem  $\alpha$ ,  $J^\alpha f(t)$ , é dada por*

$$S[J^\alpha f(t)] = u^\alpha F(u), \quad \text{Re}(\alpha > 0). \quad (8)$$

**Teorema 3 (Derivada de ordem inteira)** *Se  $F(u)$  é a transformada sumudu de  $f(t)$ , então a transformada sumudu das derivadas de ordem inteira é dada por:*

$$S[D^n f(t)] = u^{-n} \left[ F(u) - \sum_{k=0}^{n-1} u^k f^{(k)}(0) \right]. \quad (9)$$

**Teorema 4 (Derivada fracionária)** *Seja  $f(t) \in A$  com transformadas de Laplace e sumudu, dadas por  $F(s)$  e  $G(u)$ , respectivamente, então a transformada sumudu da derivada fracionária de Caputo  $D_t^\alpha f(t)$  é dada por :*

$$G_\alpha(u) = S[D_t^\alpha f(t)] = u^{-\alpha} G(u) - \sum_{k=0}^{n-1} u^{k-\alpha} f^{(k)}(0). \quad (10)$$

onde  $n-1 < \alpha \leq n$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 5 (Sumudu inversa)** *Seja  $G(u)$  uma transformada sumudu de  $f(t)$  tal que:*

- i)  $G(1/s)/s$  é uma função meromorfa, com singularidades em  $\text{Re}(s) < \gamma$  e
- ii) existe uma região circular  $\Gamma$  com raio  $R$  e constantes positivas  $M$  e  $k$ , com

$$|G(1/s)/s| < MR^{-k}$$

então a função  $f(t)$  é dada por

$$\begin{aligned} f(t) = S^{-1}[G(s)] &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} G\left(\frac{1}{s}\right) \frac{ds}{s} \\ &= \sum \text{Res} \left[ e^{st} \frac{G(1/s)}{s} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

## Análise dos métodos

Nesta seção iremos descrever o Método de Perturbação Homotópica com sumudu (MPHS).

### Descrição do método MPHS

Para ilustrar a ideia básica deste método, vamos considerar uma equação diferencial fracionária parcial não-linear e não-homogênea com condição inicial, dada por:

$$\begin{aligned} D_t^\alpha U(x,t) + RU(x,t) + NU(x,t) &= g(x,t), \\ U^i(x,0^+) &= f_i(x), \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (12)$$

com  $m - 1 < \alpha \leq m$  e  $D_t^\alpha U(x, t)$  é a derivada fracionária de Caputo da função  $U(x, t)$ , conforme a Definição 2;  $R$  é um operador diferencial linear;  $N$  representa os termos gerais do operador diferencial não-linear, e  $g(x, t)$  é o termo fonte.

Aplicando a transformada sumudu em ambos os lados da equação (12) e usando a propriedade de diferenciabilidade da transformada sumudu, conforme Definição 4, temos

$$S[U(x, t)] = \sum_{i=0}^{m-1} u^i f_i(x) + u^\alpha S[g(x, t)] - u^\alpha S[RU(x, t) + NU(x, t)]. \quad (13)$$

Utilizando a transformada sumudu inversa em ambos os lados da equação (13), temos

$$U(x, t) = \sum_{i=0}^{m-1} t^i f_i(x) + S^{-1}[u^\alpha S[g(x, t)]] - S^{-1}[u^\alpha S[RU(x, t) + NU(x, t)]]. \quad (14)$$

Podemos escrever a equação (14) como

$$U(x, t) = G(x, t) - S^{-1}[u^\alpha S[RU(x, t) + NU(x, t)]], \quad (15)$$

onde

$$G(x, t) = \sum_{i=0}^{m-1} t^i f_i(x) + S^{-1}[u^\alpha S[g(x, t)]]$$

representa os termos decorrentes do termo fonte e das condições iniciais.

Aplicando o MPH descrito em (HE, 1999) temos

$$U(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n U_n(x, t), \quad (16)$$

e o operador não-linear pode ser decomposto como

$$NU(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n A_n, \quad (17)$$

onde os termos  $A_n$  são os polinômios de Adomian (GHORBANI, 2009) dados por

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[ N \left( \sum_{i=0}^n \lambda^i U_i \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

Substituindo as equações (16) e (17) na equação (15) obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n U_n(x, t) = G(x, t) + p \left( S^{-1} \left[ u^\alpha S \left[ R \sum_{n=0}^{\infty} p^n U_n(x, t) + \sum_{n=0}^{\infty} p^n A_n \right] \right] \right), \quad (19)$$

A equação (19) foi obtida utilizando a transformada sumudu, o MPH e os polinômios de Adomian. Observando os coeficientes das potências de  $p$  da equação (19) obtemos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} p^0 : U_0(x, t) &= G(x, t), \\ p^1 : U_1(x, t) &= -S^{-1}[u^\alpha S[RU_0(x, t) + A_0]], \end{aligned} \quad (20)$$

$$p^2 : U_2(x, t) = -S^{-1}[u^\alpha S[RU_1(x, t) + A_1]]$$

$$p^1 : U_3(x, t) = -S^{-1}[u^\alpha S[RU_2(x, t) + A_2]]$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$p^k : U_k(x, t) = -S^{-1}[u^\alpha S[RU_{k-1}(x, t) + A_{k-1}]]$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

(21)

Utilizando o método acima podemos encontrar os valores de  $U_n$ . Portanto, aproximamos a solução analítica  $U(x, t)$  pela série

$$U(x, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N U_n(x, t). \quad (22)$$

## Exemplos numéricos

Nesta seção utilizamos o MPHS para analisar os resultados numéricos obtidos na solução das equações dos modelos dinâmicos propostos para alguns casos particulares.

### Exemplo 1

Considere o modelo fracionário de dinâmica populacional relativo ao tempo dado por

$$D_t^\alpha U(x, y, t) = D_x^2 U^2 + D_y^2 U^2 + hU, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (23)$$

sujeito à condição inicial

$$U(x, y, 0) = \sqrt{xy}.$$

Aplicando o método MPHS na equação (23) obtemos

$$\begin{aligned} U(x, y, t) &= \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} p^n U_n(x, y, t) \\ &= \sqrt{xy} \left[ 1 + \frac{ht^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{(ht^\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{(ht^\alpha)^3}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \right]. \end{aligned}$$

A equação pode ser escrita em termos da função de Mittag-Leffler como

$$U(x, y, t) = \sqrt{xy} E_\alpha(ht^\alpha).$$

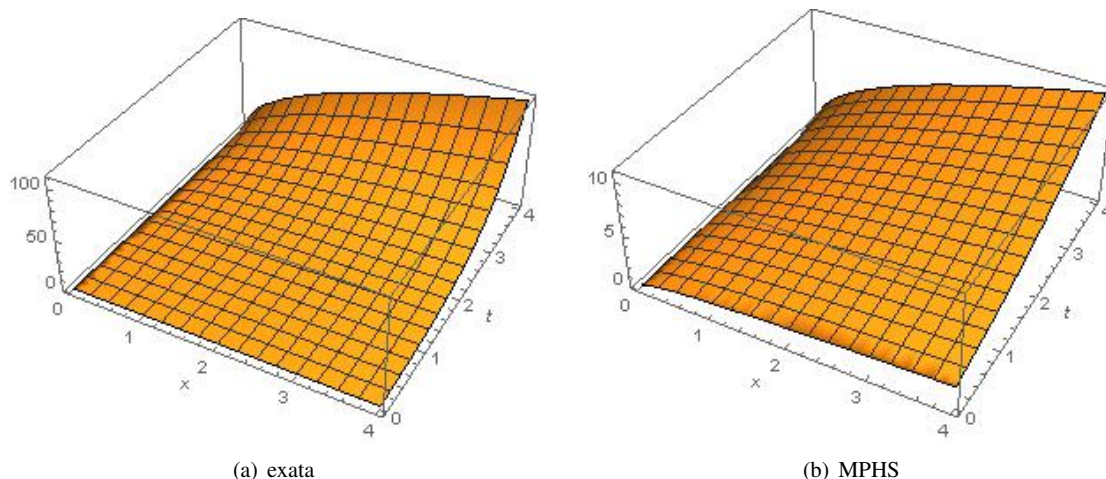


Figura 1: A solução de  $U(x, y, t)$  com  $\alpha = 1$ ,  $h = 0.5$  e  $y = 1$ .

### Exemplo 2

Considere o modelo fracionário de dinâmica populacional relativo ao tempo

$$D_t^\alpha U(x, y, t) = D_x^2 U^2 + D_y^2 U^2 + hU(1 - rU), \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (24)$$

sujeito à condição inicial

$$U(x, y, 0) = e^{\sqrt{\frac{hr}{8}}(x+y)}.$$

Aplicando o método MPHS na equação (24) obtemos a seguinte solução

$$U(x, y, t) = e^{\sqrt{\frac{hr}{8}}(x+y)} \left[ 1 + \frac{ht^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(ht^\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{(ht^\alpha)^3}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots \right].$$

Observe que a equação pode ser escrita em termos da função de Mittag-Leffler, logo

$$U(x, y, t) = e^{\sqrt{\frac{hr}{8}}(x+y)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ht^\alpha}{\Gamma(n\alpha+1)} = e^{\sqrt{\frac{hr}{8}}(x+y)} E_\alpha(ht^\alpha).$$

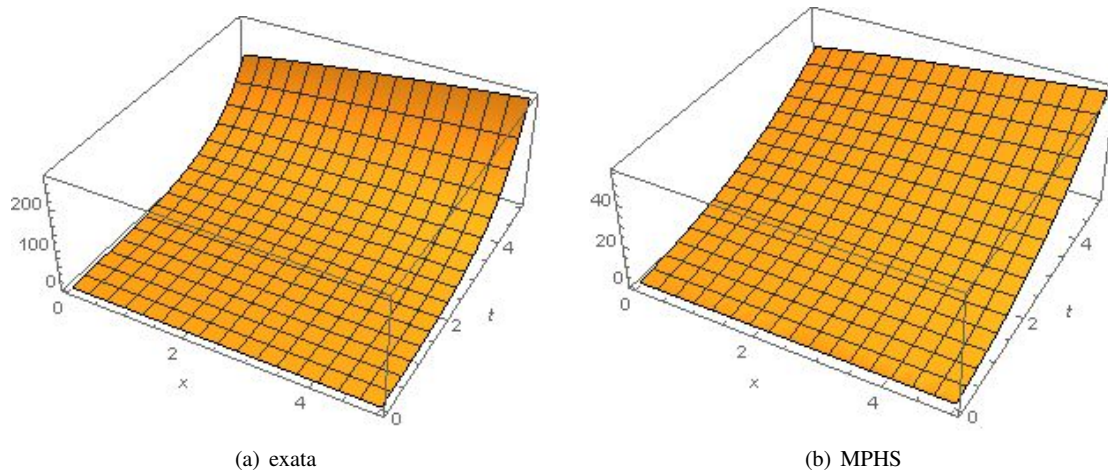


Figura 2: A solução de  $U(x, y, t)$  com  $\alpha = 1$ ,  $h = 0.5$ ,  $y = 1$  e  $r = 0.8$ .

### Exemplo 3

Considere o modelo fracionário de dinâmica dos fluidos relativo ao tempo

$$D_t^\alpha U(r, t) = P + D_r^2 U + \frac{1}{r} D_r U, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (25)$$

sujeito à condição inicial

$$U(r, 0) = 1 - r^2.$$

Aplicando o método MPHS na equação (25) obtemos a seguinte solução

$$U(r, t) = 1 - r^2 + \frac{P - 4}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha.$$

#### Exemplo 4

Considere o modelo fracionário de dinâmica dos fluidos relativo ao tempo

$$D_r^\alpha U(r,t) = D_r^2 U + \frac{1}{r} D_r U, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (26)$$

sujeito à condição inicial

$$U(r,0) = r.$$

Aplicando o método MPHS na equação (26) obtemos a seguinte solução

$$\begin{aligned} U(r,t) &= \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} p^n U_n(r,t) \\ &= r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 \times 3^2 \times 5^2 \times \dots \times (2n-3)^2 t^n}{r^{2n-1} n!}. \end{aligned}$$

#### Conclusão

Neste trabalho utilizamos a transformada sumudu aplicada ao MPH para resolver equações diferenciais parciais fracionárias relacionadas aos modelos dinâmicos.

A técnica proposta pelo MPHS mostrou-se eficaz produzindo os mesmos resultados e de acordo com as soluções exatas para modelos conhecidos. O esforço computacional, dentro do modelo analisado, foi otimizado mantendo a precisão dos resultados.

Esse método é uma ferramenta poderosa para a análise dos modelos de dinâmica populacional e da dinâmica dos fluidos podendo também ser eficaz em outros modelos que apresentam termos não-lineares, como por exemplo a equação fracionária de Fokker-Planck (DUBEY; ALKAHTANI; ATANGANA, 2015).

Os resultados deste trabalho estão compilados na tese de doutorado em andamento [FERREIRA, 2017].

#### Referências

- CAMARGO, R DE F.; CAPELAS DE OLIVEIRA, E. **Cálculo Fracionário**, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2015
- DUBEY, R. S.; ALKAHTANI, B. S. T.; ATANGANA, A. **Analytical Solution of Space-Time Fractional Fokker-Planck Equation by Homotopy Perturbation Sumudu Transform Method**, Math. Prob. in Eng., **2015**, 1-7, 2015.
- FERREIRA, L DO N. **As transformadas de Laplace e sumudu em modelos dinâmicos**. 2017. Tese de Doutorado (em andamento) - IMECC/UNICAMP, Campinas, 2017.
- FERREIRA, L DO N.; CAPELAS DE OLIVEIRA, E. **Transformada sumudu e o modelo fracionário de dinâmica populacional**. In: X ENCONTRO NACIONAL DE ANÁLISE MATEMÁTICA E APLICAÇÕES, 2016, Niterói. **Anais...** Niterói:UFF, 2016. p.79-80.
- GHORBANI, A., **Beyond Adomian polynomials: He polynomials**, Chaos, Solitons and Fractals, **39**, 1486-1492, 2009.
- GURTIN, M.E.; MACCAMY, R.C., **On the diffusion of biological population**, Math. Biosci., **33**, 35-49, 1977.
- HE, J. H., **Homotopy perturbation technique**, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., **178**, 257-262, 1999.





Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional  
De 2 a 5 de Maio de 2017  
Unesp, Faculdade de Ciências - Bauru/SP

KILIÇMAN, A.; ELTAYEB, H.; ATAN, K. A. M., **A note on the comparison between Laplace and Sumudu transforms**, Bull. Iranian Math. Soc., **37**, 131-141, 2011.

KUMAR, S.; KUMAR, D.; ABBASBANDY, S.; RASHIDI, M.M., **Analytical solution of fractional Navier-Stokes equation by using modified Laplace decomposition method**, Ain Shams Eng. J., **5**, 569-574, 2014.

OLDHAM, K.B.; SPANIER, K. B., **The Fractional Calculus**, Academic Press, New York, 1974.

WATUGALA, G.K., **Sumudu transform: a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems**, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., **24**, 35-43, 1993.

## **Modelagem e análise dinâmica de Sistema Eletromecânico para aplicação em amortecimento de suspensão mecânica.**

*Leandro Cordeiro*

*Universidade Estadual Paulista - UNESP; Faculdade de Engenharia de Bauru  
leandro.cordeiro@feb.unesp.br*

*Bento Rodrigues de Pontes Junior*

*Universidade Estadual Paulista - UNESP; Faculdade de Engenharia de Bauru  
brpontes@feb.unesp.br*

*Tatiane Cornachini Cordeiro*

*Universidade Estadual Paulista - UNESP; Faculdade de Engenharia de Bauru  
taty\_unesp\_2006@yahoo.com.br*

**Resumo:** Este trabalho tem como objetivo construir a modelagem matemática e analisar dinamicamente um sistema eletromecânico aplicando à engenharia soluções matemáticas para condições que representam sua utilização em suspensões de veículos. O modelo foi simplificado a partir de análise do fenômeno desejado e sintetizado em um sistema de equações que acopla dois sistemas sendo um elétrico e outro mecânico. Na sequência foi realizada uma simulação numérica explorando a utilização paramétrica dos sistemas em que o sistema mecânico apresenta valores da ordem de grandeza de suspensões veiculares e foram explorados os valores para o sistema elétrico. O sistema elétrico realiza a função de amortecedor neste modelo. Como resultado obteve-se um modelo matemático válido para explorar o sistema desejado e as simulações apresentaram resultados compatíveis aos de uma suspensão passiva. O modelamento matemático, assim como os resultados das simulações, abrem oportunidade de aprofundar a aplicação de engenharia para que o modelo possa ser utilizado como suspensão ativa em que tanto análise dinâmica como controle serão alvos principais de aprofundamento que deverão ser realizados em trabalhos futuros.

**Palavras-chave:** Matemática Aplicada à Engenharia. Sistema Absorvedor Eletromecânico. Amortecimento Eletromagnético. Modelagem Matemática e Aplicações.

### **Introdução**

A modelagem matemática aplicada à engenharia mecânica e a engenharia elétrica é amplamente explorada em diversas tecnologias que estão presentes em nosso cotidiano desde nossos automóveis até a estruturas espaciais. Para que sejam possíveis estas aplicações se fazem necessários desenvolvimentos e aprofundamento no detalhamento sobre os componentes atuadores e seus modelos dinâmicos, especialmente quando envolvem transdutores que comutam energia mecânica em elétrica e vice-versa. Além disso, somente conhecendo-os melhor, será possível desenvolver, no tempo e no custo exigido pelo mercado de consumo, produtos que estabeleçam o compromisso entre a sua simplicidade e a performance desejada. Especial enfoque é dado neste trabalho para aplicação de engenharia em suspensão veicular devido ao seu elevado interesse e relevância, embora, esta modelagem seja plenamente aplicável em diversas outras formas de isolamento de vibrações como a de equipamentos industriais e voltados ao conforto humano.

### **Dispositivo Eletromecânico e Sistema Eletromagnético**

Pontes (2014), mostra o comportamento de um motor de relutância linear no estado estacionário. Este trabalho busca seguir o mesmo caminho para realizar a modelagem. Trata-se de um modelo linear, que usa a indução magnética de uma bobina para movimentar um sistema mecânico

(Figura 1). O dispositivo pode agir convertendo energia elétrica em energia mecânica e vice-versa. As aplicações podem ser feitas como absorvedor ou como armazenador de energia elétrica. Aqui, quando observado o subsistema mecânico e considerando que a energia seja proveniente da base do mesmo, este se comporta como um absorvedor. E observando o subsistema elétrico, composto de elementos elétricos e magnéticos (origem do termo eletromagnético), nota-se que, neste caso, ele dissipa energia mecânica. Desta forma, a junção dos subsistemas elétrico e mecânico dá origem ao termo sistema eletromecânico.

O dispositivo é modelado com dois graus de liberdade (2 GDL), o primeiro relacionado ao domínio mecânico e o segundo ao domínio elétrico. Assim, o dispositivo consiste em uma bobina acoplada a uma das partes do mecanismo e ligada rigidamente à massa na sua parte superior, conforme conexão 1 que pode ser vista no lado esquerdo do esquema da Figura 1. Esta conexão pode se mover livremente em relação a um ímã permanente. A parte inferior do dispositivo é ligada à base por onde entra a excitação de vibração, no ponto 2 do mesmo esquema. Conforme se varia a posição da base ocorre a vibração do sistema mecânico que faz com que o movimento relativo da bobina no campo magnético gerado pelo ímã permanente altere a corrente do subsistema elétrico. Neste sistema ocorre a dissipação da energia no resistor por meio da oscilação de corrente no circuito RLC. Desta forma, o efeito da interação entre a bobina e o campo magnético é uma força contra eletromotriz devido à bobina ser um condutor de corrente se movendo num campo magnético.

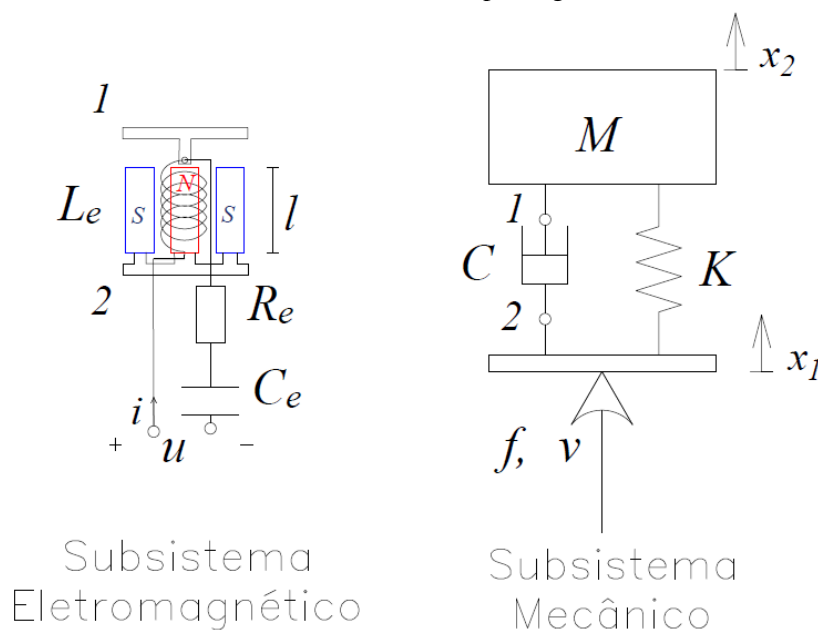


Figura 1 – Diagrama de atuador eletromecânico linear. Fonte próprio autor.

O lado esquerdo do diagrama representa o tipo de transdutor que utilizamos como amortecedor para a suspensão que depende das características elétricas e magnéticas do subsistema, tais como: resistência ( $R_e$ ), indutância ( $L_e$ ), e capacitância elétrica ( $C_e$ ). Da mesma forma, as propriedades do sistema mecânico, sobre o qual o amortecimento proveniente do transdutor atuou, são massa ( $M$ ), amortecimento ( $C$ ) e rigidez ( $K$ ). Note-se que a tensão nos terminais elétricos ( $u$ ), e a força de excitação pela base ( $f$ ), são as entradas do sistema. Um importante aspecto simplificador do equacionamento matemático é considerar que o movimento relativo entre a base e a massa suspensa que se deseja melhorar a vibração seja a diferença entre o movimento da base e da própria massa, como sugere a Equação 1. Naturalmente isto também se aplica à velocidade e à aceleração.

$$z = x_2 - x_1, \quad (1)$$

As equações fundamentais do sistema provêm de balanço de forças decorrentes do diagrama de corpo livre do sistema mecânico apresentado na Figura 1 e utilizando as equações de compatibilidade sobre a malha elétrica em análise, temos a Equação 2 (GARCIA, 2005):

$$F_M = F_k + F_i + F_C \quad u = V_{R_e} + V_{L_e} + V_{C_e} + V_M \quad (2)$$

onde,  $F_M$ ,  $F_k$ ,  $F_i$ ,  $F_C$ , e,  $V_{R_e}$ ,  $V_{L_e}$ ,  $V_{C_e}$ , são respectivamente, forças magnética, de mola, de inércia, de amortecimento (por simplicidade foi adotada zero), e as tensões equivalentes de resistência, de indutância, e de capacitância.

As equações constitutivas relativas a tensão e corrente (elétricas), relacionadas às forças de mola, de amortecimento e de inércia (mecânicas), e, relacionadas a conexão eletromecânica, seguem abaixo:

$$V_{R_e} = R_e \cdot i; V_{L_e} = L_e \cdot \frac{di}{dt}; V_{C_e} = \frac{1}{C_e} \int_0^t i dt; F_k = K \cdot z; F_C = C \cdot \dot{z}; F_i = M \cdot \ddot{z}; V_M = -T \cdot \dot{z}; F_M = T \cdot i$$

onde,  $i$ , é a corrente elétrica no condutor da bobina,  $\dot{z}$  e  $\ddot{z}$ , são velocidade e aceleração relativas entre a base e a massa suspensa,  $T$ , é o coeficiente de transdução do transdutor e representa a capacidade de converter energia elétrica em mecânica e vice-versa (dependendo da aplicação do mesmo).  $T$ , depende da geometria e disposição do dispositivo e pode ser resumida como (Eq. 3):

$$T = B \cdot l \quad (3)$$

onde,  $B$  e  $l$ , são o campo de indução magnética, considerado constante por simplificação e o comprimento da bobina (Fig. 1) imerso no campo magnético gerado entre a bobina percorrida pela corrente e o núcleo magnético em que está imersa. (PREUMONT, 2006)

### Equações de Movimento (Modelo Matemático)

As equações matemáticas, na forma padrão, que representam o sistema físico descrito até aqui podem ser escritas na forma da Equação 4.

$$\frac{1}{C_e} \int_0^t i dt + R_e \cdot i + L_e \frac{di}{dt} + T \cdot \dot{z} = u \quad M \cdot \ddot{z} + C \cdot \dot{z} + K \cdot z - T \cdot i = f \quad (4)$$

onde,  $u(t)$  e  $f(t)$ , são entradas fornecidas e conhecidas no tempo. Já as variáveis  $i(t)$  e  $z(t)$ , são as saídas que foram calculadas. E sabendo-se por medição direta qual é o movimento da base  $x_1(t)$  pode-se saber o movimento da massa suspensa  $x_2(t)$  por soma direta.

A Tabela 1 apresenta os valores utilizados na simulação numérica e obtenção dos resultados para a análise dinâmica.

Tabela 1: Parâmetros mecânicos e elétricos utilizados na simulação.

Parâmetro	Descrição resumida	Unidade (SI)	Valor
$M$	massa	kg	250
$C$	amortecimento	N.s/m	0
$K$	rigidez	N/m	40000
$R_e$	resistência elétrica	$\Omega$	3
$C_e$	capacitância	F	1400 $\mu$
$L_e$	indutância	H	0,763
$T=B.l$	fator de acoplamento	T.m	503

Os dados da Tabela 1 são compatíveis com a aplicação em suspensão de veículos, mas é importante salientar neste ponto que esta modelagem pode ser estendida a outras aplicações de isolamento de vibrações como em proteção de equipamentos precisos contra excitações provenientes do solo e isolamentos na interação homem-máquinas com foco no conforto humano.

## Resultados Dinâmicos do Modelo Matemático

Todas as simulações numéricas foram realizadas com as devidas substituições de variáveis para solução via espaço de estados e seu equacionamento foi omitido para não estender o conteúdo deste trabalho. A integração numérica utiliza o método de Runge-Kutta de quarta e quinta ordem.

A resposta dinâmica do sistema apresentou comportamento amortecido similar ao de um dispositivo passivo mecânico tradicional a partir do qual obteve-se seu fator de amortecimento equivalente.

Na Figura 2 é apresentada a resposta que resulta da simulação numérica realizada. Ela é característica de um sistema de amortecimento viscoso sujeito a uma condição inicial. Nesta simulação a condição de amplitude inicial utilizada foi de 0,1m. O resultado sugere realização de maior aprofundamento na exploração paramétrica do modelo para resistência, capacitância e indutâncias elétricas por seu comportamento não trivial de interação entre os sistemas elétrico e mecânico.

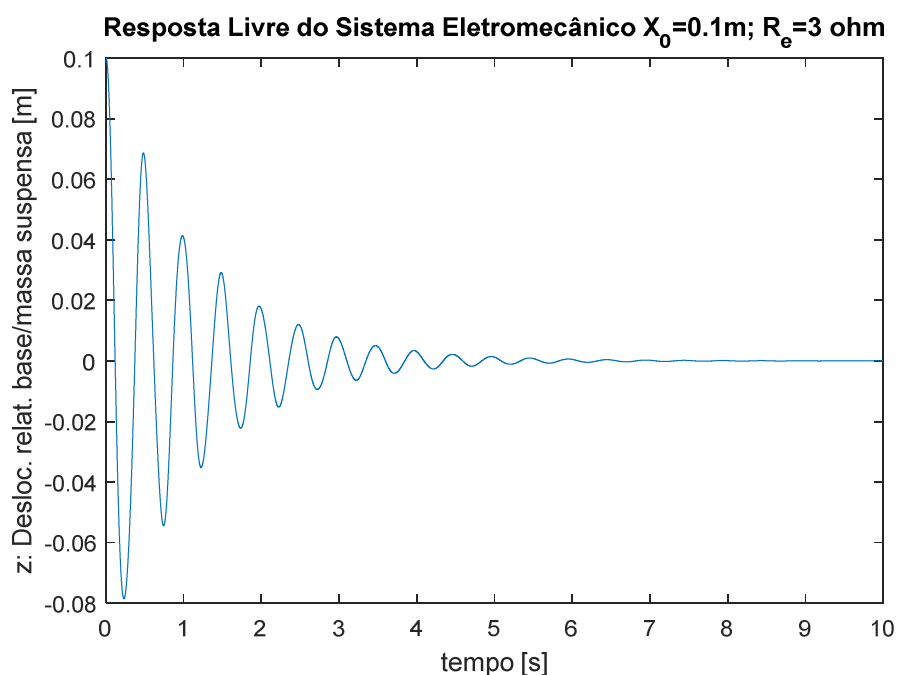


Figura 2: Resposta dinâmica à vibração livre (Comportamento de amortecimento viscoso).

Cabe detalhar neste ponto que para um sistema amortecido o fator de amortecimento é definido como a razão entre a constante de amortecimento ( $C$ ), e a constante de amortecimento crítico ( $C_c$ ), ambos são dependentes das propriedades físicas do sistema mecânico e  $\omega_n$ , é a sua frequência natural. Assim, podemos utilizar a Equação 5 em que  $\xi$ , é um fator adimensional.

$$\xi = \frac{C}{C_c} = \frac{C}{2 \cdot M \cdot \omega_n}$$

(5)

Neste caso, admitindo que o movimento pode ser adotado como de decaimento exponencial similar ao do caso viscoso, o fator de amortecimento equivalente é de  $\xi=0,00673$ , calculado pelo decaimento da curva de resposta.

Embora haja uma infinidade de abordagens que podem direcionar as análises deste sistema, ela foi conduzida para entradas de tensão contínua de 12V e uma força harmônica de amplitude 5 kN e frequência,  $\omega$ , de 0,5 Hz. Novamente, a simulação numérica foi realizada via espaço de estados.

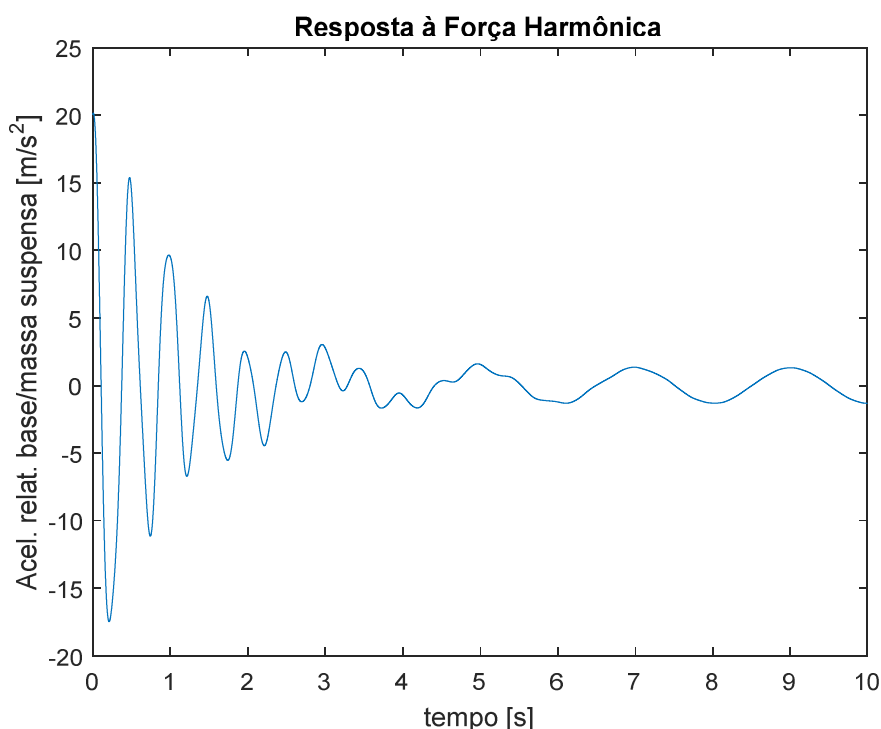


Figura 3: Resposta dinâmica à excitação harmônica.

Na Figura 3, apresenta-se a resposta a força harmônica pela base conforme descrita acima. Nota-se a transição entre os regimes transientes e permanente em torno de 6s. Ocorre na primeira parte do período um decaimento da aceleração até valores inferiores em que o regime fica estacionário menores em módulo a  $5 \text{ m/s}^2$ .

Outras análises provêm da Figura 4 em que se observa o plano de fases das variáveis de estado envolvidas, a saber: deslocamento e velocidade no sistema mecânico.



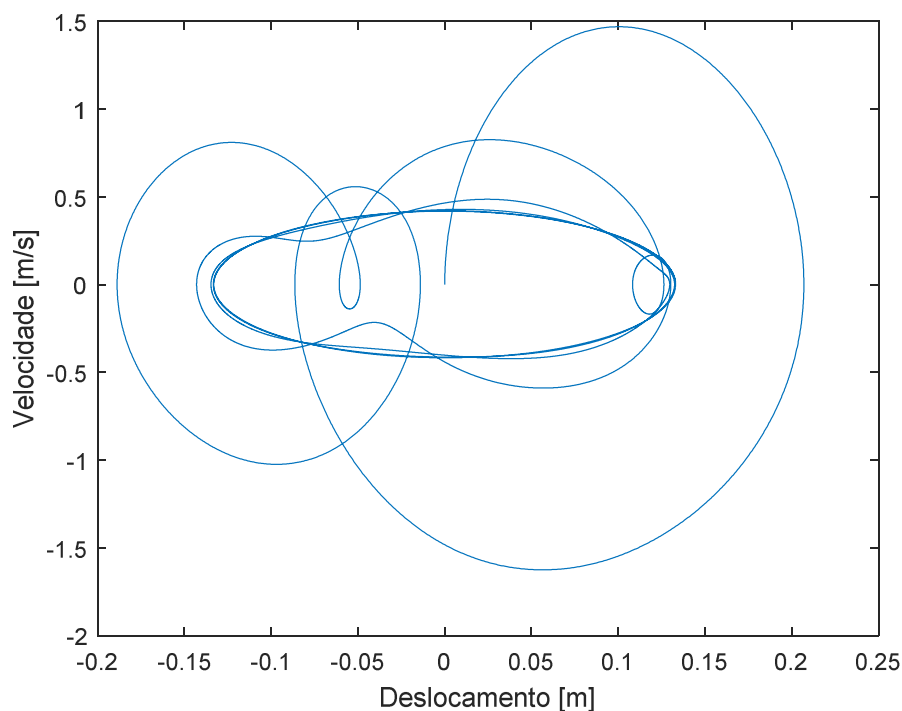


Figura 4: Plano de Fases do sistema sob força harmônica.

Um aprofundamento maior sobre a análise dinâmica do modelo deverá explorar sua estabilidade e discutir os efeitos de variações paramétricas sobre o sistema mecânico em que se deseja minimizar a vibração com enfoque na máxima potência dissipada.

## Conclusões

A modelagem aplicada a engenharia possibilitou construir, analisar dinamicamente e explorar o dispositivo eletromecânico, dando condições de ampliar o escopo e aprofundar o detalhamento que será realizado ao longo do projeto de pesquisa de mestrado que se inicia. Modificações no modelo e sua aplicação para exploração paramétrica e para fins de controle ativo em suspensões veiculares poderá ser alcançada em trabalhos futuros.

## Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos ao professor Dr. Bento Rodrigues de Pontes Junior pela orientação e ao departamento de pós-graduação de Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia de Bauru.

## Referências

ELLIOTT, Stephen J.; ZILLETTI, Michele. Scaling of electromagnetic transducers for shunt damping and energy harvesting. **Journal of Sound and Vibration**, v. 333, n. 8, 2014. p. 2185-2195.

GARCIA, C. **Modelagem e Simulação de Processos Industriais e de Sistemas Eletromecânicos**. 2 ed. ver. e amp. São Paulo-SP: EDUSP, 2005. p. 207-226.



PONTES, Bento R. et al. Contribution of electrical parameters on the dynamical behaviour of a nonlinear electromagnetic damper. **Nonlinear Dynamics**, v. 79, n. 3, p. 1957-1969, 2015.

PREUMONT, A. **Mechatronics: Dynamics of Electromechanical and Piezoelectrics Systems**. Dordrecht: Springer, 2006. 207 p.

YAMAPI, René, 2006. **Dynamics of an electromechanical damping device with magnetic coupling**. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, v. 11, n. 8, p. 907-921, 2006.

## Modelagem preliminar de turbina radial com entrada radial com o método da linha média

*Pedro Mantegazza*

*Universidade de São Paulo; Escola de Engenharia de São Carlos  
pedro.mantegazza@usp.br*

*Luben Cabezas-Gómez*

*Universidade de São Paulo; Escola de Engenharia de São Carlos  
lubencg@sc.usp.br*

*Felipe Costa Magazoni*

*Universidade de São Paulo; Escola de Engenharia de São Carlos  
magazoni@sc.usp.br*

**Resumo:** A procura pelo uso de fontes de novas fontes de energia útil tem suscitado o uso de fontes de energia residual de baixo potencial térmico. Essas fontes incluem energia solar, geotérmica, e térmica residual obtida em várias aplicações e processos industriais. Nesse contexto, o uso de sistemas de geração de energia elétrica operando segundo o ciclo Rankine orgânico é bastante recomendado atualmente. Os fluidos orgânicos se caracterizam por baixo ponto de ebulição a altas pressões, baixo volume específico e a possibilidade do uso de sistemas compactos. Entretanto, o uso de fontes de baixo potencial térmico resulta em uma eficiência energética baixa, sendo o estudo do dispositivo de expansão de bastante importância. O expansor escolhido para o ciclo compreende uma turbina radial com entrada radial. No artigo se utiliza o método da linha média para realizar o projeto preliminar do dispositivo, levando em consideração vários modelos de perdas desenvolvidos na literatura. O objetivo do trabalho é realizar o projeto preliminar de uma turbina radial de entrada radial de baixa potência para sistemas térmicos operando segundo um ciclo Rankine orgânico através de modelagem matemática e computacional. Os resultados obtidos são comparados com resultados apresentados na literatura, apresentando erros pequenos.

**Palavras-chave:** Métodos Numéricos e Aplicações. Ciclo Rankine orgânico. Turbina radial. Método da linha média.

### Introdução

A geração de energia elétrica a partir de fontes energéticas residuais e/ou renováveis, com sistemas térmicos operando segundo o ciclo Rankine orgânico (CRO) tem aumentado recentemente. O CRO emprega fluidos orgânicos, tais como hidrocarbonetos ou refrigerantes e opera a menores temperaturas e pressões. Com isso os riscos ligados à segurança e complexidade do sistema são reduzidos. Trabalhar com esses fluidos possibilita também seu uso com fontes de calor de baixo potencial energético, visto que eles possuem baixo ponto de ebulição, o que é bastante desejável no uso de energias renováveis e/ou residuais.

Algumas das características desejáveis para os fluidos CRO envolvem os seguintes fatores: inclinação positiva da curva de saturação do vapor (fluido seco), que permite a expansão do vapor sem que haja mudança de fase; baixo volume específico, o que diminui as dimensões do sistema; baixa viscosidade, para minimização das perdas por atrito; alta condutividade térmica, o que possibilita a obtenção de trocadores de calor menores; baixa reatividade com o ozônio (ODP – Ozone Depleting potential) e baixo potencial estufa (PALTRINIERI, 2014).

No presente trabalho se estuda uma turbina radial a ser operada em baixa potência. Segundo Dixon e Hall (2010), esse modelo de turbina proporciona uma eficiência tão boa quanto das turbinas

axiais, porém realizando um trabalho por estágio de expansão maior, além da facilidade de manufatura e robustez. Todavia, Whitfield e Baines (1991) afirmam que para menores potências uma turbina axial necessitaria de muitas pás de tamanho reduzido, aumentando a área em contato com o fluido de trabalho e conseqüentemente, as perdas por atrito e o fator de bloqueio causado pela camada limite. A folga entre as extremidades das pás e o envoltório da turbina provoca perdas por vazamento, que são bastante significativas em componentes axiais de dimensões reduzidas.

O objetivo deste artigo é apresentar um modelo para projeto preliminar de turbinas radiais com entrada radial empregando um procedimento similar ao apresentado em Rahbar et al. (2015) e uma metodologia de otimização de eficiência baseada nas variáveis de entrada do projeto de turbinas radiais. Esses autores apresentam uma metodologia de projeto de uma turbina radial baseado no método da linha média (MLM) e na otimização de parâmetros de entrada da turbina para operar num ciclo de Rankine orgânico. Esses autores consideraram vários modelos de perdas da literatura relativos aos componentes da turbina estudada. No presente trabalho se consideram alguns modelos de perdas diferentes.

## Metodologia

A modelagem da turbina radial com entrada radial é realizada pelo método da linha média. Esse método consiste no uso de um modelo unidimensional que é uma aproximação do escoamento na turbina baseada nas dimensões médias do estágio em consideração. A partir desse modelo se obtém dados preliminares da geometria dos componentes (WEI, 2014). Os cálculos dos estados termodinâmicos e das variáveis do fluido são realizados em seções chave ao longo da linha média considerada, como as fronteiras entre os componentes. Com esses cálculos, é possível estimar o desempenho da turbina com razoável precisão, baseando-se em modelos das perdas hidrodinâmicas e termodinâmicas, desenvolvidos na literatura. Nesse caso, porém, não se considera a geometria 3D das pás. Análises 3D mais detalhadas são realizadas com o auxílio de ferramentas computacionais, como o desenho em CAD e a dinâmica dos fluidos computacional (DFC). As mesmas permitem um projeto mais refinado e a otimização dos componentes para que efeitos de perdas sejam minimizados, por exemplo.

O MLM se baseia na aplicação das equações de conservação: primeira e segunda leis da termodinâmica, a equação da continuidade, conservação da quantidade de movimento linear e angular. Um esquema geométrico da turbina é apresentado na Figura 1. A turbina é composta por uma voluta (ponto 1) representando a entrada do expansor, cuja geometria descreve uma espiral, para que o escoamento, que é linear na tubulação de entrada, ganhe uma componente radial, além de uma redução de área ao longo do caminho, causando aceleração do fluido; um estator (entrada: ponto 2; saída: ponto 3), cuja redução da área de passagem provoca aumento da componente meridional da velocidade, e a redução do raio provoca aceleração da velocidade tangencial com pás direcionadoras sem curvatura (e portanto, o ângulo da resultante da velocidade em relação à direção radial na entrada é igual ao da saída) em seu interior, para que o padrão escoamento seja homogeneizado na direção desejada na saída do estator; um rotor (entrada: ponto 4; saída: ponto 5), componente responsável pela conversão da energia cinética do fluido que realiza trabalho no eixo do gerador, além de provocar a mudança da direção do escoamento da direção radial para a axial. As dimensões da turbina estão apresentadas na Figura 1, as dimensões  $b_2$  e  $b_3$  são consideradas iguais a  $b_4$ .

A velocidade do escoamento no interior da turbina pode ser decomposta em três componentes: radial, axial e tangencial. Uma simplificação nesse sistema de coordenadas permite considerar que a resultante das componentes radial e axial, denominada meridional, acompanhe a curvatura da linha de corrente do escoamento, permitindo uma análise bidimensional das componentes de velocidade atuantes no sistema. A presença de um componente rotativo leva à necessidade do uso de componentes

relativas da velocidade, considerando-se o referencial do rotor. A Figura 2 apresenta a convenção utilizada para a análise dos triângulos de velocidade. As direções indicadas na figura são os sentidos convencionados como positivo nesse trabalho.

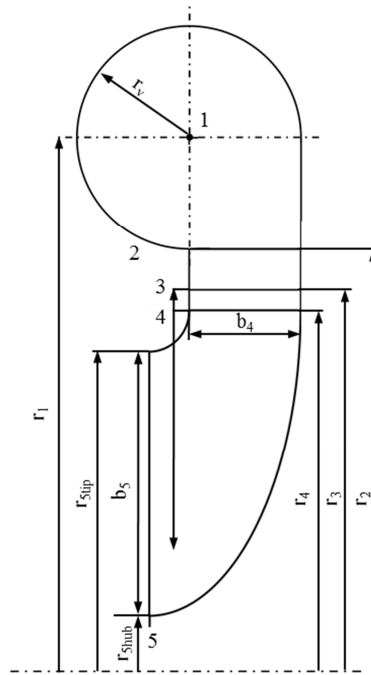


Figura 1: Esquema dos componentes da turbina e a numeração dos estados (RAHBAR et al., 2015).

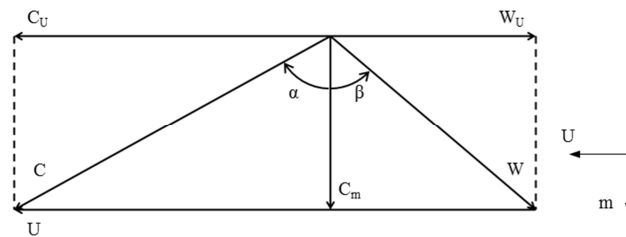


Figura 2: Triângulo de velocidades.

A análise termodinâmica da turbina é realizada em conjunto com a análise de velocidades, dado que a entalpia de estagnação e a entalpia estática se relacionam diretamente com a componente resultante da velocidade absoluta. A partir de dados iniciais considerados realiza-se um projeto preliminar do rotor, cujos dados de saída são as dimensões principais do rotor.

A análise termodinâmica é realizada com base no diagrama h-s descrito na Figura 3. Os pontos relativos aos estados respeitam a Figura 2. Observa-se que a entalpia de estagnação é mantida até o estado 4, pois, além de não haver geração de trabalho até esse ponto, admite-se que os processos ocorridos são adiabáticos, enquanto que entre os estados 4 e 5 há geração de trabalho, e com isso, a entalpia de estagnação se altera. Uma expansão isentrópica representaria a condição de maior geração de trabalho no estágio da turbina e é representada pela diferença de entalpia entre os estados t1 e 5s. Essa é uma condição impossível de se obter considerando-se que o fluido deve sair da turbina com velocidade para que ele continue seu processo ao longo de todo o ciclo. Dada essa condição, que nunca será atingida, a entalpia de estagnação na saída será sempre maior do que a entalpia estática,

nunca igual e, portanto, a diferença real de entalpia na entrada e na saída da turbina será igual à diferença de entalpia relativa aos estados  $t_1$  e  $t_5$ . O produto entre essa diferença de entalpia e a vazão mássica é igual ao trabalho líquido entregue pela turbina. A eficiência térmica da turbina é o resultado da divisão entre a diferença de entalpia real e a entalpia do processo isentrópico.

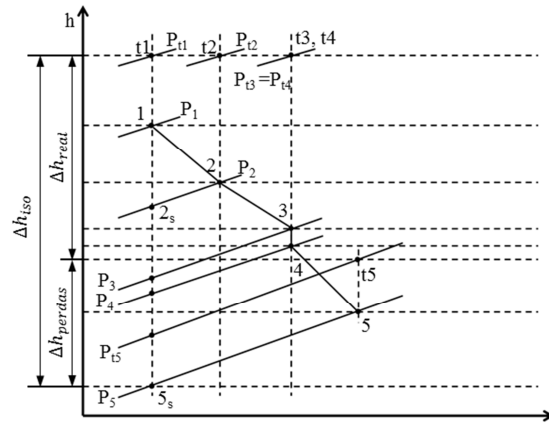


Figura 3: Diagrama termodinâmico da turbina segundo Rahbar *et al.* (2015).

Inicialmente em um projeto é necessário usar a similaridade para que uma máquina já existente seja transformada em parâmetros adimensionais com o intuito de utilizá-los em novas aplicações (MOUSTAPHA *et al.*, 2003). Além disso, a análise dimensional proporciona uma poderosa ferramenta no projeto de máquinas, que é a possibilidade de criação de modelos em escala a partir da obtenção de parâmetros adimensionais geométricos e cinemáticos (ÇENGEL e CIMBALA, 2015). Por exemplo, em vários casos de projetos de aplicações de turbinas radiais utiliza-se como fluido de trabalho hidrocarbonetos e gases provenientes de combustão. Para que haja uma primeira validação de um modelo em escala, sem que um protótipo trabalhe com esses gases, utiliza-se ar atmosférico como fluido de trabalho segundo Moustapha *et al.* (2003). Expandindo essa ideia para o ciclo de Rankine orgânico, tais parâmetros são: coeficiente de escoamento, coeficiente de carga das pás, coeficiente de potência, número de Reynolds, entre outros (MOUSTAPHA *et al.*, 2003).

O processo de cálculo se inicia com a definição dos parâmetros de entrada. Um programa foi escrito em MATLAB, por se tratar de um procedimento iterativo, e as propriedades termodinâmicas utilizadas foram calculadas com uma extensão do software Refprop para o MATLAB. Os cálculos das perdas encontrados na literatura são realizados normalmente a partir de correlações empíricas e estão expressas em termos de perda de entalpia e de pressão. Em cada componente da turbina ocorrem diferentes formas de perda. São elas: perdas na voluta, perdas no bocal, perdas no rotor pela folga de topo das pás, por escoamentos secundários e atrito e as perdas na saída.

O coeficiente de vórtice é utilizado em componentes que não possuem pás (MOUSTAPHA *et al.*, 2003). Nesse caso é utilizado na voluta: é o único coeficiente de perdas cujo uso se dá a partir da equação da conservação do momento angular e que se relaciona com a perda de velocidade na voluta devido ao atrito com as paredes desse componente (Equação (1)).

$$SC = (C_1 r_1) / (C_{U2} r_2). \quad (1)$$

O cálculo da perda entálpica  $\Delta h_{vol}$  na voluta leva em consideração a perda de pressão na passagem do fluido, segundo Rahbar *et al.* (2015), e depende da velocidade do escoamento na saída da voluta. As perdas no bocal levam em conta os efeitos de atrito entre a superfície desse componente e o



fluido. Segundo Rahbar et al. (2015) essa perda entálpica  $\Delta h_{boc}$  é calculada em função da velocidade média entre os pontos 2 e 3, do diâmetro, comprimento hidráulico do bocal e do fator de atrito (RAHBAR et al., 2015). Este último depende do número de Reynolds no bocal, cujo cálculo é descrito pela seguinte equação.

$$\overline{Re}_{boc} = [(C_2 r_2 \rho_2 / \mu_2) + (C_3 r_3 \rho_3 / \mu_3)] / 2. \quad (2)$$

O cálculo da perda entálpica da folga de topo das pás do rotor  $\Delta h_{fol,top}$  apresentada por Rahbar et al. (2015) considera a folga radial e axial como fração da altura da pá na saída do rotor e a causa das perdas é o vazamento de fluido através da folga entre o topo da pá e o envoltório da turbina. O atrito causado pela rugosidade da pá é responsável por parte significativa das perdas no rotor, assim como as perdas causadas por escoamentos secundários. Este segundo mecanismo de perda possui como causa a recirculação do fluido devido a efeitos de turbulência no rotor. Wei (2014) apresenta o cálculo dessas duas perdas entálpicas como perdas na passagem. Nesse cálculo o diâmetro e comprimento hidráulico do rotor utilizados são os mesmos propostos pelos cálculos de Rahbar et al. (2015), e a corda da pá é calculada segundo Ventura et al. (2012). Por fim, o cálculo das perdas na saída é apresentado por Rahbar et al. (2015) como a energia cinética não aproveitada na conversão de energia cinética do fluido em trabalho no eixo do rotor.

A metodologia de cálculo segue a proposta por Rahbar et al. (2015), com poucas modificações. Ela se baseia nos seguintes valores de entrada fixados (e seus intervalos): temperatura ( $T_{t1} = 400 - 500$  K) e pressão de estagnação na entrada ( $P_{t1} = 200 - 3500$  kPa), razão de pressão de estagnação para estática entre a entrada e saída ( $ER_{ts} = 2 - 15$ ), respectivamente, rotação ( $\omega = 20000 - 70000$  rpm), coeficiente de carga ( $\Psi = 0,8 - 2,4$ ), coeficiente de fluxo ( $\varphi = 0,2 - 0,5$ ), ângulo do vetor velocidade absoluta em relação à linha meridional na saída ( $\alpha_5 = 0^\circ$ ), razão entre o raio da raiz da pá na saída e o raio da entrada do rotor ( $r_{5hub}/r_4 = 0,2$ ), razão entre os raios de entrada e saída do estator ( $r_2/r_3 = 1,2$ ) e vazão mássica ( $\dot{m} = 0,2 - 1,8$  kg/s), além da razão entre os raios da voluta e da entrada do bocal ( $r_1/r_2 = 1,2$ ), descrito por Paltrinieri (2014). A sequência de cálculo é iniciada após uma estimativa inicial para a eficiência total-estática da turbina. Após a realização do procedimento de cálculo, uma nova eficiência é obtida e o processo se repete com essa nova eficiência até que a diferença entre a eficiência estimada e a calculada seja menor do que um valor admissível. Essa estimativa inicial da eficiência do estágio da turbina será de 75%.

Os princípios utilizados nessa metodologia obedecem à primeira e segunda leis da termodinâmica, além da equação da continuidade e a conservação do momento angular. Obedecendo a sequência descrita no artigo citado, o processo inicia-se com o cálculo do estado termodinâmico de estagnação no ponto 4, a partir do estado termodinâmico de estagnação do ponto 1 e da hipótese de os processos entre a entrada do sistema até a entrada do rotor serem adiabáticos. Em seguida a sequência de cálculo respeita a seguinte ordem, obedecendo às leis governantes e aos dados de entrada do problema: componentes da velocidade nos pontos 4 e 5, segundo a geometria do triângulo de velocidades; estado termodinâmico estático em 4, e estático e de estagnação em 5; dimensões do rotor; componentes de velocidade na raiz e ponta das pás em 5; e finalmente, as perdas no rotor. É importante observar que a pré-definição dos valores de entrada, como razão definida entre alguns raios é determinante para que os cálculos nessa etapa sejam realizados sem a necessidade de se realizar iterações.

Definidas as dimensões do rotor, calcula-se o raio de saída do bocal, a partir da relação apresentada por Rahbar et al. (2015) e a componente tangencial da velocidade com base na conservação do momento angular. Então, um processo iterativo se faz necessário para o cálculo da componente meridional da velocidade em 3, visto que a entalpia estática depende da velocidade

absoluta, que, por sua vez, depende das componentes tangencial e meridional. Por conta disso, estima-se um valor inicial para a densidade do fluido e o processo de cálculo é repetido até que se atinja a convergência. Consequentemente calcula-se os estados termodinâmicos estático e de estagnação na saída do bocal.

O cálculo do raio na entrada do bocal segue o mesmo procedimento realizado na saída desse componente e as componentes de velocidade são calculadas respeitando-se a conservação do momento angular, equação da continuidade e hipótese de processo adiabático no bocal, além de considerar que os ângulos das resultantes das velocidades em relação às componentes meridionais são iguais na entrada e na saída, para que as pás do bocal não possuam curvatura (PALTRINIERI, 2014). Em seguida calcula-se a perda ocorrida na voluta, cálculo dependente exclusivamente da velocidade na entrada do bocal e necessário para a definição do estado estático real em 2, visto que a partir desse cálculo é possível comparar as perdas ocorridas com o processo isentálpico. Então calcula-se os estados termodinâmicos estático e de estagnação nesse ponto bem como as perdas ocorridas no bocal.

A modelagem da voluta é realizada com o cálculo do raio do ponto 1 a partir da razão definida na entrada do problema e, seguindo a Equação 1, calcula-se a velocidade na entrada desse componente. A partir desses últimos dados obtidos e da geometria apresentada na Figura 1, podem ser calculados o raio da seção transversal da voluta, bem como o estado termodinâmico estático em 1. Finalmente, calcula-se a eficiência corrigida da turbina com base na soma das perdas calculadas na modelagem de cada componente e o procedimento de cálculo é repetido, conforme já foi explicado anteriormente. Na Figura 4 é apresentado o fluxograma resumindo esse procedimento de cálculo.

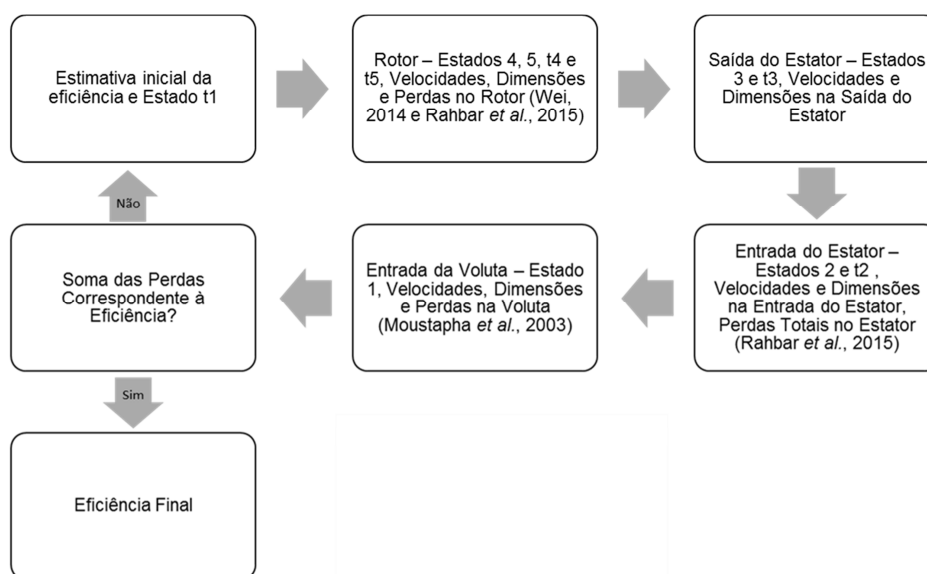


Figura 4: Diagrama termodinâmico da turbina segundo Rahbar *et al.* (2015).

Também se realiza a otimização da turbina em relação à eficiência do sistema utilizando-se a metodologia do enxame de partículas. Esse método bioinspirado baseia-se no comportamento de grupos de indivíduos de determinada espécie em busca de alimento, dentro do qual a maioria dos indivíduos segue aquele que conhece o melhor caminho até o alimento (ARORA, 2012). No problema de otimização da turbina, as variáveis de otimização são os valores de entrada da metodologia de cálculo (aquelas que são definidas para um intervalo) e a função objetivo (função a ser otimizada) é o produto entre a eficiência da turbina e a eficiência do ciclo termodinâmico (ambos os valores serão expressos em porcentagem). A aplicação dessa metodologia se dá através da geração aleatória de um primeiro conjunto de soluções do problema. A solução com o maior valor de função objetivo é eleita

como o líder do conjunto e novas gerações de soluções são criadas com base nas anteriores e nos valores dos líderes. Conforme as gerações são criadas, novos líderes com valores melhores que os anteriores podem surgir. O procedimento é realizado até que os valores das gerações subsequentes se aproximem dos valores de seus líderes, obtendo-se assim valores das variáveis de otimização que garantam o maior valor da função objetivo. Seguindo a metodologia descrita na seção anterior, realiza-se um estudo de otimização para o projeto de uma turbina radial de potência de 10 kW, comparando-se os resultados dos quatro fluidos descritos na Tabela 1, e os parâmetros de entrada já otimizados.

Tabela 1. Variáveis de entrada otimizadas utilizando diferentes fluidos para o cálculo da turbina.

Fluido	R227ea	R245fa	R123	R236fa	R236ea
$T_{t1}$ (K)	424,2	409,3	499,7	414,1	430,5
$P_{t1}$ (kPa)	3021,6	1352,1	1742,1	1838,6	1816,1
$ER_{ts}$ (-)	2,896	2,751	3,213	3,217	3,053
$\Omega$ (rpm)	78977	72879	79309	62902	77845
$\psi$ (-)	0,800	0,801	0,818	0,816	0,827
$\varphi$ (-)	0,261	0,337	0,267	0,212	0,254

## Resultados

Seguindo o comparativo proposto, os resultados estão apresentados na Tabela 2.

Tabela 2. Resultados do processo de otimização

Fluido	R227ea	R245fa	R123	R236fa
$\eta_{ts}$ (%)	77,36	78,16	76,29	74,53
$\eta_{t,ciclo}$ (%)	7,22	7,12	8,17	7,58
$\dot{m}$ (kg/s)	0,806	0,636	0,513	0,664
$\alpha_4$ (°)	71,92	67,19	71,92	75,44
$U_4$ (m/s)	129,7	145,9	160,7	141,5
$C_4$ (m/s)	109,2	126,8	138,4	119,2
$C_5$ (m/s)	33,9	49,2	43,0	30,0
$W_4$ (m/s)	42,6	57,1	51,9	39,7
$W_{stip}$ (m/s)	106,4	123,3	125,5	115,3
$d_{max}$ (mm)	58,35	75,05	70,56	77,06
$d_1$ (mm)	49,19	61,65	60,04	66,17
$d_4$ (mm)	31,36	38,23	38,71	42,96
$d_{stip}$ (mm)	24,39	29,63	28,40	33,80
$b_4$ (mm)	2,25	2,96	2,41	2,97
$Z_{rotor}$ (-)	12	11	12	14

O fluido R245fa apresentou o melhor desempenho de turbina, seguido pelo R227ea. Porém, esses dois fluidos apresentaram um desempenho de ciclo muito abaixo (1%) daquele com o melhor desempenho, o R123, que por sua vez, apresenta uma eficiência de turbina pouco menos de 2% menor do que o R245fa. Em termos de ordem de grandeza da eficiência de turbina (da ordem de 80%), 2% a menos de eficiência, porém com 1% de ganho na eficiência de ciclo (grandeza na ordem de 8%) representa um maior benefício para o R123, que além de tudo, apresenta uma vazão mássica menor, demandando dessa forma, uma menor quantidade de fluido para sua operação. As dimensões da turbina respeitam dimensões de ordem de grandeza maiores do que 1 mm, possibilitando sua manufacturabilidade. O fluido R123 é o que apresenta o segundo sistema mais compacto, representando uma melhor relação custo-benefício (quantidade de material na fabricação da turbina-eficiência).

## Conclusões

A metodologia adotada apresenta resultados de eficiência de turbina bastante satisfatórios, com valores acima dos 70% de eficiência com um bom balanço entre eficiência de turbina e eficiência de ciclo, dentro das limitações impostas dentro do uso de fontes de energia de baixas temperaturas. O fluido R123 foi o que apresentou melhor desempenho no balanço entre eficiência de ciclo e eficiência de turbina, bem como uma relação custo-benefício considerando as dimensões da turbina e a quantidade de fluido atuando no sistema.

## Referências

- ARORA J. S. **Introduction to Optimum Design**. 3rd ed. Waltham: Elsevier, 2012.
- ÇENGEL, Y.A.; CIMBALA, J.M. **Mecânica dos Fluidos: Fundamentos e Aplicações**. 3ª ed. Porto Alegre: AMGH Editora Ltda., 2015.
- DIXON, S.L.; HALL, C.A. 2010, **Fluid Mechanics and Thermodynamics of Turbomachinery**. 6th ed., Burlington: Butterworth Heinemann, 2010.
- MOUSTAPHA, H. et al. **Axial and radial turbines**. 1<sup>st</sup> ed. White River Junction: Concepts NREC, 2003.
- PALTRINIERI, A. **A Mean-Line Model to Predict the Design Performance of Radial Inflow Turbines in Organic Rankine Cycles**. 2014. 145 f. (Master Thesis) - Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università Degli Studi di Padova/Institut für Energietechnik, Technische Universität Berlin, Padova/Berlin, 2014.
- RAHBAR, K. et al. Modelling and optimization of organic Rankine cycle based on a small-scale radial inflow turbine. **Energy Conversion and Management**, v. 91, p. 186-198, dez. 2014.
- VENTURA, C. A. M. et al. Preliminary Design and Performance Estimation of Radial Inflow Turbines: An Automated Approach. **Journal of Fluids Engineering**, v. 134, p. 1-13, mar. 2012.
- WEI, Z. **Meanline Analysis of Radial Inflow Turbines at Design and Off-Design Conditions**. 2014. 157 f. (Master in aerospace engineering) - Department of Mechanical & Aerospace Engineering, University of Carleton, Ottawa, 2014.
- WHITFIELD, A.; BAINES, N.C. **Design of Radial Turbomachines**. London: Longman Scientific & Technical, 1991.



## Modelo de auto-produção de usinas hidrelétricas: uma abordagem não-linear

*Marcus Vinícius Capellini*

*Univ Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru/SP; Faculdade de Engenharia;  
Pós-graduação em Engenharia Elétrica  
mv\_capellini@hotmail.com*

*Augusto Cesar Pereira*

*Univ Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru/SP; Faculdade de Engenharia;  
Pós-graduação em Engenharia Elétrica  
augusto.pereira@feb.unesp.br*

*Edméa de Cássia Baptista*

*Univ Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru/SP; Faculdade de Ciências; Depto. de  
Matemática  
baptista@fc.unesp.br*

*Edilaine Martins Soler*

*Univ Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru/SP; Faculdade de Ciências; Depto. de  
Matemática  
edilaine@fc.unesp.br*

*Leonardo Nepomuceno*

*Univ Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru/SP; Faculdade de Engenharia; Depto. de  
Engenharia Elétrica  
leo@feb.unesp.br*

**Resumo:** Este trabalho apresenta um modelo de auto-produção de usinas hidrelétricas que considera um agente gerador *price-taker* participante do mercado do dia seguinte. Diversos modelos e métodos de solução já foram utilizados na formulação e resolução deste problema, sendo estes realizados através do uso de estratégias de linearização. Neste trabalho consideram-se todos os aspectos relevantes à geração hidrelétricas, como o balanço hídrico nodal, as cotas de montante e jusante e a função de produção hidráulica. O modelo é formulado como um problema de programação não-linear inteira mista e resolvido através do método *Branch-and-Bound*, implementado no *solver* BONMIN. Para verificar a aplicabilidade do modelo utilizado, este foi testado para um agente gerador real e os resultados obtidos foram satisfatórios.

**Palavras-chave:** Otimização. Auto-produção. Mercados do dia seguinte. Programação não-linear inteira mista.

## Introdução

A desregulamentação permitiu o desenvolvimento de mercados de eletricidade baseados em leilões. Um dos mercados que surgiram é o do dia seguinte, no qual geradores e consumidores fornecem ofertas e lances de potência e preço, que são organizados e despachados por um operador de mercado independente (ARROYO; CONEJO, 2002). Nesse cenário, os geradores devem determinar qual a operação das suas unidades que maximiza os lucros obtidos com a venda da energia, problema que recebe o nome de auto-produção (CONEJO et al., 2002). Em seguida, essa estratégia serve de base para determinar quais os lances que serão ofertados no leilão, o que é denominado de problema de cálculo de lances (STEEGER; BARROSO; REBENNACK, 2014).

Diferentemente do que ocorre com os geradores termelétricos, os geradores hidrelétricos apresentam capacidade de geração variável de acordo com o volume de água disponível (ALMEIDA; CONEJO, 2013). Por isso, é importante a correta representação do comportamento hidráulico das usinas durante o problema de auto-produção.

Muitos dos aspectos relacionados à geração hidrelétrica são modelados matematicamente por funções, equações e inequações não lineares, como as cotas de montante e jusante e a função de produção hidráulica. É comum na literatura que estes aspectos sejam linearizados, de modo que modelos de programação linear-inteira mista são obtidos (CONEJO et al., 2002), (LI et al., 2013).

Neste trabalho, as não-linearidades das funções envolvidas não são linearizadas, ou seja, não são adotadas estratégias de linearização ou aproximação de curvas com o intuito de avaliar a aplicabilidade prática e as dificuldades computacionais ao se adotar modelos não lineares para tais problemas. Assim, o modelo resultante é um problema de programação não-linear inteiro misto e não convexo. Este trabalho considera um gerador do tipo *price-taker*, geradores que não possuem poder de mercado e, portanto, não podem alterar os preços *spot* com seus lances. Assim, os preços podem ser considerados como dados de entrada do modelo.

Este trabalho está organizado como segue: inicialmente apresenta-se a Formulação Matemática do modelo estudado. Em seguida, apresentam-se os Resultados e Discussões. Finalmente, apresentam-se as Conclusões.

## Formulação Matemática

Nesta seção apresentam-se a nomenclatura utilizada e a formulação matemática do modelo proposto. Para consistência de constantes e unidades, os períodos considerados devem ser de 1 h.

### Nomenclatura

#### Conjuntos:

$K$  Períodos de tempo.

$J$  Unidades Geradoras.

$\Omega$  Usinas a montante da usina considerada.

#### Dados:

$\lambda(k)$  Preço de equilíbrio esperado para o período  $k$  do dia seguinte [\$/MWh].

$SU$  Custo de partida das unidades geradoras [\$/MW].

$SD$  Custo de parada das unidades geradoras [\$/MW].

$\bar{P}_j$  Potência máxima da unidade geradora  $j$  [MW].

$\underline{P}_j$  Potência mínima da unidade geradora  $j$  [MW].

$R$  Limite de rampa de defluência da usina [ $m^3/s/h$ ].

$\underline{U}$  Limite inferior de defluência da usina [ $m^3/s$ ].

$\bar{U}$  Limite superior de defluência da usina [ $m^3/s$ ].

$\underline{Q}_j$  Limite inferior de turbinagem da unidade geradora  $j$  [ $m^3/s$ ].

$\bar{Q}_j$  Limite superior de turbinagem da unidade geradora  $j$  [ $m^3/s$ ].

$\underline{S}$  Limite inferior de vertimento da usina [ $m^3/s$ ].

$\bar{S}$  Limite superior de vertimento da usina [ $m^3/s$ ].

$\underline{V}$  Limite inferior de volume permitido para o dia da usina [ $hm^3$ ].

$\bar{V}$  Limite superior de volume permitido para o dia da usina [ $hm^3$ ].

$\eta_j^{tg}$  Rendimento do par turbina-gerador da unidade  $j$  [%].



- $V(0)$  Volume inicial da usina [ $\text{hm}^3$ ].  
 $V(NK)$  Meta de volume da usina [ $\text{hm}^3$ ].  
 $\Psi(k)$  Vazão afluyente prevista para o período  $k$  ao reservatório da usina hidrelétrica [ $\text{m}^3/\text{s}$ ].  
 $D_\omega$  Tempo de viagem da água entre a usina a montante  $\omega$  e a usina estudada [h].  
 $Z_j(0)$  Status inicial da unidade  $j$ .  
 $\alpha_a$  Coeficientes da função da cota de montante da usina, com  $a = 0, \dots, 4$ .  
 $\beta_a$  Coeficientes da função da cota de jusante da usina, com  $a = 0, \dots, 4$ .  
 $c_j$  Constante de perdas de carga da unidade geradora  $j$  [%].  
 $\pi_{abj}$  Coeficientes da função da curva colina da unidade geradora  $j$ , com  $a, b = 0, \dots, 5$ .  
 $NK$  Número de períodos de tempo.

### Variáveis e Funções:

- $p_j(k)$  Potência produzida pela unidade geradora  $j$  no período  $k$  [MW].  
 $q_j(k)$  Turbinagem da unidade geradora  $j$  no período  $k$  [ $\text{m}^3/\text{s}$ ].  
 $s(k)$  Vertimento da usina no período  $k$  [ $\text{m}^3/\text{s}$ ].  
 $u(k)$  Defluência da usina no período  $k$  [ $\text{m}^3/\text{s}$ ].  
 $v(k)$  Volume da usina no período  $k$  [ $\text{hm}^3$ ].  
 $h^u(k)$  Cota de montante da usina no período  $k$  [m].  
 $h^d(k)$  Cota de jusante da usina no período  $k$  [m].  
 $h_j(k)$  Altura de queda líquida da unidade geradora  $j$  no período  $k$  [m].  
 $z_j^u(k)$  Variável binária que vale 1 se a unidade  $j$  é partida no período  $k$ .  
 $z_j^d(k)$  Variável binária que vale 1 se a unidade  $j$  é parada no período  $k$ .  
 $z_j(k)$  Variável binária que vale 1 se a unidade  $j$  está ligada no período  $k$ .

### Função Objetivo

O objetivo de um agente gerador participante de um mercado de energia é maximizar seus lucros, que são dados pela diferença entre a receita obtida com a venda de energia e os custos operacionais:

$$\text{maximizar } \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} \left\{ \lambda(k) p_j(k) - \left\{ \bar{P}_j \left[ z_j^u(k) SU + z_j^d(k) SD \right] \right\} \right\}. \quad (1)$$

Os preços *spot* são variáveis estocásticas, que podem ser representadas pelo seu valor médio (EXPÓSITO; CONEJO; CAÑIZARES, 2011). Para geradores hidrelétricos, os custos operacionais resumem-se a custos de partida e parada (AMJADY; VAHIDINASAB, 2013). Estes custos são proporcionais à potência efetiva da unidade (NILSSON; SJELVGREN, 1997).

## Restrições Lineares

As restrições (2)–(14) modelam aspectos referentes à geração hidrelétrica que são originalmente lineares:

$$u(k) = \sum_{j \in J} q_j(k) + s(k), \forall k \in K, \quad (2)$$

$$u(k) - R \leq u(k+1) \leq u(k) + R, \\ \forall k \in \{1, \dots, NK-1\}, \quad (3)$$

$$\underline{U} \leq u(k) \leq \bar{U}, \forall k \in K, \quad (4)$$

$$\underline{Q}_j z_j(k) \leq q_j(k) \leq \bar{Q}_j z_j(k), \forall k \in K, j \in J, \quad (5)$$

$$\underline{S} \leq s(k) \leq \bar{S}, \forall k \in K, \quad (6)$$

$$\underline{V} \leq v(k) \leq \bar{V}, \forall k \in K, \quad (7)$$

$$v(NK) \geq V(NK), \quad (8)$$

$$v(k) = v(k-1) + 0.0036 [\Psi(k) + \rho(k) - u(k)], \forall k \in \{2, \dots, NK\}, \quad (9)$$

em que:

$$\rho(k) = \begin{cases} \sum_{\omega \in \Omega} u_{\omega} [k - D_{\Omega}], & \text{caso } k - D_{\Omega} \geq 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$v(1) = V(0) + 0.0036 [\Psi(1) - u(1)], \quad (10)$$

$$\underline{P}_j z_j(k) \leq p_j(k) \leq \bar{P}_j z_j(k), \forall k \in K, j \in J, \quad (11)$$

$$z_j(k) - z_j(k-1) = z_j^u(k) - z_j^d(k), \forall j \in J, \forall k \in \{2, \dots, NK\}, \quad (12)$$

$$z_j(1) - Z_j(0) = z_j^u(1) - z_j^d(1), \forall j \in J, \quad (13)$$

$$z_j^u(k) + z_j^d(k) \leq 1, \forall k \in K, \forall j \in J. \quad (14)$$

As restrições (2) definem a defluência da usina como a soma da turbinagem e do vertimento. As restrições (3) definem as rampas de defluência da usina (CATALÃO; POUSINHO; MENDES, 2010). Tais restrições são necessárias por motivos de segurança e navegabilidade a jusante da usina. As restrições (4)–(7) definem os limites mínimos e máximos para defluência, turbinagem, vertimento e volume, respectivamente. As restrições (8) garantem o atendimento da meta de volume com base em estudos de médio prazo, conforme detalhado em Bregadioli et al. (2016). As restrições (9) e (10) definem o balanço hídrico nodal ao longo do horizonte. As restrições (11) definem os limites mínimos e máximos, respectivamente, da potência produzida pelas unidades geradoras. Por fim, as restrições (12)–(14) modelam as variáveis binárias para evitar situações ilógicas e infactíveis.

As restrições (2), (4)–(7) e (9)–(14) foram extraídas de Cicogna (1999).

## Cota de Montante

Conforme detalhado em Cicogna (1999), no sistema elétrico brasileiro, modela-se a cota de montante como um polinômio de até quarto grau do volume médio do reservatório da usina, conforme (15):

$$h^u(k) = \sum_{a=0}^4 \alpha_a \bar{v}^a(k), \forall k \in K, \quad (15)$$

em que  $\bar{v}_j(k)$  é dado pela média aritmética do volume do reservatório entre dois períodos consecutivos:

$$\bar{v}_j(k) = \begin{cases} \frac{v_j(k) + v_j(k-1)}{2}, & \text{se } k \in \{2, \dots, NK\} \\ \frac{v_j(k) + \bar{V}_j(0)}{2}, & \text{se } k = 1 \end{cases}$$

### Cota de Jusante

Conforme detalhado em Cicogna (1999), no sistema elétrico brasileiro, modela-se a cota de jusante como um polinômio de até quarto grau da defluência da usina, conforme (16):

$$h^d(k) = \sum_{a=0}^4 \beta_0 u^a, \forall k \in K. \quad (16)$$

### Altura de Queda Líquida

A altura de queda líquida é dada pela diferença entre as cotas de montante e jusante, descontando-se uma altura de perdas, conforme (17):

$$h_j(k) = h^u(k) - h^d(k) - c_j q_j^2(k), \forall k \in K, j \in J. \quad (17)$$

Nota-se em (17) que a altura de perdas é proporcional ao quadrado da turbinagem (CICOGNA, 1999).

### Função de Produção Hidráulica

A função de produção hidráulica de uma unidade geradora é dada por (18):

$$p_j(k) = 9,81 \times 10^{-3} \eta_j^{\text{tg}}(k) q_j(k) h_j(k), \forall j \in J, k \in K. \quad (18)$$

Conforme pode ser observado na equação (18), a potência produzida por uma unidade geradora hidrelétrica depende do rendimento do par turbina-gerador, da turbinagem e da altura de queda líquida. O rendimento do par turbina-gerador é obtido através da chamada curva colina, que é função da altura de queda líquida e da turbinagem. Neste trabalho, devido à dificuldade em se obter uma função que aproxime com qualidade a curva colina, optou-se por utilizar o rendimento médio das unidades geradoras dentro da região permitida para operação (CICOGNA, 1999).

A altura de queda líquida, conforme exposto na Seção , é um polinômio de até quarto grau do volume do reservatório e da defluência da usina. Desta forma, nota-se que a função de produção hidráulica é fortemente não-linear e não-convexa (DINIZ; MACIEIRA, 2008).

Assim, o modelo é definido pela função objetivo (1) e pelas restrições (2)–(18).

## Resultados e Discussões

Nesta seção, o modelo de auto-produção proposto é avaliado considerando a usina hidrelétrica (UHE) Balbina, que possui cinco unidades geradoras iguais, sendo que a unidade 1 está desligada e as unidades 2–5 estão ligadas no início do horizonte. O horizonte de estudo compreende 24 períodos de 1 hora.

Para a análise do modelo proposto, implementou-se o mesmo no *software* GAMS, utilizando o *solver* BONMIN, o qual foi desenvolvido para resolução de problemas de programação não-linear inteira mista.

O *solver* BONMIN é um pacote *open-source* para a programação não-linear inteira mista (MINLPs) que utiliza métodos como *branch-and-bound*, *branch-and-cut* e outros algoritmos de aproximação. O método de solução convergiu para a solução ótima com tempo de execução computacional de 1,375 segundos através do método *branch-and-bound*.

A seguir apresentam-se os dados utilizados nas simulações realizadas. Os preços médios previstos e os dados hidrológicos são apresentados nas tabelas 1 e 2, respectivamente. Como a UHE Balbina é a primeira usina da cascata, a vazão afluente a ela não depende de outras usinas. Considera-se que a vazão afluente é constante ao longo do dia.

Os polinômios que representam as cotas de montante e jusante da UHE Balbina são apresentados em (19) e (20), respectivamente:

$$h^u(k) = 37,19 + 1,29 \times 10^{-3} \bar{v}(k) - 5,27 \times 10^{-8} \bar{v}^2(k) + 1,50 \times 10^{-12} \bar{v}^3(k) - 1,83 \times 10^{-17} \bar{v}^4(k), \forall k \in K. \quad (19)$$

Tabela 1: Preços médios previstos [\$/MWh].

Hora	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Preço	11,45	12,02	12,62	13,25	15,91	19,09	22,90	23,51	21,54	20,91	21,58	23,61	22,51	21,95	20,15	19,46
Hora	17	18	19	20	21	22	23	24								
Preço	22,59	24,25	22,41	21,31	19,12	18,95	17,48	15,41								

Tabela 2: Dados Hidrológicos.

Dado	$\underline{U}$	$\bar{U}$	$\underline{Q}_j$	$\bar{Q}_j$	$\underline{s}$	$\bar{s}$	$\Psi$	$\underline{V}$	$\bar{V}$	$V(0)$	$V(NK)$	$\underline{P}_j$	$\bar{P}_j$	$SU$	$SD$	$R$	$c_j$	$\eta_j^{tg}$
Valor	19	1520	20	264	0	200	400	11000	17000	13981	13981	5	50	3,00	3,00	340	0,00112	75,8

$$h^d(k) = 22,58 + 7,52 \times 10^{-3}u(k) - 4,96 \times 10^{-6}u^2(k) + 2,01 \times 10^{-9}u^3(k) - 3 \times 10^{-13}u^4(k), \forall k \in K. \quad (20)$$

Os pontos de operação que fornecem maior lucro para cada hora do horizonte analisado para a UHE Balbina estão apresentados na Figura 1. Nota-se que os períodos de maior potência gerada coincidem com os períodos de preços mais elevados. Isso ocorre pelo fato de que a água, matéria-prima para a produção de energia para as hidrelétricas, é limitada para este fim.

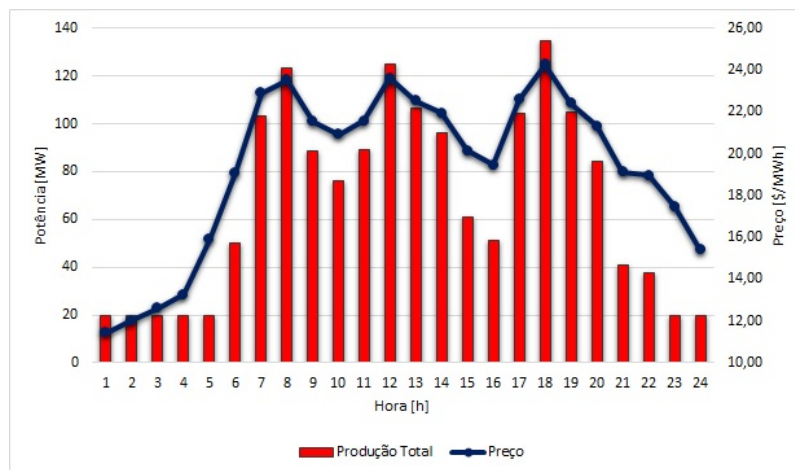


Figura 1: Geração e preços horários.

## Conclusões

Através da simulação realizada, percebe-se que é possível, para problemas de pequeno porte, como o analisado neste trabalho, a utilização de modelos de otimização não-lineares inteiro-mistos. O método de solução em questão se mostrou eficaz, com um tempo de execução computacional aceitável. Espera-se que os solvers tenham maior dificuldade em resolver problemas deste tipo de maior porte e o tempo computacional seja impactado. Nestes casos, cabe analisar a necessidade em se obter soluções ótimas em baixos tempos computacionais. Se este for o caso, pode se tornar mais conveniente a linearização do modelo.

## Agradecimentos

Os autores agradecem à CAPES e ao CNPq (processos nº 309588/2013-8 – bolsa CNPq – e 448645/2014-9) pelo auxílio financeiro.



## Referências

- ALMEIDA, K.; CONEJO, A. IEEE Transactions on Power Systems. **Medium-Term Power Dispatch in Predominantly Hydro Systems: An Equilibrium Approach**, v. 28, n. 3, p. 2384-2394, 2013.
- AMJADY, N.; VAHIDINASAB, V. Energy Conversion and Management. **Security-constrained self-scheduling of generation companies in day-ahead electricity markets considering financial risk**, v. 65, p. 164-172, 2013.
- ARROYO, J.; CONEJO, A. IEEE Transactions on Power Systems. **Multiperiod auction for a pool-based electricity market**, v. 17, n. 4, p. 1225-1231, 2002.
- ARROYO, J.; CONEJO, A.; CONTRERAS, J.; VILLAMOR, F. IEEE Transactions on Power Systems. **Self-scheduling of a hydro producer in a pool-based electricity market**, v. 17, n. 4, p. 1265-1272, 2002.
- BREGADIOLI, G. F. et al. International Journal of Electrical Power & Energy Systems. **Medium-term coordination in a network-constrained multi-period auction model for day-ahead markets of hydrothermal systems**, v. 82, p. 474-483, 2016.
- CATALÃO, J.; POUSINHO, H.; MENDES, V. Electrical Power and Energy Systems. **Scheduling of head-dependent cascaded reservoirs considering discharge ramping constraints and start/stop of units**, v. 32, n. 8, p. 904-910, 2010.
- CICOGNA, M. A. **Modelo de planejamento da operação energética de sistemas hidrotérmicos a usinas individualizadas orientado por objetos**. 1999. 225 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Unicamp, Campinas, 1999.
- DINIZ, A. L.; MACEIRA, M. E. P. IEEE Transactions on Power Systems **A Four-Dimensional Model of Hydro Generation for the Short-Term Hydrothermal Dispatch Problem Considering Head and Spillage Effects**, v. 23, n. 3, p. 1298-1308, 2008.
- GÓMEZ-EXPÓSITO, A.; CONEJO, A.; CAÑIZARES, C. **Sistemas de energia elétrica: análise e operação**. Rio de Janeiro: LTC, 2011.
- LI, X.; LI, T.; WEI, J.; WANG, G.; YEH, W.-G. IEEE Transactions on Power Systems. **Hydro Unit Commitment via Mixed Integer Linear Programming: A Case Study of the Three Gorges Project, China**, v. 29, n. 3, p. 1232-1241, 2014.
- NILSSON, O.; SJELVGREN, D. IEEE Transactions on Power Systems. **Hydro unit start-up costs and their impact on the short term scheduling strategies of Swedish power producers**, v. 12, n. 1, p. 38-44, 1997.
- STEEGER, G.; BARROSO L.; REBENNACK S. IEEE Transactions on Power Systems. **Optimal Bidding Strategies for Hydro-Electric Producers: A Literature Survey**, v. 29, n. 4, p. 1758-1766, 2014.



## Modelo de Simulação em Redes de Petri Temporizadas para a Análise da Qualidade de Serviço de uma Solução de Integração

*Francisco da Silveira*

*Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul  
Departamento de Ciências Exatas e Engenharias  
Programa de Pós Graduação em Modelagem Matemática  
Rua Lulu Ingenfritz, 480.98970-000, Ijuí, RS  
franciscosilveira25@gmail.com*

*Sandro Sawicki*

*Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul  
Departamento de Ciências Exatas e Engenharias  
Programa de Pós Graduação em Modelagem Matemática  
Rua Lulu Ingenfritz, 480.98970-000, Ijuí, RS  
sawicki@unijui.edu.br*

**Resumo:** O mercado dinâmico e altamente competitivo faz com que as empresas se esforcem na busca pela qualidade. A medida que a empresa cresce, são adquiridas novas aplicações, muitas dessas aplicações nem sempre têm a mesma funcionalidade, linguagem e plataforma de operação gerando, por sua vez, um emaranhado de aplicações sem comunicação de umas com as outras. Neste cenário, surge a área de Integração de Aplicações Empresariais (EAI) que busca proporcionar metodologias, técnicas e ferramentas para a concepção e a implementação de soluções de integração. Este trabalho busca desenvolver um modelo formal de simulação utilizando redes de Petri Temporizadas a partir do modelo conceitual de uma solução de integração voltada para reserva de viagens. O modelo conceitual utilizado como caso de estudo foi projetado usando a tecnologia Guaraná. O objetivo deste trabalho é encontrar o tempo mínimo e máximo que uma mensagem leva para processar a solução antes que ela seja implementada e implantada. Com isso, é possível identificar níveis de qualidade de serviço sem que haja a necessidade de implementar a solução, baseando-se apenas, na estrutura atual do modelo conceitual. O modelo formal desenvolvido foi simulado em cenários críticos, utilizando cargas de entrada diferentes na ferramenta CPN Tools.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática e Aplicações. Integração de Aplicações Empresariais. Redes de Petri Temporizadas.

### Introdução

As atividades empresariais são continuamente ampliadas pelas tecnologias de informação disponíveis para os negócios. Atualmente as aplicações empresariais são essenciais nos processos de negócios das corporações. As aplicações realizam a manipulação das informações da empresa, disponibilizando aos proprietários e interessados operabilidade entre os diversos sistemas de negócio, o que as torna imprescindíveis na tomada de decisões de uma corporação. No mercado de negócios existem diversos tipos de aplicações para atender a demanda de vários setores da empresa, tais como recursos humanos, financeiro, direção, produção, entre outros. Neste cenário, é normal que as empresas ao longo de sua formação, contenham no ecossistema de *software*, aplicações que não cooperam entre si. Esta cooperação, interação, ou interoperabilidade é o que se denomina na comunidade empresarial de integração de aplicações. A Integração de Aplicações Empresariais, do termo em inglês *Enterprise Application Integration* (EAI),



é uma área de estudo que fornece ferramentas e métodos para a integração de aplicações empresariais (HOHPE, WOOLF, 2003). A maneira de conseguir a cooperação entre as diferentes aplicações pertencentes ao ecossistema de *software* é a partir do desenvolvimento de uma solução de integração. A solução de integração é uma aplicação cuja função é orquestrar o funcionamento das demais aplicações heterogêneas. Uma solução de integração pode ser representada em alto nível, por um modelo conceitual, podendo ser interpretada como um sistema dinâmico de eventos discretos. Este trabalho busca criar um modelo de simulação em redes de Petri Temporizadas de uma solução de integração, elaborada no Guaraná DSL (FRANTZ, 2012), de uma Agência de Viagens, para ainda na fase de projeto, poder analisar se há possíveis gargalos de desempenho da solução de integração. Além disso, apresentar a Qualidade de Serviço (QoS) do modelo, através de simulações da rede de Petri Temporizada na ferramenta CPN Tools. Este artigo está organizado na seguinte maneira. A Seção Referencial Teórico apresenta o tema Integração de Aplicações e a Tecnologia de Integração Guaraná DSL e discorre sobre as Redes de Petri Temporizadas. A Seção Trabalhos Relacionados sintetiza pesquisas que aplicam redes de Petri Temporizadas. A Seção Modelo de Simulação Proposto apresenta o modelo em redes de Petri Temporizadas do estudo de caso e a transcrição deste na ferramenta do CPN Tools e estabelece os cenários de simulação. A Seção Resultados Experimentais discorre sobre o desempenho do modelo de Simulação. A Seção Conclusões e Trabalhos Futuros perfaz sobre os resultados e oferece possibilidades para ampliar a pesquisa.

## Referencial Teórico

Essa seção aborda os tópicos referentes a área Integração de Aplicações e a Tecnologia de Integração denominada Guaraná. São abordados, também, os conceitos de de Redes de Petri Temporizadas.

### Integração de Aplicações e Tecnologia Guaraná

A área de Integração de Aplicações Empresariais (EAI) segundo (FRANTZ, 2014), busca proporcionar metodologias, técnicas e ferramentas para a concepção e a implementação de solução de integração. Conforme (LINTHICUM, 1999), EAI é “o compartilhamento irrestrito de dados e processos de negócios entre todos os aplicativos conectados e fontes de dados na empresa [...]”. Como destaca (FRANTZ, 2014), uma solução de integração tem como objetivo orquestrar um conjunto de aplicações para mantê-las harmonizadas ou oportunizar novas funcionalidades a partir daquelas existentes. Uma solução de integração é composta por processos lógicos de integração e de comunicação, que conectam processos ou aplicações do ecossistema à solução de integração. As soluções de integração são implementadas nas plataformas de integração. A tecnologia Guaraná DSL (FRANTZ, 2012), é uma plataforma utilizada para projetar soluções de integração de aplicações empresariais em uma alto nível de abstração, de forma que os engenheiros de *software* possam manter o foco na criação de modelos para a solução do problema, sem precisar se preocupar com detalhes técnicos de sua implementação. Dentre os principais recursos dessa tecnologia estão uma Linguagem de Domínio Específico (do inglês *Domain-Specific Language* - DSL) e um motor de execução que permite a implementação e execução da solução de integração. O modelo conceitual deste trabalho foi desenvolvido por meio desta tecnologia.

### Redes de Petri Temporizadas

As rede de Petri Temporizadas (RdPT) surgiram da necessidade de se modelar sistemas dinâmicos com variáveis de tempo. Uma rede de Petri é um grafo bipartido formado por dois tipos de nós, os lugares e as transições e *tokens* que são as informações que fluem no sistema. A rede de Petri Temporizada é uma extensão da rede de Petri convencional. A estrutura de uma rede de Petri Temporizada é constituída

por *tokens*, lugares e transições (QUENTAL, 2006). A estes elementos são associados valores de tempo. Seja RdPT uma rede de Petri Temporizada, conforme mostra a Equação 1:

$$RdPT = (P, T, A_r, K, W, I, M_0) \quad (1)$$

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$  é um conjunto finito de lugares;

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  é um conjunto finito de transições;

$A_r \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$  é um conjunto arcos;

$K : P \rightarrow N \cup \{\infty\}$  é a função capacidade;

$W : A_r \rightarrow N^+$  é a função Ponderação (Peso);

$I : T \rightarrow (\mathfrak{R} \cup \{0\}) \times (\mathfrak{R} \cup \{0\})$ , onde  $I(T_j) = (d_{min}, d_{max})$ ,  $d_{max} \geq d_{min}$ ;

$M_0 : P \rightarrow N$  é a função da marcação inicial, que satisfaz:

$$\forall p \in P : M_0(p) \leq K(p). \quad (2)$$

Uma RdPT é formada por  $m$  lugares,  $n$  transições, por um conjunto  $A_r$  de arcos, por uma função  $K$  de capacidade máxima de *tokens* nos lugares, uma função  $W$  de ponderação ou peso dos arcos, este peso pode ser constante ou uma função, uma função  $I$  do tempo sobre uma transição  $T_j$  que leva um valor de tempo pertencente a um conjunto  $T$  para duas coordenadas de delay mínimo e delay máximo e uma função marcação inicial  $M_0$ .

## Trabalhos Relacionados

São inúmeros os trabalhos que utilizam redes de Petri Temporizadas para modelar sistemas dinâmicos, entretanto, poucos trabalhos desenvolvem modelos de simulação em redes de Petri envolvendo a área de Integração de Aplicações. (FRANTZ-ROOS, 2014) apresenta uma relação entre modelos de integração de aplicações e redes de Petri Estocásticas. O trabalho proposto por (SANTOS, 2008), descreve um método que utiliza redes de Petri Temporizadas para modelar sistemas flexíveis de manufatura e realizar análises sobre a taxa de falhas que, teoricamente, não levam em consideração a ocorrência de falhas no fluxo da produção das indústrias automobilísticas que em sua grande maioria tem seus processos automatizados. As influências das falhas são reconhecidas e analisadas através de um modelo em redes de Petri Temporizadas em comparação com o sistema real. As redes de Petri Temporizadas são úteis para obtenção do tempo ótimo na performance do processo de produção de uma linha de montagem de veículos que são formadas por inúmeras etapas de trabalho.

A pesquisa de (MATTIAS, 1990), propõe uma Metodologia para análise de desempenho de Sistemas de Computação descritos através de Redes de petri Temporizadas Estendidas. Este trabalho descreve a estrutura lógica das redes de Petri Temporizadas e como podem ser aplicadas em modelos de computação distribuídos. Estes sistemas são dependentes do tempo, por essa razão é possível descrever o comportamento dinâmico através de redes de Petri Temporizadas. Os autores utilizaram, como caso de estudo, uma agência locadora de automóveis e configuram o tempo de locação utilizados pelos seus clientes. Este trabalho buscou dimensionar o número de carros necessários para atender adequadamente seus clientes.

A pesquisa de (CARVALHO, 2005), aplica o formalismo de redes de Petri temporizadas na modelagem e simulação de linhas de produção em forma de U com trabalho multifuncional. Segundo o autor, as redes de Petri constituem uma ferramenta bastante eficiente no controle de parâmetros produtivos, o que pode resultar no aumento da produtividade dos operadores polivalentes pelo dimensionamento adequado de estoques intermediários. Os resultado obtidos neste trabalho mostraram que a existência de estoque

intermediário e as quantidades relativas ao estoque estão diretamente ligadas ao tempo de execução do processo produtivo.

A pesquisa de (QUENTAL, 2006), propõe um modelo em redes de Petri Temporizadas do modelo da *NAS Parallel Benchmarks* e realiza a análise de desempenho através da ferramenta *Microsoft Office Excel* utilizando variáveis aleatórias com resultados de desvio padrão, coeficiente de variação e médias do processamento paralelo do modelo. Segundo o autor, o processamento paralelo é a capacidade de sistemas computacionais de executarem várias ações simultaneamente com o objetivo de obter a solução de um problema de maneira mais rápida. Estes sistemas exigem variáveis de tempo de resposta e de execução compatíveis com as Redes de Petri Temporizadas.

## Modelo de Simulação Proposto

O Modelo Conceitual utilizado nessa pesquisa, conforme Figura 1, representa o formato estático da solução de integração desenvolvida na tecnologia Guaraná DSL, o qual descreve a comunicação entre as tarefas. O estudo de caso utilizado é um problema real de um sistema de agência de viagem, o qual é composto por cinco aplicações heterogêneas, Sistema de Vôos, Sistema de Hotéis, Servidor de Email, Sistema de Fatura e o Sistema de Viagens.

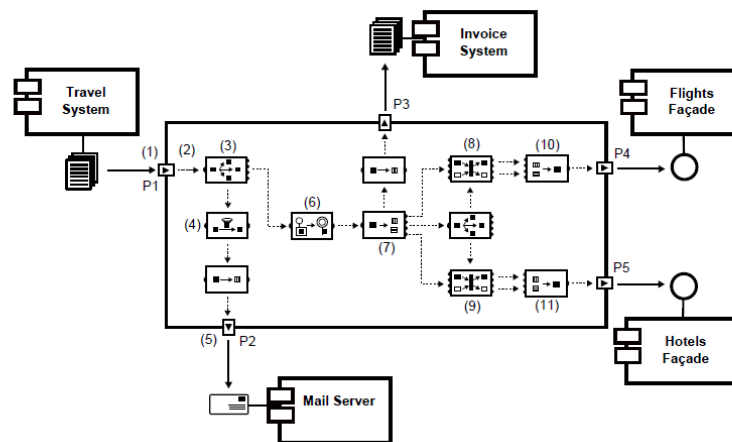


Figura 1: Solução de Integração desenvolvida pela tecnologia Guaraná DSL (FRANTZ, 2012).

O fluxo de trabalho começa pela porta de entrada P1. O Sistema de Viagens utiliza esta porta, periodicamente, para encontrar novas reservas. Para cada reserva, a porta de entrada P1 insere uma mensagem para o sistema, que é, por sua vez, adicionada ao *slot* (2). A Tarefa (3) do Replicador recebe mensagens do *slot* (2) e faz uma cópia que é enviada ao e-mail do cliente e a outra é usada para preparar a fatura, a reserva do hotel e do voo. A primeira cópia passa pela tarefa Filtro (4). Essa tarefa seleciona mensagens que contenham os dados necessários para serem enviadas ao cliente, o que impede a porta de saída P2 de enviar mensagens sem um destino ou endereço de e-mail corretos. As tarefas de tradução foram usadas no processo para adequar mensagens aos esquemas com as quais as aplicações de fatura e de email são integradas. A tarefa (6) separa as mensagens em duas diferentes, em uma das mensagens usa o localizador de registro, que está no cabeçalho da mensagem, para identificar a mensagem. A mensagem será identificada pelas tarefas (8) e (9) que são os correlacionadores de mensagens. A segunda cópia é separada de modo que as informações de pagamento, contidas no corpo da mensagem, vão para o Sistema de Fatura. As mensagens correlacionadas seguem para as tarefas de (10) e (11), as quais são montadas e utilizadas na reserva dos voos e o hotéis, respectivamente.

## Modelo de Simulação em redes de Petri Temporizadas

Usando estas informações foi desenvolvido o modelo de simulação em redes de Petri Temporizadas, conforme Figura 2, que descreve o ecossistema da solução de integração no Guaraná DSL. Seja RdPT a rede de Petri Temporizada do estudo de caso, conforme mostra a Equação 3:

$$RdPT = (P, T, A_r, K, W, I, M_0) \quad (3)$$

$P = \{TS, MS, IS, V, H, (2), \text{slot1}, \text{slot2}, \text{slot3}, \text{slot4}, \text{slot5}, \text{slot6}, \text{slot7}, \text{slot8}, \text{slot9}, \text{slot10}, \text{slot11}, \text{slot12}, \text{slot13}, \text{slot14}, \text{slot15}, \text{slot16}, \text{slot17}, \text{slot18}\};$

$T = \{P1(1), (3), (4), \text{tradutor}(1), \text{tradutor}(2), \text{Replicador}, P2(5), (6), (7), (8), (9), (10), (11), P3, P4, P5\};$

$A_r \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$  é um conjunto arcos;

$K : P \rightarrow N \cup \{\infty\}$  é a função capacidade;

$W : A_r \rightarrow N^+$  é a função Ponderação (Peso);

$I : T \rightarrow (\mathfrak{R} \cup \{0\}) \times (\mathfrak{R} \cup \{0\})$ , onde  $I(T_j) = (1, 5)$ ;

$M_0 : P \rightarrow N$  é a função da marcação inicial, que satisfaz:

$$\forall p \in P : M_0(p) \leq K(p). \quad (3)$$

A estrutura do modelo conceitual pode ser representado pelo grafo bipartido da rede de Petri Temporizada, conforme mostra a Figura 2.

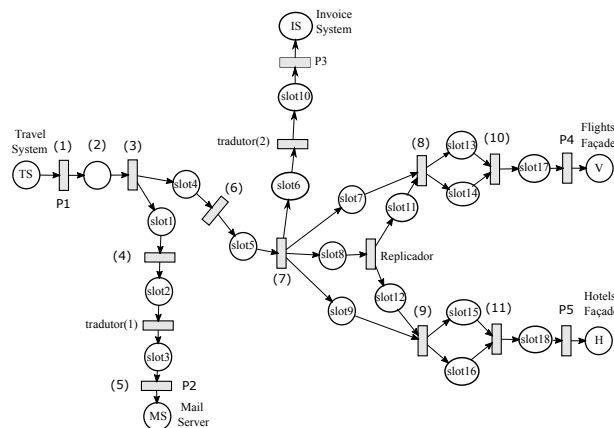


Figura 2: Modelo em Rede de Petri Temporizada da solução de integração no Guaraná DSL.

O modelo de simulação em redes de Petri Temporizadas transcrito na plataforma CPN Tools (CPN TOOLS, 2016), descreve o modelo formal da Figura 2. A Figura 3 divide o modelo de simulação no CPN Tools em Parte1 e Parte2, mostrando de uma forma geral as sintaxes de programação que levam em consideração as características de funcionamento de cada elemento no Guaraná DSL.

A Figura 3 mostra o início do modelo de simulação com o lugar TS (Sistema de Viagens) contendo um *token*. Em seguida tem-se a transição P1(1) representando a porta de entrada de mensagens do Guaraná DSL. Esta transição irá habilitar o fluxo de novos *tokens* para dentro do sistema. Os *tokens* que ingressam no sistema são distribuídos para dois lugares: no primeiro são armazenados no lugar *cont* onde serão contabilizados, no segundo passam para o *slot(2)* e aguardam serem disparados pela transição (3). A transição (3) representa a tarefa do Replicador de mensagens do Guaraná DSL. Quando a transição (3)

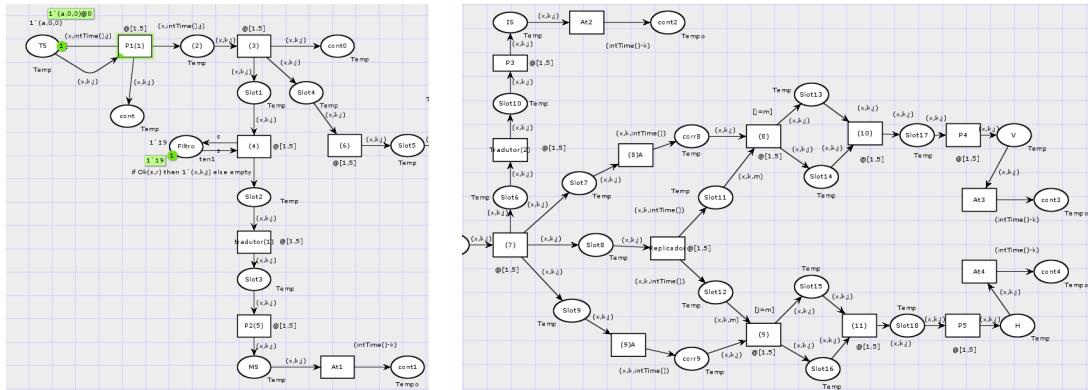


Figura 3: Parte 1 e Parte 2 do Modelo em rede de Petri Temporizadas no CPN Tools.

dispara, envia *tokens* para três lugares: no primeiro lugar denominado *cont0*, os *tokens* são armazenados para serem contabilizados juntamente com os *tokens* que chegam ao lugar Email (MS). No segundo e terceiro lugar os *tokens* passam para os *slots* 1 e 4. Os *tokens* armazenados no *slot*1 se destinam ao lugar Email (MS). Os *tokens* armazenados no lugar *slot*4 são disparados até a transição (7). A transição (7) distribui os *tokens* para três destinos. Um *token* segue para o lugar Fatura (IS), outro para o lugar Voos (V) e o terceiro para o lugar Hotel (H).

### Cenários de Simulação

Os cenários foram estipulados considerando a entrada periódica de *tokens* e por três quantidades de disparos. O primeiro com 10.000 mil disparos, o segundo com 50.000 mil disparos e o terceiro 100.000 mil disparos. Em estatística, quando um experimento é repetido um grande número de vezes com os mesmos dados, seguindo a Lei dos Grande Números (GLINSTEAD, SNELL, 2012), conforme o número de repetições se incrementa, a média amostral das variáveis do experimento se aproxima, cada vez mais, da média populacional, também conhecida como média teórica ou esperança matemática. Empiricamente, para a análise de sistemas que ainda não existem, onde para obter os dados é executado um experimento artificial, a média populacional costuma ser obtida com, aproximadamente, 25 repetições (WIESNER, 2016). Desta forma, foram realizadas 25 replicações de cada um dos três cenários para obter resultados com precisão estatística do modelo de simulação formal proposto.

### Resultados Experimentais

Os resultados das simulações do modelo forneceram um conjunto de valores de tempo. Estes valores foram reunidos e formatados gerando o Gráfico 4, o qual é formado por um eixo horizontal que se refere à todos os possíveis valores de tempo dos quatro lugares, Email (MS), Fatura (IS), Voos (V) e Hotel (H). Estes valores vão desde o valor mínimo possível no lugar Email (MS), o valor 5, até o valor máximo possível nos lugares Voos (V) e Hotel (H), o valor 40. O eixo Vertical se refere à soma do total de *tokens* disparados em todos os lugares, para cada valor de tempo possível.

Como mencionado, este trabalho considera a Qualidade de Serviço (QoS) como sendo o tempo que um *token* leva para perorrer todo o modelo de simulação em redes de Petri Temporizadas. Os *tokens* com tempo relativamente maior e menor formam um intervalo de valores que determinam as possibilidades de desempenho na Qualidade de Serviço (QoS) que o modelo pode realizar. O Gráfico 4 é resultado



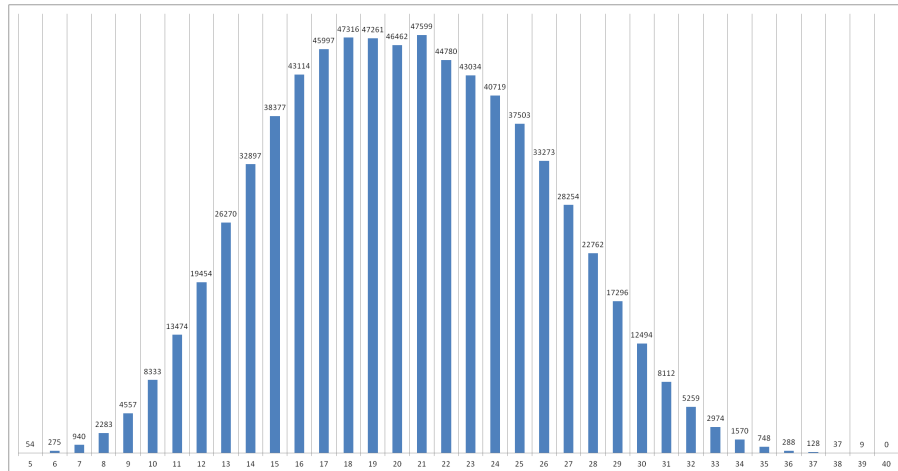


Figura 4: Gráfico geral do Total de *tokens* armazenados nos lugares Email, Fatura, Voos e Hotel, após as simulações com 10.000, 50.000 e 100.000 mil disparos em relação aos valores de tempos possíveis para o modelo de simulação.

da soma total de *tokens* processados no sistema. Podemos observar que o valor de tempo que mais se repetiu durante todo processo de simulação é o valor 21. Respondendo a questão de Qualidade de Serviço (QoS) podemos dizer que segundo os valores do Gráfico 4 há uma porcentagem relativa a cada valor de tempo em relação à soma total de *tokens* observados nos lugares Email (MS), Fatura (IS), Voos (V) e Hotel (H). O total foram 723.903 mil *tokens* disparados. Exatamente 47.599 mil *tokens* tem tempo 21, o que representa 6.57% da quantia total, se ampliarmos para um intervalo maior, isto é, se considerarmos os valores de tempo 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, com mais *tokens* observados e que correspondem a 31% dos 35 valores de tempo possíveis, obtem-se o número de 482.162 mil *tokens* ou 66,6% do total de *tokens*. Logo é possível afirmar que de cada 10 mensagens, 6 terão tempo dentro deste intervalo. Se, quando o tempo associado a um *token* for 1 ou 2: mensagem pequena (tamanho); tempo 3: mensagem de tamanho médio; se o tempo associado for 4 ou 5: mensagem grande (tamanho), então esses valores de tempo no intervalo  $I = [15, 25]$ , correspondem a uma faixa de mensagens de tamanho relativamente médio. Se usarmos o valor 3, valor de tempo médio associado por uma transição e considerar o caminho com menos transições, caminho que leva ao lugar Email (MS) com 5 transições e os caminhos com mais transições, os caminhos que chegam no lugares Voos (V) e Hotel (H) com 8 transições, multiplicarmos esses valores por 3, tem-se os valores 15 e 24. Estes dois valores, 15 e 24 juntamente com o valor 25, formam o intervalo de tempo contendo os números mais observados no Gráfico 4. Estes valores médios de tempo caracterizam o tamanho de uma mensagem e são imagem da função de probabilidade.

## Conclusões e Trabalhos Futuros

Esta pesquisa propôs um modelo de simulação em redes de Petri Temporizadas para uma solução de integração de uma Agência de Viagens. O trabalho encontrou, a partir do modelo conceitual, a equivalência entre os componentes das soluções e as redes de Petri Temporizadas. A partir disso foi possível realizar simulações do modelo e conseguir resultados. Pelos resultados de simulação, que estão ilustrados no Gráfico 4, o modelo ofereceu uma Qualidade de Serviço (QoS), no qual para os cenários estipulados, existe um intervalo de tempo  $[15, 25]$ , em que 66% dos *tokens* obtiveram valores dentro dessa faixa, sendo que o maior número de *tokens* obtiveram tempo igual a 21, isto é, um tempo relativamente médio.





O trabalho pode explorar os resultados de simulação e constatar que o modelo transcrito no CPN Tools é altamente adaptável em relação à programação das transições. Por consequência é possível expandir a aplicação das funções de probabilidades para outras mais complexas que forneceriam resultados mais ajustados à realidade da solução de integração. Para trabalhos futuros é possível aplicar funções de distribuição aleatórias, disponíveis pela ferramenta CPN Tools.

## Referências Bibliográficas

CARVALHO, H. J. R.; YOSHIKAWA, A. R.; PONTES, H. L. J. XXXVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional **Análise de Desempenho do Trabalho Multifuncional em Linhas de Produção em forma de U pela Modelagem em Simulação Usando Redes de Petri Temporizadas**, n.37, 2005.

CPN TOOLS. Universidade de Tecnologia de Eindhoven. Disponível em: <http://cpntools.org/>. Acesso em: 16 dez 2016.

ROOS-FRANTZ, F. ; BASTO-FERNANDES, V. ; Z. FRANTZ, R. Z. ; BINELO, M. ; SAWICKI, S. **Using Petri Nets to Enable the Simulation of Application Integration Solutions Conceptual Models**. In: 17th International Conference on Enterprise Information Systems, 2015, Barcelona, p. 87.

FRANTZ, R. Z. International Journal of Cooperative Information Systems. **A domain-specific language to design enterprise application integration solutions**, v. 20, n.02, p. 143-176, 2011.

FRANTZ, R.Z. **Enterprise Application Integration - An Easy-to-Maintain Model-Driven Engineering Approach**. 2012. Tese (Doutorado em Computação) – Universidade de Sevilha, Sevilha, 2012.

FRANTZ, R. et all. **Desafios para a Implementação de Soluções de Integração de Aplicações Empresariais em Provedores de Computação em Nuvem**. UNIJUI, 2014.

GRINSTEAD, C. M.; SNELL, J. L. **Introduction to probability**. American Mathematical Society, 2012.

HOPPE, G.; WOOLF, B. **Enterprise integration patterns: Designing, building, and deploying messaging solutions**. Addison-Wesley, 2003.

LINTHICUM, D. S. **Next Generation Application Integration: From Simple Information to Web Services**. Addison-Wesley, 2003.

MATTIAS, H. F.; RUGGIERO, W. V. Simpósio brasileiro de Redes de Computadores **Metodologia para análise de desempenho de Sistemas de Computação descritos através de Redes de petri Temporizadas Estendidas**, n.8, 1990.

QUENTAL, N. C. **Modelagem de Desempenho de Programas Paralelos Utilizando Redes de Petri Temporizadas**. 2006. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização) – Escola Politécnica da Universidade de Pernambuco, Pernambuco, 2006.

SANTOS, R. S. B. **Modelagem e Análise de Performance de Sistemas Flexíveis de Manufatura Baseado em Redes de Petri Temporizadas: Estudo de Caso na Indústria Automobilística**. 2008. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

WIESNER, A. K. **Modelagem e Simulação de uma Solução de Integração para Identificação de Gargalos de Desempenho Baseadas em Formalismo Matemático: uma Abordagem Orientada à Teoria das Filas**. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Unijui, Ijuí, 2016.

## Modelo matemático de dormência do câncer: via cálculo fracionário

*Aiara Cristina de Oliveira Ribeiro*

*Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”; Instituto de Biociências de Botucatu  
aiara.olive@gmail.com*

*Paulo Fernando de Arruda Mancera*

*Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”; Instituto de Biociências de Botucatu  
pmancera@ibb.unesp.br*

**Resumo:** O câncer é uma das principais causas de morbidade e mortalidade em todo o mundo. Um problema que atinge muitos pacientes diagnosticados com a doença é a recidiva, que pode ocorrer anos após uma aparente cura. Tal fenômeno é explicado pela dormência do câncer. Neste trabalho, apresentamos um modelo matemático de ordem inteira e não inteira, na derivada temporal, que visa descrever o fenômeno da dormência do câncer. Para simulações numéricas utilizamos o Método de Diferenças Finitas Não Local para Equações Diferenciais Fracionárias. As simulações numéricas exibiram que, com escolha apropriada de parâmetros, a diminuição na ordem da derivada fracionária resulta no maior amortecimento das soluções dos sistemas.

**Palavras-chave:** Dormência do Câncer. Modelagem Matemática. Cálculo Fracionário e Aplicações.

### Introdução

Câncer é o nome atribuído a um grupo de doenças caracterizadas pelo crescimento anormal das células (MUKHERJEE, 2012), que ocorre como resultado de alterações ou mutações genéticas. Mais precisamente, o surgimento do câncer pode requerer a acumulação de múltiplas mutações.

Segundo informações da Organização Mundial de Saúde, o câncer é uma das principais causas de morbidade e mortalidade, atingindo todas as regiões do mundo. Em 2012, foram registrados cerca de 14 milhões de novos casos e 8 milhões de mortes relacionadas à doença e nas próximas duas décadas, espera-se o aumento para 22 milhões de novos casos (STEWART; WILD, 2014), que ocorrerão, principalmente, nos países em desenvolvimento.

No Brasil, segundo informações do Instituto Nacional de Câncer “José de Alencar Gomes da Silva”, estima-se para o biênio 2016-2017, cerca de 600 mil novos casos da doença, incluindo os casos de câncer de pele não melanoma. Espera-se que a população masculina tenha maiores taxas de incidência de câncer de próstata, onde ocorrerão cerca de 61 mil novos casos. Já na população feminina o câncer de mama será o mais prevalente, com cerca de 58 mil novos casos (BRASIL, 2016).

Um problema que atinge muitos pacientes diagnosticados com a doença é a recidiva, que pode ocorrer anos após uma aparente cura da doença (YEH; RAMASWAMY, 2015). Estima-se, por exemplo, que entre 20% e 45% das pessoas que tiveram câncer de mama ou próstata voltarão a ter a doença tempos depois do tratamento (AGUIRRE-GHISO, 2007; CHEN; JIAO; TORQUATO, 2014; UHR; PANTEL, 2011).

A recidiva do câncer frequentemente apresenta estados mais agressivos da doença, caracterizados principalmente pela ocorrência de metástases (a maior causa de morte por câncer) (WEINBERG, 2008), na qual tumores adquirem resistência a drogas ou terapias inicialmente eficientes.

Estudos que visam entender melhor o câncer estão voltados agora para a compreensão e processos que fazem com que a doença permaneça durante anos indetectável e assintomática no organismo, e, posteriormente, volte com bastante agressividade. Tal fenômeno é conhecido como dormência do câncer.

A dormência do câncer caracteriza-se pelo prolongado período de tempo no qual o volume tumoral ou o número de células tumorais malignas permanece pequeno e constante, antes do rápido crescimento do

tumor ou das células tumorais (AGUIRRE-GHISO, 2007; ALMOG, 2010; CHEN; JIAO; TORQUATO, 2014).

O fenômeno tem atraído grande interesse em pesquisas, entretanto, ainda é pouco compreendido (YEH; RAMASWAMY, 2015) devido, principalmente, a complexidade da doença (AGUIRRE-GHISO, 2007) e da dificuldade de compreensão dos mecanismos biológicos que fazem com que o câncer saia do estado de dormência (UHR; PANTEL, 2011).

Apresentamos o estudo de um modelo matemático que visa descrever o fenômeno da dormência do câncer. O modelo é dado por Equações Diferenciais Ordinárias no tempo e suas respectivas versões fracionárias. Para as simulações numéricas utilizamos o Método de Diferenças Finitas Não Local para Equações Diferenciais Fracionárias.

## Cálculo fracionário e método de diferenças finitas não local

O cálculo fracionário é o estudo de derivadas e integrais de ordens não inteiras (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015). Dada uma equação diferencial que descreve um determinado fenômeno, a modelagem fracionária substitui as derivadas de ordem inteira por derivadas de ordem não inteira.

As derivadas fracionárias são operadores não locais, pois suas definições são dadas a partir de uma integral. Em particular, ao considerarmos uma função cuja variável é temporal, a derivada fracionária leva em conta o comportamento da função em momentos anteriores, e assim conserva os chamados efeitos de memória (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015). Nesse sentido, a modelagem fracionária tem se mostrado apropriada para descrever a evolução temporal de muitos fenômenos.

A seguir, apresentamos os principais operadores diferenciais utilizados neste trabalho, e suas relações com equações diferenciais fracionárias.

### Operadores diferenciais fracionários

O operador diferencial de Riemann-Liouville de ordem  $\alpha > 0$  de uma função  $f = f(t)$ , para  $t > 0$  é definido como

$${}_R L D_{t_0}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_{t_0}^t (t-s)^{m-\alpha-1} f(s) ds, \quad (1)$$

em que  $\Gamma(\cdot)$  é a função gama e  $m$  é o menor inteiro tal que  $m > \alpha$ .

O operador diferencial de Caputo de ordem  $\alpha > 0$  de uma função  $f = f(t)$ , para  $t > 0$  é dado por

$${}_C D_{t_0}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-s)^{m-\alpha-1} \frac{d^m}{ds^m} f(s) ds. \quad (2)$$

Este operador é muito utilizado em equações diferenciais fracionárias com condições iniciais da forma

$$\begin{cases} {}_C D_{t_0}^{\alpha} y(t) &= f(t, y(t)) \\ D^k y(t_0) &= y_{0,k}, \quad k = 0, \dots, m-1 \end{cases} \quad (3)$$

Os operadores diferenciais de Caputo e Riemann-Liouville são relacionados por

$${}_C D_{t_0}^{\alpha} f(t) = {}_R L D_{t_0}^{\alpha} (f(t) - T_{m-1}[f; t_0]), \quad (4)$$

na qual, para  $f$  suave em  $t_0$ ,

$$T_{m-1}[f; t_0](t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(t_0), \quad (5)$$

em que  $f^{(k)}(t_0)$  denota a  $k$ -ésima derivada de  $f$  em  $t_0$ .

Para  $0 < \alpha < 1$ , resulta  $m = 1$  e  $T_0[f; t_0](t) = f(t_0)$ , e então,

$${}_C D_{t_0}^\alpha f(t) = {}_{RL} D_{t_0}^\alpha (f(t) - f(t_0)). \quad (6)$$

O operador diferencial de Grünwald-Letnikov de ordem  $\alpha > 0$  de uma função  $f = f(t)$  é definido como

$${}_{GL} D_{t_0}^\alpha f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} h_N^{-\alpha} \sum_{j=0}^N w_j^{(\alpha)} f(t - jh_N), \quad (7)$$

com  $h_N = \frac{t-t_0}{N}$ ,  $w_0^{(\alpha)} = 1$ ,  $w_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{1+\alpha}{j}\right) w_{j-1}^{(\alpha)}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ .

Supondo que a função  $f = f(t)$  é  $(q-1)$  vezes contínua e diferenciável no intervalo  $[0, T]$  e que  $f^{(q)}(t)$  é integrável em  $[0, T]$ , então para todo  $\alpha$  ( $0 < \alpha < q$ ), os operadores de Riemann-Liouville e Grünwald-Letnikov são iguais (PODLUBNY, 1998), assim

$${}_{RL} D_{t_0}^\alpha f(t) = {}_{GL} D_{t_0}^\alpha f(t). \quad (8)$$

Logo, temos uma relação entre os operadores de Caputo e Grünwald-Letnikov dada por

$${}_C D_{t_0}^\alpha f(t) = {}_{GL} D_{t_0}^\alpha (f(t) - T_{m-1}[f; t_0]). \quad (9)$$

Para  $0 < \alpha < 1$ , temos que

$${}_C D_{t_0}^\alpha f(t) = {}_{GL} D_{t_0}^\alpha (f(t) - f(t_0)). \quad (10)$$

Truncando o somatório no  $N$ -ésimo termo em (7) e usando (9) ou (10), pode-se aproximar a solução do problema de valor inicial (3) por

$$\sum_{j=0}^N w_j^{(\alpha)} (y(t - jh_N) - y_0) = h_N^\alpha f(t, y(t)). \quad (11)$$

### Método de diferenças finitas não local

O Método de Diferenças Finitas Não Local é também conhecido como Método NSFD (do inglês *NonStandard Finite Difference*). Para a descrição dos principais aspectos do Método NSFD, seja

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, \lambda), \quad (12)$$

em que  $\lambda$  é um parâmetro ou vetor de parâmetros da equação diferencial.

Dada uma discretização temporal  $t_n = t_0 + n \Delta t$ , com passo de tempo  $\Delta t > 0$ , a construção do método segue duas etapas principais, descritas a seguir.

Primeiramente, a derivada da Equação (12) é aproximada da seguinte forma

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{\phi(\Delta t, \lambda)}, \quad (13)$$

em que  $y_n$  é uma aproximação para  $y(t_n)$  e  $\phi = \phi(\Delta t, \lambda)$  é a função denominador. Essa aproximação é uma generalização da discretização usual para derivadas de primeira ordem, na qual  $\phi(\Delta t, \lambda) = \Delta t$ .

Posteriormente, os termos não lineares da Equação (12) devem ser substituídos por representações discretas não locais  $F(t, y_n, y_{n-1}, \dots, \lambda)$ . Então,

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\phi(\Delta t, \lambda)} = F(t, y_n, y_{n-1}, \dots, \lambda). \quad (14)$$

A função denominador  $\phi(\Delta t, \lambda)$  é uma função do passo de tempo  $\Delta t$ , podendo depender de vários parâmetros que aparecem na equação diferencial (MICKENS, 2000) e deve satisfazer a condição de consistência

$$\phi(\Delta t, \lambda) = \Delta t + O((\Delta t)^2), \Delta t \rightarrow 0, \quad (15)$$

com o objetivo de garantir que a discretização em (13) convirja para a derivada contínua correspondente quando  $\Delta t \rightarrow 0$  (ONGUN; ARSLAN; GARRAPPA, 2013).

Visto as características fundamentais desse método, vamos analisar sua relação com equações diferenciais fracionárias.

### Método NSFD para equações diferenciais fracionárias

O equivalente à Equação (14) para equações diferenciais fracionárias com ordem  $0 < \alpha \leq 1$  é

$$\frac{1}{\phi(\Delta t, \lambda)} \sum_{j=0}^n w_j^{(\alpha)} (y_{n-j} - y_0) = F(t, y_n, y_{n-1}, \dots, \lambda), \quad (16)$$

no qual, a condição de consistência agora é dada por

$$\phi(\Delta t, \lambda) = \Delta t^\alpha + O((\Delta t)^p), \quad p > \alpha, \quad \Delta t \rightarrow 0. \quad (17)$$

Um importante aspecto na construção do Método de Diferenças Finitas Não Local é a escolha da função denominador de tal modo que as propriedades de estabilidade na equação de diferenças sejam exatamente as mesmas da equação diferencial (MICKENS, 2000). A escolha da função  $\phi(\Delta t, \lambda)$  foi feita com base no trabalho de Ongun *et al.* (2013). Sendo assim, consideramos a seguinte função denominador

$$\phi(\Delta t, \lambda) = \frac{1 - e^{-(\Delta t)^\alpha \lambda}}{\lambda}. \quad (18)$$

### Modelo matemático

Wilkie & Hahnfeldt (2014) propõem um modelo matemático de dormência do câncer induzida pelo sistema imunológico. Os autores consideram populações homogêneas de células, no qual equações diferenciais ordinárias são utilizadas para descrever a evolução temporal de cada população.

Considerando  $N_1(t)$  o número de células cancerosas e  $I(t)$  o número de células do sistema imunológico, temos o seguinte modelo

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K}\right) - \alpha_1 N_1 I \\ \frac{dI}{dt} = r_2 I \left(1 - \frac{I}{I_e + \alpha_2 N_1 I}\right) \end{cases}, \quad (19)$$

em que  $r_1$  é a taxa de proliferação das células cancerosas,  $K$  é a capacidade de suporte da população de células cancerosas,  $r_2$  é a taxa de crescimento da população de células do sistema imunológico,  $\alpha_1$  representa a predação das células do sistema imunológico,  $\alpha_2$  representa o recrutamento das células do sistema imunológico, e  $I(0) = I_e$  a condição inicial da população de células do sistema imunológico.

A versão fracionária de (19), utilizando o operador diferencial de Caputo de ordem  $0 < \alpha \leq 1$  é dada por

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha N_1}{dt^\alpha} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K}\right) - \alpha_1 N_1 I \\ \frac{d^\alpha I}{dt^\alpha} = r_2 I \left(1 - \frac{I}{I_e + \alpha_2 N_1 I}\right) \end{cases}. \quad (20)$$

### Discretização do modelo fracionário

Para a discretização numérica do modelo, as seguintes aproximações são propostas  $N_1(t) \rightarrow N_1(t_{n-1})$ ,  $I(t) \rightarrow I(t_{n-1})$  e  $I(t)N_1(t) \rightarrow I(t_{n-1})N_1(t_{n-1})$ .

Por simplicidade, denotamos as respectivas aproximações  $N_1(t_n)$ ,  $Q(t_n)$  e  $I(t_n)$  por  $N_{1(n)}$ ,  $Q_{(n)}$  e  $I_{(n)}$ . Utilizando a discretização (16), obtemos

$$N_{1(n)} = w_n^{(\alpha-1)} N_{1(0)} + \left( \sum_{j=1}^n w_j^{(\alpha)} N_{1(n-j)} \right) + \phi(\Delta t) \left[ r_1 N_{1(n-1)} \left( 1 - \frac{N_{1(n-1)}}{K} \right) - \alpha_1 N_{1(n-1)} I_{(n-1)} \right], \quad (21)$$

$$I_{(n)} = w_n^{(\alpha-1)} I_{(0)} + \left( \sum_{j=1}^n w_j^{(\alpha)} I_{(n-j)} \right) + \phi(\Delta t) \left[ r_2 I_{(n-1)} \left( 1 - \frac{I_{(n-1)}}{I_e + \alpha_2 N_{1(n-1)} I_{(n-1)}} \right) \right] \quad (22)$$

Para simulações numéricas, baseados no trabalho de Ongun *et al.* (2013), consideramos a função denominador  $\phi(\Delta t) = \frac{1 - e^{-(\Delta t)^\alpha (r_1 + 1)}}{r_1 + 1}$ .

### Resultados

A Figura 1 exibe a evolução temporal das células cancerosas, para ordem da derivada fracionária  $\alpha = 1$ . Para simulações numéricas desse modelo consideramos  $\Delta t = 0,01$ . Ao longo do tempo, observamos que a população de células cancerosas sofre pequenas oscilações, mantendo-se sempre entre  $10^2$  e  $10^4$  células, o que não permite a detecção clínica dessas células. Percebe-se que o sistema imunológico está atuando de maneira eficaz, evitando o crescimento da população de células cancerosas. Esse comportamento caracteriza a dormência imunológica.

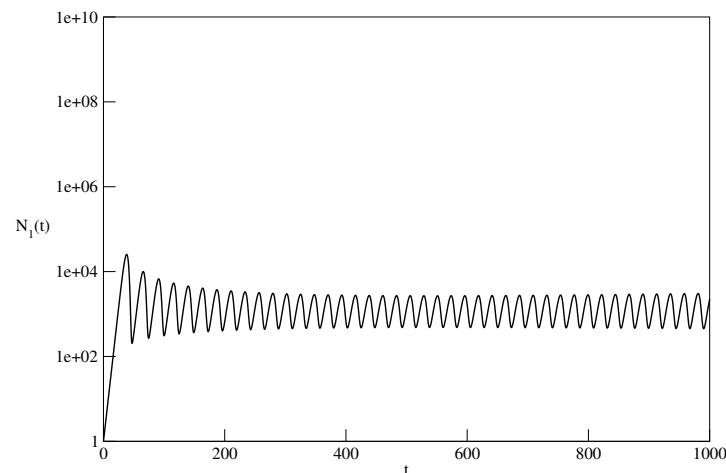


Figura 1: Evolução temporal das células cancerosas, com a ordem da derivada fracionária  $\alpha = 1$ , para  $r_1 = 0,3$ ,  $K = 10^{11}$ ,  $r_2 = 0,3$ ,  $\alpha_1 = 7,25 \times 10^{-5} e^{\frac{t}{227,9}}$ ,  $\alpha_2 = 10^{-3}$ . Condições iniciais,  $N_1(0) = 1$  e  $I(0) = 100$ .

Na Figura 2 é exibida a evolução temporal das células cancerosas, para  $\alpha = 0,9$ ,  $\alpha = 0,8$ ,  $\alpha = 0,7$ , e  $\alpha = 0,6$ . Considerando o mesmo conjunto de parâmetros e as mesmas condições iniciais da Figura 1, a dinâmica mostrou-se diferente. Ao longo do tempo, a população de células cancerosas não sofre muitas oscilações e o sistema é amortecido rapidamente. Notamos o maior amortecimento do sistema quando considera-se ordens menores da derivada fracionária.



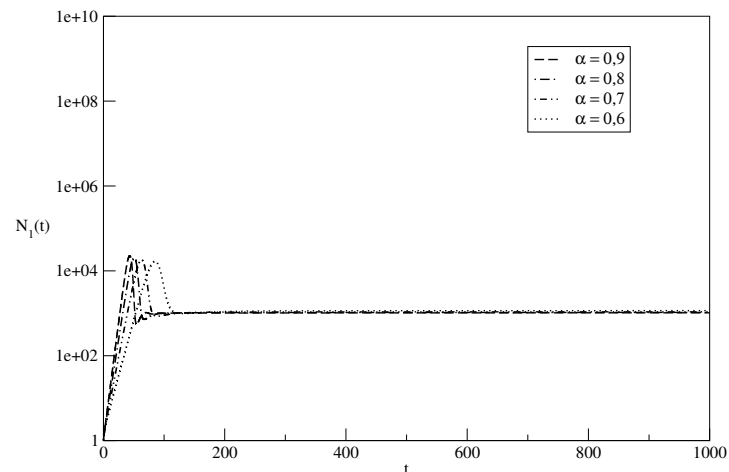


Figura 2: Evolução temporal das células cancerosas, com variações na ordem da derivada fracionária  $\alpha$ , para  $r_1 = 0,3$ ,  $K = 10^{11}$ ,  $r_2 = 0,3$ ,  $\alpha_1 = 7,25 \times 10^{-5} e^{\frac{-t}{227,9}}$ ,  $\alpha_2 = 10^{-3}$ . Condições iniciais,  $N_1(0) = 1$  e  $I(0) = 100$ .

A Figura 3 exibe a comparação dos retratos de fase da Figura 1 com  $\alpha = 1$  e da Figura 2 para  $\alpha = 0,9$ . Observamos para  $\alpha = 1$ , as oscilações do sistema, enquanto que  $\alpha = 0,9$ , a convergência para um equilíbrio.

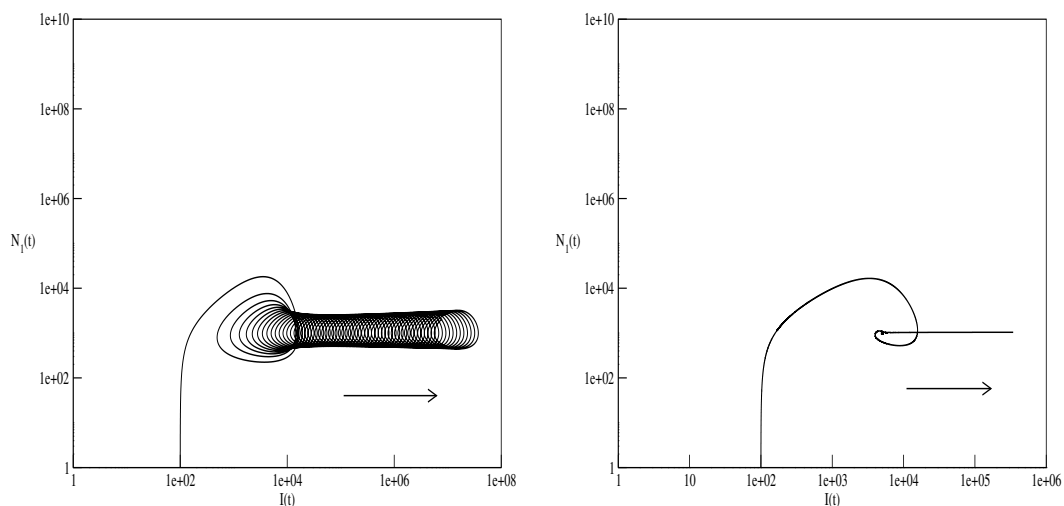


Figura 3: Retratos de fase (células do sistema imunológico  $\times$  células cancerosas) para  $\alpha = 1$  e  $\alpha = 0,9$ , com  $r_1 = 0,3$ ,  $K = 10^{11}$ ,  $r_2 = 0,3$ ,  $\alpha_1 = 7,25 \times 10^{-5} e^{\frac{-t}{227,9}}$ ,  $\alpha_2 = 10^{-3}$ . Condições iniciais,  $N_1(0) = 1$  e  $I(0) = 100$ .

## Conclusão

As simulações numéricas exibiram que a dinâmica tumoral é dependente dos parâmetros escolhidos, e com a utilização da teoria de cálculo fracionário foram obtidos comportamentos diferentes quando comparados com sistemas de derivada temporal de ordem inteira um.

Para o modelo analisado no contexto fracionário, com escolha apropriada de parâmetros, as simulações exibiram que a diminuição na ordem da derivada fracionária implica no maior amortecimento das soluções



dos sistemas.

Este estudo também elucida a importância do uso de cálculo fracionário em aplicações, pois temos infinitas escolhas de ordem de derivadas, as quais podem, possivelmente, implicar em interpretações mais adequadas de fenômenos da natureza.

## Referências

- AGUIRRE-GHISO, J. A. Nature Reviews Cancer. **Models, mechanisms and clinical evidence for cancer dormancy**, v.7, p.834-846, 2007.
- ALMOG, N. Cancer Letters. **Molecular mechanisms underlying tumor dormancy**, v.294, p.139-146, 2010.
- BRASIL. **Estimativas 2016: incidência de câncer no Brasil**. Rio de Janeiro: INCA, 2015.
- CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C. **Cálculo Fracionário**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.
- CHEN, D.; JIAO, Y.; TORQUATO, S. PloS One. **A cellular automaton model for tumor dormancy: emergence of a proliferative switch**, v.9, n.10, p.1-10, 2014.
- MICKENS, R. E. **Applications of nonstandard finite difference schemes**. Singapore: World Scientific, 2000.
- MUKHERJEE, S. **O imperador de todos os males: uma biografia do câncer**. São Paulo: Companhia das Letras, 2012.
- ONGUN, M. Y.; ARSLAN, D.; GARRAPPA, R. Advances in Difference Equations. **Nonstandard finite difference schemes for a fractional-order Brusselator system**, v.102, p.1-13, 2013.
- PODLUBNY, I. **Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications**. London: Academic Press, 1998.
- STEWART, W. B.; WILD, P. C. **World Cancer Report 2014**. France: International Agency for Research on Cancer WHO, 2014.
- UHR, J. W.; PANTEL, K. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. **Controversies in clinical cancer dormancy**, v.108, n.30, p.12396-12400, 2011.
- WEINBERG, R. A. **A biologia do câncer**. Porto Alegre: Tradução Bruna Selbach *et al.* Artmed, 2008. 864p.
- WILKIE, K. P.; HAHNFELDT, P. Interface Focus. **Mathematical models of immune-induced cancer dormancy and the emergence of immune evasion**, v.3, p.1-13, 2014.
- YEH, A. C.; RAMASWAMY, S. Cancer Research. **Mechanisms of cancer cell dormancy - another hallmark of cancer?**, v.75, n.23, p.OF1-OF9, 2015.

## Modelo matemático de um processo de solidificação de plástico em molde

*Oliveira, S. D. R.*

*Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho; Faculdade de Engenharia de Bauru  
santiago@feb.unesp.br*

*Módolo, D. L.*

*Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho; Faculdade de Engenharia de Bauru  
delsonmodolo@feb.unesp.br*

**Resumo:** Processos de solidificação são de grande importância na indústria, em especial no segmento metalúrgico. Modelos matemáticos podem ser construídos e testados com o intuito de se obterem informações mais detalhadas de um processo de solidificação, como por exemplo, tempo de solidificação, posição da frente de solidificação e a distribuição de temperaturas no meio. Essas informações podem ser utilizadas, por exemplo, para aperfeiçoar um processo de solidificação. O objetivo desse trabalho é modelar matematicamente um processo de solidificação de plástico em molde utilizando um modelo transiente e unidimensional de transferência de calor por condução térmica. Efeitos de convecção térmica são ignorados. São obtidos resultados analíticos para a distribuição de temperaturas nas fases líquida e sólida e também uma equação algébrica não linear para a determinação da posição da frente de solidificação. Foi realizado um estudo de caso numérico para verificar o comportamento das equações resultantes.

**Palavras-chave:** Matemática Aplicada à Engenharia. Solidificação. Condução Térmica.

### Introdução

Solidificação ocorre em diversas aplicações ambientais, de engenharia, médicas, dentre outras. No nosso ambiente, solidificação ocorre em lagos, estuários e no mar durante o inverno em locais com climas frios. O gelo formado subsequentemente derrete na primavera ou no verão. Com relação a aplicações de engenharia, solidificação ocorre em dispositivos de armazenamento de energia, trocadores de calor, processos de soldagem, processos de fundição e revestimento, remoção de material utilizando feixes de laser com alta potência, dentre outros. Aplicações médicas envolvendo solidificação são exemplificadas pelo congelamento de tecidos em crio cirurgias e a preservação de órgãos humanos e de animais em laboratório.

Na literatura existem inúmeros trabalhos envolvendo solidificação, desde aqueles que envolvem modelos matemáticos até aqueles que envolvem procedimentos experimentais. Merecem destaque os trabalhos de Alexiades e Solomon (1993), Gupta (2003) e de Mohs e Kulacki (2015). No primeiro e segundo trabalhos são apresentadas diversas soluções analíticas e exemplos de cálculo enquanto no terceiro trabalho são apresentados diversos aparatos experimentais envolvendo solidificação. Atualmente, solidificação é um dos tópicos contemporâneos em transferência de calor e massa, envolvendo um grande número de pesquisas, com ênfase em trabalhos numéricos e validação com soluções analíticas clássicas e procedimentos experimentais.

Nesse trabalho será analisada condução de calor unidimensional na presença de solidificação, com efeitos de convecção na fase líquida sendo ignorados. Será assumido que a transição de fase ocorre em uma única temperatura e que as duas fases são separadas por uma interface delgada. Esse é o caso, por exemplo, de solidificação de substâncias puras ou ligas eutéticas. Serão obtidos resultados analíticos para a distribuição de temperaturas nas fases líquida e sólida e também uma equação algébrica não linear para a determinação da posição da frente de solidificação. Será realizado um estudo de caso numérico para verificar o comportamento das equações resultantes.

## Modelo Matemático

Inicialmente é dado enfoque a uma característica que surge na análise de problemas de solidificação, a chamada frente de solidificação. A Figura. 1 mostra essa frente separando a região sólida da região líquida. As linhas horizontais tracejadas na Figura 1 representam um volume de controle infinitamente fino em torno dessa frente.

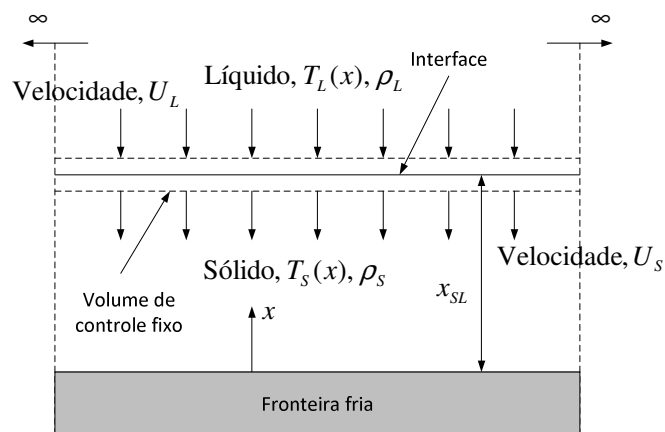


Figura 1: Solidificação a partir de uma fronteira fria.

É assumido que a solidificação ocorre no líquido devido a presença de uma fronteira fria, conforme a Figura 1. Conforme a solidificação avança, a interface desloca-se para cima (na direção  $x$  positiva) em um meio estacionário. Em geral, é mais fácil modelar a transferência de calor no processo de solidificação se, ao invés disso, assumirmos que a interface e o volume de controle em seu entorno são estacionários e assim o meio desloca-se para baixo (na direção  $x$  negativa) através da interface. Dessa forma, líquido com massa específica  $\rho_L$  e velocidade  $U_L$  entra pela face superior do volume de controle e sólido com massa específica  $\rho_S$  e velocidade  $U_S$  sai pela face inferior do volume de controle. A conservação da massa na interface requer que:

$$\rho_L U_L A = \rho_S U_S A \quad (1)$$

onde  $A$  é a área de cada lado do volume de controle. Um balanço de energia no volume de controle fornece:

$$\dot{Q}_{entra, condução} + \dot{Q}_{entra, convecção} - \dot{Q}_{sai, condução} - \dot{Q}_{sai, convecção} = 0 \quad (2)$$

onde  $\dot{Q}_{entra, condução}$  é a energia (calor) transferido para o interior do volume de controle por condução,  $\dot{Q}_{entra, convecção}$  é a energia transferida para o interior do volume de controle por convecção (visto que o meio se move através do volume de controle) e  $\dot{Q}_{sai, condução}$  e  $\dot{Q}_{sai, convecção}$  são as quantias análogas saindo do volume de controle. As taxas de energia por condução são escritas utilizando a lei de Fourier da condução, atentando para o fato que ambas estão na direção  $x$  negativa:

$$\dot{Q}_{entra, condução} = k_L A \left( \frac{\partial T_L}{\partial x} \right)_{x=x_{SL}} \quad (3)$$

$$\dot{Q}_{sai, condução} = k_s A \left( \frac{\partial T_s}{\partial x} \right)_{x=x_{SL}} \quad (4)$$

Além disso, a taxa de energia convectada para dentro e para fora do volume de controle podem ser escritas como:

$$\dot{Q}_{entra, convecção} = \rho_L U_L A h_L \quad (5)$$

$$\dot{Q}_{sai, convecção} = \rho_s U_s A h_s \quad (6)$$

onde  $h_L$  e  $h_s$  são as entalpias específicas das fases líquida e sólida nas fronteiras do volume de controle. Substituindo as Equações 3 a 6 na Equação 2 e rearranjando obtém-se:

$$k_L A \left( \frac{\partial T_L}{\partial x} \right)_{x=x_{SL}} - k_s A \left( \frac{\partial T_s}{\partial x} \right)_{x=x_{SL}} + \rho_L U_L A h_L - \rho_s U_s A h_s = 0 \quad (7)$$

O calor latente de solidificação pode ser escrito como:

$$h_{SL} = h_L - h_s \quad (8)$$

Substituindo as Equações 1 e 8 na Equação 7 e rearranjando obtém-se:

$$k_L \left( \frac{\partial T_L}{\partial x} \right)_{x=x_{SL}} - k_s \left( \frac{\partial T_s}{\partial x} \right)_{x=x_{SL}} + \rho_s U_s h_{SL} = 0 \quad (9)$$

A velocidade da interface pode ser escrita como:

$$U_s = \frac{dx_{SL}}{dt} \quad (10)$$

Substituindo a Equação 10 na Equação 9 obtém-se:

$$k_L \left( \frac{\partial T_L}{\partial x} \right)_{x=x_{SL}} - k_s \left( \frac{\partial T_s}{\partial x} \right)_{x=x_{SL}} + \rho_s h_{SL} \frac{dx_{SL}}{dt} = 0 \quad (11)$$

A Equação 11 é um resultado direto de um balanço de energia na frente de solidificação e fornece uma condição de acoplamento necessária para a solução da distribuição de temperaturas no meio. O problema que será analisado pode ser descrito da seguinte forma: imediatamente após o vazamento de plástico fundido com temperatura  $T_i$  em um molde retangular conforme a Figura 2, a parede inferior do molde é resfriada a uma temperatura  $T_c$ , bem abaixo da temperatura de fusão do material plástico,  $T_f$ . Como resultado, acontece solidificação primeiro próximo da parede inferior. Com o passar do tempo a frente de mudança de fase desloca-se para cima. Por simplicidade, pode-se assumir que tanto a solidificação quanto o fenômeno da transferência de calor por condução são unidirecionais (na direção  $x$  positiva da Figura 2). Além disso, é assumido que o molde é alto o suficiente de forma que mesmo para um longo período de tempo a parede superior do molde não afeta o processo de solidificação. Quer-se então obter a distribuição unidimensional de temperaturas no molde em função do tempo e a posição da interface sólido-líquido.

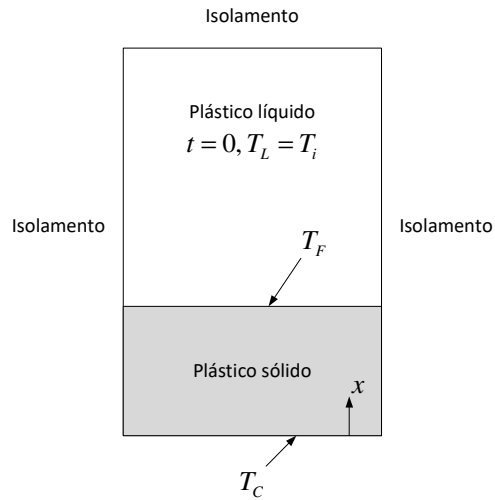


Figura 2 – Solidificação de plástico em molde.

Existem duas regiões distintas no sistema da Figura 2: a região sólida ( $S$ ) e a região líquida ( $L$ ). A equação de condução de calor para essas duas regiões, considerando condução transiente unidimensional com propriedades constantes é escrita como:

$$\frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} \quad 0 < x < x_{SL} \quad (12)$$

$$\frac{1}{\alpha_L} \frac{\partial T_L}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_L}{\partial x^2} \quad x_{SL} < x < \infty \quad (13)$$

Para completar o modelo matemático são necessárias duas condições iniciais e quatro condições de contorno, escritas como:

$$t = 0: \quad T_s = T_i \quad (14)$$

$$t = 0: \quad T_F = T_i \quad (15)$$

$$x = 0: \quad T_s = T_C \quad (16)$$

$$x = x_{SL}: \quad T_s = T_L = T_F \quad (17)$$

$$x = x_{SL}: \quad k_L \frac{\partial T_L}{\partial x} - k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} + \rho_s h_{SL} \frac{dx_{SL}}{dt} = 0 \quad (18)$$

$$x \rightarrow \infty: \quad T_L \rightarrow T_i \quad (19)$$

Define-se inicialmente uma variável chamada excesso de temperaturas  $\theta(x, t) = T(x, t) - T_i$  de tal forma que as Equações 14 a 19 são reescritas como:



$$\frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial \theta_s}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial x^2} \quad 0 < x < x_{SL} \quad (20)$$

$$\frac{1}{\alpha_L} \frac{\partial \theta_L}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial x^2} \quad x_{SL} < x < \infty \quad (21)$$

$$t = 0: \quad \theta_s = 0 \quad (22)$$

$$t = 0: \quad \theta_f = 0 \quad (23)$$

$$x = 0: \quad \theta_s = T_c - T_i = \theta_{sc} \quad (24)$$

$$x = x_{SL}: \quad \theta_s = \theta_L = \theta_f \quad (25)$$

$$x = x_{SL}: \quad k_L \frac{\partial \theta_L}{\partial x} - k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x} + \rho_s h_{SL} \frac{dx_{SL}}{dt} = 0 \quad (26)$$

$$x \rightarrow \infty: \quad \theta_L \rightarrow 0 \quad (27)$$

Para resolver o modelo matemático composto pelas Equações 20 a 27 pode-se utilizar a técnica da similaridade definindo uma variável de similaridade na seguinte forma:

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha_s t}} \quad (28)$$

Reescrevendo as derivadas das Equações 20, 21 e 26 em termos da variável de similaridade obtém-se:

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial x} = \frac{d\theta_s}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{d\theta_s}{d\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha_s t}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_s t}} \frac{d\theta_s}{d\eta} \quad (29)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_s}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta_s}{\partial x} \right) = \frac{d}{d\eta} \left( \frac{1}{2\sqrt{\alpha_s t}} \frac{d\theta_s}{d\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_s t}} \frac{d^2 \theta_s}{d\eta^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha_s t}} \right) = \frac{1}{4\alpha_s t} \frac{d^2 \theta_s}{d\eta^2} \quad (30)$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} = \frac{d\theta_s}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{d\theta_s}{d\eta} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha_s t}} \right) = -\frac{\eta}{2t} \frac{d\theta_s}{d\eta} \quad (31)$$

$$\frac{\partial \theta_L}{\partial x} = \frac{d\theta_L}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{d\theta_L}{d\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha_s t}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_s t}} \frac{d\theta_L}{d\eta} \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_L}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta_L}{\partial x} \right) = \frac{d}{d\eta} \left( \frac{1}{2\sqrt{\alpha_s t}} \frac{d\theta_L}{d\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_s t}} \frac{d^2 \theta_L}{d\eta^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha_s t}} \right) = \frac{1}{4\alpha_s t} \frac{d^2 \theta_L}{d\eta^2} \quad (33)$$

$$\frac{\partial \theta_L}{\partial t} = \frac{d\theta_L}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{d\theta_L}{d\eta} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha_s t}} \right) = -\frac{\eta}{2t} \frac{d\theta_L}{d\eta} \quad (34)$$

$$\frac{dx_{SL}}{dt} = \frac{d}{dt} (2\eta_{SL} \sqrt{\alpha_s t}) = \eta_{SL} \sqrt{\frac{\alpha_s}{t}} \quad (35)$$

Substituindo as Equações 29 a 35 nas Equações 20 a 27 e rearranjando obtém-se o modelo matemático escrito em termos da variável de similaridade, ou seja:

$$\frac{d^2 \theta_s}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\theta_s}{d\eta} = 0 \quad 0 < \eta < \eta_{SL} \quad (36)$$

$$\frac{\alpha_L}{\alpha_s} \frac{d^2 \theta_L}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\theta_L}{d\eta} = 0 \quad \eta_{SL} < \eta < \infty \quad (37)$$

$$t = 0: \quad \theta_s = 0 \quad (38)$$

$$t = 0: \quad \theta_F = 0 \quad (39)$$

$$\eta = 0: \quad \theta_s = T_C - T_i = \theta_{SC} \quad (40)$$

$$\eta = \eta_{SL}: \quad \theta_s = \theta_L = \theta_F \quad (41)$$

$$\eta = \eta_{SL}: \quad k_L \frac{d\theta_L}{d\eta} - k_s \frac{d\theta_s}{d\eta} + 2\alpha_s \rho_s h_{SL} \eta_{SL} = 0 \quad (42)$$

$$\eta \rightarrow \infty: \quad \theta_L \rightarrow 0 \quad (43)$$

Na formulação anterior  $\theta_s = T_s - T_i$ ,  $\theta_L = T_L - T_i$  e  $\theta_F = T_F - T_i$ . Introduzindo  $P = d\theta_s/d\eta$  e  $Q = d\theta_L/d\eta$  respectivamente nas Equações 36 e 37, separando as variáveis, integrando em  $\eta$  e voltando nas variáveis  $\theta_s$  e  $\theta_L$  obtém-se:

$$\frac{d\theta_s}{d\eta} = A e^{-\eta^2} \quad (44)$$

$$\frac{d\theta_L}{d\eta} = B e^{-(\alpha_s/\alpha_L)\eta^2} \quad (45)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes de integração. Integrando a Equação (44) em  $\eta$  de  $\eta=0$  a  $\eta$  e integrando a Equação (45) em  $\eta$  de  $\eta=\eta_{SL}$  a  $\eta$  obtém-se:

$$\theta_s(\eta) - \theta_s(0) = A \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta \quad (46)$$

$$\theta_L(\eta) - \theta_L(\eta_{SL}) = B \int_{\eta_{SL}}^{\eta} e^{-(\alpha_s/\alpha_L)\eta^2} d\eta \quad (47)$$

Utilizando as condições de contorno nas Equações 46 e 47 obtêm-se expressões para  $A$  e  $B$ :

$$A = \frac{\theta_F - \theta_{SC}}{\int_0^{\eta_{SL}} e^{-\eta^2} d\eta} \quad (48)$$

$$B = \frac{-\theta_F}{\int_{\eta_{SL}}^{\infty} e^{-(\alpha_s/\alpha_L)\eta^2} d\eta} \quad (49)$$

Substituindo as Equações 48 e 49 nas Equações 46 e 47, utilizando  $\theta_S = T_S - T_i$ ,  $\theta_L = T_L - T_i$  e  $\theta_F = T_F - T_i$  e utilizando as definições matemáticas das funções erro e erro complementar obtêm-se:

$$\frac{T_S(\eta) - T_C}{T_F - T_C} = \frac{\text{erf}(\eta)}{\text{erf}(\eta_{SL})} \quad (50)$$

$$\frac{T_L(\eta) - T_i}{T_F - T_i} = \frac{\text{erfc}(\sqrt{\alpha_s/\alpha_L}\eta)}{\text{erfc}(\sqrt{\alpha_s/\alpha_L}\eta_{SL})} \quad (51)$$

Deve ser notado que o valor de  $\eta_{SL}$  ainda é desconhecido. Para determiná-lo, pode-se utilizar a Equação 42 avaliada em  $\eta_{SL}$ , substituindo os resultados das Equações 50 e 51 para avaliar as derivadas parciais, obtendo-se:

$$\frac{T_F - T_i}{T_F - T_C} \frac{k_L}{k_S} \sqrt{\alpha_s} \frac{e^{-(\alpha_s/\alpha_L)\eta_{SL}^2}}{\text{erfc}(\sqrt{\alpha_s/\alpha_L}\eta_{SL})} + \frac{e^{-\eta_{SL}^2}}{\text{erf}(\eta_{SL})} - \text{Ste}_s \sqrt{\pi} \eta_{SL} = 0 \quad (52)$$

onde

$$\text{Ste}_s = \frac{h_{SL}}{c_{ps}(T_F - T_C)} \quad (53)$$

é o número de Stefan da fase sólida. A Equação 52 é uma equação algébrica não linear para  $\eta_{SL}$ . Para um conjunto de parâmetros (temperaturas iniciais e propriedades das duas fases) a Equação 52 pode ser resolvida numericamente para  $\eta_{SL}$ . Com  $\eta_{SL}$  conhecido, as Equações 50 e 51 podem ser utilizadas para calcular a temperatura em qualquer ponto do meio para qualquer instante de tempo.

## Resultados

Os resultados são obtidos a partir de um conjunto de parâmetros fornecidos e a utilização das Equações 50 a 53. Inicialmente calcula-se o número de Stefan da fase sólida pela Equação 53. Na sequência calcula-se  $\eta_{SL}$  pela Equação 52, que é uma equação transcendental a ser resolvida numericamente. Após isso pode-se então calcular a temperatura em qualquer posição  $\eta$  utilizando as Equações 50 ou 51. Uma característica importante da formulação anterior é que ela pode ser utilizada

também para um processo de fusão, bastando fornecer parâmetros físicos adequados. O meio utilizado para exemplificar as equações resultantes é um poliuretano, inicialmente a  $T_i = 85\text{ }^\circ\text{C}$ . Suas propriedades termo físicas podem ser vistas na Tabela 1:

Tabela 1: Propriedades termo físicas do poliuretano.

PROPRIEDADE	VALOR
Massa específica	$\rho = 1460\text{ kg/m}^3$
Temperatura de solidificação	$T_F = 32\text{ }^\circ\text{C}$
Calor latente de solidificação	$h_{SL} = 251,21\text{ kJ/kg}$
Calor específico da fase líquida	$c_{pL} = 3,31\text{ kJ/(kg.K)}$
Calor específico da fase sólida	$c_{pS} = 1,76\text{ kJ/(kg.K)}$
Condutividade térmica da fase líquida	$k_L = 0,59\text{ W(m.K)}$
Condutividade térmica da fase sólida	$k_S = 2,16\text{ W(m.K)}$
Difusividade térmica da fase líquida	$\alpha_L = 1,22 \times 10^{-7}\text{ m}^2/\text{s}$
Difusividade térmica da fase sólida	$\alpha_S = 8,4 \times 10^{-7}\text{ m}^2/\text{s}$

Expõe-se o poliuretano a uma temperatura  $T_C = 10\text{ }^\circ\text{C}$ . Com os dados da Tabela 1 obtém-se  $Ste_s = 0,049$  e  $\eta_{SL} = 0,52$ . Com esses valores pode-se calcular a temperatura das fases líquida e sólida em qualquer posição e qualquer instante de tempo pelas Equações 50 e 51.

## Conclusões

O modelo matemático apresentado pode ser utilizado como uma estimativa inicial de parâmetros pertinentes à processos de solidificação/fusão tais como posição da interface sólido-líquido (frente de solidificação/fusão) e a distribuição de temperaturas nas fases líquida e sólida. Esses parâmetros podem ser utilizados como uma primeira aproximação para aperfeiçoar processos que envolvem mudança da fase. Deve ser enfatizado que o modelo desenvolvido não inclui efeitos de convecção térmica na fase líquida, levando em consideração somente efeitos de condução térmica. Modelos mais complexos, envolvendo convecção térmica na fase líquida podem ser encontrados na literatura. Entretanto, tais modelos dificilmente possuem uma solução analítica fechada, sendo necessária uma abordagem numérica. O modelo apresentado foi desenvolvido convenientemente em coordenadas retangulares. Entretanto, os conceitos apresentados aqui podem ser facilmente transponíveis para problemas que devem ser modelados em coordenadas cilíndricas e esféricas.

## Referências

- ALEXIADES, V.; SOLOMON, A. D. **Mathematical Modelling of Melting and Freezing Processes**. 1. Ed. New York: Taylor & Francis, 1993.
- GUPTA, S. C. **The Classical Stefan Problem: Basic Concepts, Modelling and Analysis**. 1. Ed. Amsterdam: Elsevier, 2003.
- MOHS, W. F.; KULACKI, F. A. **Heat and Mass Transfer in the Melting of Frost**. 1. ed. New York: Springer, 2015.

## Modelo matemático para a programação da produção e sequenciamento de máquinas distintas em paralelo com estoques intermediários

*Sander Joner*

*Instituto Federal da Santa Catarina-IFSC*

*sander.joner@ifsc.edu.br*

*Neida Patias Volpi*

*Universidade Federal do Paraná-UFPR*

*neida@ufpr.br*

**Resumo:** Neste artigo é apresentado um modelo matemático voltado ao sequenciamento e programação da produção em dois estágios com um estoque intermediário que envolvem a manufatura industrial. O primeiro estágio consiste num ambiente onde ocorre a produção de itens em várias máquinas paralelas distintas. O segundo, é formado por fornos de teste nos quais são simuladas situações climáticas adversas de modo a testar o funcionamento dos itens fabricados. É proposto um modelo matemático para auxílio no processo de gestão das ordens de produção, de modo a determinar em quais máquinas bem como em que ordem os itens serão produzidos no primeiro estágio, de modo a reduzir custos de produção neste estágio, bem como atender ao melhor aproveitamento possível dos fornos de teste evitando a operação destes contendo espaços ociosos. Para validação do modelo, propõe-se uma aplicação com dados reais obtidos de uma empresa fabricante de inversores, o qual é resolvido com uso do software *Cplex* e as heurísticas *relax-and-fix* e *fix-and-optimize*. Nos testes realizados a heurística *relax-and-fix* teve um desempenho melhor em cenários onde a quantidade de partições foi maior.

**Palavras-chave:** Matemática Aplicada à Engenharia. Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes. Estoques Intermediários. Teste de Funcionalidade.

### Introdução

Em uma indústria, o PCP (Planejamento e Controle da Produção) tem por finalidade coordenar e administrar os recursos que estão disponíveis e são utilizados durante o processo de produção, tendo como principal objetivo a execução da maneira mais eficiente e eficaz possível do que foi estabelecido para os níveis hierárquicos: estratégico, tático e operacional. O pressuposto principal dos modelos teóricos apresentados no decorrer dos últimos anos é tentar cada vez mais representar de forma realística as particularidades dos ambientes produtivos. Um importante modelo de otimização foi proposto por Meyr (2002), onde este autor apresentou um modelo geral voltado ao dimensionamento e sequenciamento de tarefas considerando máquinas paralelas distintas o qual foi chamado de GLSPPL (*General Lot Sizing and Scheduling Problem for Parallel Production Lines*). Este modelo possibilita, além de saber quando e quanto produzir, decidir onde produzir, ou seja em quais máquinas as tarefas devem ser executadas com objetivo de minimizar custos de estocagem de itens, custo de *setup* dependente da sequência em que os itens são produzidos e custo de produção, porém voltado a somente um estágio produtivo. Alguns processos industriais são organizados de tal forma que o processo de modelagem ocorre em mais de um estágio produtivo o que torna os modelos mais complexos de serem formulados. Seeanner e Meyr (2013). Conforme Ferreira et al.(2009) estas decisões são dependentes uma da outra e ambas podem consumir altos níveis de utilização de capacidade de produção. Seeanner e Meyr (2013) apresentam uma revisão de literatura sobre publicações que abordam modelos multi-estágio, citando como referência alguns importantes trabalhos da área, destacando-se: Grünert (1998), Meyr (2004), Araujo et al.(2007), Mohammadi et al.(2009), Ferreira et al.(2009), Toledo et al.(2009) e Ferreira et al.(2013). Meyr (2004) apresenta um modelo baseado em GLSPPL com uma estrutura de tempo comum para todas as linhas de produção em todas as fases de produção. Araújo et al.(2007) trabalham com um problema de planejamento de duas fases considerando horizonte rolante bem como custos e tempo de *setup* dependentes da

seqüência. Neste modelo eles propõem restrições de sincronização com objetivo de impedir a produção de um item em uma determinada máquina, a menos que tenha sido concluído na máquina antecessora. Ferreira et al.(2009) propõe uma aplicação na produção de refrigerantes em uma fábrica de pequeno porte considerando dois estágios interdependentes: xaroparia e envase. Toledo et al.(2009) resolveu um modelo de planejamento da produção em dois estágios aplicado a um problema de produção de bebidas através da aplicação de algoritmo genético multi-populacional. O modelo considera máquinas paralelas com *setup* dependente da seqüência e custos com *backorder*. Ferreira et al.(2013) propõem formulações matemáticas monoestágio voltadas à resolução deste mesmo problema com objetivo de reduzir suas dimensões e conseqüentemente o esforço computacional para a resolução. Neste trabalho propõe-se um modelo de otimização que difere dos encontrados na literatura principalmente pelo fato de se trabalhar com estoques intermediários limitados bem como por considerar um problema com períodos divididos em subperíodos com demanda não estabelecida para cada período, mas sim para todo o horizonte de planejamento. O principal objetivo é apresentar um modelo matemático de dimensionamento e sequenciamento de lotes num ambiente produtivo com máquinas distintas em paralelo em um setor de uma indústria que sincronize dois estágios do planejamento operacional, a saber: produção e teste de funcionalidade, com estoque intermediário.

### Descrição do Problema

O presente trabalho busca contribuir com a pesquisa de problemas que envolvem produção, estoque intermediário e teste de funcionalidade para o problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes com máquinas em paralelo composto por um estágio voltado à fabricação dos itens e outro ao teste de funcionamento dos itens fabricados no estágio anterior, onde entre esses estágios há possibilidade de se manter um estoque intermediário de itens, o qual possui limitação de capacidade e custos de armazenamento. É importante fazer um sincronismo na linha de produção durante o planejamento de produção, para evitar excessos de estoques e paradas de máquinas, reduzindo assim custos desnecessários. Quanto ao teste de funcionamento dos itens que são enviados a ambientes próprios, é importante utilizá-los ao máximo possível, pois espaços ociosos também acabam gerando custos.

### Descrição do problema proposto

É importante salientar que o segundo estágio (forno de teste) é dependente da saída de itens do primeiro estágio. Sendo assim, um dos problemas encontrados é organizar as quantidades bem como o sequenciamento da produção nas máquinas paralelas que compõe o primeiro estágio, para que as saídas de itens estejam programadas de forma que ao mesmo tempo seja minimizada a geração de estoque intermediário de itens não testados evitando filas de itens, para que se evite a operação de um forno de teste com espaços ociosos. Ainda no primeiro estágio, quando uma máquina passa a ter que produzir um novo tipo de item, o processo de funcionamento precisa ser interrompido para que esta seja configurada (*setup*). Esse tempo de *setup* neste problema é dependente da seqüência em que os itens são produzidos, onde o tempo para troca de um item  $i$  para um item  $j$  pode ser diferente do tempo troca do mesmo item  $j$  para o item  $i$ . Observa-se que nem sempre é possível ou viável produzir uma quantidade que possa suprir a capacidade do forno de teste em um determinado período. Sendo assim, na formulação do modelo matemático foi aplicada uma penalidade relacionada com o custo de operação de um espaço vazio em cada forno de teste, cujo valor varia conforme as especificações técnicas de cada um desses fornos. Devido à busca pela minimização de custos, torna-se necessário sempre que possível, utilizar ao máximo a capacidade dos fornos, buscando atender às demandas previstas para o horizonte de planejamento.



## Modelo Matemático

O modelo matemático para o problema em estudo foi formulado a partir das ideias propostas no GLSPPL de Meyr (2002), cujo horizonte de planejamento é formado por  $T$  períodos, e cada um dos períodos  $t$  é dividido em subperíodos  $s$ . O conjunto de todos os subperíodos  $s$ , que compõe o horizonte de planejamento é representado por  $W$ . Para resolver a problemática apresentada, foram criadas novas restrições ao GLSPPL de modo a minimizar o estoque intermediário existente entre a saída das máquinas paralelas e a entrada dos itens nos fornos de teste, e ainda para maximizar a carga de cada forno de teste. Cada um dos períodos foi dividido em subperíodos, tornando-se possível a produção de mais de um tipo de item em cada máquina em um mesmo período, desde que haja capacidade (tempo) disponível.

A seguir é apresentado o modelo matemático do problema proposto.

Parâmetros:

- $N$ : quantidade de itens;
- $M$ : quantidade de máquinas;
- $T$ : quantidade de períodos no horizonte de planejamento;
- $W$ : quantidade de subperíodos;
- $F$ : quantidade de células de teste (fornos).

Índices:

- $i$ : item ( $i = 1, \dots, N$ );
- $l$ : máquina ( $l = 1, \dots, M$ );
- $t$ : período de produção ( $t = 1, \dots, T$ );
- $s$ : subperíodo ( $s = 1, \dots, W$ );
- $f$ : células de teste ou fornos ( $f = 1, \dots, F$ ).

Dados:

- $D_i$ : demanda do item  $i$  no final do horizonte de planejamento;
- $lmin_{il}$ : lote mínimo do item  $i$  produzido na máquina  $l$ ;
- $st_{ijl}$ : tempo de *setup* para a produção do item  $j$  imediatamente após o item  $i$  na máquina  $l$ ;
- $CP_{lt}$ : capacidade de produção disponível da máquina  $l$  no período  $t$ ;
- $p_{il}$ : tempo de produção de uma unidade do item  $i$  na máquina  $l$ ;
- $cs_{ijl}$ : custo de *setup* para produzir o item  $j$  imediatamente após o item  $i$  na máquina  $l$ ;
- $cp_{il}$ : custo de produção do item  $i$  na máquina  $l$ ;
- $h_i$ : custo de manutenção de uma unidade do item  $i$  não testado em estoque por período;
- $cfixo_f$ : custo fixo da utilização do forno  $f$ ;
- $cfman_f$ : custo de manutenção do forno  $f$  para a realização do teste de carga ;

$SP_l$  : conjunto de itens que podem ser produzidos na máquina  $l$ ;

$W_t$  : conjunto dos subperíodos contidos no período  $t$ ;

$CCT_f$ : ocupação máxima em área do forno  $f$ ;

$a_i$ : área ocupada pelo item  $i$  no forno  $f$ ;

$CAT$ : capacidade de armazenamento de itens testados para todo o horizonte de planejamento;

$CANT_t$ : capacidade de armazenamento de itens não testados para cada período  $t$ ;

$I_{i0}$ : quantidade de item  $i$  não testado no estoque intermediário, no início do horizonte de planejamento;

$x_{i0l}$ : 1, se a máquina está preparada para produzir o item  $i$  na máquina  $l$  no início do horizonte de planejamento; 0, caso contrário.

Variáveis de Decisão:

$q_{isl}$  : quantidade do item  $i$  produzido no subperíodo  $s$  na máquina  $l$ ;

$I_{it}$ : quantidade do item  $i$  não testado em estoque no final do período  $t$ ;

$qc_{it}$ : quantidade do item  $i$  que será enviado à célula teste dedicada a este item, no período  $t$ ;

$Z_{ft}$  : igual a 1, se o forno  $f$  está sendo utilizado no período  $t$ ; e 0, caso contrário;

$w_{ft}$  : é igual a 1, se o forno foi preparado pela primeira vez com custo para o teste de carga; e 0, caso contrário;

$qcf_{itf}$  : quantidade do item  $i$  que será enviado ao forno  $f$  no período  $t$ ;

$x_{isl}$  : igual a 1, se a máquina  $l$  está preparada para produzir o item  $i$  no subperíodo  $s$ ; e 0, caso contrário;

$y_{ijsl}$  : igual a 1, se há *setup* do item  $i$  para o item  $j$  na máquina  $l$  no subperíodo  $s$ ; e 0, caso contrário;  
As condições iniciais são representadas por:

$I_{i0}$ : quantidade de item  $i$  não testado no estoque intermediário, no período inicial;  
 $x_{i0l}$ : tem valor 1, se a máquina  $l$  está preparada para produzir o item  $i$  na máquina  $l$  no início do horizonte de planejamento; 0, caso contrário.

Modelo matemático:

Nas equações (1) à (17) é apresentado o modelo matemático para o problema em estudo.

A função objetivo (1) representa a minimização dos custos variáveis com *setup*, produção, armazenagem e custos de manutenção e de utilização do forno.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{l=1}^M \sum_{s=1}^W \sum_{i \in SP_l} \sum_{j \in SP_l} cs_{ijl} \cdot y_{ijsl} + \sum_{l=1}^M \sum_{s=1}^W \sum_{i \in SP_l} cp_{il} \cdot q_{isl} + \\ & + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N h_i \cdot I_{it} + \sum_{j=1}^F \sum_{t=1}^T (cfman_f \cdot z_{ft} + cfixo \cdot w_{ft}) \end{aligned} \quad (1)$$

A restrição (2) garante que a quantidade de horas consumidas na produção, adicionada da quantidade de horas necessárias para preparação da máquina, seja menor ou igual à capacidade disponível em cada máquina em cada período de tempo.

$$\sum_{s \in W_t} \sum_{i \in SP_l} p_{il} \cdot q_{isl} + \sum_{s \in W_t} \sum_{i \in SP_l} \sum_{j \in SP_l} st_{ijl} \cdot y_{ijsl} \leq CP_{lt} \quad l = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T \quad (2)$$

A restrição (3) indica que somente haverá produção do item  $i$  no subperíodo  $s$  se a máquina estiver preparada para o item ( $x_{isl} = 1$ ).

$$p_{il} \cdot q_{isl} \leq CP_{lt} \cdot x_{isl} \quad \begin{matrix} l = 1, \dots, M; i \in SP_l; \\ t = 1, \dots, T; s \in S_{lt} \end{matrix} \quad (3)$$

A restrição (4) impõe uma condição de lote mínimo de produção para cada tipo de item em um subperíodo e que somente é ativada, quando ocorre a preparação de máquina para um novo item.

$$q_{isl} \geq lmin_{il} \cdot (x_{isl} - x_{i,s-1,l}) \quad l = 1, \dots, M; i \in SP_l; s \in W_t \quad (4)$$

A restrição (5) determina que a máquina esteja preparada para produzir somente um item por máquina em cada subperíodo  $s$ .

$$\sum_{i \in S_l} x_{isl} = 1 \quad l = 1, \dots, M; s \in W_t \quad (5)$$

A restrição (6) indica se houve mudança de produção do item  $i$  para o item  $j$  na máquina  $l$  entre os subperíodos.

$$y_{ijsl} \geq x_{i,s-1,l} + x_{jst} - 1 \quad \begin{matrix} l = 1, \dots, M; i, j \in SP_l; \\ s = 1, \dots, W \end{matrix} \quad (6)$$

A restrição (7) realiza o balanço de estoques, relacionando quantidades produzidas, estoque intermediário de itens a serem testados com quantidade enviada para cada célula teste para cada item por período em todo o horizonte de planejamento.

$$I_{i,t-1} + \sum_{l=1}^M \sum_{s \in W_t} q_{isl} - I_{it} = qc_{it} \quad t = 1, \dots, T \quad i \in SP_l \quad (7)$$

A restrição (8) indica que a quantidade de itens enviados para a célula de teste deve ser no máximo a quantidade em estoque do item no período anterior.

$$qc_{it} \leq I_{i,t-1} \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T \quad (8)$$

A restrição (9) garante que a quantidade de itens não testados, que compõem o estoque intermediário, não exceda a capacidade de armazenamento de itens não testados após retirados os itens enviados aos fornos.

$$\sum_{i=1}^N I_{it} \leq CANT_t \quad t = 1, \dots, T \quad (9)$$

A restrição (10) determina que a quantidade do item  $i$  que será enviado a célula de teste no período  $t$  seja igual ao conjunto de todos os itens que serão enviados ao forno  $f$  no período  $t$ .

$$qc_{it} = \sum_{f=1}^F qc_{fif} \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T \quad (10)$$

A restrição (11) indica que a quantidade máxima do item  $i$  que será enviado ao forno  $f$  no período  $t$  seja no máximo a ocupação em área do forno  $f$ .

$$\sum_{i=1}^N a_i \cdot qc_{fif} \leq CCT_f \cdot z_{ft} \quad t = 1, \dots, T; \quad f = 1, \dots, F \quad (11)$$

A restrição (12) indica se o forno foi preparado pela 1ª vez com custo durante o período  $t$ .

$$w_{ft} \geq z_{ft} - z_{f,t-1} \quad f = 1, \dots, F; \quad t = 1, \dots, T \quad (12)$$

A restrição (13) garante que a quantidade de itens testados nas células de teste durante o horizonte de planejamento não ultrapasse a capacidade máxima de armazenamento de itens testados.

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N qc_{it} \leq CAT \quad (13)$$

A restrição (4.14) determina que a quantidade total do item  $i$  que será enviada à célula de teste dedicada a este item em todos os períodos, deve ser pelo menos igual à demanda do item  $i$  estabelecida para o horizonte de planejamento.

$$\sum_{t=1}^T qc_{it} \geq D_i \quad i = 1, \dots, N \quad (14)$$

A restrição (15) indica que as máquinas não estão preparadas para nenhum item no início do horizonte de planejamento  $T$ .

$$x_{i0l} = 0 \quad l = 1, \dots, M; \quad i \in SP_l \quad (15)$$

A restrição (16) indica que as variáveis  $x_{isl}$  e  $z_{ft}$  são binárias.

$$x_{isl}, z_{ft}, w_{ft} \in \{0,1\} \quad l = 1, \dots, M; \quad i \in SP_l; \quad s = 1, \dots, W; \quad f = 1, \dots, F; \quad t = 1, \dots, T \quad (16)$$

A restrição (17) indica que as variáveis  $q_{isl}$ ,  $qc_{it}$ ,  $qc_{fif}$  e  $I_{it}$  são inteiras não negativas e que as variáveis  $y_{ijsl}$  são reais não negativas, pois pela formulação do modelo, não há necessidade de definir as variáveis  $y_{ijsl}$  como inteiras, pois estas são obtidas da combinação de variáveis binárias.

$$q_{isl}, qc_{it}, I_{it} \in Z^+; \quad y_{ijsl} \geq 0 \quad l = 1, \dots, M; \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T; \quad s = 1, \dots, W \quad (17)$$

### Implementação e Aplicação do Modelo Proposto

Para efeito de funcionamento do modelo matemático proposto é apresentado um cenário para um problema de pequeno porte chamado de P1. Neste caso é possível aplicar uma metodologia exata. Já para problemas de grande porte, uma metodologia aproximada será proposta utilizando as heurísticas *Relax-and-Fix* (RF) e *Fix-and-Optimize* (FO). A demanda considerada alta para 5 itens, utiliza aproximadamente 90% da capacidade de produção instalada. Considera-se 8 períodos divididos em subperíodos. Os dados utilizados para a aplicação do modelo proposto estão disponíveis em Joner (2016). O problema P1 foi executado em um computador com processador Intel Core i5 de 1.7GHz e 8Gb de memória RAM, bem como o pacote computacional IBM ILOG CPLEX (*Optimization Studio*) 12.6. O tempo de execução foi de aproximadamente 1 hora e 45 minutos para obter a solução ótima. A Figura 1, mostra a representação gráfica dos resultados. Observa-se o sequenciamento dos itens nas máquinas M1 e M2, os *setups* ocorridos nos 1º, 2º e 3º períodos na máquina M1 e no 1º período da máquina M2. O forno F1 teve sua ocupação máxima a partir do 2º período e o forno F2 a partir do 5º período. A capacidade de produção da máquina M1 está quase no limite. Os fornos quando utilizados estão na sua capacidade máxima, e quando não são utilizados estão desligados. A máquina M2 tem ociosidade nos 2º e 3º períodos, porém não é possível antecipar a produção do item 5 do 3º para o 2º período devido a capacidade do forno F1 no 2º período já ter atingido o seu máximo de ocupação.

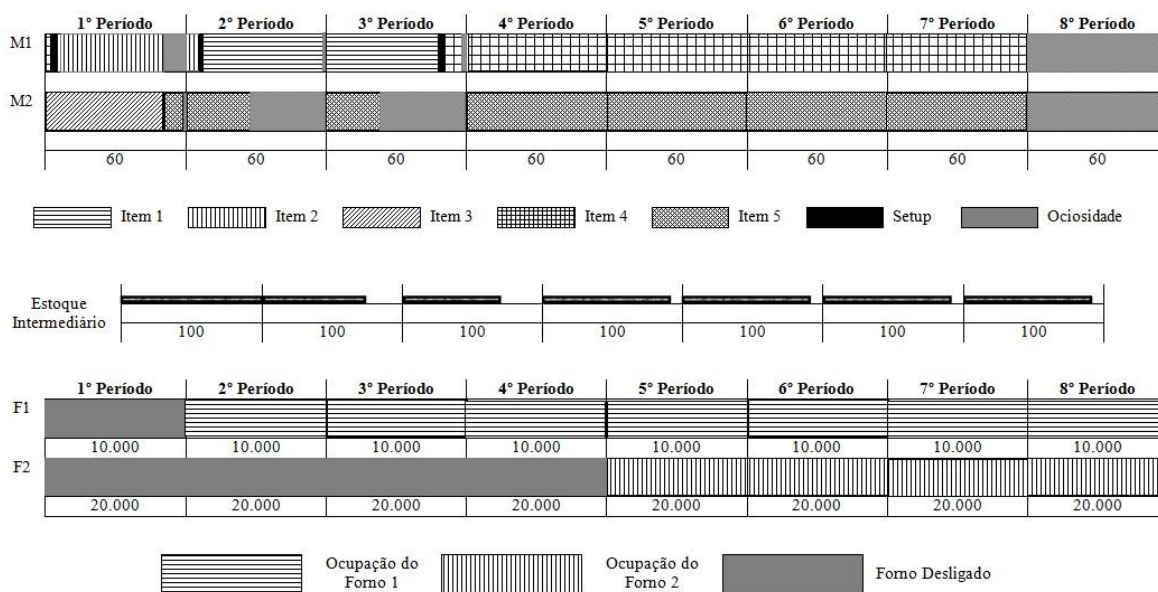


Figura 1: Representação gráfica do problema P1.

O fluxo do estoque intermediário com capacidade de 100 unidades está bem controlado, conforme mostra a Figura 1. Para obter a solução do modelo proposto em situações de grande porte foram utilizadas as heurísticas *Relax-and-Fix* e *Fix-and-Optimize*, que se baseiam na decomposição das variáveis inteiras do problema original em subconjuntos disjuntos. Essas heurísticas foram escolhidas devido ao seu desempenho na resolução de diversos problemas práticos de dimensionamento e sequenciamento de lotes similares ao tratado nesse trabalho, como citado em Beraldi et. al. (2008), Ferreira et. al. (2009). Neste trabalho foram utilizadas as heurísticas *relax-and-fix* e *fix-and-optimize* com três tipos de partições, conforme em Furlan (2011). Para este processo de relaxação foram escolhidas as variáveis  $x_{isl}$  que são binárias e consistiu-se em torná-las reais no intervalo [0,1]. As partições consideradas foram: por períodos (RF-P), por máquinas (RF-M) e por itens (RF-I) na heurística *relax-and-fix*. A heurística *fix-and-optimize* é um método de melhoria, que necessita de uma solução inicial factível, que neste trabalho foi considerado a solução da heurística *relax-and-fix*. Para esta heurística também foram aplicadas as partições de variáveis em relação aos

períodos (FO-P), às máquinas (FO-M) e aos itens (FO-I). Para a realização dos experimentos foram propostos 4 problemas (P1, P2, P3 e P4) de tamanhos diferentes afim de gerar as instâncias de teste. Os problemas envolvem de 5 a 20 itens, 2 a 3 máquinas e 2 a 3 fornos. A capacidade de processamento em cada máquina foi fixada em 480 minutos, distribuídos em 8 períodos, o que equivale a um dia de trabalho de 8 horas. O problema P1 já foi resolvido pela metodologia exata e sua solução está representada na Figura 1. Os problemas P2 e P3 correspondem a mesma situação do problema P1, porém com o aumento de número de itens e demanda total em torno de 90% da capacidade instalada. No problema P4 o número de itens aumentou para 20, e para manter a mesma proporção de utilização da capacidade instalada foi necessário acrescentar 1 máquina. Estes novos testes foram executados no mesmo computador conforme já citado. Para a análise da eficiência das heurísticas adotou-se como critério de parada o tempo de execução de 1 hora e o cálculo do *GAP* relativo, onde o *GAP* é calculado pela expressão (18), em que  $f(x)$  e *ML* representam o valor da função objetivo obtido pela heurística e do melhor limitante inferior encontrado pelo CPLEX, respectivamente:

$$GAP = \left( \frac{f(x) - ML}{f(x)} \right) \times 100\% \quad (18)$$

A Tabela 1, mostra as soluções (valor da função objetivo, o *GAP* e o tempo) dos 4 problemas, obtidas pelo CPLEX puro e pelas diferentes estratégias de partições das heurísticas *relax-and-fix* e *fix-and-optimize*.

Tabela 1: Resultados dos problemas gerados através das heurísticas .

Cenários		Análise	CPLEX	RF-P	RF-M	RF-I	FO-P	FO-M	FO-I
P1	5 itens 2 máquinas 2 fornos	FO	161.697	161.798	161.697	161.725	161.786	161.697	161.725
		GAP	0%	0.06%	0%	0.02%	0.06%	0%	0.02%
		Tempo (seg.)	6.591	5	39	4	5	48	4
P2	10 itens 2 máquinas 2 fornos	FO	69.270	68.431	68.222	68.211	68.254	68.222	68.211
		GAP	27.37%	26.48%	26.25%	26.24%	26.29%	26.25%	26.24%
		Tempo (seg.)	3.600	720	3.600	3.600	1.384	3.600	886
P3	15 itens 2 máquinas 2 fornos	FO	36.543	38.565	36.412	36.020	38.389	36.401	36.008
		GAP	18.18%	22.47%	17.88%	16.99%	22.11%	17.86%	16.96%
		Tempo (seg.)	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600
P4	20 itens 3 máquinas 3 fornos	FO	36.376	18.528	53.025	20.497	18.528	22.694	20.497
		GAP	48.11%	0.93%	65.38%	10.45%	3.75%	19.12%	10.45%
		Tempo (seg.)	3.600	3.600	3.600	360	3.600	3.600	360

Para o problema P1, observa-se que os valores da função objetivo das heurísticas estão bem próximo do valor da função objetivo do CPLEX, o que demonstra confiabilidade no método e um ganho computacional enorme de tempo em relação ao mesmo. No problema P2 é possível observar que houve um ganho com a aplicação das heurísticas em relação ao CPLEX, porém, não houve uma grande melhora da heurística *fix-and-optimize* em relação à *relax-and-fix*. Para o problema P3 observa-se que as heurísticas apresentam um *GAP* menor em relação ao *GAP* do CPLEX, exceto as heurísticas RF-P e FO-P. No cenário P4 houve um ganho computacional para as heurísticas RF-I e FO-I em relação ao CPLEX e observa-se que as heurísticas apresentam um *GAP* menor em relação ao *GAP* do CPLEX, exceto a heurística RF-M.

## Conclusões

O modelo matemático proposto para o problema em estudo mostrou-se eficaz através dos testes realizados, pois observou-se um controle de produção nas máquinas, não deixando-as ociosas, e ao mesmo tempo um controle nos estoques intermediários afim de não gerar filas para o teste de funcionalidade. É importante observar que tanto o estoque intermediário não ficou no seu limite como



os fornos não ficaram subutilizados. Foram apresentados testes computacionais utilizando-se as heurísticas *relax-and-fix* e *fix-and-optimize*, pois a medida que aumenta-se o número de itens, máquinas e fornos, o modelo não consegue ser resolvido de forma exata. O desempenho da heurística *relax-and-fix* depende da dimensão dos subproblemas, do tempo de busca em cada um, como também da solução inicial no primeiro subproblema. A técnica *fix-and-optimize* não contribuiu em melhorias nos testes realizados, apesar de ter-se dado mais 1 hora para tal fim, com exceção no P4, onde houve um ganho considerável. Justifica-se esse mau desempenho devido ao fato de que a heurística *fix-and-optimize* considera uma solução conhecida e fixa um conjunto de variáveis de  $n-1$  partições que pode não gerar melhoria nas variáveis da partição a ser otimizada. A principal contribuição desse trabalho foi a proposta do modelo matemático para problemas de programação e sequenciamento da produção com estoques intermediários entre a produção do item e seu teste de funcionalidade. A vantagem é que esse modelo pode ser aplicado a qualquer setor de uma indústria devido a sua própria formulação.

## Referências

- ARAUJO, S.; ARENALES, M.; CLARK, A. J. Heuristics. **Joint rolling-horizon scheduling of materials processing and lot-sizing with sequence-dependent setups**. v.13, n.4, p.337–358, 2007.
- FERREIRA, D.; MORABITO, R.; RANGEL, S. Eur J Oper Res. **Solution approaches for the soft drink integrated production lot sizing and scheduling problem**. v.196, n.2, p.697–706, 2009.
- FERREIRA, D.; ALMADA-LOBO, B.; RANGEL, S. Produção. **Formulações Monoestágio para o problema da produção de bebidas dois estágios com sincronia**, v. 23, n. 1, p. 107-119, 2013.
- FLEISCHMANN, B.; MEYR, H. OR Spektrum. **The general lot sizing and scheduling problem.**, v. 19, n. 1, p. 11-21, 1997.
- FURLAN, M. F.. **Métodos Heurísticos para o problema de dimensionamento de lotes multiestágio com limitação de capacidade**. 2011.145f. Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação e Matemática Computacional) - USP, São Carlos, 2011.
- GRÜNERT, T. **Multi-level sequence-dependent dynamic lotsizing and scheduling**. Shaker Verlag: Aachen, 1998.
- JONER, S. Um modelo matemático aplicado ao dimensionamento e sequenciamento de lotes em máquinas distintas em paralelo com estoques intermediários limitados. In: I SMNE, 2016, Curitiba. **Anais**. Curitiba: UFPR, 2016. p.333-341.
- KAWAMURA, S.M. Aplicação da Heurística Relax-and-Fix no Problema de Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes de Produção em Máquinas Distintas em Paralelo. In: XLII SBPO, 2009, Bento Gonçalves. **Anais**. Bento Gonçalves, 2009. p. 86-92.
- MERCÉ, C.; FONTAM, G. International Journal of Production Economics. **Mip-based heuristics for capacitated lotsizing problems.**, v.85, p. 97-111, 2003.
- MEYR, H. European Journal of Operational Research. **Simultaneous lotsizing and scheduling on parallel machines**. v.139, p. 277–292, 2002.
- MEYR, H. Zeitschrift für Betriebswirtschaft. **Simultane Losgrößen- und Reihenfolgeplanung bei mehrstufiger kontinuierlicher Fertigung**. v.74, n.6, p.585–610, 2004.
- MOHAMMADI, M.; FATEMI GHOMI, S.M.T.; KARIMI, B.; TORABI, S.A.J Appl Sci. **Development of heuristics for multiproduct multi-level capacitated lotsizing problem with sequence-dependent setups**. v.9, n.2, p. 296–303, 2009.
- MORAES, L.C.C.; SANTOS, M.O. Heurísticas Relax-and-fix para o Problema de Dimensionamento de Lotes com Janelas de Tempo de Execução. In: Congresso Latino Iberoamericano de Investigación Operativa, 2012, Rio de Janeiro. **Anais**. Rio de Janeiro, 2012. p.52-59.
- SEEANNER, F.; MEYER, H. OR Spectrum. **Muti-stage simultaneous lot-sizing and scheduling for flow line production**. v.35, p. 33-73, 2013.
- TOLEDO, C.; FRANÇA, P.; MORABITO, R.; KIMMS, A. Int J Prod Res. **Multi-population genetic algorithm to solve the synchronized and integrated two-level lot sizing and scheduling problem**. v.47, n.11, p.3097–3119, 2009.





## Modelos de auto-produção multi-período de companhias *price-makers* em mercados de energia do tipo *pool*

*CABANA, Tiago Gomes*

*Universidade Estadual Paulista; Faculdade de Engenharia de Bauru  
tiago.cabana@feb.unesp.br*

*NEPOMUCENO, Leonardo*

*Universidade Estadual Paulista; Faculdade de Engenharia de Bauru  
leo@feb.unesp.br*

**Resumo:** Em mercados de energia do tipo *pool*, a comercialização de energia ocorre através de leilões, onde as companhias geradoras e os consumidores fornecem, respectivamente, ofertas e lances de venda e compra de blocos de potência e preços, enquanto que o Operador de Mercado, através do chamado Procedimento de Equilíbrio de Mercado (PEM), define o preço de equilíbrio. Neste ambiente as companhias geradoras tem por objetivo a maximização de seus lucros. Para tanto é necessário resolver alguns problemas, sendo um deles o problema de Auto-Produção (AP), que consiste no cálculo da produção ótima que maximiza seus lucros. Este artigo apresenta um modelo de AP para a companhias *price-maker*, isto é, companhias que tem o poder de influenciar o preço de mercado, e que possui matriz energética de usinas termelétricas. Este modelo utiliza como principal ferramenta a chamada curva cota-preço. Com ela a companhia geradora é capaz de verificar o quanto é possível variar o preço de equilíbrio de acordo com sua cota no sistema. Como resultado, apresentamos uma ferramenta computacional de análise econômica para companhias geradoras no mercado do dia seguinte.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática e Aplicações. Planejamento de Geração de Curto Prazo. Mercados de Eletricidade. Curva Cota-Preço.

### Introdução

Anteriormente a década de 90, a comercialização de energia era realizado no chamado ambiente regulado, onde as decisões de geração eram tomadas pelo operador do sistema, cujos objetivos eram a minimização dos custos de produção com o atendimento das restrições de segurança e confiabilidade do sistema (SHAHIDEHPOUR; YAMIN; LI, 2002). Desde então a comercialização é feita através dos leilões de energia. No mercado de energia do tipo *pool* as companhias geradoras fazem ofertas de venda de blocos de energia (MWh) e os consumidores e varejistas dão lances de compra de blocos de potência (MWh), a preços (\$/MW) especificados de venda e compra, enquanto que o Operador de Mercado recebe as ofertas e lances, e através de um procedimento de equilíbrio de mercado (PEM), determina o preço de equilíbrio, bem como a potência gerada e consumida que será despachada no mercado. Neste ambiente o Operador Independente do Sistema (OIS) é responsável por garantir a qualidade e segurança do sistema (KARDAKOS; SIMOGLU; BAKIRTZIS, 2013).

Nos mercado de energia as companhias geradoras podem ser classificadas em dois tipos: *price-maker* ou *price-taker*. As companhias *price-makers* são capazes de alterar o preço de equilíbrio do mercado devido ao seu grande poder de mercado, enquanto que as companhias que não tem esta capacidade são chamadas de *price-taker*, sendo que ambas tem por objetivo a maximização de suas receitas líquidas. Para alcançar este objetivo a resolução de alguns problemas se torna necessários, sendo os principais o problema de Auto-Produção (AP) e o problema de lance estratégico (*strategic bidding*). O problema de AP permite calcular a produção ótima que maximizará o lucro da companhia, enquanto que o problema

de lance estratégico tem por objetivo determinar a melhor estratégia de ofertas para alcançar a produção ótima calculada pelo modelo de AP.

Este trabalho tem por objetivo apresentar e avaliar, através de um estudo de caso, um modelo de AP multi-período, de uma companhia do tipo *price-maker*, de usinas termelétricas em um mercado do dia seguinte do tipo *pool*. Este modelo apresentará não apenas as restrições referentes aos aspectos físicos e operativos das usinas, como máxima e mínima potência de geração, mas também as restrições intertemporais, como rampas de tomada e alívio de carga, tempo mínimo de operação e desligamento, entre outros. Para a modelagem da influência das companhias *price-maker* será utilizada a chamada curva cota-preço, que demonstra como o preço de equilíbrio varia de acordo com a cota da companhia.

## Conceitos de Mercados de Eletricidade

Antes da descrição do modelo, é necessário uma breve explicação sobre conceitos dos mercados de eletricidade. Como já dito, cada companhia geradora faz ofertas de venda de energia. Cada bloco de oferta das unidade é então ordenado de forma que os preços estejam crescentes. Desta forma é possível construir a chamada curva de geração agregada. De maneira semelhante é feito com os consumidores e varejistas, porém seus blocos de lances são ordenados em que os preços estejam decrescentes (CONEJO; CARRIÓN; MORALES, 2010). A curva construída então é chamada de demanda agregada. Para este trabalho foram utilizados as ofertas das companhias geradoras e lances dos consumidores contidos em (ARROYO;CONEJO; 2002) e apresentadas nas Tabelas 1 e 2 respectivamente. Ao fazer o cruzamento dessas duas curvas é encontrado o chamado ponto de equilíbrio, que determina qual será o preço de venda de energia em todo o mercado. Este processo é procedimento de equilíbrio de mercado. A Figura 1 apresenta o cruzamento dessas curvas para a hora 1 do sistema. Vale ressaltar que as ofertas e lances são fornecidos para cada hora do dia seguinte, portanto o mercado possui 24 preços de equilíbrio.

De maneira arbitrária, foi decidido que as 7 primeiras unidades geradoras pertenciam à companhia 1, as 7 seguintes pertenciam a companhia 2 e as 6 últimas a companhia 3. Para fazer o levantamento das curvas cota-preço de cada companhia foi realizado um processo iterativo, em que é resolvido o PEM sucessivamente, retirando a cada iteração, um dos blocos de ofertas e encontrando um novo ponto de equilíbrio. Dessa forma a cada procedimento de equilíbrio de mercado resolvido tem-se um preço de equilíbrio para uma dada cota aceita no mercado. A Figura 2, apresenta as curvas cota-preço de cada uma das companhias na hora 1, sendo que a linha contínua azul se refere à companhia 1, a linha tracejada vermelha se refere a companhia 2 e a linha verde com asteriscos se refere a companhia 3. Para as companhias *price-maker*, a curva cota-preço é decrescente e linear por partes (TORRE; CONTRERAS, 2004), isto significa que o preço de mercado diminui à medida que a companhia aumenta sua cota no mercado, porém para as companhias *price-taker*, a curva cota-preço se torna uma reta.

## Modelo de Auto-Produção

O modelo proposto é apresentado em (1), onde a função objetivo (1a) é maximização da receita líquida da companhia, sendo que o termo  $b_{t,s} + u_{t,s} Q_{t,s}^{\min}$  representa a cota da companhia,  $\lambda_{t,s}$  o preço de venda de energia. A função  $c_{t,j}(p_{t,j})$  é o custo de produção de energia de acordo com a energia gerada, sendo demonstrada em (1s).

As restrições (1b) a (1f) se referem a linearização da curva cota preço, citada na seção anterior. Em (TORRE et al.,2002) é possível encontrar em detalhes como é feita esta linearização, e as constantes  $Q_{t,s}^{\min}$ ,  $B_{t,s}^{\max}$  e  $\lambda_{t,s}$  podem ser encontrados em (CABANA,2016). As restrições (1g) a (1j) se refere a rampas de tomada e alívio de carga, e seus dados foram retirados de (LI;JOHNSON;SVOBODA,1997). As restrições (1k) a (1p) se referem ao tempo mínimo de operação e desligamento, e por últimos as restrições (1q) e (1r) se referem as lógicas de status utilizadas pelas variáveis binárias.

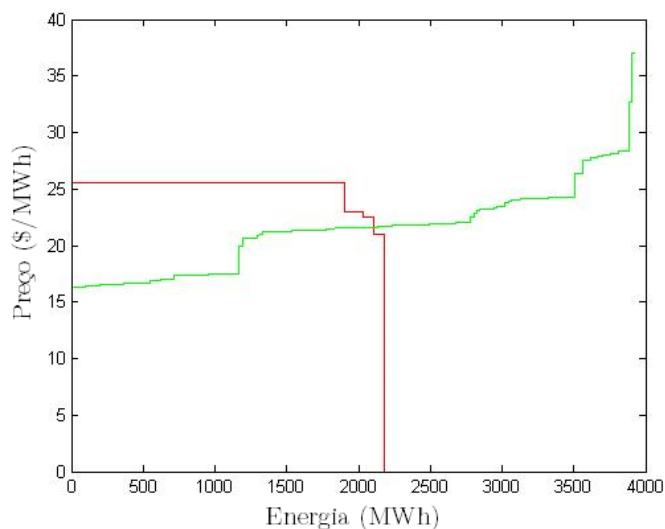


Figura 1: Cruzamento da curva de geração agregada com a curva de demanda agregada da hora 1

Tabela 1: Blocos de Ofertas das Unidades Geradoras

		Ofertas: Potência(MW)/Preço(\$/MWh)			
Companhia	Unidade	Bloco 1	Bloco 2	Bloco 3	Bloco 4
1	1	20/16.59	30/16.72	35/16.87	45/17.06
1	2	20/16.59	25/16.70	37/16.86	48/17.06
1	3	100/21.18	120/21.33	120/21.48	120/21.63
1	4	100/21.20	120/21.38	120/21.57	125/21.63
1	5	100/32.18	20/23.29	30/23.44	10/23.49
1	6	100/16.29	100/16.38	120/16.50	135/16.63
1	7	100/17.32	135/17.41	120/17.48	100/17.54
2	8	100/21.69	135/21.80	135/21.92	100/22.00
2	9	20/22.54	20/22.83	20/23.11	20/23.40
2	10	20/23.94	20/28.31	20/32.67	20/37.03
2	11	25/27.78	20/27.81	20/27.84	20/27.87
2	12	60/23.98	100/24.12	120/24.29	20/24.32
2	13	25/23.80	100/24.14	30/24.24	7/24.26
2	14	25/19.90	100/20.70	30/20.93	7/20.99
3	15	55/26.37	-	-	-
3	16	55/21.90	-	-	-
3	17	55/27.98	-	-	-
3	18	55/28.15	-	-	-
3	19	55/28.35	-	-	-
3	20	55/27.51	-	-	-

Tabela 2: Blocos de Lances de Demanda Agregada

Lances: Potência(MW)/Preço(\$/MWh)				
Hora	Bloco 1	Bloco 2	Bloco 3	Bloco 4
1	1900/25.5	130/23.0	72/22.5	80/21.0
2	1732/24.5	130/23.0	40/21.5	50/21.0
3	1470/24.5	160/22.5	30/21.0	135/20.4
4	1200/24.5	100/22.5	70/21.8	135/20.4
5	1250/24.0	150/22.3	80/20.0	170/16.0
6	1400/24.5	130/22.5	70/21.8	135/19.4
7	1670/25.5	160/23.0	70/22.5	135/21.0
8	1870/26.0	200/25.5	30/24.5	135/24.2
9	2120/25.0	240/22.0	90/21.0	130/20.2
10	2000/26.0	250/23.4	150/22.5	130/18.2
11	2035/26.2	300/23.8	80/22.7	75/20.3
12	2035/26.2	300/23.9	100/22.8	75/20.3
13	1970/25.0	230/22.7	150/22.0	130/20.2
14	1960/24.5	210/24.0	130/22.5	150/20.2
15	1950/25.0	150/23.0	170/22.0	120/20.2
16	2150/25.0	120/22.0	100/21.0	120/20.2
17	1970/25.0	230/22.7	150/22.0	130/20.2
18	2000/26.0	250/23.4	150/22.5	130/18.2
19	2035/26.2	300/23.9	100/22.8	75/20.3
20	2180/27.0	250/25.8	70/23.5	130/21.2
21	2200/27.0	140/25.8	90/24.5	130/22.2
22	2000/27.0	250/25.8	150/23.5	130/21.2
23	2000/26.0	130/23.4	100/22.5	70/18.2
24	2100/25.0	100/22.0	90/21.0	80/20.2

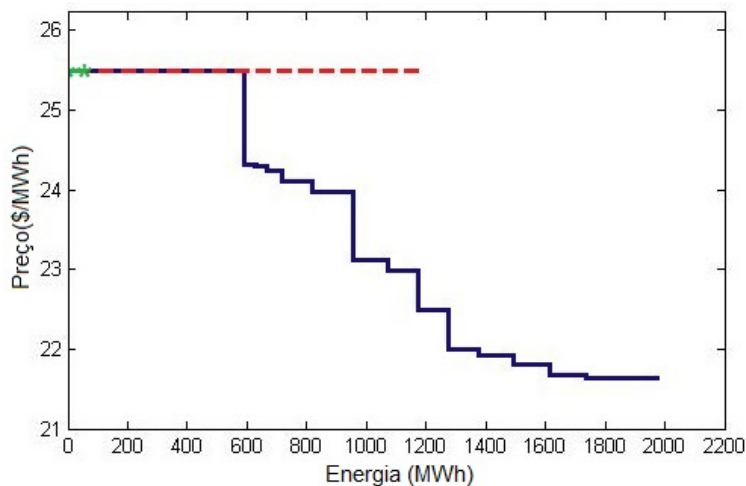


Figura 2: Curvas cota-preço das companhias geradoras 1 (Azul e Contínua), 2 (Vermelha e Tracejada) e 3 (Verde e com Asteriscos) na hora 1

$$Max_{q,p,u,b} \sum_{t=1}^T \left[ \sum_{s=1}^{N_t} \lambda_{t,s} (b_{t,s} + u_{t,s} Q_{t,s}^{\min}) - \sum_{j=1}^{NT} c_{t,j} (p_{t,j}) \right] \quad (1a)$$

sujeito a:

$$q_t = \sum_{i=1}^{NT} p_{t,i}, \forall t = 1, \dots, T \quad (1b)$$

$$q_t = \sum_{s=1}^{N_t} (b_{t,s} + u_{t,s} Q_{t,s}^{\min}), \forall t = 1, \dots, T \quad (1c)$$

$$0 \leq b_{t,s} \leq u_{t,s} B_{t,s}^{\max}, \forall s = 1, \dots, N_t, \forall t = 1, \dots, T \quad (1d)$$

$$\sum_{s=1}^{N_t} u_{t,s} = 1, \forall t = 1, \dots, T \quad (1e)$$

$$u_{t,s} \in \{0, 1\}, \forall s = 1, \dots, N_t, \forall t = 1, \dots, T \quad (1f)$$

$$p_{t,j} \geq PT_j^{\min} v_{t,j}, \forall t = 1, \dots, T, \forall j = 1, \dots, NT \quad (1g)$$

$$p_{t,j} \leq PT_j^{\max} [v_{t,j} - z_{t+1,j}] + z_{t+1,j} SD_j, \forall t = 1, \dots, T, \forall j = 1, \dots, NT \quad (1h)$$

$$p_{t,j} \leq p_{(t-1),j} + RU_j v_{t-1,j} + SU_j y_{t,j}, \forall t = 1, \dots, T, \forall j = 1, \dots, NT \quad (1i)$$

$$p_{(t-1),j} - p_{t,j} \leq RD_j v_{t,j} + SD_j z_{t,j}, \forall t = 1, \dots, T, \forall j = 1, \dots, NT \quad (1j)$$

$$\sum_{t=1}^{G_j} (1 - v_{t,j}) = 0, \forall j = 1, \dots, NT \quad (1k)$$

$$\sum_{l=t}^{t+UT_j-1} v_{l,j} \geq UT_j y_{t,j}, \forall j = 1, \dots, NT, \forall t = G_j + 1, \dots, T - UT_j + 1 \quad (1l)$$

$$\sum_{l=t}^T (v_{l,j} - y_{t,j}) \geq 0, \forall j = 1, \dots, NT, \forall t = T - UT_j + 2, \dots, T \quad (1m)$$

$$\sum_{t=1}^{F_j} v_{t,j} = 0, \forall j = 1, \dots, NT \quad (1n)$$

$$\sum_{l=t}^{t+DT_j-1} (1 - v_{l,j}) \geq DT_j z_{t,j}, \forall j = 1, \dots, NT, \forall t = F_j + 1, \dots, T - DT_j + 1 \quad (1o)$$

$$\sum_{l=t}^T (1 - v_{l,j} - z_{t,j}) \geq 0, \forall j = 1, \dots, NT, \forall t = T - DT_j + 2, \dots, T \quad (1p)$$

$$y_{t,j} - z_{t,j} = v_{t,j} - v_{t-1,j}, \forall j = 1, \dots, NT, \forall t = 1, \dots, T \quad (1q)$$

$$y_{t,j} + z_{t,j} \leq 1, \forall j = 1, \dots, NT, \forall t = 1, \dots, T \quad (1r)$$

onde:

$$c_{t,j} (p_{t,j}) = A0_j v_{t,j} + A1_j p_{t,j} + A2_j p_{t,j}^2 + UC_j y_{t,j} + DC_j z_{t,j} \quad (1s)$$

em que:

### Índices

$t$	período;
$s$	bloco de discretização da curva cota-preço;
$j$	unidade de geração termelétrica;

## Constantes

$Q_{t,s}^{\min}$	cota mínima do bloco de discretização $s$ no período $t$ da curva cota preço, dado por $Q_{t,s}^{\min} = \sum_{i=1}^{s-1} B_{t,i}^{\max};$
$B_{t,s}^{\max}$	cota do bloco de discretização $s$ no período $t$ da curva cota-preço;
$\lambda_{t,s}$	preço associado bloco de discretização $s$ no período $t$ da curva cota-preço;
$N_t$	número de blocos de discretização da curva cota-preço no período $t$ ;
$NH$	número de unidades hidrelétricas da companhia geradora;
$PT_j^{\min}$	potência mínima gerada na unidade termelétrica $i$ ;
$PT_j^{\max}$	potência máxima gerada na unidade termelétrica $i$ ;
$T$	número de períodos ;
$A0_j, A1_j, A2_j$	coeficientes da curva de custo de geração da unidade $j$
$SD_j$	rampa de parada do gerador $j$ ;
$SU_j$	rampa de partida do gerador $j$ ;
$RD_j$	rampa de descida do gerador $j$ ;
$RU_j$	rampa de subida do gerador $j$ ;
$G_j$	Número de períodos que a unidade $j$ deve permanecer ligada no início do horizonte de tempo devido ao mínimo tempo ligado;
$F_j$	Número de períodos que a unidade $j$ deve permanecer desligada no início do horizonte de tempo devido ao mínimo tempo desligado;
$DT_j$	Mínimo tempo que a unidade $j$ deve permanecer desligada;
$UT_j$	Mínimo tempo que a unidade $j$ deve permanecer ligada;
$U_j(0)$	Número de períodos que a unidade $j$ permaneceu ligada no final do dia anterior devido ao mínimo tempo ligado;
$S_j(0)$	Número de períodos que a unidade $j$ permaneceu desligada no final do dia anterior devido ao mínimo tempo desligado;
$V_j(0)$	Condição inicial da unidade $j$ (1 é ligada, 0 desligada);

## Variáveis

$p_{t,j}$	potência ativa gerada pela unidade $j$ da companhia no período $t$ ;
$q_t$	cota de produção da companhia no período $t$ ;
$u_{t,s}$	variável binária que assume 1 se o bloco de discretização $s$ é o último bloco necessário à obtenção do valor da cota $q_t$ no período $t$ , e assume 0, caso contrário;
$b_{t,s}$	variável real que representa o valor fracionário do bloco de discretização $s$ no período $t$ ;
$v_{t,j}$	variável binária se a unidade $j$ esta online no período $t$ ;
$y_{t,j}$	variável binária se a unidade $j$ teve ação de ligar no período $t$ ;
$z_{t,j}$	variável binária se a unidade $j$ teve ação de desligar no período $t$ ;

## Resultados e Discussões

Nesta seção o modelo de AP proposto é avaliado utilizando um sistema teste composto por 3 companhias geradoras, com suas ofertas demonstradas na Tabela 1 e os lances da demanda demonstradas na Tabela 2. Este modelo foi apenas simulado para a companhia 1, pois é a única que apresenta características de tipo *price-maker*. A construção das curvas de geração agregada e demanda agregada do sistemas, e das curvas cota-preço das 3 companhias foram feitas através do software Matlab versão R2013a, e o modelo foi resolvido utilizando o software IBM ILOG CPLEX *Optimization Studio*, versão



12.6, em um computador com processador Intel Core i5 e 8 Gb de RAM. A Tabela 3 apresenta o despacho horário de geração ótima, e também a receita obtida em cada hora.

Tabela 3: Despacho ótimo de geração e receita horária encontrada pelo modelo

1 Hora	Potência das Unidades Geradores (MW)							Receita (\$)
	1	2	3	4	5	6	7	
1	91	91	172,36	145,63	100	175	175	22914
2	130	130	100	100	100	375	235	26371,8
3	130	130	100	100	100	455	355	29715,3
4	130	130	100	100	100	455	155	25377,3
5	130	130	100	100	100	455	155	25377,3
6	130	130	100	100	100	455	355	29715,3
7	130	130	118,15	101,84	100	455	455	32631
8	130	130	100	100	100	455	355	32852,6
9	130	130	100	100	100	455	255	30454,6
10	130	130	118,15	101,84	100	455	455	34866
11	130	130	118,15	101,84	100	455	455	35462
12	130	130	118,15	101,84	100	455	455	35611
13	130	130	118,15	101,84	100	455	455	33823
14	130	130	118,15	101,84	100	455	455	33823
15	130	130	100	100	100	455	355	31510
16	130	130	100	100	100	455	355	32606
17	130	130	118,15	101,84	100	455	455	33823
18	130	130	118,15	101,84	100	455	455	34866
19	130	130	118,15	101,84	100	455	455	35661
20	130	130	184,53	155,46	100	455	455	38607,8
21	130	130	184,53	155,46	100	455	455	38607,8
22	130	130	184,53	155,46	100	455	455	37835
23	130	130	100	100	100	455	355	32058
24	130	130	100	100	100	455	255	30454,6
Total	3081	3081	2716,94	2177,65	2400	10560	8820	171.793,3

Para verificar a influência da curva cota-preço na tomada de decisão da companhia, foi simulada uma situação em que a companhia não tenha conhecimento de seu poder de mercado, acreditando que fazendo todas as suas ofertas, terá uma receita melhor. Para verificar este caso no modelo, deve se fazer  $s = 28$  em todos os períodos. Como resultado, o lucro obtido da companhia será de \$116.373,84. Como já visto na Tabela 3, se utilizarmos a curva cota-preço, o lucro ótimo obtido será de \$171.793.353,30, uma diferença de 55.419,46 por dia, mostrando que para a companhia *price-maker*, ter uma cota menor aceita resultará uma receita líquida melhor.

## Conclusões

Neste trabalho foi apresentado um modelo de auto-produção de uma companhia geradora do tipo *price-maker*, que possui apenas usinas termelétricas, em um mercado *pool* de energia elétrica. No modelo foram levantadas restrições operativas de geração e as restrições intertemporais, como tomada e alívio de carga, tempo mínimo de operação e desligamento. A principal ferramenta deste modelo é a curva cota-



preço, que além de modelar o impacto das companhias *price-maker* nos preços de equilíbrio de mercado, foi capaz de mostrar graficamente as diferenças entre as companhias *price-maker* e *price-taker*.

Esta curva torna-se um instrumento de boa precisão pois considera, além das informações das ofertas da própria companhia, retiradas de leilões anteriores, as ofertas das outras companhias. Porém não é instrumento exato, pois é impossível prever com exatidão quais serão as ofertas das outras companhias para o dia seguinte. O modelo proposto apresentou-se bastante eficaz, mostrando que se as companhias conhecerem seu poder de influência no mercado, são capazes de alcançar um lucro maior, a partir dos blocos de ofertas que fornecem a cota ótima, e que nem sempre esta cota é alcançada ofertando todos os blocos no leilão.

## Agradecimentos

À FAPESP pelo apoio financeiro no projeto de pesquisa (processo nº 2016/02686-5)

## Referências

- ARROYO, José Manuel; CONEJO, Antonio J. IEEE Transactions on Power Systems. **Multiperiod auction for a pool-based electricity market**, v. 17, n. 4, p. 1225-1231, 2002.
- CABANA, T. G. **Modelos de auto-produção de geradores tipo price-makers em mercados pool de energia**. 2016. 80 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação). UNESP, Bauru, 2016
- CONEJO, A. J.; CARRIÓN, M.; MORALES, J. M. **Decision Making Under Uncertainty in Electricity Markets**. Boston, MA: Springer US, 2010.
- KARDAKOS, E.; SIMOGLU, C.; BAKIRTZIS, A. IEEE Transactions on Power Systems. **Short-Term Electricity Market Simulation for Pool-Based Multi-Period Auctions**, v. 28, n. 3, p. 2526-2535, 2013.
- LI, C. A.; JOHNSON, R. B.; SVOBODA, A. J. IEEE Transactions on Power Systems. **A new unit commitment method**, v. 12, n. 1, p. 113-119, 1997.
- SHAHIDEHPOUR, M.; YAMIN, H.; LI, Z. **Market Operations in Electric Power Systems: Forecasting, Scheduling, and Risk Management**. 1st edition. ed. New York: Wiley-IEEE Press, 2002.
- TORRE, S. de la et al. IEEE Transactions on Power Systems. **Price maker self-scheduling in a pool-based electricity market: a mixed-integer LP approach**, v. 17, n. 4, p. 1037-1042, nov. 2002.
- TORRE, S. de la; CONTRERAS, J.; CONEJO, A. IEEE Transactions on Power Systems. **Finding multiperiod Nash equilibria in pool-based electricity markets**, v. 19, n. 1, p. 643-651, fev. 2004.

## Otimização do consumo energético em uma indústria gráfica

*Lucas Farias de Menezes*

*Universidade Estadual Paulista – Campus Bauru; Faculdade de Engenharia de Bauru  
lks\_mnzs\_14@hotmail.com*

*Antonio Roberto Balbo*

*Universidade Estadual Paulista – Campus Bauru; Faculdade de Ciências de Bauru  
arbalbo@fc.unesp.br*

*Adriana Cristina Cheri*

*Universidade Estadual Paulista – Campus Bauru; Faculdade de Ciências de Bauru  
adriana@fc.unesp.br*

*Edilaine Martins Soler*

*Universidade Estadual Paulista – Campus Bauru; Faculdade de Ciências de Bauru  
edilaine@fc.unesp.br*

**Resumo:** Neste artigo é proposto um modelo de programação inteira que busca reduzir o consumo de energia elétrica relativo à utilização de conjuntos distintos de impressoras de produção e de acabamento de produto em uma indústria gráfica. O modelo também respeita os limites de tempo de preparação e de operação das impressoras, além de particularidades do item impresso e de demanda diária de produção. O modelo proposto foi implementado em uma linguagem algébrica de programação e testes computacionais preliminares foram realizados com exemplares fornecidos por uma indústria gráfica situada na cidade de Bauru.

**Palavras-chave:** Otimização. Eficiência Energética. Energia Elétrica. Indústria Gráfica.

### Introdução

A progressiva integração dos mercados, aliada ao desenvolvimento cada vez mais rápido de novos produtos tem aumentado a competitividade entre as indústrias. Dentro deste novo cenário, muitas empresas buscam melhorias em seus processos produtivos que abrangem desde a responsabilidade de planejar e aperfeiçoar os processos até sua estrutura organizacional.

Entre os vários fatores que podem afetar os custos operacionais de uma empresa, podemos destacar, entre outros, o elevado consumo de energia elétrica que ocorre devido ao uso de maquinários antigos e o alto custo da tarifa elétrica em determinados horários.

No Brasil, as tarifas de energia elétrica são determinadas pela Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL), que estabelece também os critérios de classificação dos consumidores e as formas de cobrança de energia elétrica. De acordo com a concessionária de energia elétrica, no chamado ‘horário de ponta’, o custo da tarifa é mais elevado e, no Estado de São Paulo, ocorre entre 18h e 21h, exceto no horário de verão que ocorre entre 19h e 22h. De acordo com Soler et al. (2016), como as tarifas de energia elétrica variam ao longo do dia, torna-se necessário nas indústrias um planejamento dos turnos de funcionamento das máquinas.

Para Bermann (2002) existe a necessidade da implementação de políticas públicas que estabeleçam metas objetivas de redução do consumo de energia em grupos de indústrias, por meio de medidas que incentivem a modernização das plantas produtoras e o surgimento de inovações que possam reduzir o consumo energético no processo produtivo nas demandas diárias das indústrias. Em contrapartida, Goldemberg (1998) conta que tais medidas são necessárias para reduzir o consumo, mas desde que não prejudique o crescimento econômico das indústrias e também do Brasil.

Visando uma melhor otimização dos recursos, associado às estratégias para o baixo consumo de energia elétrica, insere-se também a necessidade de melhor dimensionamento das máquinas utilizadas no processo produtivo. Desta forma, os problemas de dimensionamento de lotes (PDL) podem ser utilizados para auxiliar no processo de decisão. De acordo com Karimi et al. (2003), os PDL consistem em determinar a quantidade a ser produzida de cada item e o momento em que a produção deve ocorrer, ou seja, o planejamento está relacionado a um horizonte de planejamento.

Os primeiros trabalhos para a resolução dos PDL foram propostos por Manne (1958) e Wagner e Whitin (1958) os quais abordam o problema com um único tipo de item a ser produzido e sem restrições quanto a capacidade de produção para esse item.

Uma extensão para esse problema envolve a tomada de decisão para realizar a produção de vários itens num mesmo período de tempo. Neste problema, conhecido como PDL Multi-Itens, além de determinar a quantidade de cada item a ser produzida, deve-se levar em consideração que estes itens possuem um custo de produção, de preparação e de armazenamento em estoque. Além disso, pode-se considerar que há um tempo para que cada item seja produzido e para a preparação da linha de produção (máquina).

Trigeiro et al. (1989) apresentaram o primeiro trabalho com um método para a resolução do PDL com tempos de preparação para produção. Basicamente, o método consiste em dualizar as restrições de capacidade e os subproblemas obtidos são resolvidos de forma exata pelo método proposto por Wagner e Whitin (1958).

A literatura referente aos PDL é bastante vasta, assim como inúmeros trabalhos que apresentam estudos e propostas para a redução do consumo de energia elétrica no setor industrial. Entretanto, trabalhos que consideram as duas abordagens simultaneamente não foram encontrados. Entre as várias empresas com alto consumo de energia elétrica e necessidade de planejamento em sua linha de produção, destaca-se as indústrias gráficas, principalmente as que possuem maquinários mais antigos.

Na indústria gráfica, como o processo de transformação da matéria prima em um item finalizado é feito somente por máquinas, tem-se um elevado consumo de energia elétrica. Além disso, há outros fatores que também contribuem para este gasto, como o de ligar e desligar a mesma máquina mais de uma vez durante o dia e seu mecanismo analógico ao invés do digital que, conseqüentemente, aumenta seu tempo de preparo.

Desta forma, este trabalho desenvolve um estudo voltado para a otimização do consumo energético em indústrias gráficas. O problema estudado considera os diversos itens que as indústrias são capazes de produzir junto às suas respectivas demandas. Um modelo matemático linear inteiro foi proposto para representar esse problema visando a melhor distribuição de itens simultaneamente à utilização de máquinas, para que o consumo de energia elétrica seja o menor possível para cada máquina selecionada.

O modelo proposto foi implementado utilizando uma linguagem algébrica de programação e testes preliminares foram realizados com dados reais de uma indústria gráfica situada na cidade de Bauru-SP.

Em continuidade deste trabalho, na segunda seção apresenta-se o modelo matemático proposto para representar o problema em estudo. Na terceira, apresenta-se os testes computacionais preliminares. A quarta traz as considerações finais e propostas para a continuidade deste trabalho.

## Formulação Matemática

O modelo matemático proposto para representar o problema de dimensionamento da produção e redução do consumo de energia elétrica foi formulado a partir de informações fornecidas por indústrias gráficas da cidade de Bauru e da distribuidora de energia do mesmo local. Com isso, foi

possível realizar uma escolha das máquinas mais apropriadas a serem usadas no processo de confecção de cada item, levando em conta a sua demanda e a capacidade de produção das máquinas envolvidas.

Basicamente, o problema consiste em otimizar o processo de produção em indústrias gráficas a fim de melhor dimensionar a produção e minimizar o custo de energia elétrica gasto com impressoras e máquinas de acabamento. Para isso, existem restrições como: o tempo de impressão (ou acabamento) de todas as demandas em determinada máquina não deve exceder a capacidade diária da mesma máquina e cada demanda deve passar por apenas uma máquina de impressão e uma máquina de acabamento.

A seguir, a notação utilizada no modelo matemático proposto é definida.

Índices:

$j$  = máquinas de impressão,  $j = 1, \dots, n_1$

$k$  = máquinas de acabamento,  $k = 1, \dots, n_2$

$i$  = tipo de item,  $i = 1, \dots, m$

Parâmetros:

$c_{ij}^P$ : custo total de impressão da demanda do item  $i$  na máquina  $j$ ;

$c_{ik}^F$ : custo total para realizar o acabamento da demanda do item  $i$  na máquina  $k$ ;

$t_{ij}^P$ : tempo total de impressão da demanda do item  $i$  na máquina  $j$  (em horas);

$t_{ik}^F$ : tempo total para o acabamento da demanda do item  $i$  na máquina  $k$  (em horas);

$Cap_j^P$ : capacidade de impressão da máquina  $j$  (em horas);

$Cap_k^F$ : capacidade de acabamento da máquina  $k$  (em horas);

$C$ : valor do kW/h (em Reais);

$k_j^P$ : consumo de energia elétrica da máquina impressora  $j$  (em kW/h);

$k_k^F$ : consumo de energia elétrica da máquina de acabamento  $k$  (em kW/h);

$a_j^P$ : tempo de *setup* da máquina de impressão  $j$ ;

$a_k^F$ : tempo de *setup* da máquina de acabamento  $k$ ;

$Q_i$ : demanda do item tipo  $i$ ;

$v_j^P$ : velocidade de impressão da máquina  $j$  em metro/h;

$v_k^F$ : velocidade de acabamento da máquina  $k$  em metro/h;

$h_i$ : altura ou formato do formulário (metros);

Variáveis de decisão:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a máquina } j \text{ é acionada para realizar a impressão da demanda do item } i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1)$$

$$y_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{se a máquina } k \text{ é acionada para realizar o acabamento da demanda do item } i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2)$$

O modelo matemático proposto é apresentado a seguir:

$$\min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_1} c_{ij}^P x_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_2} c_{ik}^F y_{ik} \quad (3)$$

(4)

(5)



$$\text{sujeito à } \begin{cases} \sum_{i=1}^m t_{ij}^P x_{ij} \leq \text{Cap}_j^P, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n_1 \\ \sum_{i=1}^m t_{ik}^F y_{ik} \leq \text{Cap}_k^F, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n_2 \\ \sum_{j=1}^{n_1} x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n_1 \\ \sum_{k=1}^{n_2} y_{ik} = 1, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n_2 \\ x_{ij} \in \{0,1\} \\ y_{ik} \in \{0,1\} \end{cases}$$

No modelo (1)-(5), a função objetivo definida em (1) visa distribuir as demandas disponíveis para a produção nas máquinas de impressão e acabamento de modo a ser selecionado o fluxo com o menor consumo de energia possível para o período definido. As restrições (2) e (3) representam a capacidade de produção das máquinas de impressão e acabamento. As restrições (4) e (5) asseguram que a demanda de um determinado item  $i$  pode ser impressa em uma única máquina  $j$  e receber o acabamento de uma única máquina  $k$ .

Os custos de impressão e acabamento dos itens foram obtidos respectivamente pelas equações  $c_{ij}^P = C(k_j^P(\alpha_j^P + t_{ij}^P))$  e  $c_{ik}^F = C(k_k^F(\alpha_k^F + t_{ik}^F))$ , e, por fim, o tempo de impressão e acabamento dos itens foram obtidos pelas equações  $t_{ij}^P = \frac{Q_i \cdot h_i}{v_j^P}$  e  $t_{ik}^F = \frac{Q_i \cdot h_i}{v_k^F}$ , respectivamente.

## Resultados computacionais

Para verificar o desempenho do modelo proposto, foram utilizados dados fornecidos por uma indústria gráfica sediada na cidade de Bauru-SP. Para efeitos de comparação, a instância utilizada para os testes numéricos foi obtida a partir de uma carteira de pedidos que já estava em produção. Esta produção refere-se a um dia de trabalho na indústria.

O modelo matemático (1) - (5) foi implementado na plataforma GAMS versão 24.3.1 e utilizou o Solver CPLEX versão 12.6.3.0. Os custos e tempos operacionais foram calculados utilizando os dados da indústria. Na Tabela 1, estão as características gerais de todas as máquinas disponíveis em seu parque gráfico, entre eles, os tipos de máquinas (Impressão (Imp) ou Acabamento (Acab)), as velocidades de trabalho destas (metro/h), tempos de *setup* (minutos) das máquinas de impressão e de acabamento e consumo (kW/h).

Tabela 1 - Ficha Técnica dos Maquinários

Maquinas	Velocidade (metro/h)	Setup (minutos)	Consumo (kW/h)
Imp01	10500	15	7872
Imp02	3000	30	240
Imp03	7800	20	4000
Imp04	12000	10	17920
Imp05	9000	15	6400



Acab01	3600	30	264
Acab02	23600	45	3840

A carta de pedido dos clientes (CI), contendo as demandas (un) totais dos itens é apresentados na Tabela 2. A demanda de cada cliente é composta por apenas um tipo de item.

Tabela 2 - Dados da Demanda

Cientes	Demanda (un)
CI01	15000
CI02	20000
CI03	250000
CI04	300000
CI05	50000

Os valores do custo de energia elétrica foram extraídos a partir da conta da empresa sendo de 0,3425 centavos/kw durante seu horário de funcionamento. Com os dados apresentados nas tabelas 1 e 2, obteve-se os resultados de quais máquinas de impressão e de acabamento que deveriam estar ativas para a minimização do consumo energético de produção da indústria e atendimento da demanda de materiais dos clientes. Os resultados apresentados na Tabela 3 indicam quais máquinas deveriam estar ativas '1' e quais deveriam estar inativas '0'.

Tabela 3 - Resultados a partir da execução do solver CPLEX/GAMS

	CI01	CI02	CI03	CI04	CI05
Imp01	0	0	0	0	1
Imp02	0	1	0	0	0
Imp03	0	0	0	1	0
Imp04	1	0	0	0	0
Imp05	0	0	1	0	0
Acab01	1	1	1	1	1
Acab02	0	0	0	0	0

De acordo com a Tabela 3 as máquinas de impressão Imp01 deveria ser utilizada para a produção da demanda CI05, a Imp02 para a produção da demanda CI02, a Imp03 para a produção da demanda CI04, a Imp04 para a produção da demanda CI01 e por fim a Imp05 para a produção da demanda CI03. Para a parte de acabamento a única máquina ativada para atender toda as demandas de todos os clientes foi a Acab01. Esta escolha ocorreu devido ao baixo consumo energético dessa máquina. Mesmo sua velocidade de trabalho sendo inferior, todas as demandas foram atendidas.

O tempo computacional para a execução do modelo foi de 0,309 segundos.

### Considerações finais e trabalhos futuros

Este trabalho propõem um modelo matemático para representar o planejamento da produção de materiais impressos personalizados de uma gráfica localizada na cidade de Bauru-SP. Associado ao planejamento da produção, o modelo busca otimizar o consumo energético para o atendimento da



demanda de clientes. O modelo proposto foi implementado utilizando a linguagem algébrica de programação GAMS, utilizando o Solver CPLEX.

Como continuidade do trabalho, pretende-se incluir horizontes de planejamento e a possibilidade de gerar itens para estoque. Além disso, pode-se considerar que, nem todas as máquinas de acabamento do item podem ser utilizadas para finalizar todos os tipos de materiais demandados.

### Agradecimentos

Os autores agradecem a FAPESP (Proc. n.2014/20853-0) pelo suporte financeiro.

### Referências

BASSANEZI, R. C.; FERREIRA Jr, W. C. **Equações diferenciais com aplicações**. 1.ed. Harbra: São Paulo, 1988.

BERMANN, C. **Energia no Brasil: para quê? Para quem? Crise e Alternativas para um país sustentável**. 1. Ed. Livraria da Física/FASE: São Paulo, 2002.

GOLDEMBERG, J. 1998. **Energia e desenvolvimento**. Estudos Avançados volume 12 no. 33. USP, São Paulo, 1998.

KARIMI, B.; FATEMI GHOMI, S. M. T.; WILSON, J. M. Omega. **The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms**. v. 31, p. 365-378, 2003.

MANNE, A.S. Management Science. **Programming of economic lot sizes**. p. 115 - 135, 1958.

SOLER, E. M.; TOLEDO, F. M. G.; DOS SANTOS, M. O.; ARENALES, M. N. Production. **Otimização dos custos de energia elétrica na programação da captação, armazenamento e distribuição de água**, v. 26, n. 2, p. 2-5, 2016.

TRIGEIRO, W. W.; THOMAS, J.; MCCLAIN, J. O. Management Science. **Capacitated lot sizing with setup times**. v. 35, n. 3, p. 353-366, 1998.

WAGNER, H.; WITHIN, T. Management Science. **Dynamic version of the economic lot size model**., v. 5, p. 89-96, 1958.



## Otimização do problema de despacho econômico: uma comparação entre diferentes técnicas

*Debora Barbosa Aires*

*Universidade Estadual Paulista (UNESP)  
debby\_inha@yahoo.com.br*

*Pedro Rochavetz de Lara Andrade*

*Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)  
pedroandrade@utfpr.edu.br*

*Edmea Cassia Baptista*

*Universidade Estadual Paulista (UNESP)  
baptista@fc.unesp.br*

**Resumo:** O Problema de Despacho Econômico (PDE) é um problema com função quadrática, restrições lineares e variáveis canalizadas. Sua resolução pode ser encontrada na literatura com utilização de diversas técnicas. Sabendo da existência de soluções computacionais que possuem pacotes de softwares de otimização, seriam estas suficientemente eficientes na otimização do PDE? Neste trabalho, as ferramentas computacionais LINGO® e KNITRO são utilizadas na resolução do problema, e a solução obtida é comparada com resultados apresentados na literatura. Para otimizar o problema proposto, as ferramentas LINGO® e KNITRO utilizaram os métodos de otimização de Busca Local e de Ponto Interior, respectivamente. Os resultados mostram que, para o exemplo estudado, ambas as técnicas podem ser mais eficientes que métodos consagrados na literatura.

**Palavras-chave:** Otimização. Problema de Despacho Econômico. LINGO. KNITRO.

### Introdução

O Problema de Despacho Econômico (PDE) é modelado através de um problema de minimização dos custos dos combustíveis empregados na geração de energia termoeletrica e está inserido na área de Engenharia Elétrica (BALBO; SOUZA; BAPTISTA, 2008). Segundo Balbo, Souza e Baptista (2008), uma vez que os pontos de válvula são desconsiderados, tal problema pode ser equivalente ao problema de minimização de funções quadráticas, com restrições lineares de igualdade e variáveis canalizadas.

O trabalho de Balbo, Souza e Baptista (2008) teve como objetivo apresentar o método Primal-Dual para Variáveis Canalizadas com Procedimento Previsor-Corretor e Busca Unidimensional e sua adaptação à resolução PDE. A eficiência de tal técnica foi demonstrada ao compará-la com outros métodos já publicados, dando ênfase à influência da solução inicial sobre os resultados obtidos.

Porém, sabendo da existência de soluções computacionais que possuem pacotes de softwares de otimização, as quais são largamente utilizadas, tem-se a seguinte dúvida de pesquisa: Soluções computacionais, como o Software LINGO® e o Pacote de soluções KNITRO, são suficientemente eficientes na otimização de problemas quadráticos com restrições de igualdade e variáveis canalizadas, como no caso do PDE? Para responder esta questão, baseando-se no trabalho de Balbo, Souza e Baptista (2008), o PDE foi resolvido utilizando-se das ferramentas LINGO e KNITRO e o resultado desta aplicação é apresentado neste artigo com o objetivo de compara-los aos resultados obtidos por Balbo, Souza e Baptista (2008) e demonstrar a eficiência destas ferramentas computacionais de otimização no caso do problema quadrático.

Nas seções a seguir, será apresentado o PDE, as técnicas de resolução que foram aplicadas para resolver tal problema, os resultados numéricos de tais aplicações e a comparação entre diferentes métodos e, por fim, as conclusões obtidas.

## Problema de Despacho Econômico

O PDE visa à minimização dos custos de geração de energia elétrica em termoeletricas, alocando a demanda por energia elétrica entre as unidades geradoras, respeitando as restrições operacionais de cada unidade (SOUSA; BAPTISTA; COSTA, 2008). É equivalente à otimização de um problema definido por uma função não linear quadrática, com restrições lineares de igualdade e variáveis canalizadas, quando se desconsideram os pontos de válvula (BALBO; SOUZA; BAPTISTA, 2008).

Conforme Happ (1977), as primeiras técnicas utilizadas para economia no processo de geração de energia termoeletrica surgiram por volta de 1920, quando o critério utilizado baseava-se na eficiência de cada unidade geradora. O suprimento da demanda era feito partindo da unidade mais eficiente para a unidade menos eficiente, até que a demanda fosse suprida. Então, Steinberg e Smith (1943) comprovam o critério dos custos incrementais iguais, técnica que era utilizada empiricamente e baseia-se na minimização do acréscimo de custo para cada acréscimo de demanda.

Segundo Sousa, Baptista e Costa (2008), devido a sua grande utilidade, o PDE vem sendo amplamente estudado. Isto se verifica em diversas fontes da literatura, entre elas podemos citar Samed (2004), Baptista e Belati (2004), Coelho e Mariani (2006), Rodrigues (2007), Balbo, Souza e Baptista (2008), Stanzani (2012).

A função que descreve o comportamento do custo do PDE, bem como as restrições e variáveis do problema, segundo Balbo, Souza e Baptista (2008), são apresentadas nas equações (1) a (3).

$$\text{Minimizar } F_g = \sum_{i=1}^n F_{gPVI} = a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i \quad (1)$$

$$\text{Sujeito a: } \sum_{i=1}^n P_i = P_D + P_L \quad (2)$$

$$P_i^{\text{Min}} \leq P_i \leq P_i^{\text{Max}} \quad (3)$$

Tem-se que:

$F_g$  = Função custo total de geração;

$F_{gPVI}$  = Função custo de cada unidade geradora  $i$ ;

$a_i, b_i$  e  $c_i$  = Coeficientes da função custo;

$P_i$ 's = Potências nas quais as unidades geradoras devem operar;

$P_D$  = Demanda por energia;

$P_L$  = Perdas na transmissão;

$P_i^{\text{Min}}$  e  $P_i^{\text{Max}}$  = Limites operacionais inferiores e superiores de saída, respectivamente, de cada unidade geradora  $i$ ;

No trabalho aqui proposto, o PDE a ser resolvido pelas ferramentas LINGO e KNITRO e comparado com outras técnicas, é o mesmo utilizado em Kim (2002), bem como Samed (2004) e Balbo, Souza e Baptista (2008). Os dados do problema são apresentados na tabela 1.

Tabela 1– Características do Sistema

Gerador	Pmín (MW)	Pmáx (MW)	A	b	C
1	0	680	0,00028	8,1	550
2	0	360	0,00056	8,1	309
3	0	360	0,00056	8,1	307
4	60	180	0,00324	7,74	240
5	60	180	0,00324	7,74	240
6	60	180	0,00324	7,74	240
7	60	180	0,00324	7,74	240
8	60	180	0,00324	7,74	240

<b>9</b>	60	180	0,00324	7,74	240
<b>10</b>	40	120	0,00284	8,6	126
<b>11</b>	40	120	0,00284	8,6	126
<b>12</b>	55	120	0,00284	8,6	126
<b>13</b>	55	120	0,00284	8,6	126

Fonte: Balbo, Souza e Baptista (2008).

Nota-se pela Tabela 1, que existem 13 Unidades Geradoras neste problema, bem como são apresentadas as potências operacionais máximas e mínimas de cada unidade. As colunas “a”, “b” e “c” mostram os coeficientes da função custo de cada Unidade Geradora, conforme apresentado na Função Objetivo, equação (1).

### Técnicas de Resolução

O PDE apresentado na seção anterior foi resolvido através de duas ferramentas computacionais diferentes, as quais resolvem problemas de otimização não linear para o caso da função quadrática com restrições de igualdade e variáveis canalizadas: Software LINGO® e o Pacote KNITRO. Para tanto, foram utilizados os mesmos dados apresentados no trabalho de Balbo, Souza e Baptista (2008), inclusive a solução inicial, no caso do KNITRO. A seguir são apresentadas as características de cada ferramenta e os respectivos métodos de otimização utilizados para a resolução do PDE exposto anteriormente.

O pacote de softwares LINDO Systems é uma solução para diversos tipos de problemas de otimização combinatória, como problemas de Programação Linear, Programação Inteira, Programação Quadrática e Programação Não Linear (LINDO, 2016). O Software LINGO® utiliza, para problemas de Programação Linear e Inteira, as técnicas Simplex bem como *Branch and Bound*. Já quando se trata da resolução de problemas com funções quadráticas, restrições lineares e variáveis canalizadas, como é o caso aqui abordado, este sistema utiliza um procedimento de Busca Local com estratégia *Multistart Solver* (LINDO, 2016). Este procedimento não garante o alcance da solução ótima do problema, contudo sua aplicação, aliada à estratégia *Multistart Solver*, aumenta as chances do alcance de uma boa solução.

A Busca Local é um procedimento heurístico, ou seja, não garante o alcance da solução ótima do problema, mas busca boas soluções em tempo computacional reduzido (Lopes, Rodrigues e Steiner, 2013). A Busca Local, a partir de uma solução inicial, analisa a vizinhança desta solução, selecionando a melhor solução analisada. Em seguida, analisa a vizinhança desta solução, repetindo estes passos até que não se encontre solução melhor na vizinhança, ou seja, até que um ótimo local seja alcançado (Andrade, 2014).

A estratégia *Multistart Solver*, baseia-se na criação de diversas soluções iniciais, aplicando a Busca Local a todas elas, armazenando a melhor solução encontrada entre todas as soluções iniciais. Este procedimento faz com que, para cada solução inicial, um ótimo local seja encontrado, aumentando as chances de que algum destes ótimos locais seja ótimo global do problema.

A solução Artelys Knitro é um pacote de software para encontrar soluções locais de problemas de otimização contínua. Faz parte de um conjunto de soluções que podem ser executadas através da interface GAMS – *General Algebraic Modeling System* ([www.gams.com](http://www.gams.com)). A versão gratuita do ambiente GAMS pode ser utilizada para problemas com poucas variáveis (FERREIRA, 2013), sendo, assim, aderente ao problema discutido neste artigo. Embora o Knitro tenha sido projetado para



resolver problemas de larga escala, ele também é aderente a problemas mais simples (GAMS, 2016), como o problema quadrático com restrições de igualdade e variáveis canalizadas tratado neste trabalho. Por padrão, o pacote Knitro tenta escolher automaticamente o melhor algoritmo com base nas características do problema dado (GAMS, 2016). No caso do problema tratado neste artigo o algoritmo selecionado foi o Interior/Direct, que é do tipo ponto interior.

Métodos de Ponto Interior são caracterizados por seguirem direções no interior da região factível (FERREIRA, 2013) Essa classe de método é estreitamente relacionado com os métodos de barreira (LUENBERGER, 2015). O método de ponto interior Interior/Direct, implementado no pacote de software Knitro, substitui o problema de programação não linear por uma série de subproblemas de barreira controlados por um parâmetro de barreira. Uma ou mais etapas de minimização são executadas em cada subproblema de barreira, diminuindo o parâmetro de barreira e repetindo o processo até que o problema original tenha sido resolvido com a precisão desejada (ARTELYS, 2016). O cálculo do passo utiliza um procedimento de busca linear por meio da fatoração direta de um sistema (FERREIRA, 2013). Tal método exige, porém, uma solução inicial para que seja executado. Segundo Luenberger (2015), muitos pesquisadores aplicaram algoritmos de ponto interior a problemas quadráticos convexos.

O Interior/Direct desfruta, ainda, da flexibilidade de alternar entre um método de busca linear, que calcula etapas por fatoração das equações primais-duais, e um método de região de confiança que usa uma iteração de gradiente conjugado, possibilitando, dessa forma, uma convergência global na presença de não convexidade ou singularidades da Hessiana ou Jacobiana (FERREIRA, 2013; WALTZ, 2004).

## Resultados

Os resultados encontrados após a resolução do PDE apresentado na seção 2, através das técnicas do LINGO® e KNITRO, apresentadas na seção 3, são ilustrados pela tabela 2, a seguir. As demais técnicas (Algoritmo Genético Híbrido; Algoritmo Genético Híbrido Co-Evolutivo; técnica Primal-Dual com procedimento Previsor-Corretor; e técnica Primal-Dual com procedimento Previsor-Corretor e procedimento de Busca Unidimensional) foram resolvidas em Kim (2002), bem como Samed (2004) e Balbo, Souza e Baptista (2008).

Tabela 2– Comparação dos valores de Potência de cada Unidade Geradora

Resultados	AGH	AGHCOE	PDPC	PDPCBU	LINGO	KNITRO
P1 (MW)	651,145	735,626	680,000	639,720	<b>680,000</b>	<b>680,000</b>
P2 (MW)	319,982	337,495	333,653	353,827	<b>360,000</b>	<b>360,000</b>
P3 (MW)	320,463	292,625	314,026	352,561	<b>360,000</b>	<b>360,000</b>
P4 (MW)	137,776	146,713	117,760	106,224	<b>155,000</b>	<b>155,000</b>
P5 (MW)	156,688	177,346	157,013	166,219	<b>155,000</b>	<b>155,000</b>
P6 (MW)	147,007	131,552	147,200	152,180	<b>155,000</b>	<b>155,000</b>
P7 (MW)	159,165	154,197	166,826	179,643	<b>155,000</b>	<b>155,000</b>
P8 (MW)	145,378	159,550	157,013	166,219	<b>155,000</b>	<b>155,000</b>
P9 (MW)	151,551	167,339	161,920	173,043	<b>155,000</b>	<b>155,000</b>
P10 (MW)	82,259	60,677	68,693	53,810	<b>40,0000</b>	<b>40,000</b>
P11 (MW)	86,320	74,681	58,880	40,556	<b>40,0000</b>	<b>40,000</b>
P12 (MW)	82,893	56,537	68,693	55,000	<b>55,0000</b>	<b>55,000</b>
P13 (MW)	79,368	25,655	88,320	80,994	<b>55,0000</b>	<b>55,000</b>
<b>Σ Pi (MW)</b>	<b>2.520,00</b>	<b>2.520,00</b>	<b>2.520,00</b>	<b>2.520,00</b>	<b>2.520,00</b>	<b>2.520,00</b>



Cada linha da Tabela 2 mostra os valores de potência a ser suprida por cada Unidade Geradora. Nas duas últimas colunas ilustram-se os valores de potência resultados da otimização do PDE através das ferramentas LINGO® e KNITRO, respectivamente. Nota-se que a resposta de ambas as técnicas foi a mesma. No caso do KNITRO, a solução inicial utilizada para a obtenção dos resultados foi a mesma utilizada por Balbo, Souza e Baptista (2008):  $x^o = (659,321,325,150,145,155,165,155,155,65,65,75,85)$ . Pela última linha da Tabela 2, percebe-se que todos os métodos atenderam à demanda total de potência.

A tabela 3 mostra o valor da Função Objetivo alcançado em cada técnica.

Tabela 3 – Comparação dos valores da Função Objetivo

Resultados	Função Objetivo
AGH	24.111,69
AGHCOE	24.072,03
AGAH	24.052,34
PDPC	24.093,35
PDPCBU	24.066,83
LINGO	<b>24.050,14</b>
KNITRO	<b>24.050,14</b>

Nota-se que a resolução através do LINGO e do KNITRO atingiram o mesmo valor, e que este é o melhor valor encontrado para a Função Objetivo entre todas as técnicas. O que demonstra a qualidade da aplicação do Método da Busca Local *Multistart Solver* para problemas de Despacho Econômico, bem como da aplicação do Método de Ponto Interior. O tempo de processamento do LINGO e do KINTRO foi inferior a 1 segundo, resultado este que conforme Balbo, Souza e Baptista (2008), é similar ao encontrado pelas outras técnicas aplicadas.

Como o trabalho de Balbo, Souza e Baptista (2008) teve ênfase em demonstrar a influência da solução inicial sobre os resultados obtidos, outra solução foi ainda testada para cada uma das técnicas comparada naquele trabalho. Das técnicas utilizadas no presente trabalho, a ferramenta LINGO não necessita de uma solução inicial para resolver o problema de otimização, já com pacote KNITRO foi possível avaliar a influência da solução inicial sobre a solução. Contudo, o resultado apresentado pelo KNITRO para diferentes soluções iniciais foi idêntico, tanto para as potências ótimas de cada unidade geradora quanto para a função objetivo.

## Conclusões

Com este trabalho, pôde-se verificar a eficiência da Busca Local com estratégia *Multistart Solver* utilizada pela ferramenta LINGO bem como a eficiência do Método de Ponto Interior utilizado pelo KNITRO, visto que ambas conseguiram alcançar a melhor solução quando aplicada ao PDE abordado. Podemos apontar como vantagem de ambos os métodos a não influência da solução sobre os resultados obtidos, uma vez que o LINGO não necessita de uma solução inicial para resolver o problema de otimização e o KNITRO não teve alteração em seus resultados para soluções iniciais diferentes. Desta forma, é possível concluir que ferramentas computacionais que oferecem pacotes de softwares de otimização podem ser tão eficientes quanto, ou até mais eficientes que algoritmos desenvolvidos com objetivos específicos, no caso de problemas quadráticos.

Sugere-se para trabalhos futuros, que as técnicas aqui estudadas sejam aplicadas a outros PDE's de diversos portes, bem como a problemas similares, como o problema do Fluxo de Potência Ótimo (FPO). Dessa forma, pode-se avaliar se o bom desempenho destas técnicas ocorreu apenas em um problema isolado, ou se elas possuem uma boa eficiência para PDE's em geral. Sugere-se, ainda, a utilização de outros pacotes de softwares, como o BONMIN e IPOPT, para resolver problemas semelhantes, podendo ser verificado, assim, a eficiência de ferramentas deste tipo.

Tendo em vista que a Busca Local apresentou bom desempenho para este problema abordado, pode-se esperar que técnicas similares alcancem resultados similares. Por isso, sugere-se que sejam analisadas outras técnicas, heurísticas e meta-heurísticas, similares à Busca Local, como a Busca Tabu, e o Iterated Local Search, por exemplo.

## Referências

ANDRADE, P. L. R. **Otimização na geração de grade horária escolar através de um modelo matemático e das meta-heurísticas busca local e iterated local search**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2014.

ARTELYS. **Artelys Knitro User's Manual**. Disponível em: <[https://www.artelys.com/tools/knitro\\_doc](https://www.artelys.com/tools/knitro_doc)>. Acesso em: 7 dez. 2016.

BALBO, A. R. SOUZA, M. A. S. BAPTISTA, E. C. Métodos primal-dual de pontos interiores aplicados à resolução de problemas de despacho econômico: sobre a influência da solução inicial. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, XL. 2008, João Pessoa, PB. **Anais...** João Pessoa: 2008.

BAPTISTA, E. C. BELATI, E. A. Um método primal-dual aplicado na resolução do problema de fluxo de potência ótimo. **Pesquisa Operacional**. v. 24, n. 2, p. 215-226, de 2004.

COELHO, L. S. MARIANI, V. C. Otimização de despacho econômico com ponto de válvula usando estratégia evolutiva e método quase-newton. **Learning Nonlinear Models – Revista da Sociedade Brasileira de Redes Neurais (SBRN)**, v. 4, n. 1, p. 1-12, 2006.

FERREIRA, E. C. **Uma investigação da influência do parâmetro de barreira na solução do problema de fluxo de potência ótimo**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2013.

GAMS. **GAMS Documentation Center**. Development Corporation, Washington, DC, USA. Disponível em: <<https://www.gams.com/help/index.jsp>>. Acesso em: 7 dez. 2016.

HAPP, H. H. Optimal power dispatch: comprehensive survey. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, v. 96, n. 3, p. 841-854, 1977.

KIM, J. O.; SHIN, D. J.; PARK, J. N. Singh, C. Atavistic genetic algorithm for economic dispatch with valve point effect. **Electric Power Systems Research**. v. 62, p. 201-207. 2002.

LINDO. **Lindo Systems Inc**. Disponível em: <[http://www.lindo.com/doc/online\\_help/lingo15\\_0/multi-start\\_attempts.htm](http://www.lindo.com/doc/online_help/lingo15_0/multi-start_attempts.htm)>. Acesso em 07/12/2016.

LOPES, H. S.; RODRIGUES, L. C. A.; STEINER, M. T. A. **Meta-heurísticas em Pesquisa Operacional**. 1. ed. Curitiba: Omnipax. 2013. 472 p.

LUENBERGER, D. G. et al. **Linear and nonlinear programming**. 4. ed. Stanford, California: Springer. 2015.

RODRIGUES, N. M. **Um algoritmo cultural para problemas de despacho de energia elétrica**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá. Maringá, PR, 2007.



Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional

De 2 a 5 de Maio de 2017

Unesp, Faculdade de Ciências - Bauru/SP

SAMED, M. M. A. **Um Algoritmo Genético Híbrido Co-Evolutivo para Resolver Problemas de Despacho.** Tese (Doutorado em Engenharia Química) - Universidade Estadual de Maringá. Maringá, PR, 2004.

SOUSA, V. A. BAPTISTA, E. C. COSTA, G. R. M. A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE DESPACHO ÓTIMO DE REATIVOS PELO MÉTODO DA FUNÇÃO LAGRANGIANA-BARREIRA RELAXADA. **Pesquisa Operacional.** v. 28, n. 2, p. 303-320, Maio a Agosto de 2008. ISSN 1678-5142.

STANZANI, A. L. **Método Previsor-Corretor Primal-Dual de Pontos Interiores em Problemas Multiobjetivo de Despacho Econômico e Ambiental.** Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Faculdade de Engenharia de Bauru, Universidade Estadual Paulista. Bauru, SP, 2012.

STEINBERG, M. J.; SMITH, T. H. **Economy loading of power plants and electric systems.** MacGraw-Hill, 1943.

WALTZ, R. A. et al. An interior algorithm for nonlinear optimization that combines line search and trust region steps. **Mathematical Programming**, v. 107, n. 3, p. 391-408, 2004.



## Otimização do processo de corte unidimensional com objetivo de minimizar custos de matérias-primas e utilização de máquina

*Guilherme Simões*  
Universidade do Oeste Paulista  
guii.simoes@hotmail.com

*Felipe Kesrouani Lemos*  
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”; Faculdade de Engenharia de Bauru  
felipeklemos@gmail.com

*Adriana Cristina Cheri*  
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”; Faculdade de Ciências  
adriana@fc.unesp.br

*Silvio Alexandre de Araújo*  
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”; Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas  
saraujo@ibilce.unesp.br

**Resumo:** Problemas de corte estão inseridos em contextos fabris reais e podem apresentar objetivos integrados conflitantes que não contemplem apenas a minimização do uso de matérias-primas. Neste trabalho, foi estudado um processo fabril em que múltiplas barras podem ser cortadas simultaneamente. O objetivo deste trabalho é propor um modelo de programação matemática que reflita a decisão de corte unidimensional que otimize desperdícios de matéria-prima e também ocupação do recurso produtivo. Foram feitos testes em instâncias reais e parametrizações diversas de custos relativos para explorar o comportamento do modelo. Nas instâncias testadas, foi possível obter soluções com *gaps* satisfatórios em tempos computacionais razoáveis.

**Palavras-chave:** Modelagem matemática e Aplicações. Corte e empacotamento. Otimização multi-objetivo. Utilização de máquinas

### Introdução

A estratégia de manufatura de muitas empresas se baseia em objetos de tamanhos padronizados a serem cortados em itens menores de diferentes tamanhos, de acordo com as especificações dos clientes (Arenales et al., 2006), o que gera perdas indesejáveis de material e dá origem aos problemas de corte e empacotamento. São problemas, portanto, que estudam a alocação de um conjunto de itens menores em objetos maiores obedecendo os limites destes com o intuito de otimizar seu aproveitamento (Wäscher et al., 2007). O interesse nesta área ocorre devido à sua aplicabilidade, diversidade de problemas reais e complexidade (Poltronieri et al., 2008). Tais casos são vastamente encontrados nas indústrias, dos mais variados tipos e, o gerenciamento correto deste problema pode gerar impactos significativos na economia e no espaço físico das empresas (Almeida e Steiner, 2015).

O presente trabalho refere-se ao problema de otimização de corte de itens unidimensionais em um processo com possibilidade, mas não obrigação, de execução em lotes de múltiplas barras simultaneamente. Seja  $I$  um conjunto de  $n$  itens a serem programados em uma operação de corte ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) com demanda de  $b_i$  unidades e excesso máximo de produção de  $e_i$  unidades. Seja  $K$  um conjunto ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) de possibilidades de corte de um objeto, sendo  $k$  o número de barras cortadas simultaneamente e  $m$  o máximo de barras suportado pela máquina. Cada barra possui comprimento  $L$  e custo unitário  $\theta$ .

O objetivo do problema consiste em formar lotes de produção a serem processados na máquina de corte e decidir o número de barras a serem cortadas simultaneamente. A solução deve levar em conta

a ocupação do recurso produtivo (utilização da máquina), que possui um custo fixo ao operar e, como em muitos problemas de corte, o custo de matéria-prima utilizado para atender à demanda.

A abordagem conjunta do problema de corte de estoque com outras características técnicas dos processos de produção é uma preocupação importante e recente para este tipo de problema, dada sua imersão em contextos reais com suas peculiaridades. Entre as junções que podem ser vistas na literatura ressalta-se considerações quanto a:

- i. quantidade de estoques intermediários (Yanasse, 1997; Pillegi et al., 2007), sobretudo o problema de pilhas abertas, que consiste em diminuir a dispersão das ordens produzidas e reduzir o estoque em processo;
- ii. dimensionamento de lotes (Gramani, 2006; Poldi e Araújo, 2016), que cuida do planejamento e quantificação do tamanho de ordens a serem fabricadas, equilibrando faltas e estoques nos períodos de demanda;
- iii. datas de entrega (Braga et al., 2016; Arbib e Marinelli, 2017), que trata de atrasos (*tardiness*) ou adiantamento (*earliness*) de ordens de corte com datas de entrega relacionadas a cada pedido.

A consideração de utilização de recursos produtivos pode ser encontrada no problema de minimização do número de ciclos de serra (Toscano et al., 2015). Neste caso, o objetivo é minimizar o custo total equilibrando o número de golpes para executar dados padrões de corte e o custo de matéria-prima (Mosquera e Rangel, 2007). Este problema pode ser modelados para demandas exatas (Ranck Jr et al., 2008) ou permitindo ultrapassá-la (Yanasse, 2008). Contudo, não foram encontrados abordagens que considerassem operações em que múltiplos de produção são permitidos.

O contexto de desenvolvimento deste trabalho foi a demanda de uma fábrica do setor metal-mecânico especializada na produção de peças para veículos tratorizados, posicionada no setor há mais de 60 anos. Trata-se de uma empresa com uma equipe de aproximadamente 70 colaboradores, localizada no interior do estado de São Paulo. O processo de corte estudado pode ser entendido de maneira mais ilustrativa pela Figura 1, em que é possível verificar diversos objetos sendo cortados simultaneamente.



Figura 1: Ilustração do processo de corte estudado

A contribuição deste trabalho é propor um modelo que retrata um dilema de produção real entre dois indicadores de desempenho conflitantes em um processo produtivo: a utilização de recursos de produção e o aproveitamento da matéria-prima, em uma máquina em que múltiplas unidades podem ser cortadas simultaneamente. Além de propor um modelo para a situação exposta, foi feito um estudo exploratório através de cenários dos parâmetros de custos para verificação do comportamento do modelo frente a diferentes cenários.

Este trabalho está dividido em cinco sessões, iniciando-se por esta introdução. Na segunda sessão é apresentado e explicado o modelo matemático proposto. A terceira sessão mostra os resultados computacionais obtidos, bem como a coleta de dados executada para tal. A quarta sessão discute



algumas características interessantes dos resultados obtidos. A quinta e última sessão mostra as conclusões do trabalho.

### Formulação matemática

Seja  $I$  um conjunto de  $n$  itens a serem programados em uma operação de corte ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) com demanda de  $b_i$  unidades e excesso máximo de produção de  $e_i$  unidades. Seja  $K$  um conjunto ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) de formas de cortar um objeto, sendo  $k$  o número de barras cortadas simultaneamente e  $m$  o máximo de barras suportado pela máquina. Cada barra possui comprimento  $L$  e custo unitário  $\theta$ .

Seja  $p$  um padrão de corte ( $p = 1, 2, \dots, P$ ) a ser processado pela máquina, em que  $A_{ip}$  denota a quantidade de itens  $i$  cortadas no padrão de corte  $p$ . Seja  $l_p$  o custo fixo associado ao tempo para cortar um certo padrão (proporcional ao número de itens alocados, supondo que o custo fixo da máquina está relacionado ao tempo de corte e este depende do número de golpes dados na barra).

Seja o conjunto de variáveis inteiras  $x_{pk}$ , representando o número de vezes em que é cortado o padrão de corte  $p$  com  $k$  barras simultaneamente na máquina.

Levando em conta tais parâmetros e variáveis, o seguinte modelo matemático (1)-(4) é proposto para o problema.

$$\text{Min} \quad \sum_{p=1}^P \sum_{k=1}^m x_{pk} (k \cdot \theta + l_p) \quad (1)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{p=1}^P \sum_{k=1}^m A_{ip} \cdot k \cdot x_{pk} \geq b_i \quad \forall_i \quad (2)$$

$$\sum_{p=1}^P \sum_{k=1}^m A_{ip} \cdot k \cdot x_{pk} \leq b_i + e_i \quad \forall_i \quad (3)$$

$$x_{pk} \in \mathbb{Z}^+ \quad (4)$$

A função objetivo (1) refere-se a minimização do custo total, relacionado com o consumo de matéria-prima e o tempo de máquina total utilizado no processo de corte destes materiais. A restrição (2) garante que a demanda será totalmente atendida pelos padrões de corte utilizados, enquanto (3) garante que o excesso máximo imposto não seja ultrapassado. Por fim, (4) define o domínio das variáveis de decisão.

Os padrões de corte a serem utilizados foram gerados através de um procedimento de geração de colunas (Gilmore e Gomory, 1961), levando em conta um subproblema da mochila associado, em que os itens são alocados respeitando os limites físicos da barra, conforme o modelo (5)-(7).

$$\text{Min} \quad 1 - \sum_{i=1}^n u_i a_i \quad (5)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^n u_i a_i \leq L \quad (6)$$

$$a_i \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall_i \quad (7)$$



A função objetivo (5) busca maximizar o valor dos itens escolhidos para o padrão de corte a ser definido, sendo  $u_i$  o valor dual de cada restrição do conjunto (2) do problema principal e  $a_i$  o número de vezes que o item  $i$  é alocado no padrão a ser definido. A restrição (6) limita a alocação ao tamanho da barra em questão. Em (7) o domínio da variável de decisão  $a_i$  é definido como inteiro.

## Resultados computacionais

Os dados para o modelo foram coletados em uma fábrica do setor metal-mecânico, conforme mencionado na introdução. O setor abarcado foi a usinagem de peças de reposição. Foram coletados exemplos de demandas para peças de uma determinada espessura de material, assim como os excessos de produção permitidos, relacionados com o giro de estoque destas peças.

Foram coletadas 5 instâncias distintas, cada uma representando a demanda de uma diferente espessura de barras. A Tabela 1 mostra as características destas instâncias.

Tabela 1: Características das instâncias coletadas

Instância	Barra 1"	Tubo 1.1/4"	Tubo 1.1/2"	Barra 2.1/4"	Barra 3.1/2"
Número de itens diferentes	10	26	20	18	8
Quantidade total de peças	4480	6616	9477	5594	3126
Excedentes permissível total	108	507	515	409	168
Número máximo de barras a serem cortadas simultaneamente	9	7	6	5	3

O modelo foi implementado em linguagem OPL (*Optimization Programming Language*) para o software CPLEX 12.6, sendo executado em um microcomputador com processador i7 e 8 Gb de memória RAM. O tempo de execução foi limitado a 1 minuto, dada a natureza dinâmica da programação da fábrica.

Para cada instância foram mensurados: custo total da solução, gap em relação ao limitante inferior obtido, número de barras utilizadas, número de lotes distintos formados, aproveitamento do material (percentual utilizado das barras cortadas), aproveitamento da máquina (percentual de utilização da máquina em relação ao uso com o máximo de barras possível), excesso produzido em número de peças e excesso produzido em quantidade de material.

A Tabela 2 detalha os resultados obtidos em cada instância. Todas elas foram executadas considerando o custo de cada *bin* cinco vezes maior do que o custo de um golpe da máquina (custo por item cortado em um dado padrão de corte).

Tabela 2: Resultados do modelo para as instâncias coletadas

Instância	Barra 1"	Tubo 1.1/4"	Tubo 1.1/2"	Barra 2.1/4"	Barra 3.1/2"
Custo total da solução	4026	3329	5765	2660	2055
Gap	1,3%	8,6%	3,8%	18,6%	22,1%
Barras utilizadas	698	439	811	262	186
Lotes distintos	83	74	146	59	66
Aproveitamento do material	98,40%	98,09%	97,97%	86,92%	69,19%
Aproveitamento da máquina	93,98%	85,14%	93,15%	89,83%	93,94%
Excesso em peças	8	152	91	129	30
Excesso em mm	8428	56096	32226	24060	9340

Para efeito de melhorar explorar o modelo, o exemplo mais extenso (tubos de 1.1/4”) foi executado com diferentes cenários de proporção entre custos de barra e custos de golpe da máquina. A Tabela 3 mostra tais resultados.

Tabela 3: Resultados do modelo para diferentes proporções entre o custo do material e o custo de cada golpe dado pela máquina

Custo Barra	5	5	1	1	0
Custo Golpe	0	1	1	5	5
Custo total da solução	2115	3329	1590	7275	4780
Gap	0,41%	8,62%	13,41%	6,86%	1,15%
Barras utilizadas	423	439	478	2305	6689
Lotes distintos	174	74	79	338	956
Aproveitamento do material	99,98%	98,09%	89,85%	18,38%	6,39%
Aproveitamento da máquina	35,06%	85,14%	87,34%	97,63%	100,00%
Excesso em peças	32	152	135	61	73
Excesso em mm	9900	56096	49362	14833	35655

Por fim, um último conjunto de experimentos foi executado para efeito de comparação com o paradigma vigente na indústria de que a máquina deve ser aproveitada ao máximo, sempre com o maior número de barras possíveis. O número de barras mínimo em uma dada batelada produzida foi variado, novamente utilizando o exemplo mais extenso (tubos de 1.1/4”). Como a capacidade máxima da máquina é de 7 barras, o número mínimo de barras imposto em uma batelada foi variado de 1 a 7. A Tabela 4 mostra tais resultados.

Tabela 4: Resultados do modelo para diferentes mínimos de barras simultâneos imposto

<b>k mínimo imposto</b>	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>5</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>
<b>Custo Barra</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
<b>Custo Golpe</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>5</b>
Custo total da solução		7377	7296	7275	7275	7275	7275
Gap		8,36%	7,17%	6,86%	6,86%	6,86%	6,86%
Barras utilizadas		2542	2396	2305	2305	2305	2305
Lotes distintos	Inviável	372	351	338	338	338	338
Aproveitamento do material		16,64%	17,66%	18,38%	18,38%	18,38%	18,38%
Aproveitamento da máquina		97,85%	97,72%	97,63%	97,63%	97,63%	97,63%
Excesso em peças		38	44	61	61	61	61
Excesso em mm		10339	11334	14833	14833	14833	14833

A solução inviável impondo o corte de sete barras simultaneamente (mínimo igual ao máximo) deve-se ao fato de não haver demanda múltipla de 7 para algum dos itens. Nesse caso, é impossível obter uma solução factível dentro da tolerância de excesso permitida.

## Discussão

Figura 1 explicita graficamente os resultados da Tabela 3, comparando o aproveitamento de material e a utilização da máquina em diferentes contextos de proporções entre custos. O gráfico mostra o dilema existente entre estes dois objetivos conflitantes, sobretudo ressaltado nos extremos (em que um dos dois componentes do custo é nulo).

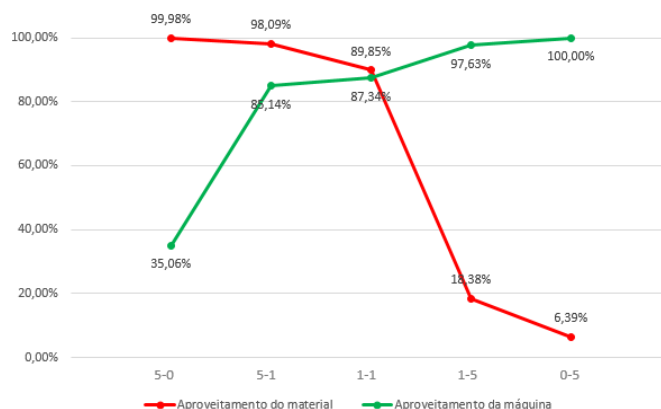


Figura 1: Gráfico comparativo dos resultados de aproveitamento de material e utilização da máquina em diferentes contextos de proporções de custos

Observa-se ainda, que, em consonância com o objetivo deste trabalho, é possível obter soluções com resultados interessantes quando existe alguma relevância em ambos custos.

A Figura 2 mostra graficamente uma comparação do custo total da solução obtida em relação ao mínimo de barras imposto para ser cortado simultaneamente pela máquina.

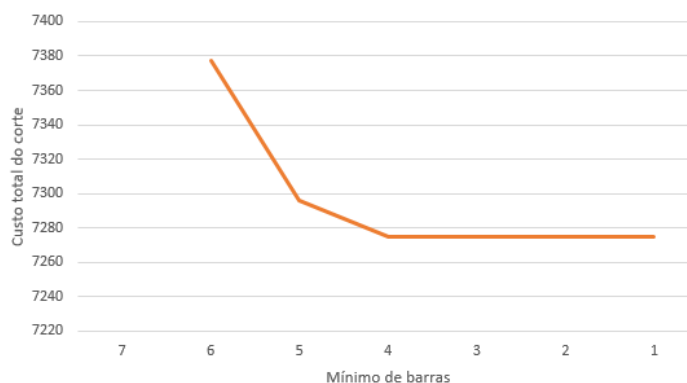


Figura 2: Gráfico comparativo dos resultados de custo total da solução em relação ao mínimo imposto de barras a serem cortadas simultaneamente

É trivial a conclusão apontada pelo gráfico, já que qualquer restrição adicionada só pode levar a uma solução igual ou pior do que sem esta. Isso fica evidenciado, ao mostrar-se que a permissão por uma pior utilização da máquina (corte apenas 4 barras ao invés de 7 em certos padrões) leva a um melhor resultado.

Embora matematicamente trivial, este resultado foi importante no diálogo de implantação da empresa, já que questiona um paradigma de que a melhor solução está sempre relacionada ao melhor aproveitamento da capacidade da máquina.

## Conclusões

O presente trabalho propõe um modelo de corte de estoque que contempla em sua função objetivo aspectos de aproveitamento dos recursos produtivos (neste caso, máquina de corte), levando em conta, portanto, seu custo fixo associado. Foi proposto um modelo baseado em geração de colunas, que difere do modelo clássico de corte de estoque basicamente por sua função objetivo.

O modelo foi submetido a 5 instâncias reais, com diferentes espessuras de materiais, tendo, assim diferentes capacidades da máquina em termos de números de barras. Além dos resultados destas instâncias, foram realizados experimentos exploratórios com a maior instância para verificar seu comportamento frente a diferentes situações dos parâmetros, sobretudo a proporção entre custos de matéria-prima e utilização da máquina e, imposições de diferentes mínimos de barras a serem cortadas simultaneamente.

Os resultados mostram *gaps* satisfatórios em tempos computacionais razoáveis. Mais do que isso, o comportamento do modelo é coerente com o esperado perante diferentes situações possíveis em contextos industriais análogos, porém com proporções de custos distintos.

Possíveis extensões para este trabalho são testes de instâncias artificiais de maior porte para verificar os limites do modelo e procedimentos na geração de colunas que levem em conta também o problema de utilização da máquina.

## Referências

- ALMEIDA, R.; STEINER, M. T. A. Gestão & Produção. **Resolução de problemas Bin Packing utilizando rede neural aumentada e Minimum Bin Slack**, v. 22, n. 3, p. 611-623, 2015.
- ARBIB, C.; MARINELLI, F. Omega. **Maximum lateness minimization in one-dimensional bin packing**, v. 68, p. 76-84, 2017.
- ARENALES, M. et al. **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.
- BRAGA, N.; ALVES, C.; MACEDO, R.; VALÉRIO DE CARVALHO, J. M. International Journal of Innovative Computing and Applications. **Combined cutting stock and scheduling: a matheuristic approach**, v. 7, n. 3, 2016.
- GRAMANI, M. C. N.; França, P. M. European Journal of Operational Research. **The combined cutting stock and lot-sizing problem in industrial processes**, v. 174, n. 1, p. 509-521, 2006.
- GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. Operations Research. **A linear programming approach to the cutting-stock problem**, v. 9, n. 6, p. 849-859, 1961.
- MOSQUERA, G. P.; RANGEL, S. Redução de ciclos da serra no problema de corte de estoque bidimensional na indústria de móveis. In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2007, Florianópolis. **Anais do XXX CNMAC**. Florianópolis, 2007.
- PILEGGI, G. C. F.; MORABITO, R.; ARENALES, M. N. Pesquisa Operacional. **Heurísticas para os problemas de geração e sequenciamento de padrões de corte bidimensionais**, v. 27, p. 549-568, 2007.



POLDI, K. C.; ARAÚJO, S. A. Annals of Operations Research. **Mathematical models and a heuristic method for the multiperiod one-dimensional cutting stock problem**, v. 238, n. 1, p. 497-520, 2016.

POLTRONIERE, S. C.; POLDI, K. C.; TOLEDO, F. M. B.; ARENALES, M. N. Annals of Operations Research. **A coupling cutting stock-lot sizing problem in the paper industry**, v. 157, n. 1, p. 91-104, 2008.

RANCK Jr., R. **Desenvolvimento de alguns métodos de solução para o problema de redução de ciclos da serra**. 2008. Dissertação (Mestrado) – INPE, São José dos Campos, 2008.

TOSCANO, A.; RANGEL, S.; YANASSE, H. H. Annals of Operations Research. **A heuristic approach to minimize the number of saw cycles in small-scale furniture factories**, in press, 2015.

WÄSCHER, G.; HAUBNER, H.; SCHUMANN, H. European Journal of Operational Research, Amsterdam. **An improved typology of cutting and packing problems**, v. 183, p. 1109-1130, 2007.

YANASSE, H. H. European Journal of Operational Research. **On a pattern sequencing problem to minimize the maximum number of open stacks**, v. 100, p. 454-463, 1997.

YANASSE, H. H. A note on the minimization of the number of cutting cycles problem. In: Simpósio de Pesquisa Operacional da Marinha, 2008, Rio de Janeiro. **Livro de Resumos do XI SPOLM**, Rio de Janeiro, 2008.

## Otimização Estocástica com recurso em dois estágios aplicada a um problema de programação linear sujeito a incertezas

*Geovana Aparecida França dos Santos*

*Universidade Estadual do Paraná – Campus Campo Mourão  
geovanaafs@gmail.com*

*Vinícius Aparecido Salatta*

*Universidade Estadual do Paraná – Campus Campo Mourão  
vi.salatta@hotmail.com*

*Solange Regina dos Santos*

*Universidade Estadual do Paraná – Campus Campo Mourão  
solaregina@gmail.com*

**Resumo:** Situações reais são frequentemente modeladas como problemas de otimização e estes, por sua vez, estão sujeitos a incertezas nos dados. Essas incertezas, em geral, decorrem de erros de medição ou até mesmo devido à falta de previsão de informações no momento desejado. Uma alternativa para lidar com tais problemas, é empregar abordagens que levem em consideração essas incertezas. Desse modo, uma metodologia que se destaca na Otimização por incorporar incertezas em sua modelagem, por meio da inclusão de variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade conhecida, é a Otimização Estocástica. Assim, buscamos nesse artigo realizar uma discussão sobre a importância de considerar as incertezas associadas a um problema de programação linear, por meio da abordagem estocástica com recurso em dois estágios.

**Palavras-chave:** Otimização. Otimização Estocástica com recurso em dois estágios. Aplicação.

### Introdução

Os problemas de otimização tentam resolver de forma eficiente situações do mundo real por meio de modelos matemáticos, comumente, associados a parâmetros incertos, como produção, demanda, custos e preços, decorrentes de erros de medição, previsão dos dados ou de caráter inerente.

Nos últimos anos vários pesquisadores têm se dedicado ao desenvolvimento de abordagens destinadas ao tratamento de problemas de otimização sob incerteza. Tais abordagens podem ser classificadas em duas categorias: estocástica e robusta. A primeira delas assume que a distribuição de probabilidade das incertezas é conhecida. Já para a segunda, informações probabilísticas não são necessárias e assume-se que as incertezas são descritas por meio de conjuntos limitados, geralmente convexos.

De acordo com Bertsimas e Sim (2004), a Otimização Robusta adota a abordagem min-max e considera como solução ótima robusta um ponto que permaneça viável para todas as possíveis realizações dos parâmetros incertos. Esta abordagem dá origem a subproblemas, denominados contraparte robusta, os quais substituem a formulação determinística do problema, levando em consideração as incertezas.

Agora, a Programação Estocástica será apresentada com maior detalhadamente por ser o foco de estudo nesse trabalho. O termo estocástico se refere aquilo cujo estado é indeterminado, com origem em eventos aleatórios, em que seu modelo possui variáveis que respondem a uma distribuição específica. Logo, segundo Bertolossi e Pagnoncelli (2006), a área de Otimização Estocástica estuda modelos e métodos que incorporam incertezas na modelagem através da inclusão de variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade conhecida. O objetivo é encontrar soluções que sejam admissíveis para todas as possíveis realizações das variáveis aleatórias que são parte da modelagem, de forma a otimizar algum funcional que depende das variáveis aleatórias. Uma importante restrição



dessa metodologia é a suposição de que a distribuição de probabilidade dos dados é conhecida e não depende da decisão tomada.

Neste estudo, como já observado, nos direcionamos a uma classe importante de problemas de otimização estocástica, os problemas de programação linear sujeito a incertezas com coeficientes aleatórios, em que são propostos os modelos de recursos em dois estágios. Em linhas gerais, conforme Alem e Morabito (2015), estes modelos permitem que se faça uma escolha inicial, dita de primeiro estágio, antes de se conhecer o valor de cada parâmetro incerto. Após o conhecimento dos valores dos mesmos, o agente de decisão faz novas escolhas, ditas de segundo estágio, que visam corrigir possíveis efeitos negativos gerados pela decisão do primeiro estágio. O objetivo de um modelo de programação estocástica de dois estágios é identificar uma solução de primeiro estágio que seja bem equilibrada, diante de todas as possíveis realizações das variáveis aleatórias.

### Otimização Estocástica

Em várias aplicações, como por exemplo Mulvey et al. (1995), é comum representar as variáveis aleatórias em algum espaço de probabilidade  $(\Omega, F, \Pi)$ , em que  $\Omega$  é o conjunto de possíveis estados da natureza (sendo que a realização genérica da variável aleatória é denotada por  $\omega$ ) equipado com uma  $\sigma$  – álgebra de eventos  $F$  e com uma medida de probabilidade  $\Pi$ . O modelo geral linear de dois estágios com recurso pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c^T x + \mathbb{E}[\min q(\omega)^T y(\omega)] \\ \text{sujeito a} & Ax = b \\ & T(\omega)x + W(\omega)y(\omega) \geq h(\omega) \\ & x, y(\omega) \geq 0. \end{array} \quad (1)$$

No modelo (1),  $c, A$  e  $b$  são parâmetros determinísticos e definem a parte determinística do vetor de custos, da matriz tecnológica e do termo independente, respectivamente. Para cada possível realização  $\omega$ ,  $q(\omega), T(\omega), W(\omega)$  e  $h(\omega)$  definem, nessa ordem, os parâmetros estocásticos referentes ao custo, à matriz tecnológica, à matriz de recursos e ao termo independente. Além disso,  $x$  é a variável de decisão de primeiro estágio e  $y(\omega)$  define a variável de decisão de segundo estágio, como função da realização  $\omega$ . Colocando todos parâmetros estocásticos juntos, obtém-se o valor aleatório  $\xi(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} (q(\omega), T(\omega), W(\omega), h(\omega))$ . O valor esperado de (1) é tomado em relação à distribuição de probabilidade de  $\xi(\omega)$ , que é supostamente conhecida com expectativa finita.

O modelo (1) pode ainda ser escrito como o seguinte modelo determinístico equivalente:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c^T x + Q(x) \\ \text{sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array} \quad (2)$$

sendo que  $Q(x) = \mathbb{E}[Q(x, \xi(\omega))]$  e o valor ótimo do problema de segundo estágio é representado da seguinte forma:

$$Q(x, \xi(\omega)) = \min_{y(\omega)} \{q(\omega)^T y(\omega) | T(\omega)x + W(\omega)y(\omega) = h(\omega), y(\omega) \geq 0\}. \quad (3)$$

A representação (2) e (3) ilustra a sequência de eventos no problema recurso. Primeiramente, são determinadas as decisões de primeiro estágio na presença de incertezas. No segundo estágio, as realizações  $\omega$  tornam-se conhecidas e as ações corretivas  $y(\omega)$  podem ser tomadas para remediar as decisões de primeiro estágio. As decisões de primeiro estágio são escolhidas, entretanto, levando em consideração seus efeitos futuros, os quais são medidos pela função recurso  $Q(x)$ .

Após estudos mais detalhados em relação aos processos estocásticos e com auxílio do software QM, analisamos aplicações de problemas clássicos de otimização estocástica disponíveis na literatura, como iremos expor a seguir.

### O Problema do Fazendeiro

Para exemplificar o significado das incertezas presentes em um problema de programação linear, vamos considerar o seguinte problema, adaptado de Bortolossi e Pagnoncelli (2008).

João é um fazendeiro que possui 500 hectares (ha) de terra disponíveis para cultivo de trigo, milho e cana-de-açúcar. Durante o inverno, ele tem que decidir quanto de terra será dedicada a cada uma das três culturas. Os dados disponíveis acerca de sua produção seguem na Tabela 1.

Tabela 1: Dados para o problema do fazendeiro.

	Trigo	Milho	Cana – de – açúcar
Rendimento médio (T/ha)	2.5	3.0	20
Custo de Produção (\$/ha)	150	230	260
Preço de venda (\$/T)	170	150	36 ( $\leq 6000$ ) 10 ( $> 6000$ )
Preço de compra (\$/T)	238	210	–
Requerimento mínimo para o gado (T)	200	240	–
Total de terra disponível: 500 há			

Para ajudar João a decidir sobre como dividir suas terras de forma a maximizar seus lucros, vamos formular um problema de otimização linear que descreve essa situação. Sendo assim, definindo as variáveis  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  hectares dedicados ao trigo, milho e cana-de-açúcar, respectivamente,  $v_1$  toneladas vendidas e  $c_1$  toneladas compradas de trigo,  $v_2$  toneladas vendidas e  $c_2$  toneladas compradas de milho,  $v_3$  toneladas de cana-de-açúcar vendidas se inferior ou igual a 6000 T,  $v_4$  toneladas de cana-de-açúcar vendidas se superior a 6000 T.

Vamos escrever este modelo como um problema de minimização ao invés de maximização. Por este motivo, vamos trocar os sinais da função objetivo. Desta forma, o modelo determinístico do problema será dado por

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238c_1 - 170v_1 + 210c_2 \\
 &&& \quad \quad \quad - 150v_2 - 36v_3 - 10v_4 \\
 &\text{sujeito a} && x_1 + x_2 + x_3 \leq 500, \\
 &&& 2.5x_1 + c_1 - v_1 \geq 200, \\
 &&& 3x_2 + c_2 - v_2 \geq 240, \\
 &&& v_3 + v_4 \leq 20x_3, \\
 &&& v_3 \leq 6000, \\
 &&& x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, v_1, v_2, v_3, v_4 \geq 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Pelo método simplex e utilizando o software QM, obtemos a solução do problema (4) apresentada na tabela a seguir.

Tabela 2: Solução ótima do problema determinístico.

	Trigo	Milho	Cana – de – açúcar
Área (ha)	120 ( $x_1$ )	80 ( $x_2$ )	300 ( $x_3$ )
Total produzido (T)	300	240	6000
Total vendido (T)	100 ( $v_1$ )	0 ( $v_2$ )	6000 ( $v_3$ )
Total comprado (T)	0 ( $c_1$ )	0 ( $c_2$ )	–
Lucro total: R\$ 118.600,00			

Logo, o problema está resolvido. Basta João dividir suas terras da forma apresentada na Tabela 2 para obter um lucro máximo de R\$ 118.600,00.

Porém, João fica desconfiado quanto a esta solução. E, se suas informações a respeito do rendimento médio fornecido por ele mesmo não forem tão precisas quanto ele pensa? E se em uma determinada época, devido ao clima, o rendimento médio sofrer uma alteração maior ou menor do que o esperado? Será que esta solução ainda seria a melhor possível?

Diante desses questionamentos, vamos supor que em uma época particularmente favorável aos cultivos de João, o rendimento tenha sido 20% maior do que ele havia fornecido na Tabela 1. Alterando estes valores e reestruturando o modelo determinístico, obtemos um novo modelo dado por

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238c_1 - 170v_1 + 210c_2 \\
 &&& \quad \quad \quad - 150v_2 - 36v_3 - 10v_4 \\
 &\text{sujeito a} && x_1 + x_2 + x_3 \leq 500, \\
 &&& 3x_1 + c_1 - v_1 \geq 200, \\
 &&& 3.6x_2 + c_2 - v_2 \geq 240, \\
 &&& v_3 + v_4 \leq 24x_3, \\
 &&& v_3 \leq 6000, \\
 &&& x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, v_1, v_2, v_3, v_4 \geq 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Agora, se em um ano desfavorável aos cultivos de João, o rendimento for 20% abaixo da média sugerido por ele na Tabela 1, o modelo que descreveria tal situação seria dado por

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238c_1 - 170v_1 + 210c_2 \\
 &&& \quad \quad \quad - 150v_2 - 36v_3 - 10v_4 \\
 &\text{sujeito a} && x_1 + x_2 + x_3 \leq 500, \\
 &&& 2 + c_1 - v_1 \geq 200, \\
 &&& 2.4x_2 + c_2 - v_2 \geq 240, \\
 &&& v_3 + v_4 \leq 16x_3, \\
 &&& v_3 \leq 6000, \\
 &&& x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, v_1, v_2, v_3, v_4 \geq 0.
 \end{aligned} \tag{6}$$

A solução para os modelos (5) e (6) é apresentadas nas Tabelas 3 e 4, respectivamente.

Tabela 3: Solução ótima para um rendimento de 20% acima da média.

	Trigo	Milho	Cana – de – açúcar
Área (ha)	183.33 ( $x_1$ )	66.67 ( $x_2$ )	250 ( $x_3$ )
Total produzido (T)	550	240	6000
Total vendido (T)	350 ( $v_1$ )	0 ( $v_2$ )	6000 ( $v_3$ )
Total comprado (T)	0 ( $c_1$ )	0 ( $c_2$ )	–
Lucro total: R\$ 167.667,00			

Tabela 4: Solução ótima para um rendimento de 20% abaixo da média.

	Trigo	Milho	Cana – de – açúcar
Área (ha)	100 ( $x_1$ )	25 ( $x_2$ )	375 ( $x_3$ )
Total produzido (T)	200	60	6000
Total vendido (T)	0 ( $v_1$ )	0 ( $v_2$ )	6000 ( $v_3$ )
Total comprado (T)	0 ( $c_1$ )	180 ( $c_2$ )	–
Lucro total: R\$ 59.950,00			

João fica preocupado com os resultados obtidos, pois uma diferença de 20% acima ou abaixo do rendimento médio nos cultivos pode fazer o seu lucro variar de R\$59.950,00 para R\$167.667,00. Quanto à cana-de-açúcar, João enfrenta o seguinte dilema: se ele reservar uma área muito grande em uma época em que o rendimento é de 20% acima da média, então João venderá uma quantidade de sua produção a um preço desfavorável devido à cota. Caso contrário, se João reserva uma área muito pequena em uma época em que o rendimento é de 20% abaixo da média, então João perde a oportunidade de vender cana-de-açúcar a um preço favorável.

A conclusão que João chega é de que não existe uma solução ótima para todos os casos. No entanto, ele se questiona sobre a possibilidade de existir uma solução satisfatória para todos os rendimentos possíveis. Para responder a esta pergunta vamos criar um modelo estocástico que supra esta necessidade.

Para isto, vamos introduzir os novos cenários 20% acima da média, na média e 20% abaixo da média, através dos parâmetros  $s = 1,2,3$ , respectivamente. As variáveis  $v$  e  $c$  terão o mesmo significado da nomenclatura do problema original, porém, desta vez elas serão indexadas por  $v_{is}$ ,  $i = 1,2,3,4$ ,  $s = 1,2,3$  e  $c_{js}$ ,  $j = 1,2$ ,  $s = 1,2,3$ . Por exemplo, a variável  $v_{33}$  é a quantidade de cana-de-açúcar vendida em uma época com o rendimento de 20% abaixo da média. Assumimos que os cenários são equiprováveis, ou seja, cada um com a possibilidade de 1/3 de ocorrer. Sendo assim, podemos escrever o modelo determinístico dado por

$$\begin{aligned}
 \text{minimizar} \quad & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 - 1/3(170v_{11} - 238c_{11} + 150v_{21} - 210c_{21} \\
 & + 36v_{31} + 10v_{41}) - 1/3(170v_{12} - 238c_{12} + 150v_{22} \\
 & - 210c_{22} + 36v_{32} + 10v_{42}) - 1/3(170v_{13} - 238c_{13} \\
 & + 150v_{23} - 210c_{23} + 36v_{33} + 10v_{43}) \\
 \text{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500, \\
 & 3x_1 + c_{11} - v_{11} \geq 200, \\
 & 2.5x_1 + c_{12} - v_{12} \geq 200, \\
 & 2x_1 + c_{13} - v_{13} \geq 200, \\
 & 3.6x_2 + c_{21} - v_{21} \geq 240, \\
 & 3x_2 + c_{22} - v_{22} \geq 240, \\
 & 2.4x_2 + c_{23} - v_{23} \geq 240, \\
 & v_{31} + v_{41} \leq 24x_3, \\
 & v_{32} + v_{42} \leq 20x_3, \\
 & v_{33} + v_{43} \leq 16x_3, \\
 & v_{31} \leq 6000, \\
 & v_{32} \leq 6000, \\
 & v_{33} \leq 6000, \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \\
 & c_{11}, c_{21}, c_{12}, c_{22}, c_{13}, c_{23} \geq 0
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$v_{11}, v_{21}, v_{31}, v_{41}, v_{12}, v_{22}, v_{32}, v_{42}, v_{13}, v_{23}, v_{33}, v_{43} \geq 0.$$

O problema (7) é chamado de *forma extensa* de um problema de otimização estocástica. As variáveis  $x$  são chamadas de variáveis de *primeiro estágio*, pois seu valor deve ser definido antes de se conhecer o clima e, conseqüentemente, o rendimento das culturas. As variáveis  $c_{js}$  e  $v_{is}$  são as variáveis de *segundo estágio*. São variáveis que são escolhidas após o conhecimento do rendimento das lavouras. Elas servem para corrigir uma possível situação de déficit nas necessidades alimentares do gado resultante da escolha  $x$  de primeiro estágio.

Como o problema (7) continua linear, ele pode ser resolvido da mesma forma que os anteriores, obtendo assim, a solução exibida na Tabela 5.

Tabela 5: Solução do problema estocástico.

		Trigo	Milho	Cana – de – açúcar
Primeiro Estágio	Área (ha)	170 ( $x_1$ )	80 ( $x_2$ )	250 ( $x_3$ )
s = 1 (acima)	Rendimento (T)	510	288	6000
	Venda (T)	310 ( $v_{11}$ )	48 ( $v_{21}$ )	6000 ( $v_{31}$ )
	Compra (T)	0 ( $c_{11}$ )	0 ( $c_{21}$ )	–
s = 2 (média)	Rendimento (T)	425	240	5000
	Venda (T)	225 ( $v_{12}$ )	0 ( $v_{22}$ )	5000 ( $v_{32}$ )
	Compra (T)	0 ( $c_{12}$ )	0 ( $c_{22}$ )	–
s = 3 (abaixo)	Rendimento (T)	340	192	4000
	Venda (T)	140 ( $v_{13}$ )	0 ( $v_{23}$ )	4000 ( $v_{33}$ )
	Compra (T)	0 ( $c_{13}$ )	48 ( $c_{23}$ )	–
Lucro total: R\$ 108.390,00				

Dessa forma, a solução  $(x_1, x_2, x_3) = (170, 80, 250)$  do problema (7) representa o melhor que se pode fazer diante dos diferentes cenários que podem ocorrer. Agora, iremos mensurar o ganho por considerarmos o problema estocástico bem como a quantidade deixada de lucrar por não conhecer com exatidão o futuro.

A importância de considerar a aleatoriedade e utilizar estratégias aproximadas é medida pelo Valor Esperado de informações Perfeitas (EVPI) e Valor da Solução Estocástica (VSS). O primeiro mede o quanto o decisor estaria disposto a pagar em troca de informações perfeitas e precisas sobre o futuro, mostrando a importância de considerar a aleatoriedade do problema ou não. Já o segundo pode ser considerado como o custo de ignorar a aleatoriedade dos parâmetros na escolha de uma decisão.

Nesse problema do Fazendeiro, supondo que fosse possível prever os acontecimentos futuros, de forma que não fosse preciso o modelo estocástico (7), pois sempre que ele anteviesse um rendimento de 20% acima da média, na média ou 20% abaixo da média, bastasse que ele utilizasse os modelos (5), (4) ou (6), respectivamente. Assim, se esperarmos um número grande de anos, o *rendimento médio sob informação perfeita* (WS) de João seria dado por

$$WS = \frac{R\$ 59.950,00 + R\$ 167.667,00 + R\$ 118.600,00}{3} = R\$ 115.406,00. \quad (8)$$

Este valor representa o rendimento médio sob informação perfeita, ou seja, quando João sabe com certeza o cenário que irá ocorrer no futuro. No entanto, sabemos que tal hipótese não é realista. Assim, ao longo de um período de, digamos, 20 anos, o melhor que João tem a fazer é utilizar o modelo estocástico cuja solução aparece na Tabela 4, no qual se obtém um lucro de R\$ 108.390,00. A

diferença entre este valor e o lucro no caso sob informação perfeita encontrada em (8) é chamado de *valor esperado de informação perfeita*, ou EVPI:

$$EVPI = R\$ 115.406,00 - R\$ 108.390,00 = R\$ 7.016,00. \quad (9)$$

Outro conceito importante é o *valor da solução estocástica* (VSS). Para encontrar este valor, vamos imaginar que João, mesmo sabendo que possíveis variações no rendimento podem ocorrer, insiste em dividir as terras de acordo com os valores encontrado na Tabela 2. O lucro obtido com esta decisão é chamado de *solução do valor esperado*, ou EEV.

Para calcular este valor, vamos fixar as distribuições de terras no modelo determinístico (4), tomando  $x_1 = 120$ ,  $x_2 = 80$  e  $x_3 = 300$  e os rendimentos iguais a 3, 3.6 e 24 (para o cenário com 20% acima da média) e depois 2, 2.4 e 16 (para o cenário com 20% abaixo da média). O modelo obtido para a primeira situação é dado por

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & 238c_1 - 170v_1 + 210c_2 - 150v_2 - 36v_3 - 10v_4 + 114.400 \\ \text{sujeito a} \quad & v_1 - c_1 \leq 160, \\ & v_2 - c_2 \leq 48, \\ & v_3 + v_4 \leq 7200, \\ & v_3 \leq 6000, \\ & c_1, c_2, v_1, v_2, v_3, v_4 \geq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

e o modelo encontrado para a segunda situação é dada por

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & 238c_1 - 170v_1 + 210c_2 - 150v_2 - 36v_3 - 10v_4 + 114.400 \\ \text{sujeito a} \quad & v_1 - c_1 \leq 40, \\ & c_2 - v_2 \geq 48, \\ & v_3 + v_4 \leq 4800, \\ & v_3 \leq 6000, \\ & c_1, c_2, v_1, v_2, v_3, v_4 \geq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

cujas soluções aparecem nas Tabelas 6 e 7, respectivamente

Tabela 6: solução ótima do problema 10.

	Trigo	Milho	Cana – de – açúcar
Área (ha)	120 ( $x_1$ )	80 ( $x_2$ )	300 ( $x_3$ )
Total produzido (T)	360	288	7200
Total vendido (T)	160 ( $v_1$ )	48 ( $v_2$ )	6000 ( $v_3$ ) + 1200 ( $v_4$ )
Total comprado (T)	0 ( $c_1$ )	0 ( $c_2$ )	–
Lucro total: R\$ 148.000,00			

Tabela 7: Solução ótima do problema 11.

	Trigo	Milho	Cana – de – açúcar
Área (ha)	120 ( $x_1$ )	80 ( $x_2$ )	300 ( $x_3$ )
Total produzido (T)	240	192	4800
Total vendido (T)	40 ( $v_1$ )	0 ( $v_2$ )	4800 ( $v_3$ )
Total comprado (T)	0 ( $c_1$ )	48 ( $c_2$ )	–
Lucro total: R\$ 55.120,00			



Lembrando que a solução é R\$ 118.600,00 para o caso de rendimentos médios e R\$ 108.390,00 no caso estocástico, o EEV e o VSS serão dados por

$$EEV = \frac{R\$ 55.120,00 + R\$ 118.600,00 + R\$ 148.000,00}{3} = R\$ 107.240,00 \quad (12)$$

$$VSS = R\$ 108.390,00 - R\$ 107.240,00 = R\$ 1.150,00.$$

Assim, concluímos ser essencial o modelo estocástico nesse problema, pois quando os valores do EVPI são elevados, como nesse caso  $EVPI = R\$ 7.016,00$ , indicam a necessidade de resolver tal modelo, confirmando essa necessidade pelo resultado do VSS, já que nos fornece o quanto estamos ganhando em considerar o modelo estocástico, ao invés de simplesmente supor que os rendimentos das culturas são dados pelos rendimentos médios.

### Conclusões

Por fim, em relação ao método de otimização estocástica, através do problema exemplificado, mostrou ser flexível na configuração do plano de produção, pois permitem modelar as variáveis aleatórias de forma bastante natural com a utilização de cenários que podem ser gerados com diferentes estruturas e distribuições de probabilidade. Também, a possibilidade de utilizar as variáveis de decisão de segundo estágio se apresentou uma estratégia interessante, visto que tais variáveis podem ser utilizadas para se remediar dos parâmetros estocásticos, ajustando e corrigindo decisões do primeiro estágio tomadas antes da realização das variáveis aleatórias.

Em linhas gerais, a otimização estocástica em dois estágios permite que se faça uma escolha inicial, dita de primeiro estágio, antes de se conhecer o valor de cada parâmetro incerto. Após o conhecimento dos valores dos mesmos, o agente de decisão faz novas escolhas, ditas de segundo estágio, que visam corrigir possíveis efeitos negativos gerados pela decisão do primeiro estágio. Além disso, essa abordagem é considerada uma metodologia muito rica, por empregar conceitos e resultados de diversas áreas como, programação linear, probabilidade e estatística.

### Agradecimentos

Agradecemos às seguintes instituições, sem as quais o presente trabalho não teria sido possível: a Fundação Araucária e a PRPPG/UNESPAR pelo incentivo ao desenvolvimento deste trabalho e o apoio financeiro concedido.

### Referências

- ALEM, D.; MORABITO, R. Gestão da Produção. **Planejamento da produção sob incerteza: programação estocástica versus otimização robusta**. v. 22, n. 3, p. 539-551, 2015.
- BERTSIMAS, D.; SIM, M. Operations Research. **The price of robustness**. v. 52, n. 1, p. 35-53, 2004.
- BORTOLOSSI, H. J.; PAGNONCELLI, B. K. **Uma introdução à otimização sob incerteza**. In: III Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Universidade Federal de Goiás. 6 a 10 de novembro de 2006.
- MULVEY, J. M.; VANDERBEI, R. J.; ZENIOS, S. A. Operations Research. **Robust optimization of large-scale systems**. 43, 264–281, 1995.

## Otimização Estocástica por meio de um problema de programação linear com coeficientes aleatórios

*Vinícius Aparecido Salatta*

*UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ; Campus de Campo Mourão  
vi.salatta@hotmail.com*

*Geovana Aparecida França*

*UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ; Campus de Campo Mourão  
geovanaafs@gmail.com*

*Solange Regina dos Santos*

*UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ; Campus de Campo Mourão  
solaregina@gmail.com*

**Resumo:** Problemas de programação linear estão comumente sujeitos a incertezas em seus dados devido a erros de medição ou previsão. No entanto, tais problemas são normalmente tratados de forma determinística, ou seja, sem levar em consideração as incertezas nos dados, o que pode gerar um resultado não muito prático dependendo do contexto no qual se insere. Por este motivo, destacamos nesse artigo uma das áreas da Otimização que busca levar em consideração tais incertezas na formulação dos problemas, chamada Otimização Estocástica. Nessa formulação, o modelo necessita de um conhecimento prévio de informações probabilísticas dos parâmetros de incerteza. Sendo assim, buscamos realizar nesse trabalho um estudo de otimização sujeito a incertezas através da Otimização Estocástica, além de discutir a importância de se considerar as incertezas em um problema de programação linear. Para exemplificar tais discussões, utilizamos um problema da literatura que é resolvido por meio da abordagem estocástica.

**Palavras-chave:** Otimização. Otimização estocástica. Programação linear sujeito à incerteza. Aplicação.

### Introdução

A busca pelo valor ótimo no contexto da programação linear surge frequentemente em problemas que envolvem uma tomada de decisão (por exemplo, uma empresa que deseja determinar a quantidade de um certo produto a ser produzido, de modo a maximizar seu lucro em um determinado mês), ao mesmo tempo em que atende toda a demanda, mão-de-obra disponível, matéria prima, etc. O modelo deste problema é caracterizado por maximizar uma função linear, sujeita a uma ou mais restrições que também são equações ou inequações lineares. Problemas como este geralmente são tratados de forma determinística, ou seja, sem considerar possíveis incertezas em seus dados, o que pode levar a resultados não muito práticos dependendo do contexto em que se insere. Por este motivo, destacamos duas principais abordagens que buscam trabalhar com tais problemas de otimização levando em consideração suas incertezas: a Otimização Robusta e a Otimização Estocástica. O primeiro a desenvolver um estudo a cerca da Otimização Robusta foi Soyster (1973), o qual assume que os parâmetros de incerteza nesta abordagem estão variando dentro de um conjunto limitado, geralmente convexo. Já a segunda abordagem incorpora incertezas na modelagem através de variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade conhecida (BORTOLOSSI; PAGNONCELLI, 2008).

Uma das classes importantes da Otimização Estocástica é a de *modelos de recurso em dois estágios*. Segundo Bortolossi e Pagnoncelli (2008), estes modelos permitem que se faça uma escolha inicial (chamada de primeiro estágio) antes de se conhecer o valor dos parâmetros incertos. Ainda segundo estes autores, após o conhecimento dos valores dos mesmos, o agente de decisão faz novas escolhas (chamadas de segundo estágio) que visam corrigir possíveis efeitos negativos gerados pela

decisão de primeiro estágio. Portanto, o objetivo da Otimização Estocástica, é encontrar uma solução ótima dentro de todos os possíveis valores que os parâmetros aleatórios possam assumir. Isto implica que, ao invés de fixar vários cenários possíveis e resolver todos os problemas correspondentes para estes cenários, todos os cenários são incorporados em um único problema. Além desta vantagem, é possível também determinar o quanto vale a pena considerar o modelo estocástico do problema através do Valor Esperado sob Informação Perfeita (EVPI) e do Valor da Solução Estocástica (VSS). Os dois termos são denominados *indicadores de qualidade*, e ajudam muito na análise da estocacidade do problema.

Deste modo, o objetivo deste artigo é discutir esta abordagem estocástica, bem como aplica-la através de um problema bem conhecido na literatura como “o problema do jornaleiro”, cujos detalhes podem ser encontrados em Bortolossi e Pagnoncelli (2008). Assim, através dos resultados, poderemos analisar seus indicadores de qualidade de modo a investigar os ganhos (ou perdas) em se considerar o modelo estocástico atribuído ao problema, ao invés de simplesmente usarmos o modelo determinístico ou aproximações determinísticas.

Para isto, este trabalho está dividido em cinco seções. Na primeira seção apresentamos o problema do jornaleiro e formulamos seu modelo estocástico, de modo que na segunda seção resolvemos o problema utilizando alguns conceitos básicos de estatística, cálculo e álgebra linear. Na seção seguinte valores numéricos são atribuídos as variáveis do problema, a fim de possibilitar uma análise numérica dos indicadores de qualidade (EVPI e VSS). Por fim, na última seção fazemos as considerações finais do presente trabalho.

## O problema do jornaleiro

José é jornaleiro, e toda manhã vai ao editor da cidade comprar uma quantidade  $x$  de jornais por um preço  $c$  por unidade. Como José não possui muito dinheiro, a quantidade de jornais que José pode comprar é limitada em um intervalo de 0 a  $u$ . Ele vende seus jornais a um preço  $q$  por unidade, além de possuir um acordo com o editor: os jornais que não forem vendidos podem ser devolvidos ao editor, o qual pagará um preço  $r < c$  por unidade.

José possui uma incerteza em sua demanda diária e enfrenta um dilema: se ele comprar um número  $x$  de jornais e a demanda for maior, ele perderá a oportunidade de vender mais jornais por um preço  $c$ . Porém, se ele comprar uma certa quantidade de jornais e a demanda for menor que esta quantidade, José terá um prejuízo em suas vendas. Portanto, vamos supor que a demanda  $\omega$  é uma variável aleatória não-negativa com função densidade  $f$  e função de distribuição  $F$ , que  $y$  é o número de jornais efetivamente vendidos e que  $b$  é o número de jornais possivelmente devolvidos ao editor. Sendo assim, a formulação do problema do jornaleiro é

$$\min_{0 \leq x \leq u} \{cx + Q(x)\} \quad (1)$$

em que

$$Q(x) = \mathbb{E}_{\omega}[Q(x, \omega)] \quad (2)$$

e

$$Q(x, \omega) = \begin{array}{ll} \text{minimizar} & -q y(\omega) - r b(\omega) \\ \text{sujeito a} & y(\omega) \leq \omega \\ & y(\omega) + b(\omega) \leq x \\ & y(\omega), b(\omega) \geq 0 \end{array} \quad (3)$$

em que  $\mathbb{E}_\omega$  representa a esperança com respeito a demanda  $\omega$ .

Na equação (1),  $cx$  é o custo de José ao comprar os jornais e, para a quantidade  $x$  de jornais comprados, a função  $-Q(x)$  representa o lucro esperado calculado sobre todos os valores possíveis de  $\omega$ , conforme equação (2). Sendo assim, a função  $Q(x, \omega)$  pode ser calculada por meio da resolução de um problema de minimização, dado em (3). Nesse problema, a função objetivo fornece o quanto José ganha ao vender os jornais tanto para a demanda  $\omega$  quanto aos jornais devolvidos ao editor a um preço  $q$  e  $r$ , respectivamente. Note que este problema foi padronizado para um problema de minimização ao invés de maximização e, por este motivo, invertemos os sinais da função objetivo. A primeira restrição do problema nos mostra que os jornais vendidos precisam ser no máximo igual a demanda, enquanto a segunda restrição é a soma dos jornais vendidos e devolvidos, os quais precisam ser no máximo igual ao total de jornais comprados.

O problema do jornaleiro se baseia em dois estágios. No primeiro estágio José precisa decidir quantos jornais irá comprar através da variável  $x$ . Após esta decisão, ele irá vender os jornais para uma demanda  $\omega$ . As variáveis de segundo estágio são a quantidade de jornais que ele vendeu ( $y(\omega)$ ), e a quantidade de jornais devolvida ao editor ( $b(\omega)$ ). O que José busca é determinar a quantidade exata de jornais que irá comprar de forma a maximizar o lucro esperado sob incerteza de demanda. O que podemos analisar inicialmente é que, se José soubesse com exatidão a demanda, ele simplesmente compraria  $\omega$  jornais e obteria o lucro máximo. Porém, como não é possível escolher um valor  $x$  que maximize seu lucro para todos os possíveis valores de demanda  $\omega$ , José procura uma escolha que, em média, lhe dê o melhor lucro.

## Resolvendo o problema

Primeiramente precisamos encontrar a solução de segundo estágio, a qual é felizmente imediata: se a demanda  $\omega$  for menor do que o número de jornais comprados, então  $y^*(\omega) = \omega$ . Se for maior, então  $y^*(\omega) = x$ . Para encontrar o valor de  $b^*(\omega)$ , basta notar que a devolução de jornais ao editor só ocorre se a demanda for menor do que o número de jornais comprados. Assim:

$$\begin{aligned} y^*(\omega) &= \min \{\omega, x\} \\ b^*(\omega) &= \max \{x - \omega, 0\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Desta forma, podemos reescrever a formulação (2) da seguinte forma

$$Q(x) = \mathbb{E}_\omega[-q \min\{\omega, x\} - r \max\{x - \omega, 0\}]. \quad (5)$$

Logo, se desejamos encontrar uma solução ótima para este problema de otimização, podemos utilizar o método da derivada primeira da função  $Q(x)$  e analisarmos o seu sinal, buscando uma solução em seus extremos, ou em seus pontos críticos. Para isto, lembramos que a função analisada está limitada no intervalo de  $[0, u]$ . A fim de definir melhor a função  $Q(x)$ , precisamos definir um dos conceitos utilizados para se calcular a esperança de uma função contínua com variável aleatória.

**Definição 1:** Seja  $g$  uma função contínua e  $X$  uma variável aleatória contínua com função densidade  $f$ . Então

$$\mathbb{E}[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx,$$

caso a integral exista.

Assim, considerando a equação (2) e a definição (4), podemos dizer que

$$\mathbb{E}[g(t)] = \int_{-\infty}^x g(t)f(t)dt + \int_x^{+\infty} g(t)f(t)dt. \quad (6)$$

Sabendo que a variável  $\omega$  é incerta e que  $x$  é fixo, caso  $\omega < x$ , pela equação (5) teremos que  $Q(x) = \mathbb{E}_\omega[-q\omega - r(x - \omega)]$ . Porém, caso  $\omega > x$ , teremos que  $Q(x) = \mathbb{E}_\omega[-qx]$ . Sendo assim, substituindo estes valores na equação (6), segue que

$$Q(x) = \mathbb{E}_\omega[Q(\omega, x)] = \int_{-\infty}^x (-qt - r(x - t))f(t)dt + \int_x^{+\infty} (-qx)f(t)dt. \quad (7)$$

Resolvendo a equação (7)

$$\begin{aligned} Q(x) &= \int_{-\infty}^x -qtf(t) - r(x - t)f(t)dt + \int_x^{+\infty} (-qx)f(t)dt \\ &= -q \int_{-\infty}^x tf(t) - rx \int_{-\infty}^x f(t)dt + r \int_{-\infty}^x tf(t)dt - qx \int_x^{+\infty} f(t)dt \\ &= -(q - r) \int_{-\infty}^x tf(t)dt - rx \int_{-\infty}^x f(t)dt - qx \int_x^{+\infty} f(t)dt \\ &= -(q - r) \int_{-\infty}^x tf(t)dt - rxF(x) - qx(1 - F(x)) \\ &= -qx + qx F(x) - rx F(x) - (q - r) \int_{-\infty}^x tf(t)dt \\ &= -qx + (q - r)x F(x) - (q - r) \int_{-\infty}^x tf(t)dt \\ &= -qx + (q - r) \left[ x F(x) - \int_{-\infty}^x tf(t)dt \right] \\ &= -qx + (q - r) \int_{-\infty}^x F(t)dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Assim, temos que  $Q'(x) = -q + (q - r)F(x)$ , de modo que as soluções possíveis são dadas na Tabela 1.

Tabela 1: Soluções possíveis para  $Q'(x)$ .

a) Extremos do intervalo $[0, u]$		b) Ponto Crítico: $Q'(x) = 0$
$i) c + Q'(0) > 0$	$ii) c + Q'(u) < 0$	$c + [-q + (q - r)F(x)] = 0$
$c + [-q + (q - r)F(0)] > 0$	$c + [-q + (q - r)F(u)] < 0$	$F(x) = \frac{q - c}{q - r}$
$F(0) > \frac{q - c}{q - r}$	$F(u) < \frac{q - c}{q - r}$	$\therefore x^* = F^{-1}\left(\frac{q - c}{q - r}\right)$
$\therefore x^* = 0$	$\therefore x^* = u$	

Resumindo,

$$\begin{cases} x^* = 0, & \text{se } F(0) > \frac{q-c}{q-r} \\ x^* = u, & \text{se } F(u) < \frac{q-c}{q-r} \\ x^* = F^{-1}\left(\frac{q-c}{q-r}\right), & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (9)$$

### Um exemplo numérico

Suponha que o custo por jornal para o jornaleiro seja  $c = 10$ , que o preço de venda seja  $q = 25$ , que o preço de devolução ao editor seja  $r = 5$  por jornal, e que o poder de compra seja  $u = 150$ . Além disso, considere que a demanda  $\omega$  é dada por uma variável aleatória uniforme contínua definida no intervalo  $[50,150]$ . Por definição, uma variável aleatória uniforme possui função densidade de probabilidade dada por

$$f(x|a,b) = \frac{1}{b-a}, a \leq x \leq b \quad (10)$$

com esperança  $E[X] = (a+b)/2$  e variância  $\sigma^2(X) = (b-a)^2/12$ . Logo, integrando-se a densidade de  $\omega$ , obtemos a função de distribuição da demanda:

$$F(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega-50}{100}, & \text{se } 50 \leq x \leq 150 \\ 1, & \text{se } x > 150 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (11)$$

A inversa dessa função é  $F^{-1}(y) = 100y + 50$  no intervalo  $[50,150]$ . Usando (9), temos que a solução do problema é  $x^* = F^{-1}(3/4) = 125$ . Assim, utilizando a formulação (1) e a equação (8), podemos dizer que o lucro esperado para este valor é

$$\begin{aligned} E_{\omega}[cx + Q(x, \omega)] &= cx - qx + (q-r) \int_{50}^x \frac{\omega-50}{100} d\omega \\ E_{\omega}[10 \cdot 125 + Q(125, \omega)] &= 1250 - 3125 + 20 \int_{50}^{125} \frac{\omega-50}{100} d\omega \\ &= -1875 + \frac{1}{5} \left[ \frac{\omega^2}{2} - 50\omega \right]_{50}^{125} \\ &= -1875 + \frac{1}{5} \left[ \left( \frac{125^2}{2} - 50 \cdot 125 \right) - \left( \frac{50^2}{2} - 50 \cdot 50 \right) \right] \\ &= -1875 + \frac{1}{5} \left( \frac{3125}{2} + 1250 \right) = -1312,5. \end{aligned} \quad (12)$$

Portanto, José teria que comprar 125 jornais todos os dias para obter um lucro esperado de R\$ 1312,50. Vamos atribuir ao valor encontrado na equação (12) o nome de Valor do Problema Estocástico, ou RP (*Recourse Problem* - RP), por motivos que serão explicados em seguida.



## Indicadores de qualidade: EVPI e VSS

Existem alguns conceitos referentes a Otimização Estocástica que servem de apoio para a compreensão e estudo dos resultados obtidos na seção anterior. Um deles é o Valor Esperado sob Informação Perfeita (*Expected Value of Perfect information* - EVPI), o qual é obtido pela diferença entre o Valor do Problema Estocástico (*Recourse Problem* - RP) e o valor esperado das soluções (*Wait and See* - WS). Assim

$$EVPI = RP - WS.$$

Segundo Birge e Louveaux (1997), o EVPI mede o quanto o agente de decisão estaria disposto a pagar para se obter informação perfeita e precisa sobre o futuro. Sendo assim, nesta aplicação, o EVPI refere-se a quanto José estaria disposto a pagar para se obter com precisão o valor da demanda  $\omega$ . Para Kall e Wallace (1994), o EVPI também representa quanto se esperaria ganhar se fosse possível determinar de antemão o valor das variáveis aleatórias. Ainda, de acordo com estes autores, o EVPI é importante, porque mostra se é importante considerar a aleatoriedade do problema, pois não necessariamente um valor alto para o EVPI possa indicar a necessidade de se resolver o problema estocástico. Porém, quando o EVPI é baixo, temos uma indicação de que não é tão importante considerar a aleatoriedade do problema e, portanto, aproximações podem funcionar bem.

O RP representa o valor do problema estocástico, o qual foi encontrado na seção anterior. Já o WS representa o valor ótimo do problema para cada cenário, o qual neste caso está definido no intervalo de [50,150].

Como o valor de RP já foi calculado, basta encontrar o valor de WS. Para isto, precisamos lembrar que o valor de  $\omega$  está definido no intervalo [50,150]. Assim, como o EVPI supõe que o valor do coeficiente aleatório é conhecido, para um determinado valor  $\omega$ , a solução é obviamente  $x^* = \omega$ . Logo,

$$WS = \mathbb{E}_{\omega}[c\omega - q\omega] = \mathbb{E}_{\omega}[-15\omega] = -15\mathbb{E}_{\omega}[\omega] = -15 \cdot \frac{50 + 150}{2} = -R\$ 1500,00.$$

O valor da esperança de  $\omega$  foi calculado lembrando que  $E[X] = (a + b)/2$ . Por fim, o valor do EVPI será dado por

$$EVPI = -R\$ 1312,50 + R\$ 1500,00 = R\$ 187,50.$$

Outro valor importante em se considerar na Otimização Estocástica é o Valor da Solução Estocástica (*Value of Stochastic Solution* - VSS), o qual é obtido pela diferença entre a Solução do Valor Esperado (*Expectation of the Expected Solution* - EEV) e o RP. Assim,

$$VSS = EEV - RP.$$

Neste mesmo sentido, o VSS mede o quanto estamos ganhando ao considerar o modelo estocástico. Deste modo, de acordo com Birge e Louveaux (1997), o VSS pode ser considerado como o custo de ignorar a aleatoriedade dos parâmetros na escolha de uma decisão. Neste caso, seu cálculo supõe que, em vez de resolver o problema estocástico (1) a (3), o decisor prefira resolver um problema de Valor Esperado (*Expected Value* - EV), que consiste em substituir todas as variáveis aleatórias do problema estocástico pelos respectivos valores esperados. Sendo assim, temos que o VSS auxilia na

comparação entre o problema estocástico e estratégias determinísticas aproximadas. Logo, quanto maior o valor do VSS, maior é o ganho em se considerar o problema estocástico em detrimento da estratégia aproximada adotada. De forma similar, se o valor for muito baixo (menor do que a definida pelo decisor), o ganho em se considerar o problema estocástico em vez do problema EV é desprezível e, portanto, pode-se utilizar a estratégia aproximada do valor esperado.

Para se encontrar o valor de EEV, inicialmente calcula-se a solução ótima do problema para  $\omega = 100$ , ou seja, com demanda constante igual a média de  $\omega$ . Em seguida, o valor de  $x^*$  encontrado é substituído na equação (12) para se obter um novo lucro ótimo. Novamente, como o valor de RP já foi obtido, vamos calcular o valor de EEV. Para isto, vamos inicialmente encontrar o valor ótimo para  $\omega = 100$ , a qual é obtido facilmente, uma vez que conhecendo-se o valor de  $\omega$  basta comprar  $x^* = 100$  jornais para maximizar o lucro. O próximo passo é usar o valor de  $x^*$  na equação (12). A solução após os cálculos será  $-R\$ 1250,00$ . Deste modo

$$VSS = -R\$ 1250,00 + R\$ 1312,50 = R\$ 187,50.$$

Supondo que o jornaleiro definisse um valor para tolerância acima do resultado obtido, poderíamos dizer que o modelo estocástico não era tão importante em ser considerado em vez de outras estratégias aproximadas.

### Considerações finais

A partir do trabalho desenvolvido, conseguimos notar a aplicabilidade do modelo estocástico na resolução de um problema de programação linear sujeito à incerteza por meio da análise do problema do fazendeiro. Tal aplicabilidade pode ser constatada pelos indicadores de qualidade (EVPI e VSS), os quais facilitam a análise da solução de um problema estocástico. Conforme mencionado no artigo, o EVPI mede o quanto estamos dispostos a pagar para se obter informação perfeita, e o VSS informa o quanto ganhamos (ou perdemos) ao considerarmos o modelo estocástico (ou não) ao invés de se basear simplesmente em modelos determinísticos aproximados.

### Agradecimentos

Agradecemos à Fundação Araucária e a UNESPAR pelo incentivo ao desenvolvimento deste trabalho e o apoio financeiro concedido.

### Referências

BIRGE, J. R.; LOUVEAUX, F. **Introduction to stochastic programming**. Springer Science & Business Media, 2011.

BORTOLOSSI, H. J; PAGNONCELLI, B.K. Uma introdução à Otimização sob Incerteza. In: III BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, Universidade Federal de Goiás, Brasil, 2006.

KALI, P.; WALLACE, S. W. **Stochastic programming**. New York: Springer, 1994.

SOYSTER, A. L. Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Operations Research*, v.14, p.1154-1151, 1973.



## Pares de Galois e uma adjunção motivada pelas traduções entre lógicas

*Hércules de Araujo Feitosa*  
Unesp; Faculdade de Ciências  
haf@fc.unesp.br

*Cristiane Alexandra Lázaro*  
Unesp; Faculdade de Ciências  
cristiane@fc.unesp.br

*Mauri Cunha do Nascimento*  
Unesp; Faculdade de Ciências  
mauri@fc.unesp.br

**Resumo:** Cada conexão de Galois é um par de funções definidas entre duas estruturas de ordem, com sentidos inversos, motivada pelas funções da Teoria de Galois. Porém, quando olhamos para a definição de conexão de Galois, podemos fazer quatro permutações simples, o que nos geram outros pares de funções, que mantêm alguma semelhança com a definição de conexão. Apresentamos cada uma destas variações que dão origem a distintos pares de funções, as quais chamamos no coletivo de pares de Galois. Um particular par de Galois é a adjunção. Como elemento original, mostramos como uma definição bastante geral de tradução entre lógicas gera, para cada caso, um exemplo de adjunção.

**Palavras-chave:** Matemática Discreta. Conexões de Galois. Pares de Galois. Traduções entre Lógicas.

### Introdução

Iniciamos com algumas noções algébricas que nos permitem a definição de conexão de Galois. A partir deste conceito, expandimos para os pares de Galois.

Mostramos algumas relações e resultados sobre estes conceitos.

Como um resultado original, na última seção, introduzimos uma adjunção de Galois que é motivada pela definição conjuntista de tradução entre lógicas.

### Conexões de Galois

Pares de funções de Galois surgem em muitos tópicos da Matemática. Apresentamos uma definição bastante usual de conexões de Galois sobre estruturas de ordem.

**Definição 1** Seja  $f : (A, \leq_A) \rightarrow (P, \leq_P)$  uma função entre dois conjuntos parcialmente ordenados. Então:

(i) a função  $f$  preserva as ordens se  $a \leq_A b \Rightarrow f(a) \leq_P f(b)$

(ii) a função  $f$  inverte as ordens se  $a \leq_A b \Rightarrow f(b) \leq_P f(a)$ .

No contexto da análise, usualmente estas funções são chamadas de crescente e decrescente, respectivamente, mas é menos usual esta denominação nos contextos das Conexões de Galois. Outras vezes são chamadas de isótonas e antitonas. A primeira também ocorre com o nome de monótona.

**Definição 2** Se  $f : (A, \leq_A) \rightarrow (A, \leq_A)$ , então:

(i) a função  $f$  é idempotente se  $f \circ f = f$

(ii) a função  $f$  é extensiva ou inflacionária se para todo  $a \in A$ ,  $a \leq f(a)$

(iii) a função  $f$  é deflacionária se para todo  $a \in A$ ,  $f(a) \leq a$ .

**Definição 3** Se  $f : (A, \leq_A) \rightarrow (A, \leq_A)$ , então:

(i) a função  $f$  é um operador de Tarski (operador do fecho dedutivo) se  $f$  é extensiva (ou inflacionária), preserva ordens e é idempotente.

(ii) a função  $f$  é um operador de interior se  $f$  é deflacionária, preserva ordens e é idempotente.

**Definição 4** Dados dois conjuntos parcialmente ordenados  $(A, \leq_A)$  e  $(P, \leq_P)$  e as funções  $f : A \rightarrow P$  e  $g : P \rightarrow A$ , então o par  $(f, g)$  é uma conexão de Galois se, para todo  $a \in A$  e todo  $p \in P$ , temos que:

$$a \leq_A g(p) \iff p \leq_P f(a).$$

Segue desta definição que se  $(f, g)$  é uma conexão de Galois para as ordens parciais  $(A, \leq_A)$  e  $(P, \leq_P)$ , então o par  $(g, f)$  é uma conexão de Galois para as ordens parciais  $(P, \leq_P)$  e  $(A, \leq_A)$ .

**Exemplo 5** Para  $A = P = \mathbb{Z}$ , com a ordem natural dos inteiros, tomando-se a função  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , definida por  $f(x) = -x$  e  $g = f$ , então  $(f, g)$  é uma conexão de Galois para  $(\mathbb{Z}, \leq)$ , pois  $a \leq g(p) \iff a \leq -p \iff p \leq -a \iff p \leq f(a)$ .

**Exemplo 6** Para  $A = P = \mathcal{P}(M)$ , o conjunto das partes de um conjunto  $M$ , com a ordem dada pela inclusão de conjuntos, para  $f = g$  a função complementar, isto é,  $f(X) = X^C$ , temos que  $(f, g)$  é uma conexão de Galois.

## Pares de Galois

Como vimos na seção anterior, conexão de Galois é um par de funções definidas entre duas estruturas de ordem, com sentidos inversos, motivadas pelas funções da Teoria de Galois.

Na teoria contemporânea de Galois, as duas funções  $(f, g)$  conectam a estrutura dada pelos corpos intermediários de uma extensão de corpos  $K \subseteq L$  com os subgrupos do grupo de automorfismos de  $L$  que fixam o subcorpo  $K$ .

Contudo, quando olhamos para a definição de conexão de Galois, podemos fazer quatro permutações simples, o que nos geram outros pares de funções, que mantêm alguma semelhança com a definição de conexão.

Agora, apresentamos cada uma destas variações que dão origem a distintos pares de funções, as quais chamamos no coletivo de pares de Galois.

**Definição 7** Se  $(A, \leq_A)$  e  $(P, \leq_P)$  são conjuntos parcialmente ordenados,  $a \in A$  e  $p \in P$  são elementos quaisquer e  $f : A \rightarrow P$  e  $g : P \rightarrow A$  são funções, então:

(i) o par  $(f, g)$  é uma conexão de Galois se:  $a \leq_A g(p) \iff p \leq_P f(a)$

(ii) o par  $(f, g)^d$  é uma conexão dual de Galois se:  $g(p) \leq_A a \iff f(a) \leq_P p$

(iii) o par  $[f, g]$  é uma adjunção se:  $a \leq_A g(p) \iff f(a) \leq_P p$

(iv) o par  $[f, g]^d$  é uma adjunção dual se:  $g(p) \leq_A a \iff p \leq_P f(a)$ .

O nome adjunção vem da teoria das categorias. Em muitos textos sobre o tema, o par  $[f, g]$  também é chamado de residuado.

Como no caso de conexões de Galois, a seguir enunciamos uma proposição que nos dá condições para termos uma adjunção.

**Proposição 8** *Sejam  $(A, \leq_A)$  e  $(P, \leq_P)$  duas ordens parciais,  $f : A \rightarrow P$  e  $g : P \rightarrow A$  funções,  $a, b \in A$  e  $p, q \in P$ . Então, o par  $[f, g]$  é uma adjunção se, e somente se, valem as condições:*

- (i)  $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$
- (ii)  $p \leq q \Rightarrow g(p) \leq g(q)$
- (iii)  $a \leq g(f(a))$
- (iv)  $f(g(p)) \leq p$ .

**Demonstração:**  $(\Rightarrow)$  (i) *Seja  $a \leq b$ . Tomando  $p = f(b)$ , então  $f(b) \leq p$ . Como  $[f, g]$  é uma adjunção, então  $b \leq g(p)$  e daí  $a \leq g(p)$ . Como  $[f, g]$  é uma adjunção,  $f(a) \leq p = f(b)$ , segue que  $f(a) \leq f(b)$ .*

(ii) *Seja  $p \leq q$  e tomemos  $a = g(p)$ . Assim,  $a \leq g(p)$  e da definição de adjunção segue que  $f(a) \leq p$ . Daí,  $f(a) \leq q$  e, portanto,  $g(p) = a \leq g(q)$ .*

(iii) *Dado  $a \in A$ , seja  $f(a) = p$ . Daí,  $f(a) \leq p$  e como  $[f, g]$  é uma adjunção, então  $a \leq g(p) = g(f(a))$ .*

(iv) *Dado  $p \in P$ , seja  $a = g(p)$ . Daí,  $a \leq g(p)$  e como  $[f, g]$  é uma adjunção, então  $f(a) \leq p$ . Portanto,  $f(g(p)) \leq p$ .*

$(\Leftarrow)$  *Consideremos que valem as condições (i) - (iv). Assim,*

$$a \leq g(p) \Rightarrow f(a) \leq f(g(p)) \leq p \text{ e } f(a) \leq p \Rightarrow g(f(a)) \leq g(p) \Rightarrow a \leq g(p). \quad \blacksquare$$

Temos então uma forma alternativa para definirmos uma adjunção. O par  $[f, g]$  é uma adjunção se as funções  $f$  e  $g$  preservam as ordens, a composta  $g \circ f$  é inflacionária e a composta  $f \circ g$  é deflacionária.

Se  $(A, \leq_A)$  é um conjunto parcialmente ordenado, então denotaremos a ordem inversa de  $\leq_A$  por  $\leq_A^{op}$  e, desse modo,  $(A, \leq_A^{op}) = (A, (\leq_A)^{-1})$ . Assim,  $a \leq_A b \Leftrightarrow b \leq_A^{op} a$ .

Desta definição decorre o seguinte.

Sejam  $(A, \leq_A)$  e  $(P, \leq_P)$  conjuntos parcialmente ordenados e  $f : A \rightarrow P$  e  $g : P \rightarrow A$  funções:

- (i) Se  $(f, g)$  é uma conexão de Galois, então  $(g, f)$  também é uma conexão de Galois.
- (ii) Se  $(f, g)^d$  é uma conexão dual de Galois, então  $(g, f)^d$  também é uma conexão dual de Galois.
- (iii) Se  $[f, g]$  é uma adjunção, então  $[g, f]^d$  é uma adjunção dual.
- (iv) Se  $[f, g]^d$  é uma adjunção dual, então  $[g, f]$  é uma adjunção.

Se  $(f, g)$  é uma conexão de Galois para  $(A, \leq_A)$  e  $(P, \leq_P)$ , então:

- (i)  $(f, g)^d$  é uma conexão dual de Galois para  $(A, \leq_A^{op})$  e  $(P, \leq_P^{op})$ .
- (ii)  $[f, g]$  é uma adjunção para  $(A, \leq_A)$  e  $(P, \leq_P^{op})$ .
- (iii)  $[f, g]^d$  é uma adjunção dual para  $(A, \leq_A^{op})$  e  $(P, \leq_P)$ .

Cada par de Galois tem resultados semelhantes aos da seção anterior, quando nos detemos às conexões de Galois. No quadro seguinte, faremos uma síntese dos resultados principais para cada par.

Sejam  $(A, \leq_A)$  e  $(P, \leq_P)$  conjuntos parcialmente ordenados,  $a \in A$  e  $p \in P$  elementos quaisquer e  $f : A \rightarrow P$  e  $g : P \rightarrow A$  funções:



Conexão de Galois	Conexão dual de Galois
$(f, g) : (A, \leq_A) \rightarrow (P, \leq_P)$	$(f, g)^d : (A, \leq_A) \rightarrow (P, \leq_P)$
$a \leq_A g(p) \iff p \leq_P f(a)$	$g(p) \leq_A a \iff f(a) \leq_P p$
$f$ e $g$ invertem as ordens	$f$ e $g$ invertem as ordens
$f \circ g$ e $g \circ f$ são inflacionárias	$f \circ g$ e $g \circ f$ são deflacionárias
$f \circ g$ e $g \circ f$ são operadores de Tarski	$f \circ g$ e $g \circ f$ são operadores de interior
$f \circ g \circ f = f$ e $g \circ f \circ g = g$	$f \circ g \circ f = f$ e $g \circ f \circ g = g$
$f(a) = \max\{p \in P : a \leq g(p)\}$	$f(a) = \min\{p \in P : g(p) \leq a\}$
$g(p) = \max\{a \in A : p \leq f(a)\}$	$g(p) = \min\{a \in A : f(a) \leq p\}$
Adjunção	Adjunção dual
$[f, g] : (A, \leq_A) \rightarrow (P, \leq_P)$	$[f, g]^d : (A, \leq_A) \rightarrow (P, \leq_P)$
$a \leq_A g(p) \iff f(a) \leq_P p$	$g(p) \leq_A a \iff p \leq_P f(a)$
$f$ e $g$ preservam as ordens	$f$ e $g$ preservam as ordens
$f \circ g$ é deflacionária e $g \circ f$ é inflacionária	$f \circ g$ é inflacionária e $g \circ f$ é deflacionária
$f \circ g$ e $g \circ f$ são interior e Tarski	$f \circ g$ e $g \circ f$ são Tarski e interior
$f \circ g \circ f = f$ e $g \circ f \circ g = g$	$f \circ g \circ f = f$ e $g \circ f \circ g = g$
$f(a) = \min\{p \in P : a \leq g(p)\}$	$f(a) = \max\{p \in P : g(p) \leq a\}$
$g(p) = \max\{a \in A : f(a) \leq p\}$	$g(p) = \min\{a \in A : p \leq f(a)\}$

Agora, alguns resultados sobre a composição de pares de Galois.

**Proposição 9** Se  $(f_1, g_1)$  é uma conexão de Galois para  $(A, \leq_A)$  e  $(B, \leq_B)$  e  $(f_2, g_2)^d$  é uma conexão dual de Galois para  $(B, \leq_B)$  e  $(C, \leq_C)$ , então  $[f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2]$  é uma adjunção para  $(A, \leq_A)$  e  $(C, \leq_C)$ .

**Demonstração:** Se  $a \in A$  e  $c \in C$  são elementos quaisquer destes dois conjuntos, considerando que  $f_1$  e  $g_2$  são funções, então  $f_1(a), g_2(c) \in B$ . Como temos  $(f_1, g_1)$  e  $(f_2, g_2)^d$ , então:

$$a \leq g_1(g_2(c)) \iff g_2(c) \leq f_1(a) \iff f_2(f_1(a)) \leq c.$$

Logo,  $[f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2]$  é uma adjunção. ■

**Proposição 10** Se  $(f_1, g_1)$  é uma conexão de Galois para  $(A, \leq_A)$  e  $(B, \leq_B)$  e  $[f_2, g_2]^d$  é uma adjunção dual de Galois para  $(B, \leq_B)$  e  $(C, \leq_C)$ , então  $(f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2)$  é uma conexão de Galois para  $(A, \leq_A)$  e  $(C, \leq_C)$ .

**Demonstração:** Se  $a \in A$  e  $c \in C$  são elementos quaisquer destes dois conjuntos, considerando que  $f_1$  e  $g_2$  são funções, então  $f_1(a), g_2(c) \in B$ . Como  $(f_1, g_1)$  é uma conexão e  $[f_2, g_2]^d$  é uma adjunção dual, então:

$$a \leq g_1(g_2(c)) \iff g_2(c) \leq f_1(a) \iff c \leq f_2(f_1(a)).$$

Assim,  $(f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2)$  é uma conexão de Galois para  $(A, \leq_A)$  e  $(C, \leq_C)$ . ■

**Proposição 11** Se  $[f_1, g_1]$  é uma adjunção para  $(A, \leq_A)$  e  $(B, \leq_B)$  e  $(f_2, g_2)$  é uma conexão de Galois para  $(B, \leq_B)$  e  $(C, \leq_C)$ , então  $(f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2)$  é uma conexão para  $(A, \leq_A)$  e  $(C, \leq_C)$ .

**Demonstração:** Se  $a \in A$  e  $c \in C$  são elementos quaisquer destes dois conjuntos, considerando que  $f_1$  e  $g_2$  são funções, então  $f_1(a), g_2(c) \in B$ . Como temos  $[f_1, g_1]$  e  $(f_2, g_2)$ , então:

$$a \leq g_1(g_2(c)) \iff f_1(a) \leq g_2(c) \iff c \leq f_2(f_1(a)).$$

Logo,  $(f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2)$  é uma conexão. ■

**Proposição 12** Se  $[f_1, g_1]$  é uma adjunção para  $(A, \leq_A)$  e  $(B, \leq_B)$  e  $[f_2, g_2]$  é uma adjunção para  $(B, \leq_B)$  e  $(C, \leq_C)$ , então  $[f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2]$  é uma adjunção para  $(A, \leq_A)$  e  $(C, \leq_C)$ .



**Demonstração:** Se  $a \in A$  e  $c \in C$  são elementos quaisquer destes dois conjuntos, considerando que  $f_1$  e  $g_2$  são funções, então  $f_1(a), g_2(c) \in B$ . Como  $[f_1, g_1]$  e  $[f_2, g_2]$  são adjunções, então:

$$a \leq g_1(g_2(c)) \Leftrightarrow f_1(a) \leq g_2(c) \Leftrightarrow f_2(f_1(a)) \leq c.$$

Logo,  $[f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2]$  é uma adjunção. ■

A seguir, indicaremos um par qualquer de Galois por  $\{f, g\}$ . Esta notação entre chaves generaliza para qualquer uma das notações anteriores.

Para  $\{f_1, g_1\}$  par de Galois para  $(A, \leq_A)$  e  $(B, \leq_B)$ , e  $\{f_2, g_2\}$  par de Galois para  $(B, \leq_B)$  e  $(C, \leq_C)$ , em alguns casos, o par  $\{f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2\}$  também é de Galois para  $(A, \leq_A)$  e  $(C, \leq_C)$ . As demonstrações são análogas às das duas proposições anteriores.

$\{f_1, g_1\}$	$\{f_2, g_2\}$	$\{f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2\}$
Conexão	Conexão dual	Adjunção
Conexão	Adjunção dual	Conexão
Conexão dual	Conexão	Adjunção dual
Conexão dual	Adjunção	Conexão dual
Adjunção	Conexão	Conexão
Adjunção	Adjunção	Adjunção
Adjunção dual	Conexão dual	Conexão dual
Adjunção dual	Adjunção dual	Adjunção dual

## Adjunção vinda das traduções entre lógicas

Veremos como o conceito de tradução entre lógicas nos permite gerar uma adjunção sobre espaços de Tarski.

Para tanto, precisamos introduzir conceitos sobre traduções no contexto pretendido, conforme (DA SILVA; D'OTTAVIANO; SETTE; 1999) e (FEITOSA; D'OTTAVIANO, 2001).

As primeiras traduções entre lógicas surgiram no início do século XX. São funções definidas do conjunto de fórmulas de uma lógica no conjunto de fórmulas de uma segunda lógica, com a intenção de preservar propriedades de uma para a outra. Nos primeiros casos, foram usadas para garantir a consistência de uma lógica relativa à outra. Muitos autores fizeram este caminho, conforme indicam os textos mencionados acima.

Da Silva, D'Ottaviano e Sette (1999), iniciaram um estudo geral de inter-relações entre lógicas com uma definição de tradução que deveria preservar a essência de um sistema lógico, a dedutibilidade. Contudo precisaram dizer o que seria, para este desenvolvimento, uma lógica.

Apresentamos alguns destes desenvolvimentos nos próximos parágrafos.

**Definição 13** Uma lógica é um par  $\mathbb{L} = \langle L, C \rangle$ , em que  $L$  é o domínio de  $\mathbb{L}$  e  $C$  é um operador de consequência de Tarski sobre  $L$ .

Esta é uma definição muito geral e abstrata de lógica. São lógicas de Tarski e caracterizam um tema de estudo na Lógica chamado de Lógica Universal.

**Definição 14** O operador de consequência  $C$  é finitário se, para todo  $X \subseteq L$ , tem-se que  $C(X) = \cup\{C(X_f) : X_f \text{ é subconjunto finito de } X\}$ .

Se temos duas lógicas  $\mathbb{L}_1$  e  $\mathbb{L}_2$ , podemos definir os operadores de consequência induzido e co-induzido.

**Definição 15** Seja  $\mathbb{L} = \langle L, C \rangle$  uma lógica e  $A$  e  $B$  conjuntos quaisquer. Para a função  $f : L \rightarrow B$ , o operador de consequência co-induzido por  $f$  e  $\mathbb{L}$  sobre  $B$ , é  $C_B$  tal que cada  $D \subseteq B$  é fechado em  $\langle B, C_B \rangle$  se  $f^{-1}(D)$  é um fechado de  $\mathbb{L}$ . E para a função  $g : A \rightarrow L$ , o operador de consequência  $C_A$  induzido por  $\mathbb{L}$  e  $g$  sobre  $A$  é tal que cada  $E \subseteq A$  é fechado em  $\langle A, C_A \rangle$  se existe um conjunto fechado  $D$  de  $\mathbb{L}$  tal que  $E = g^{-1}(D)$ .

Agora a definição e resultados sobre traduções entre lógicas.

**Definição 16** Uma tradução da lógica  $\mathbb{L}_1 = \langle L_1, C_1 \rangle$  na lógica  $\mathbb{L}_2 = \langle L_2, C_2 \rangle$  é uma função  $t : L_1 \rightarrow L_2$  tal que, para  $X \cup \{x\} \subseteq L_1$ :

$$x \in C_1(X) \Rightarrow t(x) \in C_2(t(X)).$$

De acordo com a notação mais usual da Lógica, podemos escrever esta condição por:

$$X \vdash_1 x \Rightarrow t(X) \vdash_2 t(x),$$

em que  $\vdash_1$  e  $\vdash_2$  denotam as relações de consequência lógica de  $\mathbb{L}_1$  e  $\mathbb{L}_2$ , respectivamente.

**Proposição 17** Uma função  $t : \mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{L}_2$  é tradução se, e somente se, para todo  $A \subseteq L_1$ , tem-se que  $t(C_1(A)) \subseteq C_2(t(A))$ .

**Proposição 18** A composição de traduções é uma tradução; a função identidade entre lógicas é tradução; a composição de traduções é associativa; a função identidade é a unidade para a composição de traduções.

**Proposição 19** Se  $t$  é uma função da lógica  $\mathbb{L}_1$  na lógica  $\mathbb{L}_2$ , então as seguintes condições são equivalentes:

- (i)  $t$  é uma tradução;
- (ii) a imagem inversa de cada conjunto fechado de  $\mathbb{L}_2$  é um fechado de  $\mathbb{L}_1$ ;
- (iii) a imagem inversa de cada conjunto aberto de  $\mathbb{L}_2$  é um aberto de  $\mathbb{L}_1$ ;
- (iv) para todo  $B \subseteq L_2$ , tem-se que  $C_1(t^{-1}(B)) \subseteq t^{-1}(C_2(B))$ .

**Definição 20** Uma função entre duas lógicas  $t : \mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{L}_2$  é fechada quando leva conjuntos fechados de  $\mathbb{L}_1$  em conjuntos fechados de  $\mathbb{L}_2$ .

**Proposição 21** Uma função  $t : \mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{L}_2$  é fechada se, e somente se, para todo  $A \subseteq L_1$ , tem-se que  $C_2(t(A)) \subseteq t(C_1(A))$ .

**Proposição 22** Uma tradução  $t : \mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{L}_2$  é uma função fechada se, e somente se, para todo  $A \subseteq L_1$ , segue-se que  $t(C_1(A)) = C_2(t(A))$ .

**Definição 23** Duas lógicas  $\mathbb{L}_1$  e  $\mathbb{L}_2$  são  $L$ -homeomorfas se existe uma função bijetiva  $t : L_1 \rightarrow L_2$ , tal que  $t$  e  $t^{-1}$  são traduções. Neste caso, a função  $t$  é denominada  $L$ -homeomorfismo.

**Proposição 24** Seja  $t : \mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{L}_2$  uma função bijetiva. A função  $t$  é uma  $L$ -homeomorfismo se, e somente se, para todo  $A \subseteq L_1$ , tem-se  $t(C_1(A)) = C_2(t(A))$ .

**Definição 25** Sejam  $C$  e  $C'$  dois operadores de consequência sobre  $L$ . O operador  $C$  é mais forte que  $C'$  ou  $C'$  é mais fraco que  $C$  se todo conjunto fechado segundo  $C$  é também um fechado segundo  $C'$ .

**Proposição 26** Sejam  $C$  e  $C'$  dois operadores de consequência sobre  $L$ . O operador  $C$  é mais forte que  $C'$  se, e somente se, para todo  $A \subseteq L$ ,  $C'(A) \subseteq C(A)$ .

**Proposição 27** Se  $\mathbb{L}$  é uma lógica,  $B$  é um conjunto,  $t : L \rightarrow B$  é uma função e  $C_B$  é o operador de consequência co-induzido por  $\mathbb{L}$  e  $t$  em  $B$ , então  $C_B$  é o mais fraco operador de consequência

**Proposição 28** Se  $\mathbb{L}$  é uma lógica,  $A$  é um conjunto,  $t : A \rightarrow L$  é uma função e  $C_A$  é o operador de consequência induzido por  $\mathbb{L}$  e  $t$  em  $A$ , então  $C_A$  é o mais forte operador de consequência que faz de  $t$  uma tradução.

Agora estamos em condição de explicitar a adjunção pretendida, que é motivada por uma tradução entre lógicas.

Consideremos duas lógicas  $\mathbb{L}_1$  e  $\mathbb{L}_2$  e uma tradução  $t : \mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{L}_2$ .

Agora, indiquemos as coleções de todas as teorias ou conjuntos fechados de  $\mathbb{L}_1$  e  $\mathbb{L}_2$  por  $\mathfrak{F}(\mathbb{L}_1)$  e  $\mathfrak{F}(\mathbb{L}_2)$ , respectivamente.

Sejam  $f : \mathfrak{F}(\mathbb{L}_1) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathbb{L}_2)$  definida por  $f(X) = \overline{t(X)}$  e  $g : \mathfrak{F}(\mathbb{L}_2) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathbb{L}_1)$  definida por  $g(Y) = t^{-1}(Y)$ .

**Teorema 29** O par  $[f, g]$ , definido acima, é uma adjunção para  $\langle \mathfrak{F}(\mathbb{L}_1), \subseteq \rangle$  e  $\langle \mathfrak{F}(\mathbb{L}_2), \subseteq \rangle$ .

**Demonstração:** Pela Proposição 8, devemos mostrar que  $f$  e  $g$  preservam ordem,  $f \circ g$  é deflacionária e  $g \circ f$  é inflacionária.

Se  $A, B \in \mathfrak{F}(\mathbb{L}_1)$  e  $A \subseteq B$ , então  $t(A) \subseteq t(B)$  e  $\overline{t(A)} \subseteq \overline{t(B)}$ , isto é,  $A^f \subseteq B^f$  e, portanto,  $f$  preserva ordem.

Se  $P, Q \in \mathfrak{F}(\mathbb{L}_2)$  e  $P \subseteq Q$ , então  $t^{-1}(P) \subseteq t^{-1}(Q)$ , isto é,  $P^g \subseteq Q^g$  e, portanto,  $g$  preserva ordem.

Agora, dado  $A \in \mathfrak{F}(\mathbb{L}_1)$ , temos que  $A \subseteq t^{-1}(t(A)) \subseteq t^{-1}(\overline{t(A)}) = g(\overline{t(A)}) = g(f(A))$ . Logo,  $g \circ f$  é inflacionária.

Dado  $P \in \mathfrak{F}(\mathbb{L}_2)$ , temos que  $f(g(P)) = f(t^{-1}(P)) = \overline{t(t^{-1}(P))} \subseteq \overline{P} = P$ . Logo,  $f \circ g$  é deflacionária. ■

Consideremos que dada uma lógica  $(E, C)$  existe uma classe de estruturas  $Est(E)$  a qual está associada uma outra lógica abstrata como acima, denotada por  $(E, C_{\models})$ .

**Definição 30** O elemento  $x \in E$  é um teorema se  $x \in C(\emptyset)$  e  $x$  é válido, o que é denotado por  $\models x$ , se  $x \in C_{\models}(\emptyset)$ . A lógica  $(E, C)$  é correta segundo  $(E, C_{\models})$ , se  $C(\emptyset) \subseteq C_{\models}(\emptyset)$ , isto é, todo teorema de  $(E, C)$  é válido em  $(E, C_{\models})$ ; ela é completa se  $C_{\models}(\emptyset) \subseteq C(\emptyset)$ , isto é, todo membro válido em  $(E, C_{\models})$  é um teorema de  $(E, C)$ ; ela é adequada se é correta e completa, ou seja, se  $C(\emptyset) = C_{\models}(\emptyset)$ . A lógica  $(E, C)$  é fortemente adequada segundo  $(E, C_{\models})$  se, para todo  $A \subseteq E$ , tem-se  $C(A) = C_{\models}(A)$ .

## Considerações finais

As conexões e pares de Galois são muito abundantes no contexto matemático. Apesar da sua origem num contexto bem particular, de enorme beleza e inter-relação entre distintos tópicos matemáticos, observamos as suas características mais universais presentes em muitos outros conceitos.

Continuamos a tratar dos pares de Galois na sua apresentação bastante ampla e abstrata e acreditamos que temos outros exemplos de funções que podem ser vistas também como pares de Galois, mas que não são retratadas nas definições que temos até aqui, neste texto.

Esperamos mais contribuições originais neste contexto.



## Referências

- DA SILVA, J. J.; D'OTTAVIANO, I. M. L.; SETTE, A. M. Translations between logics. In: Caicedo, X., Montenegro, C.H. (eds.) **Models, Algebras and Proofs**. Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics, v. 203, p. 435-448. New York: Marcel Dekker, 1999.
- D'OTTAVIANO, I. M. L.; FEITOSA, H. A. Deductive systems and translations. In: Jean-Yves Béziau; Alexandre Costa Leite (Org.). **Perspectives on universal logic**, p. 125-157. Monza: Polimetrica International Scientific Publisher, 2007.
- DUNN, J. M.; HARDEGREE, G. M. **Algebraic methods in philosophical logic**. Oxford: Oxford University Press, 2001.
- EBBINGHAUS, H. D.; FLUM, J.; THOMAS, W. **Mathematical logic**. New York: Springer-Verlag, 1984.
- FEITOSA, H. A.; D'OTTAVIANO, I. M. L. Annals of Pure and Applied Logic. **Conservative translations**, v. 108, p. 205-227, 2001.
- FEITOSA, H. A.; GRÁCIO, M. C. C.; NASCIMENTO, M. C. Principia. **Logic TK: algebraic notions from Tarki's consequence operator**, v. 14, p. 47-70, 2010.
- FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C. South American Journal of Logic. **Logic of deduction: models of pre-order and maximal theories**, v. 1, p. 283-297, 2015.
- HERRLICH, H.; HUSEK, M. Journal of Pure and Applied Algebra. **Galois connections categorically**, v. 68, p. 165-180, 1990.
- MIRAGLIA, F. **Cálculo proposicional: uma interação da álgebra e da lógica**. Campinas: UNICAMP/CLE. (Coleção CLE, v. 1), 1987.
- ORE, O. Transactions of the American Mathematical Society. **Galois connections**, v. 55, p. 493-513, 1944.
- ORLOWSKA, E.; REWITZKY, I. Fuzzy Sets and Systems. **Algebras for Galois-style connections and their discrete duality**, v. 161, p. 1325-1342, 2010.
- SMITH, P. **The Galois connection between syntax and semantics**. Technical report. Cambridge: University of Cambridge, 2010.



## **Planejamento otimizado de plantio e colheita de cana-de-açúcar visando a maximização da produção de sacarose atendendo a uma demanda mensal pré-estabelecida pela usina**

*Souza, M. L. P. S.*

*UNESP; Faculdade de Engenharia de Bauru  
Marialaura.parra92@gmail.com*

*Caversan, A. S.*

*UNESP; Faculdade de Engenharia de Bauru  
Amandasc.unesp@gmail.com*

*Balbo, A. R.*

*UNESP; Faculdade de Ciências  
arbalbo@fc.unesp.br*

*Silva, H. O. F.*

*UNESP; IBB - Botucatu  
helenice@ibb.unesp.br*

**Resumo:** A busca por fontes renováveis de energia fez com que a cana-de-açúcar ganhasse destaque, pois além de possibilitar a produção de açúcar e álcool, pode ser utilizada para a cogeração de energia, a qual é uma fonte limpa com baixo impacto ambiental. Os processos envolvidos na área de produção sucroenergética são complexos e possibilitam sua investigação e tratamento, respectivamente, através de modelos matemáticos e métodos computacionais. Assim, este trabalho propõe um modelo matemático investigado partindo-se do modelo definido em Ramos (2014). É um modelo que busca otimizar o planejamento do plantio e colheita da cana-de-açúcar, visando a maximização da produção de sacarose, atendendo a uma demanda mensal de produção de sacarose pré-estabelecida pela usina, considerando restrições de campo e operacionais desta. Para a resolução de problemas que envolvem esse modelo foi feita uma implementação computacional no *software* IBM ILOG CPLEX. Neste trabalho é apresentada uma solução de uma simulação feita com dados reais de variedades de cana-de-açúcar, encontrada a partir da implementação citada. O resultado obtido mostrou que o modelo proposto apresenta potencial para auxiliar gerentes de usina no planejamento de plantio e colheita da cana.

**Palavras-chave:** Produtividade da cana-de-açúcar. Colheita e plantio. Programação inteira 0-1. Modelagem matemática.

### **Introdução**

O Brasil é o maior produtor mundial de cana-de-açúcar, segundo a UNICA (União da Indústria de Cana-de-Açúcar) e é o segundo maior produtor de etanol, de acordo com o portal NOVA CANA. A produção total de cana-de-açúcar destinada à indústria, estimada para a safra 2015/16 é de 654,6 milhões de toneladas, de acordo com os dados da CONAB (Companhia Nacional de Abastecimento).

Considerando o crescimento anual da demanda de cana-de-açúcar e a importância da melhoria de sua produtividade em sacarose, torna-se necessário um planejamento adequado do sistema de produção do canavial. Segundo Ramos (2014) o planejamento do plantio da cana-de-açúcar contribui para a melhoria de sua produtividade e é uma tarefa complexa, pois cada variedade de cana-de-açúcar tem uma produtividade diferente e, ainda deve se considerar a sua rebrota e período de maturação.

De acordo com Rocha (1984) e Barbieri & Villa Nova (1977), o período de plantio de cana-de-açúcar no estado de São Paulo e na região Centro-Sul do país pode ser realizado num longo período



do ano, devido às condições climáticas favoráveis encontradas. Assim, o seu plantio pode ser feito em duas épocas do ano e são denominados como “plantio de cana de ano” e “plantio de cana de ano e meio”. O plantio de cana de ano normalmente é realizado nos meses de setembro e outubro e permite que a sua colheita seja feita depois de 12 meses que foi feito o seu plantio. O plantio de cana de ano e meio normalmente é realizado nos meses de janeiro a abril e permite a colheita desta decorridos aproximadamente 18 meses.

Assim, a partir de um modelo matemático investigado em Ramos (2014), este trabalho propõe um modelo que visa otimizar o planejamento do plantio e colheita da cana-de-açúcar, considerando os dois tipos de cana citados, de ano e de ano e meio, em que novas restrições são adicionadas relacionadas ao atendimento da demanda mensal de produção de sacarose da usina, considerando restrições de campo e operacionais desta. A função objetivo visa a maximização da produção de sacarose da usina.

Desde que nem sempre é possível para a usina colher no mês em que a variedade atinja seu nível máximo de produtividade, é necessário flexibilizar o mês de colheita da variedade de cana plantada em um determinado talhão. Para isso considera-se um período de colheita de até três meses antes ou três meses após o pico de maturação da cana-de-açúcar, para definição do seu mês de colheita. Neste sentido é considerada no modelo uma variável de desvio que possibilita a flexibilização em relação à colheita em um determinado talhão, em que a variedade plantada pode ser colhida até três meses antes ou até três meses depois da sua produtividade máxima, devido às delimitações operacionais que ocorrem no processo de colheita da cana-de-açúcar.

A definição do mês de colheita é feita considerando uma variável de desvio, que dentro do período flexibilizado de colheita busca efetuar-la, possivelmente ou em seu mês de produtividade máxima ou em um mês mais próximo ao pico de produtividade.

Além dessa variável de desvio, são consideradas no modelo duas variáveis de decisão do tipo 0-1. A primeira variável decidirá qual a variedade de cana-de-açúcar que deverá ser plantada em um determinado talhão e ainda em que mês esta será plantada. A segunda variável decidirá qual será o mês em que essa mesma variedade plantada será colhida, dentro da flexibilização considerada.

Para esse modelo considera-se uma simulação de um problema real, com dados fornecidos por uma Usina de cana-de-açúcar próxima à cidade de Botucatu-SP, de acordo com (NERVIS, 2015).

## Modelo

Para a definição do modelo completo, o qual é apresentado através das equações e inequações (1) – (17), são utilizados os índices, os valores dados, as variáveis e os conjuntos relativos aos meses de plantio e colheita das variedades como também os conjuntos de demanda, desvios, variedades e talhões, listados a seguir:

São considerados os seguintes índices:

$j$  é o índice associado aos talhões;

$i$  é o índice associado às variedades de cana-de-açúcar;

$h$  é o índice associado ao mês de plantio;

$d$  é o índice associado aos desvios do período correto de colheita;

$m$  é o índice associado ao mês de colheita;

Os valores dados para definição do modelo são:

$k$  é o número de talhões em que a cana-de-açúcar será plantada;

$n$  é o número de variedades de cana-de-açúcar;

$L_j$  é o valor da área do talhão  $j$ ;

$P_{i0}$  é o valor da produtividade da variedade  $i$  no ano inicial (plantio);

$S$  é o valor associado à soma da média das produtividades geradas em cada talhão;



$B$  é um valor extremamente grande atuante como um Big M;

As variáveis do modelo são expressas por:

$D_j$  é a variável associada ao valor do desvio da correta data de colheita da cana no talhão  $j$ ;  
 $I0_j$  é a variável associada à variedade  $i$  selecionada para ser plantada no talhão  $j$ ;  
 $TO_j$  é a variável associada ao mês de plantio da cana-de-açúcar no talhão  $j$ ;  
 $TL_j$  é a variável associada ao mês de colheita da cana-de-açúcar no talhão  $j$ ;  
 $MI_j$  é a variável associada ao mês de colheita da cana-de-açúcar no talhão  $j$  convertida;  
 $P_{i1d}$  é a variável associada ao valor da produtividade da variedade  $i$  no primeiro ano de colheita;  
 $x_{ijhd}$  é a variável binária de decisão da plantação da variedade  $i$  no talhão  $j$  no mês  $h$  com desvio  $d$ ;  
 $t_{ijmd}$  é a variável binária de decisão da colheita da variedade  $i$  que estava plantada no talhão  $j$  no mês  $m$  com desvio  $d$ ;  
 $Y_j$  é a variável binária associada às restrições de ativação e desativação para determinar quando colherá uma variedade do tipo “cana de ano” ou do tipo “cana de ano e meio”;

Os Conjuntos utilizados no modelo são:

$H$  é o conjunto de meses em que poderá haver plantio, tal que  $H = \{1, 2, 3, 4, 9, 10\}$ , em que 1 representa o mês de janeiro, 2 representa o mês de fevereiro, 3 representa o mês de março, 4 representa o mês de abril, 9 representa o mês de setembro e 10 representa o mês de outubro;

$M$  é o conjunto de meses em que poderá haver colheita, tal que  $M = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ , em que 4 representa o mês de abril, 5 representa o mês de maio, 6 representa o mês de junho, 7 representa o mês de julho, 8 representa o mês de agosto, 9 representa o mês de setembro, 10 representa o mês de outubro e 11 representa o mês de novembro;

$I_1$  é o conjunto de variedades de cana-de-açúcar do tipo “ano e meio”;

$I_2$  é o conjunto de variedades de cana-de-açúcar do tipo “ano”;

$Dev$  é o conjunto de desvios, da correta data de colheita, permitidos;

$Dem$  é o conjunto de Demanda que deverá ser atendido mensalmente;

O modelo matemático foi desenvolvido procurando atender a uma demanda mensal determinada pela usina. A função objetivo busca a maximização da produção de sacarose condicionada a uma menor variação possível em relação à produtividade máxima da variedade plantada da cana-de-açúcar, que é colhida considerando a variável de desvio, como explicado anteriormente. Essa variável inteira permite a flexibilização no período da colheita da variedade plantada, que pode ser colhida em um mês diferente daquele em que sua produtividade é a maior possível (desvio nulo). Assim, a decisão de qual o mês em que a variedade será colhida leva em consideração essa flexibilização e, simultaneamente, busca o mês de colheita em que a produtividade esteja se não em seu nível máximo (desvio nulo), em um mês mais próximo possível deste. Com esta simplificação é proposto o seguinte modelo matemático:

$$\text{maximizar } \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \sum_{m \in M} \sum_{d \in Dev} P_{i1d} L_j t_{ijmd} \quad (1)$$

Sujeito à:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{h \in H} \sum_{d \in Dev} P_{i0} L_j x_{ijhd} \geq S \quad \forall j = 1 \dots k \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{h \in H} \sum_{d \in Dev} x_{ijhd} = 1 \quad \forall j = 1 \dots k \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^k \sum_{h \in H} \sum_{d \in Dev} x_{ijhd} \leq 0,15n \quad \forall i = 1 \dots n \quad (4)$$

$$IO_j = \sum_{i=1}^n \sum_{h \in H} \sum_{d \in Dev} i x_{ijhd} \quad \forall j = 1 \dots k \quad (5)$$

$$T0_j = \sum_{i=1}^n \sum_{h \in H} \sum_{d \in Dev} h x_{ijhd} \quad \forall j = 1 \dots k \quad (6)$$

$$IO_j = \sum_{i=1}^n \sum_{m \in M} \sum_{d \in Dev} i t_{ijmd} \quad \forall j = 1 \dots k \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{m \in M} \sum_{d \in Dev} t_{ijmd} = 1 \quad \forall j = 1 \dots k \quad (8)$$

$$T1_j = T0_j + \sum_{i \in I_1} \sum_{m \in M} \sum_{d \in Dev} (18 + d) t_{ijmd} + \sum_{i \in I_2} \sum_{m \in M} \sum_{d \in Dev} (12 + d) t_{ijmd} \quad \forall j = 1 \dots k \quad (9)$$

$$T0_j - 4 \leq 6 Y_j \quad \forall j = 1 \dots k \quad (10)$$

$$T0_j \geq 5 Y_j \quad \forall j = 1 \dots k \quad (11)$$

$$T1_j - \sum_{i \in I_2} \sum_{m \in M} \sum_{d \in Dev} (12 + d) t_{ijmd} - T0_j \leq B(1 - Y_j) \quad \forall j = 1 \dots k \quad (12)$$

$$T1_j - \sum_{i \in I_1} \sum_{m \in M} \sum_{d \in Dev} (18 + d) t_{ijmd} - T0_j \leq B(Y_j) \quad \forall j = 1 \dots k \quad (13)$$

$$D_j = \sum_{i=1}^n \sum_{m \in M} \sum_{d \in Dev} d t_{ijmd} \quad \forall j = 1 \dots k \quad (14)$$

$$M1_j = T1_j - 12 \quad \forall j = 1 \dots k \quad (15)$$

$$M1_j = \sum_{i=1}^n \sum_{m \in M} \sum_{d \in Dev} m t_{ijmd} \quad \forall j = 1 \dots k \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{d \in Dev} \sum_{j=1}^k P_{i1d} L_j t_{ijmd} \geq Dem_m \quad \forall m = 4 \dots 11 \quad (17)$$

$$x_{ijhd} \in \{0,1\} \quad \text{onde } i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, k; h \in H; d \in Dev \quad (18)$$

$$t_{ijmd} \in \{0,1\} \quad \text{onde } i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, k; m \in M; d \in Dev \quad (19)$$

$$Y_j \in \{0,1\} \quad \text{onde } j = 1, \dots, k \quad (20)$$

A função objetivo (1) visa à maximização da produtividade de todas as variedades  $i$  que foram plantadas nos talhões  $j$  e colhidas considerando-se o desvio  $d$ . Na função objetivo temos  $P_{ild}$ , que é calculada na seguinte equação:

$$P_{ild} = (-0,0243d^2 + 1) P_{i0} \quad (21)$$

Para linearizar o problema, o  $P_{ild}$  é substituído pela equação apresentada em (21). Dessa forma não existirá mais um produto entre duas variáveis, uma vez que  $P_{i0}$  é um valor dado.

A melhor solução seria aquela em que a maioria da escolha do  $d$  seria nula, pois isto implicaria em maximizar a qualidade da matéria prima colhida, uma vez que o período de colheita seria na data do pico de maturação da cana, e quanto mais longe estiver desta data maior é a perda na qualidade da cana em termos de sacarose, fibra e outros.

A restrição (2) refere-se a um atendimento de produtividade de sacarose que a plantação da variedade  $i$  plantada no mês  $h$  com um desvio  $d$  em cada talhão  $j$  deverá ter. Esta restrição foi criada a

fim de procurar selecionar as variedades que forneçam a maior produtividade possível. Nessa restrição tem-se  $S$ , que é calculada da seguinte forma:

$$S = [(\sum_{i=1}^n P_{i0})/n] \cdot [(\sum_{j=1}^k L_j)/k] \quad (22)$$

A restrição (3) exige que para cada talhão  $j$  deverá ser atribuído uma variedade  $i$  para plantio, e este plantio deverá ser realizado em um único período  $h$  do ano. Essa restrição garante que não haja a possibilidade de que em um talhão  $j$  exista mais de uma variedade  $i$  plantada.

A restrição (4) limita a quantidade máxima de talhões  $j$  em que a variedade  $i$  poderá ser plantada. Essa restrição foi feita para que não aconteçam situações em que, por exemplo, haja a plantação de somente um tipo de variedade de cana. Isso não estaria de acordo com a realidade, porque assim não seria possível fazer “rotatividade de solo”, o combate às pragas seria impossível e entre outros.

A restrição (5) explicita a variedade  $i$  que será selecionada para ser plantada no mês  $h$  no talhão  $j$ .

A restrição (6) explicita o mês  $TOj$  em que a variedade  $i$  será plantada no talhão  $j$ . O mês  $TOj$  seria o mês inicial (mês zero), ou seja, o mês de plantação.

A restrição (7) garantirá que a variedade  $i$  que foi plantada no mês  $h$  no talhão  $j$  será a mesma variedade  $i$  a ser colhida no mês  $m$  nesse mesmo talhão  $j$  selecionado.

A restrição (8) exige que cada variedade  $i$  plantada no talhão  $j$  tenha uma única colheita  $m$  anual. Essa restrição foi feita para que não aconteçam situações em que, por exemplo, seja feita uma colheita em um talhão  $j$  duas ou mais vezes por ano.

A restrição (9) determinará o mês  $TIj$  que será feita a primeira colheita da variedade  $i$  plantada no talhão  $j$  após 18 meses (cana de ano e meio) de seu plantio sob um desvio  $d$  escolhido, ou após 12 meses (cana de ano) de seu plantio sob um desvio  $d$  escolhido.

As restrições de (10) a (13) foram criadas para garantir que as variedades de “cana de ano” sejam colhidas após 12 meses de seu plantio e que as variedades do tipo “cana de ano e meio” sejam colhidas após 18 meses de seu plantio; essas restrições foram feitas baseadas na estratégia do Big M.

A restrição (14) explicita o valor do desvio  $d$  em cada talhão  $j$ .

A restrição (15) converterá o mês  $TIj$  em um mês  $MIj$  que esteja no intervalo de 1 a 12 meses.

A restrição (16) garantirá que o mês  $m$  seja o mês determinado em (9) para a colheita, ou seja, essa restrição não permitirá que o mês  $m$  seja um valor diferente do que o que foi determinado anteriormente.

A restrição (17) refere-se ao atendimento da demanda mensal, que foi falada no início do modelo.

As restrições (18), (19) e (20) definem as variáveis do problema como variáveis binárias, as quais foram definidas nas variáveis do modelo apresentadas no início da seção.

## Metodologia

Para a resolução de situações matemáticas do modelo desenvolvido foi feita uma implementação utilizando o *software* CPLEX. O teste apresentado nesse trabalho foi realizado em um computador com processador *Intel Core i7, 2.50GHz* e *8.0 GB* de memória *RAM*.

## Teste Computacional

Foram consideradas 14 variedades do tipo cana de ano e meio e 6 variedades do tipo cana de ano, ou seja, o pico de maturação nesse modelo poderá ser depois de 18 meses do plantio de variedades ou 12 meses depois. Foi considerada uma instância que continha 30 talhões (todos com a medida de 20 hectares cada), com a possibilidade de escolha para plantio e colheita das 20 variedades de cana-de-açúcar já destacadas, em um conjunto de 6 meses para plantação (janeiro, fevereiro, março, abril, setembro, outubro) e um conjunto de 8 meses para colheita (abril, maio, junho, julho, agosto,

setembro, outubro e novembro), além de 7 desvios (cujos valores são inteiros dentro de um intervalo de -3 a +3).

Os dados das variedades da cana de açúcar estão descritos na tabela 1, com relação à produtividade que cada variedade gera. As variedades  $i$  de 1 a 14 são as variedades do tipo cana de ano e meio e as variedades  $i$  de 15 a 20 são as do tipo cana de ano:

Tabela 1: Dados das variedades de cana-de-açúcar.

$i$	VARIETADES	PRODUTIVIDADE
1	CTC 2	129,10
2	CTC 4	130,90
3	CTC 9	100,00
4	CTC 17	112,30
5	CTC 20	165,00
6	RB855156	117,80
7	RB86755	148,20
8	RB928062	113,00
9	RB966928	123,10
10	RB922579	142,40
11	RB855453	133,35
12	SP80-1842	112,80
13	SP83-2847	126,70
14	CTC 6	136,00
15	CTC 15	132,80
16	RB855453	121,93
17	RB85755	137,90
18	RB925211	89,29
19	SP80-3280	121,70
20	SP81-3250	140,60

(Fonte: Nervis, 2015)

Para esse teste computacional também foi necessário os seguintes dados, já descritos no modelo.

Tabela 2: Dados para inicialização.

$N$	$Dev$	$M$	$H$	$K$	$S$	$Dem$
20	{-3,-2,-1,0,1,2,3}	{4,5,6,7,8,9,10,11}	{1,2,3,4,9,10}	30	2500	{7000, 7000, 7000, 8000, 8000, 8000, 7000, 7000}

A produção máxima obtida foi de 82.418,7  $tha^{-1}$ . O tempo computacional que o *software* levou para encontrar a solução foi de 01 minuto e menos de 14 segundos.

A Tabela 3 mostra qual a variedade que foi selecionada para plantar em cada talhão, em qual mês foi esta variedade plantada e em qual mês foi colhida. Também foram indicados, em relação à colheita, os desvios  $d$  do pico de produção máxima de cada variedade  $i$  colhida no talhão  $j$ .

Tabela 3: Resultados do teste computacional.

Talhão ( $j$ )	Variedade ( $i$ )	Mês de Plantio ( $h$ )	Mês de Colheita ( $m$ )	Desvio ( $d$ )
1	14	1	6	-1
2	7	2	8	0
3	10	1	7	0
4	20	10	10	0

5	20	10	10	0
6	15	10	11	1
7	10	1	4	-3
8	14	4	10	0
9	7	4	10	0
10	11	1	5	-2
11	5	1	7	0
12	15	10	11	1
13	17	9	9	0
14	10	1	7	0
15	7	2	8	0
16	11	4	11	1
17	17	9	9	0
18	20	10	10	0
19	5	1	4	-3
20	14	1	6	-1
21	10	1	4	-3
22	7	1	7	0
23	17	10	10	0
24	20	9	9	0
25	17	9	9	0
26	5	2	8	0
27	5	1	7	0
28	14	1	6	-1
29	11	1	5	-2
30	11	1	5	-2

Seguindo a Tabela 3 temos que:

No talhão 1 a variedade 14 foi plantada no mês de janeiro (1) e colhida no mês de junho (6). Como é “canas de ano e meio” o pico da produtividade é encontrado 18 meses após o plantio. O plantio nesse talhão foi em janeiro (1) e seu pico seria em julho (7). Uma vez que a decisão de colheita foi feita para o mês de junho (6), significa que o valor do desvio D1 é igual a um negativo, ou seja, a variedade será colhida um mês antes do seu pico.

De forma análoga, como mostrado na Tabela 3, para os 30 talhões  $j$  considerados, dentre as 20 possibilidades de variedades, uma única variedade  $i$  foi selecionada para ser plantada em cada talhão em um mês  $h$ , respeitando-se o limite da quantidade máxima de talhões  $j$  em que a variedade  $i$  pode ser plantada. Além disso, a tabela 3 também indica o mês  $m$  em que a variedade  $i$  deve ser colhida no talhão  $j$ , já se considerando o desvio  $d$  relativo à sua produtividade máxima.

Observa-se que, 18 talhões (talhões 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 22, 23, 24, 25, 26, 27) tiveram suas respectivas variedades colhidas com um desvio nulo, ou seja, 60% dos talhões tiveram sua respectiva variedade colhida no seu pico máximo. 6 talhões (talhões 1, 6, 12, 16, 20, 28) tiveram suas respectivas variedades colhidas com um desvio igual a -1 ou 1, ou seja, 20% dos talhões tiveram sua respectiva variedade colhida um mês antes ou um mês depois em que sua produtividade atingiu nível máximo. 3 talhões (talhões 10, 29, 30) tiveram suas respectivas variedades colhidas com um desvio igual a -2 ou 2, ou seja, 10% dos talhões tiveram sua respectiva variedade colhida dois meses antes ou dois meses depois em que sua produtividade atingiu nível máximo. 3 talhões (talhões 7, 19, 21) tiveram suas respectivas variedades colhidas com um desvio igual a -3 ou 3, ou seja, 10% dos talhões tiveram sua respectiva variedade colhida três meses antes ou três meses depois em que sua produtividade atingiu nível máximo.

## Conclusões

Neste trabalho, um modelo de planejamento ótimo para o plantio e colheita da cana-de-açúcar foi implementado e resolvido através do *software* CPLEX, o qual auxiliou na determinação de uma solução ótima para o modelo investigado.

As simulações computacionais mostraram que o modelo é capaz de auxiliar na seleção das variedades a serem plantadas nos talhões. A colheita e o plantio foram otimizados de forma que maximizou a produção da sacarose ao mesmo tempo em que a demanda mensal da usina foi atendida.

Para estudos futuros serão feitas simulações com outros dados e instâncias maiores para poder verificar o desempenho computacional da implementação. Também será adicionada ao modelo restrições que consideram a possibilidade da ocorrência da colheita dos quatro anos seguintes à primeira colheita em que a variedade de cana colhida é a de rebrota, e ainda variedades de cana de açúcar que já estejam em fase de rebrota no tempo inicial.

### Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES e FAPESP (processo 2014/20853-0) pelo apoio financeiro à realização desse projeto.

### Referências

BARBIERI, V; VILLA NOVA, N. A. **Climatologia e a cana-de-açúcar**. Araras: PLANALSUCAR - Coordenadoria Regional Sul – COSUL. P, 1-22. Climatologia, 1977.

CONAB, **1º Levantamento-Safra 2015/16**. Disponível em: [http://www.conab.gov.br/OlalaCMS/uploads/arquivos/15\\_04\\_13\\_09\\_39\\_02\\_boletim\\_cana\\_portugues\\_-\\_1o\\_lev\\_-\\_15-16.pdf](http://www.conab.gov.br/OlalaCMS/uploads/arquivos/15_04_13_09_39_02_boletim_cana_portugues_-_1o_lev_-_15-16.pdf). Acesso em 13 de outubro de 2016.

NERVIS, J.J. **Planejamento Otimizado da Colheita da cana-de-açúcar e aproveitamento da biomassa**. Tese (Doutorado em Agronomia)- FCA/UNESP, Botucatu, 2015.

NOVA CANA, **Sobre o Etanol**. Disponível em: <<https://www.novacana.com/etanol/sobre-etanol/>> Acesso em: 06 de abril de 2017.

RAMOS, R. P. **Planejamento do plantio e da colheita de cana-de-açúcar utilizando técnicas matemáticas de otimização**. Tese (Doutorado em Agronomia) - FCA/UNESP, Botucatu, 2014.

ROCHA, A. M. C. **Emergência, perfilhamento e produção de cana-de-açúcar (saccharum spp.) em função das épocas de plantio no estado de São Paulo**. Dissertação (Mestrado em agronomia) - Escola Superior de agricultura “Luiz de Queiroz”/USP, Piracicaba, 1984.

UNICA, **União da Agroindústria Canavieira de São Paulo, Acompanhamento quinzenal da safra**. Disponível em: <<http://www.unicadata.com.br/listagem.php?idMn=63>> Acesso em: 01 de out. de 2016.





## Relações de consequência simétrica

*Hércules de Araújo Feitosa*  
Unesp; Faculdade de Ciências  
haf@fc.unesp.br

*Marcelo Reicher Soares*  
Unesp; Faculdade de Ciências  
reicher@fc.unesp.br

*Ângela Pereira Rodrigues Moreira*  
Unesp; Faculdade de Ciências  
angela.p.rodrigues@bol.com.br

**Resumo:** Temos desenvolvido investigações sobre um conceito de lógica bastante universal em um contexto puramente conjuntista. Neste artigo, destacamos as relações de consequência simétrica como um caso particular e especial de relações de consequência com múltiplas conclusões. A motivação para esta abordagem dedutiva vem dos cálculos de seqüentes de Gentzen, que associam um conjunto de sentenças a outro conjunto de sentenças, o antecedente e o conseqüente. De modo especial, sobre o conjunto antecedente, devemos imaginar uma conjunção de sentenças, enquanto que no conjunto conseqüente a ideiação seria de uma disjunção. Por isto, Gentzen trabalhou com seqüências finitas. Visto que tratamos com conjuntos quaisquer, então devemos reconhecer a validade de cada membro do antecedente e, de modo simétrico, de algum elemento do conseqüente. Mostramos que ainda assim temos sistemas dedutivos de Tarski.

**Palavras-chave:** 09. Matemática discreta. Operadores e relações de consequência. Consequência com múltiplas conclusões, Consequência simétrica.

## Introdução

O conceito de consequência lógica é central para o entendimento do que é lógica. Sabemos que as lógicas contemporâneas são construídas sobre linguagens artificiais particulares, que já portam entre seus entes constituintes aspectos essenciais das noções a serem formalizadas naquela lógica.

De um modo bem universal, por momento, deixamos a linguagem à parte e nos concentramos na noção de consequência apenas. Esta é uma abordagem com alguma tradição e escolhemos olhar apenas para a noção de consequência num ambiente puramente conjuntista.

Revisitamos o conceito de operador de consequência de Tarski que determina uma particular classe de lógicas, as lógicas de Tarski. O operador de Tarski leva um conjunto de fórmulas, as premissas, num outro conjunto de fórmulas, as conclusões, e gera um caso de consequência com múltiplas conclusões.

Na tradição de formalização da consequência lógica, também surge o conceito de relação de consequência, mas com uma conclusão a cada passo, que chamamos de consequência com conclusão unitária. Nestes casos mencionados, todos os elementos do conjunto conclusão são deduzidos do conjunto de premissas.

Investigamos, neste artigo, o caso em que do conjunto das conclusões basta a validade de um elemento. Esta abordagem é uma generalização da noção de cálculo de seqüentes de Gentzen e é chamado de consequência simétrica.

Inter-relacionamos estes conceitos e mostramos que toda consequência simétrica pode ser associada a um operador de Tarski embora a recíproca não se verifique.

## Consequência simétrica

Relações de consequência simétrica têm sua motivação advinda dos cálculos de sequentes de Gentzen (1969). Elas são relações definidas sobre  $\mathcal{P}(E)$ , em que  $E$  é um conjunto e  $\mathcal{P}(E)$  é o conjunto das partes de  $E$ .

Gentzen definiu seus sequentes iniciais sobre sequências finitas de fórmulas e na literatura, pouco depois, surgiu a apresentação dos sequentes sobre multiconjuntos finitos. Multiconjuntos generalizam o conceito usual de conjuntos ao admitir a repetição ou multiplicidade de elementos.

A nossa versão trata de conjuntos quaisquer, podendo inclusive ser conjuntos com infinitos elementos. Iniciamos com a introdução da seguinte definição.

**Definição 1.1** Uma relação  $R \subseteq E \times E$  é *equipotente* e uma relação  $R \subseteq \mathcal{P}(E) \times E$  é *não-equipotente*.

Em alguns textos, como por exemplo em (DUNN; HARDEGREE, 2001), o que chamamos acima de relações equipotentes de consequência, são chamadas de relações simétricas e as não-equipotentes de assimétricas. Como não são nomes completamente estabelecidos e também usamos as expressões de relações simétricas e assimétricas para outros conceitos, então julgamos melhor não usar estes nomes.

A seguir, temos a definição de consequência simétrica discutida, que é uma relação equipotente sobre  $\mathcal{P}(E)$ , encontrada em (DUNN; HARDEGREE, 2001).

**Definição 1.2** Uma quase partição de um conjunto  $M$  é um par de conjuntos disjuntos  $(M_1, M_2)$ , isto é,  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$  tal que  $M_1 \cup M_2 = M$ .

Uma possibilidade extrema de quase partição é  $(\emptyset, M)$ , quando um dos subconjuntos da partição é o conjunto vazio.

**Definição 1.3** Sejam  $E$  um conjunto não vazio e  $A \cup B \cup F \cup G \cup M \subseteq E$ . Uma relação de consequência simétrica  $\Vdash \subseteq \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$  é determinada pelo seguinte:

$$(S_1) A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \Vdash B$$

$$(S_2) A \Vdash B \Rightarrow A \cup F \Vdash B \cup G \text{ (diluição)}$$

(S<sub>3</sub>) para todo conjunto  $M$ , se  $A \not\Vdash B$ , então existe uma quase partição  $(M_1, M_2)$  de  $M$  tal que  $A \cup M_1 \not\Vdash B \cup M_2$  (corte global).

Vejam algumas consequências simples desta definição.

Pela contrapositiva, a condição (S<sub>1</sub>) é equivalente a  $A \not\Vdash B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ , isto é, se não há consequência de  $A$  para  $B$ , então os conjuntos são disjuntos. Mas, (S<sub>1</sub>) não diz que se os conjuntos são disjuntos, então não há dedução entre eles. Por exemplo, consideremos a lógica proposicional clássica, e os conjuntos  $A = \{p, p \rightarrow q\}$  e  $B = \{p \wedge q\}$ . Assim temos que  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \Vdash q$  e  $B \Vdash q$  e, portanto,  $A \Vdash B$ .

A condição (S<sub>1</sub>) garante ainda que  $\{x\} \Vdash \{x\}$ ;  $A \Vdash A$ , desde que  $A$  seja não vazio; se  $x \in A$ , então  $A \Vdash \{x\}$  e  $\{x\} \Vdash A$ . Porém, nada pode ser afirmado, até o momento, sobre  $\emptyset \Vdash \emptyset$ .

A condição (S<sub>2</sub>) parece ser um pouco mais estranha, particularmente se  $G \neq \emptyset$ . Se há  $A \Vdash B$ , então parece razoável supor que  $B \neq \emptyset$ , pois do contrário, diante de (S<sub>2</sub>), qualquer conjunto deduziria qualquer conjunto. Daí parece razoável que  $\emptyset \not\Vdash \emptyset$ . A simples união com  $F$  nos dá a monotonicidade usual, que nos garante o acréscimo de premissas. Agora a união de  $G$  nos remete a que se  $A \Vdash \{x\}$ , então  $A \Vdash \{x\} \cup G$ , para qualquer conjunto  $G$ , ou ainda,  $A \Vdash \{b\}$ , para algum  $b \in B$ , então  $A \Vdash B$ .

Apenas como está na definição, ainda não temos que  $A \Vdash B \Rightarrow A \Vdash \{b\}$ , para algum  $b \in B$ . Contudo, ao considerarmos que  $B \neq \emptyset$ , será possível demonstrar esse fato.

**Proposição 1.4** O corte global (S<sub>3</sub>) implica a seguinte versão do corte:  $A \Vdash B \cup \{x\}$  e  $A \cup \{x\} \Vdash B \Rightarrow A \Vdash B$  (corte).

*Demonstração:* A contrapositiva da regra do corte acima diz:  $A \not\Vdash B \Rightarrow A \not\Vdash B \cup \{x\}$  ou  $A \cup \{x\} \not\Vdash B$ . Agora em (S<sub>3</sub>), para  $M = \{x\}$ , se tomarmos a quase partição  $M_1 = \{x\}$  e  $M_2 = \emptyset$ , teremos que  $A \not\Vdash B \Rightarrow A \cup \{x\} \not\Vdash B$ . ■

**Corolário 1.5** A seguinte versão do corte:  $A \Vdash B \cup C$  e  $A \cup C \Vdash B \Rightarrow A \Vdash B$  (corte generalizado) também é consequência do corte global (S<sub>3</sub>).

*Demonstração:* Se  $C$  é vazio, o resultado é imediato da hipótese. Agora, se  $C$  é não vazio, então o resultado segue como na demonstração da proposição anterior, quando  $x$  percorre cada elemento de  $C$ . ■

**Teorema 1.6** Se  $A \models B$  e  $B \neq \emptyset$ , então  $A \models \{b\}$ , para algum  $b \in B$ .

*Demonstração:* Se  $B \neq \emptyset$ , então há  $b \in B$  e, por  $(S_1)$ ,  $B \models \{b\}$ . De  $A \models B$  e  $B \models \{b\}$ , pela diluição, temos que  $A \models \{b\} \cup B$  e  $A \cup B \models \{b\}$  e daí, pelo corte, que  $A \models \{b\}$ . ■

Assim, temos que entender esta consequência  $\models$  do seguinte modo:

$$A \models B, \text{ com } B \neq \emptyset \Leftrightarrow A \models \{b\}, \text{ para algum } b \in B.$$

## Operadores de Tarski

A definição de operador de consequência de Tarski é a seguinte.

**Definição 2.1** Um operador de consequência sobre  $E$  é uma função  $C: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  tal que, para todos  $A, B \subseteq E$ :

( $C_1$ )  $A \subseteq C(A)$  [autodedutibilidade]

( $C_2$ )  $A \subseteq B \Rightarrow C(A) \subseteq C(B)$  [monotonicidade]

( $C_3$ )  $C(C(A)) \subseteq C(A)$  [idempotência].

Para todo operador de consequência  $C$ , por ( $C_1$ ) e ( $C_3$ ), vale a igualdade  $C(C(A)) = C(A)$ .

**Definição 2.2** Um operador de consequência  $C$  sobre  $E$  é finitário quando, para todo  $A \subseteq E$ :

$$(C_4) \quad C(A) = \bigcup \{C(A_f) : A_f \text{ é subconjunto finito de } A\}.$$

**Definição 2.3** Espaço de Tarski (sistema dedutivo, espaço de fecho, lógica) é um par  $(E, C)$ , em que  $E$  é um conjunto qualquer e  $C$  é um operador de consequência sobre  $E$ .

**Definição 2.4** Seja  $C$  um operador de consequência sobre  $E$ , o conjunto  $A$  é fechado em  $(E, C)$  quando  $C(A) = A$ , e  $A$  é aberto quando o complementar de  $A$ , denotado por  $A^C$ , é fechado em  $(E, C)$ .

**Proposição 2.5** Se  $(E, C)$  é um espaço de Tarski, então o domínio  $E$  é fechado, o conjunto  $\emptyset$  é aberto e para todo  $A \subseteq E$ , o conjunto  $C(A)$  é fechado.

*Demonstração:* Ver (MARTIN; POLLARD, 1996).

Para uma ponte entre o operador de consequência de Tarski e as relações de consequência simétricas, usamos a seguinte relação de equivalência:

$$A \models B \Leftrightarrow B \subseteq C(A).$$

Diante disso, mostramos que se  $(E, \models)$  é uma relação de consequência simétrica, então ao tomarmos a equivalência  $A \models B \Leftrightarrow B \subseteq C(A)$ , verificamos que  $(E, C)$  é um espaço de Tarski, contudo a recíproca não vale, pois podemos definir um espaço  $(E, C)$  para o qual ao tomarmos a equivalência acima, não obtemos uma relação de consequência simétrica como na Definição 1.3.

## Relações simétricas e sistemas de Tarski

Agora, nós mostramos que embora com concepção um pouco não usual, também as relações de consequência simétrica são sistemas de Tarski.

**Proposição 3.1** Se  $(E, \models)$  é relação de consequência simétrica e tomamos  $A \models B \Leftrightarrow B \subseteq C(A)$ , então  $(E, C)$  é um espaço de Tarski.

*Demonstração:* ( $C_1$ ) Se  $A \neq \emptyset$ , então  $A \cap A \neq \emptyset$  e, por  $(S_1)$ ,  $A \models A$  e, pela equivalência do enunciado,  $A \subseteq C(A)$ .

( $C_2$ ) Se  $A \subseteq B$  e  $y \in C(A)$ , então  $\{y\} \subseteq C(A)$  e  $A \models \{y\}$ . Por  $(S_2)$ , para  $F = B$  e  $G = \emptyset$ , temos  $A \cup B \models \{y\}$ . Assim,  $\{y\} \subseteq C(A \cup B) = C(B)$  e, portanto,  $y \in C(B)$ .

(C<sub>3</sub>) Se  $y \in C(C(A))$ , então  $\{y\} \subseteq C(C(A)) \Leftrightarrow C(A) \Vdash \{y\}$ . Agora, para todo  $z, z \in C(A) \Leftrightarrow \{z\} \subseteq C(A) \Leftrightarrow A \Vdash \{z\}$ . Daí, para todo  $z \in E$ ,  $A \Vdash \{z\} \cup \{y\}$  e  $A \cup \{z\} = C(A) \Vdash \{y\}$ . Por (S<sub>3</sub>),  $A \Vdash \{y\}$  e, portanto,  $y \in C(A)$ . ■

Porém, não vale a recíproca.

**Proposição 3.2** Nem todo sistema de Tarski determina uma relação simétrica.

*Demonstração:* Sejam  $E = \{a, b\}$  e sobre  $E$  definimos um operador de Tarski do seguinte modo:  $C(\{a\}) = \{a\}$ ,  $C(\{b\}) = \{b\}$ ,  $C(\{a, b\}) = \{a, b\}$  e  $C(\emptyset) = \emptyset$ . Ao dizermos quem são os fechados sobre  $E$ , temos um espaço de Tarski  $(E, C)$ .

Contudo, se considerarmos uma relação sobre  $E$  dada por  $A \Vdash B \Leftrightarrow B \subseteq C(A)$ , como na proposição anterior, temos que  $\{a\} \Vdash \{a\}$ , mas não é o caso que  $\{a\} \Vdash \{a, b\}$ . Logo, não vale (S<sub>2</sub>) ao tomarmos  $A = B = \{a\}$ ,  $F = \emptyset$  e  $G = \{b\}$  e, portanto, a relação  $\Vdash$  não é simétrica conforme da Definição 1.3. ■

Portanto, o conceito de relação simétrica difere do conceito de operador de Tarski, bem como do de uma relação de consequência com múltiplas conclusões, como veremos a seguir. Todavia, fazendo uma associação apropriada, observamos que o conceito de relação simétrica pode ser visto como um caso particular do conceito de operador de Tarski.

## Relações de consequência de múltiplas conclusões

Em (FEITOSA, MOREIRA e SOARES, 2016b) introduzimos uma definição de relação de consequência com múltiplas conclusões, como abaixo, a qual mostramos ser também um sistema de Tarski.

**Definição 4.1** Seja  $E$  um conjunto não vazio. Dados  $A \cup B \cup C \subseteq E$ , definimos uma relação de consequência com múltiplas conclusões  $\Vdash \subseteq \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$  por:

- (R<sub>1</sub>)  $A \Vdash A$
- (R<sub>2</sub>)  $A \Vdash C \Rightarrow A \cup B \Vdash C$
- (R<sub>3</sub>)  $A \Vdash C$  e  $A \cup C \Vdash B \Rightarrow A \Vdash B$ .

A condição (R<sub>3</sub>) deve ser entendida como um corte generalizado, pois elimina o conjunto  $C$ . Esta condição (R<sub>3</sub>) implica a condição (R<sub>4</sub>), abaixo, que é o corte ponto a ponto:

$$(R_4) A \Vdash \{x\} \text{ e } A \cup \{x\} \Vdash B \Rightarrow A \Vdash B.$$

Além disso, a condição (R<sub>3</sub>) mais a monotonicidade (R<sub>2</sub>) garantem uma transitividade dedutiva entre conjuntos.

Se  $(E, \Vdash)$  determina uma relação de consequência como acima, então verificamos que:

$$A \Vdash B \Leftrightarrow A \Vdash \{b\}, \text{ para todo } b \in B.$$

Os resultados abaixo são facilmente demonstrados a partir da Definição 4.1.

**Proposição 4.2** Se  $A \Vdash B$  e  $B \Vdash C$ , então  $A \Vdash C$ .

**Proposição 4.3** Se  $A \subseteq B$ , então  $B \Vdash A$ .

**Proposição 4.4** Sejam  $(E, \Vdash)$  uma consequência com múltiplas conclusões e  $(E, \Vdash)$  uma consequência simétrica. Para  $A \cup B \subseteq E$ , se  $A \Vdash B$ , então  $A \Vdash B$ .

*Demonstração:* Como a relação  $\Vdash$  vale para todo  $b \in B$ , se  $B \neq \emptyset$ , então ela satisfaz também a relação  $\Vdash$ . ■

No caso em que  $B = \{x\}$  é um conjunto unitário, os dois casos colapsam.

**Proposição 4.5** Sejam  $(E, \Vdash)$  uma relação de consequência com múltiplas conclusões e  $(E, \Vdash)$  uma consequência simétrica. Para  $A \cup B \subseteq E$ ,  $A \Vdash B$  não implica que  $A \Vdash B$ .

*Demonstração:* Consideremos um  $y \in E$  tal que  $A \cup F \not\Vdash \{y\}$ . Assim, se  $A \Vdash B$ , então  $A \cup F \Vdash B \cup \{y\}$ , contudo,  $A \cup F \not\Vdash B \cup \{y\}$ . ■

Como já havíamos verificado em (FEITOSA, MOREIRA, SOARES, 2016b), dada uma relação de consequência com múltiplas conclusões, podemos determinar para ela um espaço de Tarski  $(E, C)$  e vice-versa.



A Proposição 4.5 tem semelhança com a Proposição 3.2, em que temos os sistemas de Tarski ou de múltiplas conclusões, mas eles apenas não garantem uma relação de consequência simétrica, nos dois casos, devido a propriedade de diluição.

## Considerações finais

Como já vimos, sempre podemos passar de uma relação de consequência com conclusão única para uma relação de consequência com múltiplas conclusões e vice-versa. Nestes casos, todas as conclusões têm que ser válidas segundo a respectiva relação. Verificamos também que estas relações são casos de sistemas de Tarski.

Neste trabalho mostramos que toda relação simétrica produz um sistema de Tarski, contudo, um sistema de Tarski não garante a propriedade da diluição, como apresentada neste artigo.

Importante é observar que temos diferentes maneiras de caracterizar as noções lógicas, mesmo sem levarmos em conta as linguagens subjacentes, atendo-nos às noções de consequência. As consequências simétricas variam um pouco quanto a incluir nas conclusões não obtidas no processo de consequência, contudo exige que algum elemento esteja na consequência, para só depois admitir quaisquer. Porém, algum tem que jogar o papel de validar a consequência e, então, os demais seriam supérfluos.

Continuamos instigados a desenvolver investigações sobre a noção bastante geral de consequência lógica, também para sistemas não Tarskianos, e pela inclusão de outros entes lógicos que precisem ou não de noções de linguagem.

Também gostaríamos de tratar de aspectos da consequência que não seja apenas a consequência dedutiva e sempre buscar noções gerais que permitam algo de fundamentação da consequência (lógica).

## Referências

- BEZIAU, J-Y. Universal logic. In: T. CHILDERS; O. MAJER (Eds.). **Proceedings of the 8th International Colloquium - Logica'94**. Prague: Czech Academy of Sciences, 2004. p. 73-93.
- BEZIAU, J-Y. From consequence operator to universal logic: a survey of general abstract logic. In: BEZIAU, J-Y. (Ed.) **Logica universalis**, 2007. p. 3-19.
- DUNN, J. M.; HARDEGREE, G. M. **Algebraic methods in philosophical logic**. Oxford: Oxford University Press, 2001.
- FEITOSA, H. A.; MOREIRA, A. P. R.; SOARES, M. R Operadores de consequência e relações de consequência. **Kínesis**, v. 8, p. 156 - 172, 2016a.
- FEITOSA, H. A.; MOREIRA, A. P. R.; SOARES, M. R Sobre relações de consequência com múltiplas conclusões. **Cognitio: Revista de Filosofia**, v. 17, p. 73 - 82, 2016b.
- FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C.; SILVESTRINI, L. H. C. Confrontando propriedades lógicas em um contexto de lógica universal. **Cognitio: Revista de Filosofia**, v. 15, n. 2, p. 333-347, 2014.
- FONT, J. M.; JANSANA, R.; PIGOZZI, D. A survey of abstract algebraic logic. **Studia Logica**, v. 74, p. 13 - 97, 2003.
- GENTZEN, G. Investigation into logical deduction. In: SZABO M. E. (Ed.) **The collected papers of Gerhard Gentzen**. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969. p. 68-131.
- MARTIN, N. M.; POLLARD, S. **Closure spaces and logic**. Dordrecht: Kluwer, 1996.



Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional  
De 2 a 5 de Maio de 2017  
Unesp, Faculdade de Ciências - Bauru/SP

SUNDHOLM, G. Systems of deduction. In GABBAY, D.; GUENTHNER, F. (Eds.) **Handbook of Philosophical Logic**. Dordrecht: Reidel, v. 1, 1983. p. 133-188.

TARSKI, A. **Logic, semantics, metamathematics**. 2. ed. CORCORAN, J. (Ed.). Indianapolis: Hackett Publishing Company, 1983.



## **Simulação de um modelo linearizado de otimização inteira 0-1 para a maximização de produção de biogás em propriedades rurais através biodigestores**

*Gustavo Chaves Tanaka*

*Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”- UNESP; Pós-Graduação Engenharia Elétrica  
gustavotanakachaves@gmail.com*

*Antonio Roberto Balbo*

*Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”- UNESP; Faculdade de ciências  
arbalbo@fc.unesp.br*

*Célia Aparecida dos Reis*

*Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”- UNESP; Faculdade de ciências  
celia@fc.unesp.br*

*Helenice de Oliveira Florentino Silva*

*Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”- UNESP; Instituto de Bioestatística  
helenice@ibb.unesp.br*

**Resumo:** Neste trabalho propõe-se um modelo de otimização não linear, inteiro e misto de biodigestor indiano, o qual tem por objetivo determinar quais as melhores combinações de misturas de biomassas são escolhidas e utilizadas pelos biodigestores para a produção máxima de biogás, garantido as restrições de demanda e de produção destes em uma propriedade rural. Para este objetivo, considera-se uma fazenda que crie suínos, bovinos e aves, cuja respectiva produção de biomassa é utilizada para o abastecimento de biodigestores indianos dispostos em série. O biogás produzido pode ser utilizado para atender a demanda de consumidores do mercado e para fornecer energia à própria propriedade. Para a simulação maximizada de biogás, através dos biodigestores, considera-se uma linearização do modelo proposto e o teste deste modelo em problemas reais, solucionado computacionalmente através do Solver CPLEX da plataforma GAMS versão 24.3.1.

**Palavras-chave:** Biodigestor Indiano. Programação Inteira 0-1. Energia Renovável. Otimização.

### **1. Introdução**

Explorar formas de produção de energia elétrica que respeite, preserve a natureza e tenha baixo custo de geração é de grande interesse à produção e pesquisa energética atual. Pensando nisso, a direção dos estudos em produção de energia renovável aponta para a busca de recursos biodegradáveis e de máximo aproveitamento, que constituem uma grande linha de pesquisa, chamada de engenharia de energia. Neste contexto, o estudo de biodigestores insere-se nesta área e é de grande relevância e interesse, principalmente em pequenas propriedades rurais. Estes, em geral, consistem de uma câmara que armazena matéria orgânica fresca ou biomassa, a fim de produzir gás combustível, bem como substratos, os quais podem ser utilizados, respectivamente, para satisfazer a demanda de energia e de adubação de solos destas propriedades rurais, Bassanezi (1988). Esta biomassa pode ser de diferentes origens, desde que seja fresca, como por exemplo origem humana, animal ou vegetal, tendo como finalidade a produção sustentável de energia e de biofertilizantes, o qual provém dos substratos e ocorrem através da fermentação anaeróbica. Este gás combustível pode ser transformado em eletricidade por meio de equipamentos motores (movidos a diesel) próprios para isto, Portes (2005). Dentre os modelos de biodigestores presentes na literatura, destaca-se o modelo indiano, o chinês e o de batelada, os quais são, convenientemente, utilizados em determinadas regiões, de acordo com suas diferentes

condições geográficas. Neste trabalho o biodigestor considerado é o biodigestor indiano, o qual pode ser visto em Bassanezi (1988).

O principal objetivo deste artigo é de explorar, propor e contribuir com a modelagem matemática de biodigestores, para a resolução de problemas envolvidos no processo de utilização desses sistemas bioenergéticos. Em trabalhos anteriores desenvolvidos pelos autores, foi proposto um primeiro modelo de otimização de produção de biodigestores em série. A proposta deste trabalho é de estender o modelo desenvolvido em Tanaka et al (2016), que otimiza as possíveis combinações de biomassas utilizadas pelos biodigestores para a produção de bioenergia e atendimento da demanda de consumidores e da própria fazenda. Para tal, considera-se uma simulação de um problema de otimização inteiro misto e não linear, que após ser linearizado, possibilitará a sua aplicação em problemas reais de biodigestores. Estes serão solucionados através da implementação computacional em programas elaborados por meio de pacotes computacionais, neste caso, explorando-se a plataforma *GAMS versão 24.3.1* (através do Solver *CPLEX*).

## 2. O modelo de produção de biodigestores

Nesta seção propõe-se um modelo de otimização não linear inteira mista baseado nos estudos de Tanaka et al (2016), em que se considera apenas um problema mono objetivo, para o qual se deseja otimizar a produção de biogás, escolhendo as quantidades adequadas e pré-estabelecidas que serão combinadas a partir de um número pré-estabelecidos de biodigestores.

De acordo com Tanaka et al (2016) a propriedade rural considerada na formulação do modelo tem, como principais fontes de renda, a criação de porcos, vacas e galinhas. As biomassas produzidas por esses 3 tipos de animais são separadas e utilizadas para o abastecimento de  $n$  biodigestores em série, a fim de atender a demanda energética de  $m$  clientes, considerando-se as restrições operacionais do sistema, de acordo com o que segue. O modelo visa investigar e escolher quais das possíveis combinações de misturas de biomassas colocadas nos  $n$  biodigestores serão utilizados para atender a demanda energética dos clientes, já considerando que propriedade rural utiliza cerca de 30% de toda a produção, visando a maximização da produção de biogás.

Baseando-se no estudo proposto em Tanaka et al (2016), o modelo que descreve o problema é definido como:

$$\text{Maximizar } z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^3 y_{ij} B_i \quad (1)$$

$$\text{Sujeito a: } \sum_{k=1}^m q_k \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^3 y_{ij} B_i \leq 0,7 \times \bar{B} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^3 y_{ij} B_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^3 y_{ij} x_{ij} p_j Q_j \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^3 y_{ij} x_{ij} Q_j \leq L \quad (4)$$

$$x_{ij} \in \mathbb{R}_+ \quad (5)$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \quad (6)$$

para  $i = 1,2,\dots,n$ ;  $j = 1,2,3$  e  $k = 1,2,\dots,m$ .

No modelo proposto de (1) a (6) a função objetivo descrita em (1) visa maximizar a produção de biogás  $B_i (m^3)$  a partir das escolhas  $y_{ij}$  ( $y_{ij} = 1$  ou  $0$ ), de quais quantidades percentuais  $x_{ij}$  (em valores tabelados) de biomassa  $Q_j$  serão misturadas em cada biodigestor  $i$  para atender a demanda  $q_k$  de cada consumidor  $k$ , limitado em 70% da produção, e da propriedade, 30% da produção. A restrição (2) garante que a produção de biogás supra a demanda  $q_k$  solicitada pelo cliente  $k$  mensalmente e, ao mesmo tempo, impõe-se que tal produção não ultrapasse o limite de 70% da produção total  $\bar{B}$ , deixando 30% de  $\bar{B}$  para

atender as necessidades energéticas da propriedade. O biodigestor  $i$  produz uma quantidade  $B_i$  ( $m^3$ ) de biogás por mês, representada pela equação (3) como  $B_i = \sum_{j=1}^3 x_{ij} p_j Q_j$ , no qual  $p_j$  é o coeficiente de produtividade definido de acordo com os dados divulgados na literatura e mostrados na Tabela 1, visando atender os  $m$  clientes que solicitam uma quantidade  $q_k$ , dentro do limite de 70 % de  $\bar{B}$  de produção total de biogás. Na restrição (4) temos que as escolhas das quantidade  $x_{ij} Q_j$  são combinadas misturando os tipos de dejetos dentro dos  $n$  biodigestores, porém, deve ser delimitada por  $L$  a quantidade  $x_{ij} Q_j$ , em que uma biomassa  $j$  é combinada na mistura. Isso é feito para que possam ser escolhidos todos os tipos de biomassas disponíveis e para evitar que a biomassa que detém a maior produtividade de biogás, em metro cúbico, seja dominante com relação a combinação de mistura proposta. Ao estabelecer os valores de  $x_{ij}$  o problema se torna linear, podendo ser explorado e resolvido através de métodos exatos ou heurísticos de programação inteira. Em (5),  $x_{ij}$  é uma variável real relativa à porcentagem de biomassa  $Q_j$  produzida pelo animal  $j$  e usado pelo biodigestor  $i$  na combinação da mistura, tal que cada tipo  $j$  de animal é definido da seguinte forma:  $j = 1$  (vacas),  $j = 2$  (porcos),  $j = 3$  (galinhas). A variável  $y_{ij}$ , inteira 0 ou 1, definida na equação (6), indica que :

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a quantidade } x_{ij} Q_j \text{ for misturada no biodigestor } i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

## 2.1. Considerações iniciais

Em Gaspar (2003), o tipo de biomassa é relevante no processo de produção do biogás e na qualidade do biofertilizante, pois altera certos aspectos presentes no produto final. A Tabela 1 apresenta a quantidade de biogás, em metro cúbico, que cada tipo de estrume dos respectivos animais (bovino, suíno e aves) produz por tonelada, durante o período de fermentação, que é de 30 a 60 dias.

Tabela 1 – Quantidade de biomassa que um animal adulto produz por dia e a relação entre a quantidade de estrume e a produção diária de biogás de cada tipo de biomassa

Tipo de animal	Produção de biomassa diária (kg/dia)	Produção de biogás diária ( $m^3 \text{ton}^{-1}$ )
Bovino (vacas)	10	270
Suíno (porcos)	2,25	560
Aves (galinhas)	0,18	285

Fonte: Sganzerla (1983).

Segundo o mesmo autor, cada animal do tipo bovino, suíno e aves produz uma média de biomassa em quilos por dia, como mostra a Tabela 1.

A biomassa oriunda de animais bovinos tem um tempo menor de fermentação, o que acarreta numa produção de biogás mais rápida. As de origem suína, em relação as biomassas de bovinos e de aves, produz uma quantidade maior de biogás. Já a biomassa das aves é mais concentrada em termos de nutrientes, o que melhora a qualidade do biofertilizante, Gaspar (2003).

No modelo definido de (1) a (6) o limite  $L$  proposto na equação (4) possibilita que a escolha da quantidade de biomassa, produzida por cada tipo de animal, seja feita de tal forma a explorar a melhor qualidade de cada um, impedindo que a escolha da biomassa de suíno seja dominante em relação as outras, desde que a função objetivo (1) pretende maximizar a produção de biogás.

### 3. Resultados e discussões

Da mesma forma que em Tanaka et al (2016), para testar problemas reais os quais podem ser representados pelo modelo definido através das equações (1) a (6), consideram-se os dados apresentados na Tabela 1, vistas na Seção 2.1, para uma propriedade rural contendo 10000 vacas, 1000 porcos e 5000 galinhas. Deve-se atender uma demanda de 10 clientes, ou seja  $k = 1, 2, \dots, 10$ , que solicitam as quantidades  $q_k$  respectivamente de: 5500, 5500, 4500, 4500, 5000, 5000, 3000, 3000, 2000, 2000 em metros cúbicos de biogás por mês, totalizando 40000 metros cúbicos de biogás por mês. Os valores de  $Q_j$ , que é a quantidade de biomassa em ton/mês, e a quantidade de biogás  $p_j$  em  $m^3/mês$ , a partir da Tabela 1, são calculados e mostrados na Tabela 2:

Tabela 2 – Quantidade total máxima de biomassa e biogás em tonelada por mês de cada tipo de animal

$Q_j$	Quantidade de biomassa (ton/mês)	$Q_j p_j$	Quantidade de biogás ( $m^3 ton^{-1}$ )
$Q_1$	3000	$Q_1 p_1$	810000
$Q_2$	67,5	$Q_2 p_2$	37800
$Q_3$	27	$Q_3 p_3$	7695

A propriedade rural utiliza  $x_{ij}$  de biomassa  $Q_j$  de cada tipo de animal  $j$ , para distribuir entre os  $i$  biodigestores, tal que, para o problema proposto é calculada considerando-se 3 tipos de animais, 10 clientes e 20 biodigestores. No sentido de linearizar o modelo (1) a (6), os valores percentuais de  $x_{ij}$  são pré-estimados e podem ser vistos em Tabela apresentada em Tanaka et al (2016) e, a partir destes, temos os valores apresentados na Tabela 3:

Os valores da primeira linha da Tabela 3 foram calculados com as seguintes estimativas de  $x_{11}, x_{12}$  e  $x_{13}$ , respectivamente: 5%, 10% e 3%. Desta forma na Tabela 3, considerando-se o produto  $x_{ij} p_j Q_j$  definido na equação (3), obtém-se, na primeira linha ( $i = 1$ ), os valores de  $x_{ij} p_j Q_j$  ( $j=1, 2, 3$ ) respectivamente: 40500, 3780 e 230,85 em  $m^3/mês$  de biogás produzido pelo biodigestor 1. As demais linhas da Tabela 3 são calculadas considerando-se a tabela de valores pré-estimados de  $x_{ij}$  apresentada em Tanaka et al (2016).

Tabela 3 – Quantidade de biogás produzida no biodigestor  $i$  em relação a quantidade  $Q_j$  em  $m^3/mês$

$j \backslash i$	1	2	3	$B_i$
1	40500	3780	230,85	44510,85
2	40500	2835	230,85	43565,85
3	40500	1890	230,85	42620,85
4	40500	2835	230,85	43565,85
5	40500	1890	230,85	42620,85
6	40500	1134	769,5	42403,5
7	40500	1134	577,125	42211,13

<b>8</b>	40500	1134	384,75	42018,75
<b>9</b>	40500	1134	577,125	42211,13
<b>10</b>	40500	1134	384,75	42018,75
<b>11</b>	40500	3780	230,85	44510,85
<b>12</b>	40500	2835	230,85	43565,85
<b>13</b>	40500	1890	230,85	42620,85
<b>14</b>	40500	2835	230,85	43565,85
<b>15</b>	40500	1890	230,85	42620,85
<b>16</b>	40500	1134	769,5	42403,5
<b>17</b>	40500	1134	577,125	42211,13
<b>18</b>	40500	1134	384,75	42018,75
<b>19</b>	40500	1134	577,125	42211,13
<b>20</b>	40500	1134	384,75	42018,75
<b><math>\bar{B}</math></b>				855495

Com os dados apresentados na Seção 3 relativos aos animais e a demanda de clientes, a quantidade de biomassa e de biogás produzidas por mês, vista na Tabela 2, e os valores pré-estimados de  $x_{ij}$  e a quantidade de biogás produzida por cada biodigestor, apresentada na Tabela 3, obtém-se uma simplificação do modelo proposto, que com a introdução deste valores e principalmente de  $x_{ij}$  pré-estimado é simplificado e transformado no seguinte modelo de otimização linear inteira 0-1 descrito pelas equações (7) a (11):

$$\text{Maximizar } z = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^3 y_{ij} B_i \quad (7)$$

$$\text{Sujeito a: } 40000 \leq \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^3 y_{ij} B_i \leq 601000 \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^3 y_{ij} B_i = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^3 y_{ij} x_{ij} p_j Q_j \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^3 y_{ij} \leq 15 \quad (10)$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \quad (11)$$

para  $i=1,2,\dots,10, j=1,2,3$  e  $k=1,2,\dots,10$ .

Na restrição (8) o valor 601000 se dá devido a retirada de 30% da produção total  $\bar{B}$  que sustenta energeticamente a propriedade e o valor limitante  $L = 15$  é considerado para evitar que a quantidade de biomassa produzida pelos suínos seja dominante em relação as outras quantidade de biomassa, de vacas e de aves, para a produção de biogás relativa aos 20 biodigestores

O problema foi solucionado utilizando o solver *CPLEX* em interface com o *GAMS versão 24.3.1*, obtendo-se os resultados de quais quantidades de excremento de cada tipo de animal pré-determinadas  $x_{ij}Q_j$  serão misturadas para a maximização da produção de biogás e suprimindo a demanda de energia dos clientes, os quais são apresentados na Tabela 4.

Tabela 4- Solução encontrada computacionalmente pelo solver *cplex* relativa à mistura de  $y_{ij}$

$y_{ij}$	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	1	1	1
<b>2</b>	1	1	1
<b>3</b>	1	1	1
<b>4</b>	1	1	0
<b>5</b>	1	1	0
<b>6</b>	1	1	1
<b>7</b>	0	0	1
<b>8</b>	1	0	0
<b>9</b>	0	0	1
<b>10</b>	0	0	0
<b>11</b>	1	1	1
<b>12</b>	1	1	1
<b>13</b>	1	1	1
<b>14</b>	1	1	0
<b>15</b>	1	1	0
<b>16</b>	1	1	1
<b>17</b>	0	0	1
<b>18</b>	1	0	0
<b>19</b>	0	0	1
<b>20</b>	0	0	0
$\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^3 y_{ij}$	<b>14</b>	<b>12</b>	<b>12</b>
Valor da função objetivo $\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^3 y_{ij} B_i$ na restrição (8)	$40000 \leq 600974.2 \leq 601000$		

Quando considera-se o valor limitante  $L = 10$  a quantidade de biomassa de porcos é reduzida para a produção de biogás relativos aos biodigestores e, conseqüentemente, a produção máxima de biogás diminui para 427747 m<sup>3</sup>/mês.

Nesta última Tabela pode-se ver as combinações que relacionam as quantidades e os tipos de biomassas que serão colocados em cada biodigestor  $i$ . De acordo com a Tabela 4 temos que as melhores escolhas de misturas das quantidades em questão nos fornece a quantidade maximizada de 600974.2 metros cúbicos de biogás, atendendo-se as restrições (7) a (11) do modelo linearizado. O tempo computacional de execução deste problema através do Solver *CPLEX* foi de 0,0361 segundos.



#### 4. Conclusão e trabalhos futuros

Este trabalho proporcionou uma análise sobre a extensão do modelo de otimização não linear, inteiro e misto para a produção de bioenergia relativa a biodigestores, o qual baseou-se em Tanaka et al (2016). Para a resolução de problemas associados a este modelo, uma implementação no pacote computacional *GAMS* versão 24.3.1, foi realizada e testada em um problema linearizado de otimização inteira, o qual foi descrito na Seção 3.

O modelo proposto, a implementação realizada e os resultados obtidos foram eficientes para a determinação da melhor escolha de combinação de misturas das quantidades de biomassas consideradas para a maximização da produção de biogás, atendimento da demanda, os consumidores e da propriedade.

Pretende-se, futuramente, explorar um modelo de determinação das dimensões da estrutura física do biodigestor, o qual será feita através da aplicação de método determinísticos de otimização, tais como o previsor-corretor primal- dual de pontos interiores/exteriores. Griva (2004); Lima (2013); Pinheiro et al (2015).

**Agradecimento:** ao Projeto Fapesp 2014/30563-0.

#### 5. Referências

ANDRADE, M. A. et al. *Biodigestores rurais no contexto da atual crise de energia elétrica brasileira e na perspectiva da sustentabilidade ambiental*. In: Encontro de Energia no Meio Rural, 4., 2002, Campinas. UNICAMP, 2002. 1 CD ROM.

BASSANEZI, R. C., FERREIRA Jr, W. C. *Equações diferenciais com aplicações*, Harbra ed. São Paulo, 1988.

BISCARO, A. F. V.; SILVA, H. O. F. *Modelagem matemática para determinação da eficiência da redução de ST e SV na biodigestão anaeróbia*. Revista Energia na Agricultura, Botucatu, vol. 23, n.3, 2008, p.1-15.

GASPAR, R. M. B. L, *Utilização de biodigestores em pequenas e médias propriedades rurais com ênfase na agregação de valor: um estudo de caso na região de toledo-pr*. Dissertação, Ufcs – Frorianoópolis. 2003.

GRIVA I. A. (2004). Numerical experiments with an interior-exterior point method for nonlinear programming. *Journal of Computational Optimization and Applications*, vol. 29, p. 173 – 195, 2004.

LIMA, C. *Métodos híbridos de pontos interiores e de Programação inteira 0-1 para problemas de Custo de colheita da cana-de-açúcar e de Custo de coleta e geração de energia relacionados à sua biomassa* (Mestrado em Engenharia Elétrica) Faculdade de Engenharia de Bauru – Universidade Estadual Paulista. Bauru, 2013.

PINHEIRO, R. B. N., BALBO, A. R., BAPTISTA, E. C., & NEPOMUCENO, L. (2015). Interior-exterior point method with global convergence strategy for solving the optimal reactive power flow problem. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*. v.66, p.235 - 246, 2015.

PORTES, Z. A.; SILVA, H. O. F., *Aplicativos computacionais para projetos de biodigestores rurais*. Dissertação, Unesp - Botucatu. 2005.



Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional

De 2 a 5 de Maio de 2017

Unesp, Faculdade de Ciências - Bauru/SP

SGANZERLA, Edílio. *Biodigestores: uma solução*. Porto Alegre. Agropecuária, 1983.

TANAKA, G. C. BALBO, A. R.; REIS, C. A.; FLORENTINO, H. O. Simulação de um modelo de otimização de biodigestores para a produção sustentável de bioenergia. In: SIMPÓSIO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 2016, Bauru. **Anais XXIII (2016)**. 2016. 10 p.



## Simulação Numérica da Difusão de Calor Bidimensional no Substrato Frio de um Cooler Termoelétrico Utilizando o Método de Lattice Boltzmann

*Luben Cabezas-Gómez*

*Universidade de São Paulo; Escola de Engenharia de São Carlos – Núcleo de Térmica e Fluidos  
lubencg@sc.usp.br)*

*Matheus dos Santos Guzella*

*Universidade de São Paulo; Escola de Engenharia de São Carlos – Núcleo de Térmica e Fluidos  
matheusguzella@gmail.com*

*Gustavo dos Santos Ribeiro*

*Universidade de São Paulo; Escola de Engenharia de São Carlos – Núcleo de Térmica e Fluidos  
gustavo.srbr@gmail.com*

*Luiz Eduardo Czelusniak*

*Universidade de São Paulo; Escola de Engenharia de São Carlos – Núcleo de Térmica e Fluidos  
luizedu.cze@gmail.com*

*Vinicius Pessoa Mapelli*

*Universidade de São Paulo; Escola de Engenharia de São Carlos – Núcleo de Térmica e Fluidos  
viniciusmapelli@gmail.com*

**Resumo:** O método de Lattice Boltzmann (LB) tem sido desenvolvido ao longo dos últimos 25 anos, convertendo-se em uma ferramenta de simulação poderosa para um amplo espectro de processos e fenômenos. O método de LB possui algumas vantagens em relação aos métodos de DFC tradicionais com base na hipótese do meio contínuo. Coolers termoelétricos (TEC - thermoelectric coolers) podem ser usados como bombas de calor, operando para aquecimento ou resfriamento e como geradores elétricos. Operando como um sistema de refrigeração, apresentam como principais vantagens em relação aos sistemas convencionais a compactidade, simplicidade e confiabilidade (uma vez que não possuem partes móveis). Neste trabalho são realizadas simulações numéricas da difusão bidimensional no substrato frio de um cooler termoelétrico empregando-se o método de LB. Os resultados obtidos são comparados com os resultados de uma solução analítica aproximada disponível na literatura. A comparação dos resultados demonstra a robustez do método de LB, devido aos baixos erros obtidos na comparação.

**Palavras-chave:** Métodos Numéricos e Aplicações. Método de Lattice Boltzmann. Difusão de calor.

### Introdução

O método de LB tem sido desenvolvido ao longo dos últimos 25 anos, se convertendo numa ferramenta de simulação poderosa para um amplo espectro de processos e fenômenos (Li et al., 2005 e trabalhos nele citados). O método de LB possui algumas vantagens em relação aos métodos de DFC tradicionais com base na hipótese do meio contínuo, estas são: O operador convectivo no método LB é linear; O campo de pressões se calcula diretamente através de uma equação de estado; As condições de contorno se formulam por regras mecânicas elementares de acordo com as interações das moléculas nas paredes sólidas; O método é ideal para paralelização em arquiteturas de CPU e GPU heterogêneas, por ser um método explícito e apresentar apenas interações locais e conseqüentemente uma razão comunicação/computação baixa; Algumas variantes do método permitem a modelagem de escoamentos bifásicos diretamente sem a necessidade uma equação para modelar o movimento da

fronteira como nos métodos VOF e Level Set. Entretanto, o método LB apenas permite a realização de cálculos dinâmicos, e não é muito adequado para a simulação em coordenadas curvilíneas e com passos temporais variáveis (integração temporal adaptativa).

O método de LB pode ser classificado como um método baseado em partículas do tipo de baixo para cima empregado para modelar escoamentos de fluidos de uma ou várias fases, considerando um ou vários componentes químicos. De acordo com Kamali e Van den Akker (2013) no método de LB o escoamento de fluido é representado por um sistema de partículas fictícias ou pseudopartículas que residem numa rede (lattice) regular e que possuem velocidades discretas que podem ser representadas por alguma função de distribuição da velocidade. Essas pseudopartículas podem ser consideradas como grupos de moléculas de fluido que se caracterizam por algumas propriedades das porções reais do fluido. Essas porções de fluido se movimentam com velocidades variadas em direções bem definidas para os nós vizinhos da rede e se caracterizam por uma função de distribuição da probabilidade,  $f_i$ , que depende do tempo e espaço.

Coolers termoelétricos são utilizados em aplicações industriais, produtos comerciais, militares e aeroespaciais com o objetivo de resfriar superfícies ou outros equipamentos. Apesar da tecnologia para criação destes equipamentos terem sido desenvolvidas a cerca de 40 anos, ela é ainda grande alvo de pesquisas científicas, principalmente em áreas que envolvem os materiais termoelétricos empregados e nos processos e técnicas de fabricação utilizados. A análise da distribuição da temperatura no substrato frio de um TEC é de elevada importância, já que as dimensões do objeto e do substrato podem não ser iguais. Dulnev and Polchikov (1976) apresentaram a distribuição da temperatura aproximada no substrato frio de um TEC, para o caso de uma fonte de calor situada neste substrato. Drabkin et al. (2004) realizaram a aplicação da solução analítica obtida para verificação e obtiveram perfis de temperatura 2D para o substrato frio. Além disso, discutiram o aumento do desempenho a partir da análise dos resultados obtidos.

Neste trabalho são realizadas simulações numéricas da difusão de calor bidimensional no substrato frio de um cooler termoelétrico. O modelo de LB com operador de colisão BGK é utilizado, considerando-se a estrutura de lattice D2Q9. Os resultados numéricos obtidos são comparados com resultados da solução analítica aproximada de Dulnev and Polchikov (1976).

### Modelo matemático e método numérico

A Figura 1 mostra um modelo esquemático de um TEC de único estágio com uma fonte de calor localizada na superfície fria (Drabkin et al.,2004), considerado neste estudo:

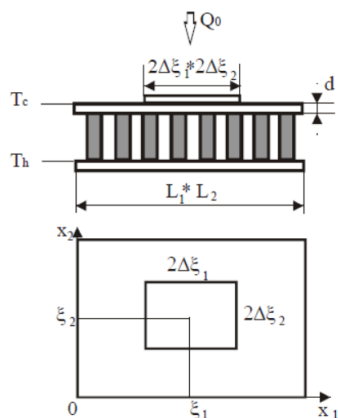


Figura 1: Modelo esquemático de um TEC de único estágio.

Quando a pastilha do cooler termoelétrico é submetida a uma corrente elétrica  $I$ , o fluxo de calor transferido para a extremidade fria da pastilha é devido a três fontes, conforme Equação 1:

$$q_{\text{pastilha}} = 0,5RI^2 + k(T_h - T_c) - \alpha IT_c \quad (1)$$

O primeiro termo da Equação 1 refere-se ao calor devido ao efeito Joule, o segundo refere-se ao calor transferido do substrato quente pela condutância da pastilha e o terceiro termo refere-se ao calor devido ao efeito Peltier.

Considerando  $N$  pastilhas, a equação governante da transferência de calor por condução é dada pela Equação 2:

$$k_s d \nabla^2 T_c - \frac{N_p (\alpha I + k) T_c}{L_1 L_2} + \frac{N_p \left( \frac{RI^2}{2} + k T_h \right)}{L_1 L_2} + \frac{Q_o}{4 \Delta \xi_1 \Delta \xi_2} \{u\} = 0 \quad (2)$$

Na Equação 2,  $k_s$  é a condutividade térmica do substrato,  $d$  é a espessura do substrato,  $T_c$  é a temperatura do substrato frio,  $T_h$  é a temperatura do substrato quente,  $\alpha$  é o coeficiente de Seebeck,  $I$  é a corrente elétrica,  $N$  é o número de pastilhas,  $k$  é a condutância da pastilha,  $L_1$  e  $L_2$  são as dimensões do substrato,  $R$  é a resistência elétrica associada,  $Q_o$  é a potência devido à fonte de calor,  $\Delta \xi_1$  e  $\Delta \xi_2$  são dimensões referentes ao objeto que está sendo resfriado e  $\{u\}$  é uma função que caracteriza a presença ou não da fonte de calor. Este último termo é dado pela seguinte equação:

$$\{u\} = \begin{cases} 1, & \text{se } x_i \in [\bar{\xi}_i - \Delta \bar{\xi}, \bar{\xi}_i + \Delta \bar{\xi}] \\ 0, & \text{se } x_i \notin [\bar{\xi}_i - \Delta \bar{\xi}, \bar{\xi}_i + \Delta \bar{\xi}] \end{cases} \quad (3)$$

As condições de contorno para o problema são dadas pela seguinte equação:

$$\left. \frac{\partial T_c}{\partial x_i} \right|_{x_i=0, x_i=L_i} = 0 \quad (4)$$

Apresenta-se a seguir o método de LB. No método de LB os detalhes dos movimentos e colisões das porções de fluido não interessam. O que importa é uma descrição efetiva e simples que retenha os efeitos macroscópicos e mesoscópicos globais, a ser realizada pela redução dos graus de liberdade dentro das interações caóticas das partículas fictícias sem afetar o comportamento global. Para tanto se modela um conjunto simples de partículas com uma topologia da rede razoável e regras de colisão apropriadas, resultando no cálculo das velocidades e pressão do fluido do comportamento caótico das moléculas por determinadas definições. Dessa forma, no método de LB a equação a ser resolvida nas escalas microscópicas ou mesoscópicas é a equação de transporte de Boltzmann (ver Sukop e Or, 2014) para a função de distribuição de probabilidade, sendo o termo mais complicado desta equação o relacionado com o termo de colisões que representa as interações mesoscópicas das partículas fictícias. A equação da evolução da função de distribuição das partículas no método LB se usa comumente considerando o operador de colisões simplificado de BGK (Kamali e Van den Akker, 2013), no qual as colisões se concebem como um processo simples de relaxação com uma constante de tempo  $\tau$  como segue (Gong e Cheng, 2012):

$$f_i(x + e_i \delta_t, t + \delta_t) - f_i(x, t) = -\frac{1}{\tau} (f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)) \quad (5),$$

Em que  $f_i(x, t)$  é a função de distribuição de partículas com uma velocidade  $e_i$  na posição  $x$  e no tempo  $t$ ,  $\tau$  é o tempo de relaxação e  $f_i^{eq}(x, t)$  é a função de distribuição de equilíbrio correspondente, dada por:

$$f_i^{eq} = \omega_i T \left[ 1 + \frac{e_i \cdot u}{c_s^2} + \frac{(e_i \cdot u)^2}{2c_s^4} - \frac{u^2}{2c_s^2} \right] \quad (6),$$

Em que  $\omega_i$  os coeficientes de ponderação,  $u$  o vetor velocidade do fluido (não o real),  $c_s$  a velocidade do som da rede. Deve-se notar que para um problema puramente difusivo,  $u=0$ .

Para a estrutura de lattice tem-se  $\omega_i = \{4/9, 1/9, 1/9, 1/9, 1/9, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36\}$  e  $c_s^2 = 1/3$ . A estrutura de lattice D2Q9 (2 dimensões e 9 velocidades) foi utilizada e é apresentada abaixo:

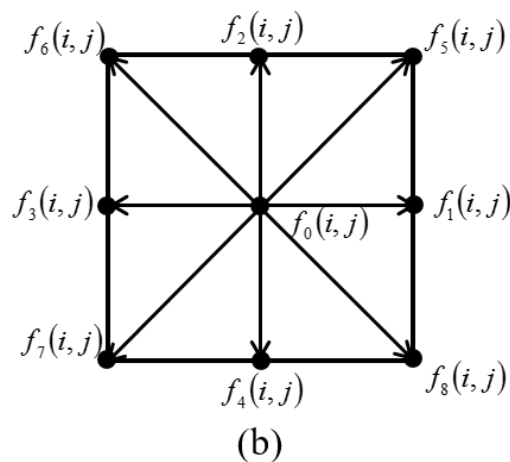


Figura 2: Estrutura de lattice D2Q9.

A temperatura é calculada por:

$$T = \sum_i f_i \quad (7)$$

A difusividade térmica é obtida pela utilização da expansão de Chapman-Enskog (Chapman e Cooling, 1970):

$$\alpha = c_s^2 \left( \tau_T - \frac{1}{2} \right) \delta_t \quad (8)$$

O algoritmo mostrado na Figura 3 é o ponto de partida para todos o código computacional desenvolvidos neste trabalho. As extensões do mesmo serão realizadas com base nos trabalhos de Huang et al. (2015) e Guo e Shu (2013).



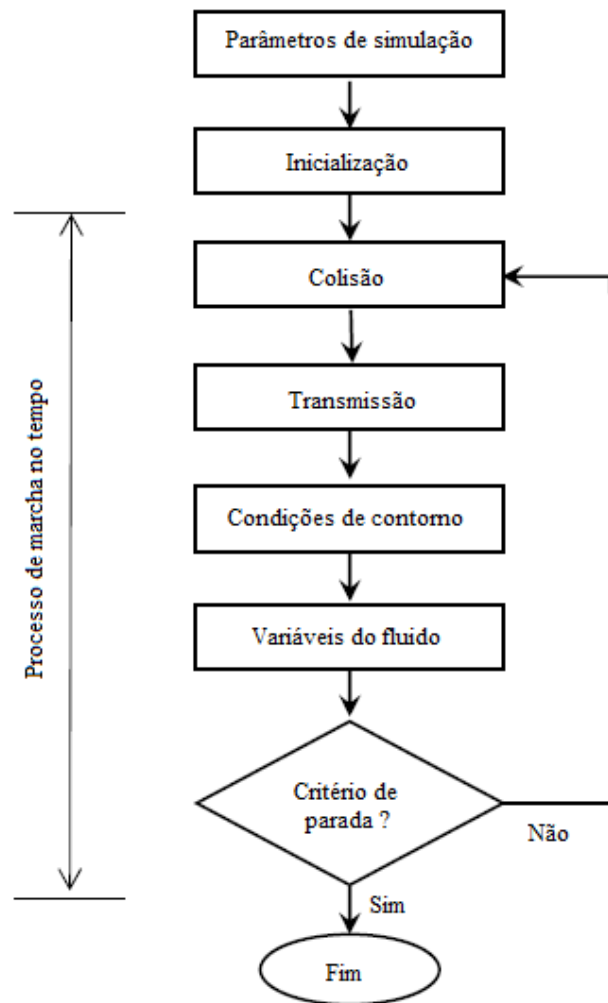


Figura 3: Diagrama de blocos do algoritmo computacional geral do método de LB.

## Resultados e discussão

A Tabela 1 apresenta os parâmetros operacionais de um TEC de simples estágio. Os parâmetros foram obtidos dos trabalhos de Chang et al. (2009) e Guzella et al. (2015):

Tabela 1: Tipos de tamanhos de letra nas partes deste documento.

Parâmetro	Valor	Unidade (SI)
Condutividade térmica do substrato frio	180	W/mK
Espessura do substrato	3,2	mm
Comprimento do substrato	40	mm
Comprimento da fonte térmica	30	mm
Potência da fonte térmica	60	W
Condutância da pastilha	1,392	W/K

Área da seção transversal da pastilha	$1,596 \cdot 10^{-6}$	$m^2$
Coefficiente Seebeck	0,0566	V/K
Número de pastilhas	16	-
Resistência elétrica	1,857	Ohm
Corrente elétrica	5	A

Três malhas (51x51, 101x101 e 201x201) com número crescente de nós foram consideradas para as simulações, considerando um resíduo de  $10^{-6}$  para convergência do campo de temperaturas. A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos pelo método de LB e a solução analítica aproximada.

Tabela 2 – Comparação entre os resultados numéricos e analítico-aproximado.

Grid	Método LB D2Q9 [K]		Solução analítica aproximada [K]	
	$\bar{T}_c$	$T_{c,max}$	$\bar{T}_c$	$T_{c,max}$
51x51	263.67777	265.09859	263.66190	265.10493
101x101	263.69567	265.11237		
201x201	263.65634	265.09295		

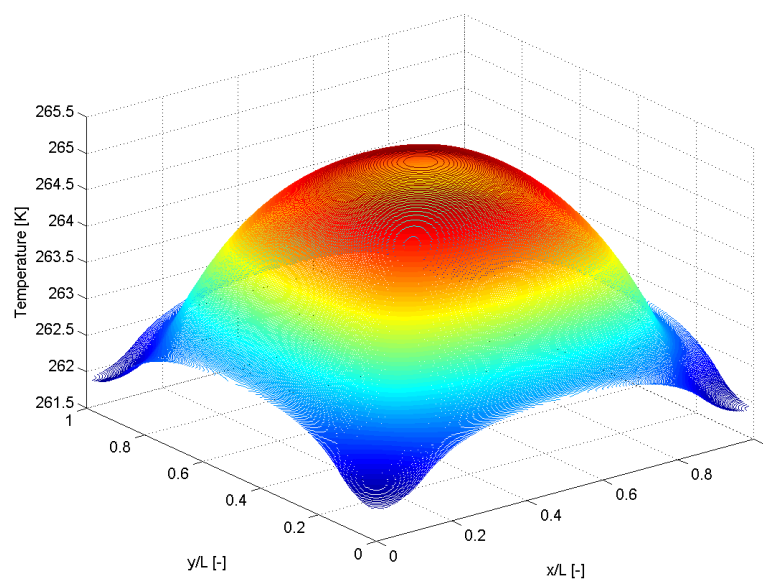


Figura 4: Distribuição de temperaturas obtido pela solução analítica.

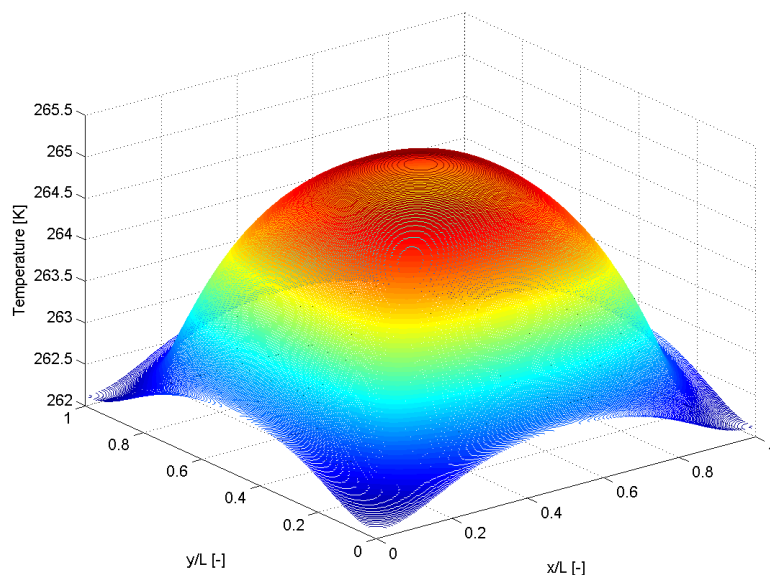


Figura 5: Distribuição de temperaturas obtido pela solução numérica utilizando o D2Q9.

A comparação das temperaturas máxima e média apresentou excelente resultados. Em relação aos perfis de temperatura, estes demonstram a robustez do método LB para solução da equação diferencial que representa a distribuição bidimensional de temperaturas no substrato frio. Adicionalmente, o método pode ser facilmente aplicado para outros problemas de difusão, assim como para problemas advectivos-difusivos com ou sem mudança de fase.

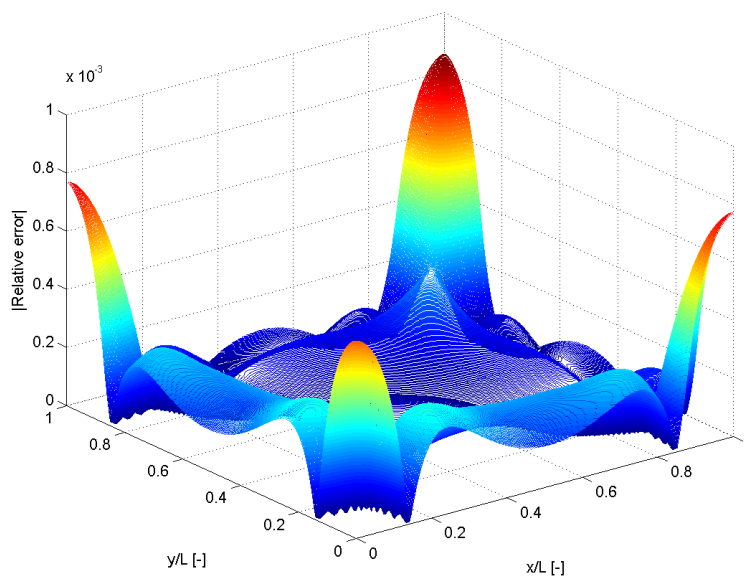


Figura 6: Erro relativo entre a solução numérica e a solução analítica aproximada.

## Referências

LI, Q., LUO, K.H., KANG, Q.J., HE, Y.L., CHEN, Q., LIU, Q. Progress in Energy Combustion and Science. **Lattice Boltzmann methods for multiphase flow and phase-change heat transfer**. In press, 2015

KAMALI, M.R., VAN DEN AKKER, H.E.A. Industrial & Eng. Chemistry Research. **Simulating Gas-Liquid Flows by Means of a Pseudopotential Lattice Boltzmann Method**, 52, 11365-11377, 2013.

DRABKI, I.A., YERSHOVA, L.B., KONDRATIEV, D.A., GROMOV, G.G. The effect of the substrates two-dimensional temperature distribution on the TEC performance, in: **Proceeding of 8th European Workshop on Thermoelectrics**, vol. 12, 2004.

DULNEV, G.N., POLSCHIKOV, B.V. Journal of Engineering Physics. **Temperature Field of a Plate with a Discrete Energy Source**, vol. 29, pp.722 – 727, 1976.

SUKOP, M.C., OR, D., 2004, Water Resources Research. **Lattice Boltzmann method for modeling liquid-vapor interface configurations in porous media**, 40, W01509.

GONG, S., CHENG, P. Computers & Fluids. **Numerical investigation of droplet motion and coalescence by an improved lattice Boltzmann model for phase transitions and multiphase flows**, 53, 93–104, 2012.

CHAPMAN, S. COWLING, T.G. **The Mathematical Theory of Non-uniform Gases: An Account of the Kinetic Theory of Viscosity, Thermal Conduction and Diffusion in Gases**, 3th edition, Cambridge University Press, 1970.

HUANG, H., SUKOP, M.C., LU, X.Y. **Multiphase Lattice Boltzmann Methods: Theory and Application**, 1st ed., Wiley Blackwell, Singapore, Indonesia, 2015.

GUO, Z. SHU, C. **Lattice Boltzmann Methods and its Applications in Engineering**, 1st ed., Advances in Computational Fluid Dynamics, v. 3, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, Indonesia, 2013.

CHANG, Y. CHANG, C. KE, M. CHEN, S. Applied Thermal Engineering. **Thermoelectric air-cooling module for electronic devices**, vol. 29, pp. 2731–2737, 2009.

GUZELLA, M.S., CABEZAS-GÓMEZ, L, GUIMARÃES, L.G.M. International Journal of Applied and Computational Mathematics. **Numerical Computation and Analysis of the Numerical Scheme Order of the Two-Dimensional Temperature Field of Thermoelectric Coolers Cold Substrate**, p. 1-16, 2015.

## Sobre estabilidade para sistemas dinâmicos em escalas temporais

*Iguer Luis Domini dos Santos*  
Unesp; Faculdade de Engenharia - Ilha Solteira/SP  
iguerluis@mat.feis.unesp.br

**Resumo:** Nesse trabalho introduzimos uma abordagem de estabilidade para sistemas dinâmicos em escalas temporais. Para isso, generalizamos conceitos da literatura de sistemas dinâmicos. Então extendemos resultados de estabilidade de sistemas dinâmicos contínuos para sistemas dinâmicos em escalas temporais.

**Palavras-chave:** Análise Aplicada. Sistemas Dinâmicos. Estabilidade. Escalas Temporais.

### Introdução

O estudo da estabilidade para equações dinâmicas em escalas temporais pode ser encontrado em (HOFFACKER; TISDELL, 2005) e (BOHNER; MARTYNYUK, 2007). Uma escala temporal é um subconjunto fechado e não-vazio de números reais. Aqui usamos uma escala temporal  $\mathbb{T}$  tal que  $\sup \mathbb{T} = +\infty$  e  $0 \in \mathbb{T}$ . No presente trabalho generalizamos conceitos e resultados de sistemas dinâmicos contínuos considerados em (SANTOS, 2008). Assim, introduzimos os conceitos de estabilidade e de funções de Lyapunov para sistemas dinâmicos em escalas temporais. Então extendemos resultados de estabilidade em (SANTOS, 2008) para sistemas dinâmicos em escalas temporais.

Consideramos aqui exemplos envolvendo equações dinâmicas em escalas temporais. O estudo de equações dinâmicas em escalas temporais pode ser encontrado em (BOHNER; PETERSON, 2001) e (DOS SANTOS, 2015).

### Preliminares

Conceitos e resultados básicos da teoria de escalas temporais podem ser encontrados em (SANTOS; SILVA, 2013) e (SANTOS; SILVA, 2014). A seguir definimos a derivada delta.

Definimos a função  $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  como

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$$

e a função  $\rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  como

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}.$$

Estamos supondo que  $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$ .

Seja  $\mu : \mathbb{T} \rightarrow [0, +\infty)$  dada por

$$\mu(t) = \sigma(t) - t.$$

Considere uma função  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $t \in \mathbb{T}$ . Se existe  $\xi \in \mathbb{R}$  tal que, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  de modo que

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - \xi(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

para todo  $s \in (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ , diz-se que  $\xi$  é a derivada delta de  $f$  em  $t$  e denota-se  $\xi = f^\Delta(t)$ .

$\mathbb{T}^+$  denotará o conjunto  $\mathbb{T} \cap [0, +\infty)$ . Se  $(X, d)$  é um espaço métrico e  $M \subset X$ , denotamos o conjunto  $\{x \in X : d(x, M) < r\}$  por  $B(M; r)$ .  $C[X, Y]$  denotará o conjunto das funções contínuas com domínio  $X$  e contradomínio  $Y$ . Se  $A \subset \mathbb{R}$ , defina o conjunto  $A_{\mathbb{T}}$  como  $A_{\mathbb{T}} = A \cap \mathbb{T}$ .

Dizemos que uma função  $p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  é regressiva se  $1 + \mu(t)p(t) \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Temos o seguinte resultado de existência de soluções provado por (BOHNER; PETERSON, 2001).

**Teorema 1.** *Seja  $p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função rd-contínua e regressiva. Suponha que  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  seja rd-contínua,  $t_0 \in \mathbb{T}$ , e  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Então a única solução do problema de valor inicial*

$$y^\Delta(t) = p(t)y(t) + f(t), \quad y(t_0) = y_0$$

é dada por

$$y(t) = e_p(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t e_p(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau.$$

A função  $e_p(t, t_0)$  considerada no teorema é a função exponencial na escala temporal.

### Função exponencial

Definimos o conjunto das funções regressivas,  $\mathcal{R}$ , por

$$\mathcal{R} := \{p \in C_{rd}(\mathbb{T}; \mathbb{R}) : 1 + \mu(t)p(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{T}\}$$

e o conjunto das funções positivamente regressivas,  $\mathcal{R}^+$ , por

$$\mathcal{R}^+ := \{p \in C_{rd}(\mathbb{T}; \mathbb{R}) : 1 + \mu(t)p(t) > 0, \forall t \in \mathbb{T}\}.$$

Se  $p \in \mathcal{R}$ , a única solução para o problema de valor inicial

$$x^\Delta = p(t)x, \quad x(a) = 1,$$

é dada pela função exponencial  $e_p(t, a)$  na escala temporal  $\mathbb{T}$ , onde

$$e_p(t, a) = \exp\left(\int_a^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right)$$

com  $\xi_h(z) = \frac{\log(1+hz)}{h}$  se  $h \neq 0$  e  $\xi_h(z) = z$  se  $h = 0$ , e  $\log$  é a função logarítmica principal.

### Sistemas dinâmicos

A seguir definimos sistemas dinâmicos em escalas temporais e introduzimos a estabilidade de Lyapunov.

**Definição 1.** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico,  $\mathcal{A} \subset X$  e  $\mathbb{T}_0^+ \subset \mathbb{T}^+$ . Para cada  $a \in \mathcal{A}$  e  $t_0 \in \mathbb{T}_0^+$ , a aplicação  $p(\cdot, a, t_0) : \mathbb{T}_{a, t_0}^+ \rightarrow X$  é chamada de uma trajetória se  $p(t_0, a, t_0) = a$ , onde  $\mathbb{T}_{a, t_0}^+ = \{t \in \mathbb{T}^+ : t \geq t_0\}$ .*

**Definição 2.** *Considere um conjunto de trajetórias  $S$ , ou seja,*

$$S \subset \{p(\cdot, a, t_0) \in \Lambda : p(t_0, a, t_0) = a\}$$

sendo  $\Lambda = \cup_{(a, t_0) \in (\mathcal{A} \times \mathbb{T}_0^+)} \{\phi : \mathbb{T}_{a, t_0}^+ \rightarrow X\}$ . A quintupla  $\{\mathbb{T}^+, X, \mathcal{A}, S, \mathbb{T}_0^+\}$  é chamada de sistema dinâmico em escala temporal.

Para introduzir a estabilidade de Lyapunov usaremos o conceito de conjunto invariante.

**Definição 3.** *Dado um sistema dinâmico em escala temporal  $\{\mathbb{T}^+, X, \mathcal{A}, S, \mathbb{T}_0^+\}$ , dizemos que o conjunto  $M \subset \mathcal{A}$  é invariante em relação ao sistema  $S$  (isto é,  $(S, M)$  é invariante) se  $a \in M$  implica que  $p(t, a, t_0) \in M$  para todo  $t \in \mathbb{T}_{a, t_0}^+$  tal que  $p(\cdot, a, t_0) \in S$ .*



**Definição 4** (Estabilidade de Lyapunov). *Seja  $\{\mathbb{T}^+, X, \mathcal{A}, S, \mathbb{T}_0^+\}$  um sistema dinâmico em escala temporal e  $M \subset \mathcal{A}$  um conjunto invariante de  $S$ .*

(i) *Diz-se que  $(S, M)$  é estável se para todo  $\varepsilon > 0$  existir um  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$  tal que,  $d(p(t, a, t_0), M) < \varepsilon$  para todo  $t \in \mathbb{T}_{a, t_0}^+$  quando  $d(a, M) < \delta$  e  $p(\cdot, a, t_0) \in S$ .*

(ii)  *$(S, M)$  é uniformemente estável se  $\delta = \delta(\varepsilon)$ .*

(iii) *Se  $(S, M)$  é estável e para  $t_0 \in \mathbb{T}_0^+$  existir um  $\eta = \eta(t_0) > 0$  tal que, para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $t_\varepsilon \in \mathbb{T}^+$  de modo que  $d(p(t, a, t_0), M) < \varepsilon$  para todo  $t \in [t_\varepsilon, \infty)_{\mathbb{T}}$ , quando  $d(a, M) < \eta$  e  $p(\cdot, a, t_0) \in S$ , então  $(S, M)$  é assintoticamente estável.*

(iv) *Dizemos que  $(S, M)$  é uniformemente assintoticamente estável se  $(S, M)$  for uniformemente estável e se existe  $\delta > 0$  tal que, para qualquer  $\varepsilon > 0$  existe  $\tau = \tau(\varepsilon) > 0$  de modo que  $d(p(t, a, t_0), M) < \varepsilon$  para todo  $t \in \mathbb{T}_{a, t_0}^+$  tal que  $t - t_0 \geq \tau$ , quando  $d(a, M) < \delta$  e  $p(\cdot, a, t_0) \in S$ .*

(v) *Chamamos  $(S, M)$  de exponencialmente estável se existe  $\alpha > 0$  tal que, para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  de modo que  $d(p(t, a, t_0), M) < \varepsilon e^{-\alpha(t-t_0)}$  para todo  $t \in \mathbb{T}_{a, t_0}^+$ , quando  $d(a, M) < \delta$  e  $p(\cdot, a, t_0) \in S$ .*

**Definição 5** (Instabilidade). *Dizemos que  $(S, M)$  é instável se não for estável.*

Para a estabilidade de Lyapunov temos a seguinte proposição.

**Proposição 1.** *Vale as seguintes implicações*

$$(v) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$$

$$(v) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i).$$

A seguir abordamos exemplos com equações dinâmicas em escalas temporais.

**Exemplo 1.** *Seja  $a < 0$  e suponha que a função constante  $p(t) = a$  seja regressiva. Considere o seguinte problema de valor inicial*

$$x^\Delta(t) = ax(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}$ . *Seja  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^+$  tal que  $0 \in \mathcal{A}$  o conjunto dos estados iniciais  $x_0$ ,  $\mathbb{T}_0^+ \subset \mathbb{T}^+$  o conjunto dos instantes iniciais  $t_0$  e  $S_{(1)} = \{p(\cdot, x_0, t_0) : [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}^+\}$  o conjunto das trajetórias  $p(t, x_0, t_0) = x_0 e_a(t, t_0)$ . Assim, obtemos o sistema dinâmico em escala temporal  $\{\mathbb{T}^+, \mathbb{R}^+, \mathcal{A}, S_{(1)}, \mathbb{T}_0^+\}$ . Temos os seguintes resultados:*

(i)  *$(S_{(1)}, \{0\})$  é invariante, já que  $p(t, 0, t_0) = 0e_a(t, t_0) = 0 \in \{0\}$  para todo  $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ .*

(ii) *Dado  $\varepsilon > 0$ , se  $\delta = \varepsilon$  e  $d(x_0, \{0\}) = x_0 < \delta$ , então*

$$d(p(t, x_0, t_0), \{0\}) = x_0 e_a(t, t_0) < \delta e_a(t, t_0) = \varepsilon e_a(t, t_0) \leq \varepsilon$$

para todo  $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ . Portanto  $(S_{(1)}, \{0\})$  é uniformemente estável.

**Exemplo 2.** *Seja agora o problema de valor inicial*

$$x^\Delta(t) = x(t) + 1, \quad x(t_0) = x_0 \quad (2)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}$ . *Então, seja  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^+$  tal que  $0 \in \mathcal{A}$  o conjunto dos estados iniciais  $x_0$ ,  $\mathbb{T}_0^+ \subset \mathbb{T}^+$  o conjunto dos instantes iniciais  $t_0$  e  $S_{(2)}$  o conjunto das trajetórias  $p(\cdot, x_0, t_0) : [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}^+$  tais que*

$$p(t, x_0, t_0) = x_0 e_1(t, t_0) + \int_{t_0}^t e_1(t, \sigma(\tau)) \Delta\tau.$$

Assim, obtemos o sistema dinâmico em escala temporal  $\{\mathbb{T}^+, \mathbb{R}^+, \mathcal{A}, S_{(2)}, \mathbb{T}_0^+\}$ .

Afirmamos que  $(S_{(2)}, \{0\})$  é instável. De fato, para qualquer  $\delta > 0$ , seja  $x_0 \neq 0$  tal que  $d(x_0, \{0\}) = x_0 <$

$\delta$  e seja  $p(\cdot, x_0, t_0) \in S_{(2)}$  para algum  $t_0 \in \mathbb{T}_0^+$  fixado arbitrariamente.  
Então, se  $t_1 \in (t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$  segue que

$$\begin{aligned} p(t_1, x_0, t_0) &= x_0 e_1(t_1, t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e_1(t_1, \sigma(\tau)) \Delta \tau \\ &\geq \int_{t_0}^{t_1} e_1(t_1, \sigma(\tau)) \Delta \tau > 0 \end{aligned}$$

isto é,  $d(p(t_1, x_0, t_0), \{0\}) \geq \int_{t_0}^{t_1} e_1(t_1, \sigma(\tau)) \Delta \tau$ .

## Funções de Lyapunov

Considere as trajetórias  $p(\cdot, x_0, t_0) \in S$  de um determinado sistema dinâmico em escala temporal. Se  $M$  é invariante em relação a  $S$  e  $U = B(M; r) \subset \mathcal{A}$  para algum  $r > 0$ , a seguir definimos as funções de Lyapunov para sistemas dinâmicos em escalas temporais.

**Definição 6.**  $V : U \times \mathbb{T}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  é uma função de Lyapunov se:

- (i) para  $t \in [0, +\infty)_{\mathbb{T}}$  tem-se  $V(x, t) > 0$  se  $x \notin M$  e  $V(x, t) = 0$  se  $x \in M$ ;
- (ii)  $V(p(t, x_0, t_0), t) := V_p(t)$  é continuamente diferenciável e  $V_p^\Delta(t) \leq 0$  para todo  $x_0 \in U$  e  $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ .

Usaremos funções de classe  $K$  e  $K\mathbb{R}$ , como definidas abaixo.

**Definição 7.** Uma função  $\phi \in C[[0, r], \mathbb{R}^+]$  (respectivamente  $\phi \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]$ ) pertence à classe classe  $K$  ( $\phi \in K$ ), se  $\phi(0) = 0$  e se  $\phi$  é estritamente crescente em  $[0, r]$  (respectivamente em  $\mathbb{R}^+$ ). Assim, a função  $\phi \in K$  definida em  $\mathbb{R}^+$  pertence à classe  $K\mathbb{R}$  se  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \phi(r) = +\infty$ .

Observe que a condição (i) da definição de funções de Lyapunov é satisfeita se existirem funções  $\psi_1, \psi_2 \in K$  definidas em  $[0, r]$  tais que

$$\psi_1(d(x, M)) \leq V(x, t) \leq \psi_2(d(x, M)).$$

## Resultados de estabilidade

A seguir enunciamos e provamos resultados que garantem condições necessárias para a estabilidade de Lyapunov. Denotaremos a função  $V(p(t, a, t_0), t)$  por  $V_p(t)$ .

**Teorema 2.** Seja  $\{\mathbb{T}^+, (X, d), \mathcal{A}, S, \mathbb{T}_0^+\}$  um sistema dinâmico em escala temporal e  $M \subset A$  fechado. Suponha que existam uma função contínua  $V : U \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  e funções  $\psi_1, \psi_2 \in K$  definidas em  $[0, r]$  tais que

$$\psi_1(d(x, M)) \leq V(x, t) \leq \psi_2(d(x, M))$$

para todo  $x \in U$  e  $t \in \mathbb{T}^+$ .

(a) Suponha que para todo  $a \in U = B(M; r) \subset \mathcal{A}$  e  $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$  se tenha  $V_p^\Delta(t) \leq 0$ . Então  $(S, M)$  é invariante e uniformemente estável.

(b) Se em adição às condições dadas em (a) existir uma função  $\psi_3 \in K$  definida em  $[0, r]$  tal que

$$V_p^\Delta(t) \leq -\psi_3(d(p(t, a, t_0), M))$$

para todo  $a \in U$  e  $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ , então  $(S, M)$  é uniformemente assintoticamente estável.

*Demonstração.* (a) Como  $M \subset U$ , dado  $a \in M$  temos que  $V(p(t, a, t_0), t)$  é decrescente para todo  $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ . Então

$$V(p(t, a, t_0), t) \leq V(p(t_0, a, t_0), t_0) = V(a, t_0) \leq \psi_2(d(a, M)) = \psi_2(0) = 0$$

e assim

$$d(p(t, a, t_0), M) \leq \psi_1^{-1}(0) = 0.$$

Como  $M$  é fechado segue que  $(S, M)$  é invariante.

Agora, dado  $\varepsilon > 0$  seja  $\delta = \psi_2^{-1}(\psi_1(\varepsilon))$  tal que  $d(a, M) < \delta$  e  $a \in U$ . Logo

$$\begin{aligned} \psi_1(d(p(t, a, t_0), M)) &\leq V(p(t, a, t_0), t) \leq V(p(t_0, a, t_0), t_0) = \\ &V(a, t_0) \leq \psi_2(d(a, M)) < \psi_2(\delta) = \psi_1(\varepsilon) \end{aligned}$$

e portanto  $d(p(t, a, t_0), M) < \varepsilon$  para todo  $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ , isto é,  $(S, M)$  é uniformemente estável.

(b) Fixe um  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_1 \leq r$ , tal que  $\psi_2(\delta_1) < \psi_1(r)$  e seja  $\varepsilon > 0$  de modo que  $0 < \varepsilon \leq r$ . Seja agora um  $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$  tal que  $\delta_2 < \delta_1$  e  $\psi_2(\delta_2) < \psi_1(\varepsilon)$ .

Seja  $T \in \mathbb{T}$  tal que  $T \geq \psi_1(r)/\psi_3(\delta_2)$  e  $T + t_0 \in \mathbb{T}$ . Para algum  $a \in U$  tal que  $d(a, M) < \delta_1$  afirmamos que  $d(p(t^*, a, \tau_0^p), M) < \delta_2$  para algum  $t^* \in [\tau_0^p, \tau_0^p + T]$ . Realmente, pois do contrário teríamos  $d(p(t, a, \tau_0^p), M) \geq \delta_2$  para todo  $t \in [\tau_0^p, \tau_0^p + T]_{\mathbb{T}}$ , logo

$$\begin{aligned} 0 < \psi_1(\delta_2) &\leq \psi_1(d(p(t, a, t_0), M)) \leq V(p(t, a, t_0), t) = \\ &V(p(t_0, a, t_0), t_0) + \int_{t_0}^t V_p^\Delta(s) ds \leq \\ &V(a, t_0) - \int_{t_0}^t \psi_3(d(p(s, a, t_0), M)) ds \leq \psi_2(d(a, M)) - \int_{t_0}^t \psi_3(\delta_2) ds < \\ &\psi_2(\delta_1) - (t - t_0) \psi_3(\delta_2). \end{aligned}$$

Dessa forma, se  $t = t_0 + T$  temos

$$0 < \psi_2(\delta_1) - T \psi_3(\delta_2) \leq \psi_2(\delta_1) - \psi_1(r) < 0$$

o que é uma contradição e então  $t^*$  existe. Para  $t \geq t^*$  temos

$$\begin{aligned} \psi_1(d(p(t, a, t_0), M)) &\leq V(p(t, a, t_0), t) \leq V(p(t^*, a, t_0), t^*) \leq \\ &\psi_2(d(p(t^*, a, t_0), M)) < \psi_2(\delta_2) < \psi_1(\varepsilon) \end{aligned}$$

e então  $d(p(t, a, t_0), M) < \varepsilon$  para todo  $t \in [t^*, +\infty)_{\mathbb{T}}$ , logo para todo  $t \in [t_0 + T, +\infty)_{\mathbb{T}}$ . Assim  $(S, M)$  é uniformemente assintoticamente estável.  $\square$

## Conclusões

Esse trabalho contribui para a teoria de escalas temporais. Assim, são introduzidos conceitos de estabilidade para sistemas dinâmicos em escalas temporais. Além disso, são obtidas generalizações de resultados de estabilidade para sistemas dinâmicos contínuos.



## Referências

- BOHNER, M.; PETERSON, A. Journal of Difference Equations and Applications. **First and second order linear dynamic equations on time scales**, v. 7, n.6, p. 767-792, 2001.
- BOHNER, M.; MARTYNYUK, A. A. Nonlinear Dynamics and Systems Theory. **Elements of stability theory of A. M. Lyapunov for dynamic equations on time scales**, v. 7, n.3, p. 225-251, 2007.
- HOFFACKER, J.; TISDELL, C. C. Computers & Mathematics with Applications. **Stability and instability for dynamic equations on time scales**, v. 49, n.9-10, p. 1327-1334, 2005.
- SANTOS, I. L. D. **Análise de estabilidade de sistemas dinâmicos descontínuos e aplicações**. 2008. 52 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – IBILCE/UNESP, São José do Rio Preto, 2008.
- SANTOS, I. L. D.; SILVA, G. N. Mathematische Annalen. **Absolute continuity and existence of solutions to dynamic inclusions in time scales**, v. 356, n.1, p. 373-399, 2013.
- SANTOS, I. L. D.; SILVA, G. N. Computational and Applied Mathematics. **Filippov's selection theorem and the existence of solutions for optimal control problems in time scales**, v. 33, n.1, p. 223-241, 2014.
- DOS SANTOS, I. L. D. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. Third Series. **On qualitative and quantitative results for solutions to first-order dynamic equations on time scales**, v. 21, n.2, p. 205-218, 2015.



## Sobre uma derivada fracionária com uma modificação do tipo Caputo

*D. S. Oliveira*

*Unicamp; Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
ra142310@ime.unicamp.br*

*E. Capelas de Oliveira*

*Unicamp; Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
capelas@ime.unicamp.br*

**Resumo:** Neste trabalho, propomos um novo operador de diferenciação fracionário a partir de uma modificação do tipo Caputo na derivada fracionária generalizada, de modo a obter, o que chamamos de, derivada fracionária generalizada com uma modificação do tipo Caputo. Esta derivada admite, como casos particulares, a derivada fracionária nos sentidos de Caputo e de Caputo-Hadamard.

**Palavras-chave:** Derivada fracionária generalizada. Derivada fracionária de Caputo. Derivada fracionária no sentido de Caputo-Hadamard. Cálculo Fracionário e Aplicações.

### Introdução

No estudo do cálculo fracionário (CF) seja do ponto de vista matemático ou associado a um problema advindo dos vários campos da ciência, em particular, modelados por equações diferenciais fracionárias (FIGUEIREDO CAMARGO; CAPELAS DE OLIVEIRA; 2015, YOUNG, 2014), a maneira de como optar por um particular operador associado a uma derivada, desempenha papel fundamental. Existem várias maneiras de introduzir uma derivada fracionária (CAPELAS DE OLIVEIRA; TENREIRO MACHADO, 2014), e a correta escolha contribui de forma preponderante na abordagem do problema. Ressalte-se que no CF, o operador de diferenciação fracionário é definido a partir do respectivo operador de integração de ordem arbitrária o que nos leva a introduzir primeiramente tal operador.

Katugampola (KATUGAMPOLA, 2011) apresenta um operador de integração que generaliza os clássicos operadores de integração, conforme propostos por Riemann-Liouville e Hadamard. O mesmo autor (KATUGAMPOLA, 2014), num recente trabalho, discute a chamada derivada fracionária generalizada que contém como casos limites as derivadas conforme propostas por Riemann-Liouville e Hadamard. Também recente é o trabalho (GAMBO et al., 2014) onde, a partir do mesmo argumento utilizado para introduzir a derivada fracionária no sentido de Caputo, é proposta uma modificação na derivada fracionária de Hadamard, isto é, obtendo a assim chamada derivada fracionária do tipo Caputo-Hadamard. Ressalte-se que, uma modificação do tipo Caputo quer dizer que introduzimos o operador de diferenciação no integrando da integração fracionária, isto é, permutamos a ordem das operações diferenciação e integração.

Neste trabalho, após apresentarmos resultados que nos serão úteis, dentre eles a integral fracionária, discutimos os operadores integral e diferencial fracionários generalizados com uma modificação do tipo Caputo. A seguir, abordamos a relação entre a derivada fracionária generalizada e a derivada fracionária generalizada com uma modificação do tipo Caputo para, enfim, como aplicação, discutir o teorema fundamental do cálculo fracionário.

## Preliminares

Aqui é necessário elucidar alguns conceitos, que nos serão úteis nas seguintes seções. É conveniente definir a integral fracionária no sentido de Riemann-Liouville e, a partir desta, define-se a derivada fracionária no sentido de Riemann-Liouville e a derivada fracionária conforme proposta por Caputo. Estas formulações admitem  $\alpha \in \mathbb{C}$ , porém, neste trabalho nos restringimos aos casos em que  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Ao longo do texto, mencionaremos estas formulações e, para mais detalhes veja, por exemplo, (FIGUEIREDO CAMARGO; CAPELAS DE OLIVEIRA, 2015; KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006).

**Definição.** Seja  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\alpha > 0$ . Deste modo, definimos os operadores de integração de Riemann-Liouville,  $(I_{a^+}^\alpha \varphi)(x)$  e  $(I_{b^-}^\alpha \varphi)(x)$ , de ordem arbitrária à esquerda e à direita, por

$$(I_{a^+}^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad x > a \quad (1)$$

e

$$(I_{b^-}^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}}, \quad x < b, \quad (2)$$

respectivamente. Assim, a partir destes operadores de integração, consideramos  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\alpha > 0$  e  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , desta forma definimos a derivada fracionária de Riemann-Liouville, à esquerda e à direita,  $({}_{RL}\mathcal{D}_{a^+}^\alpha \varphi)(x)$  e  $({}_{RL}\mathcal{D}_{b^-}^\alpha \varphi)(x)$ , respectivamente, como segue

$$({}_{RL}\mathcal{D}_{a^+}^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} = (D^n I_{a^+}^{n-\alpha} \varphi)(x), \quad x > a \quad (3)$$

e

$$({}_{RL}\mathcal{D}_{b^-}^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{\varphi(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} = (-1)^n (D^n I_{b^-}^{n-\alpha} \varphi)(x) \quad x < b \quad (4)$$

onde  $D = d/dx$  e  $n = [\alpha] + 1$  com  $[\alpha]$  a parte inteira de  $\alpha$ . Por outro lado, a derivada fracionária proposta por Caputo (FIGUEIREDO CAMARGO; CAPELAS DE OLIVEIRA, 2015), com  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$  e  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , à esquerda e à direita, respectivamente, é definida por

$$({}_*\mathcal{D}_{a^+}^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} = (I_{a^+}^{n-\alpha} D^n \varphi)(x), \quad x > a \quad (5)$$

e

$$({}_*\mathcal{D}_{b^-}^\alpha \varphi)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi^{(n)}(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} = (-1)^n (I_{b^-}^{n-\alpha} D^n \varphi)(x) \quad x < b$$

com  $D = d/dt$  e  $n$  definido como anteriormente.

## Integral fracionária generalizada

A integral fracionária generalizada foi introduzida em (KATUGAMPOLA, 2011), de forma a generalizar as integrais fracionárias de Riemann-Liouville e Hadamard. Assim, como consequência deste trabalho, Katugampola definiu a derivada fracionária generalizada associada ao operador de integração generalizado, de modo que este operador diferencial, generaliza as derivadas de ordens arbitrárias de Riemann-Liouville e Hadamard (KATUGAMPOLA, 2014). Tanto a integral quanto a derivada fracionárias generalizadas são definidas para  $\alpha \in \mathbb{C}$ , porém neste trabalho nos restringimos ao caso  $\alpha \in \mathbb{R}$ .



**Definição.** Sejam  $\alpha, c \in \mathbb{R}$  com  $\alpha \notin \mathbb{N}$ ,  $\alpha > 0$  e  $n = [\alpha] + 1$ . A integral fracionária generalizada,  $({}^\rho \mathcal{J}_{a^+}^\alpha \varphi)(x)$  e  $({}^\rho \mathcal{J}_{b^-}^\alpha \varphi)(x)$  com  $\varphi \in X_c^\rho(a, b)$ ,  $1 \leq \rho \leq \infty$ , é definida por

$$({}^\rho \mathcal{J}_{a^+}^\alpha \varphi)(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{t^{\rho-1} \varphi(t)}{(x^\rho - t^\rho)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a \quad (6)$$

e

$$({}^\rho \mathcal{J}_{b^-}^\alpha \varphi)(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{t^{\rho-1} \varphi(t)}{(t^\rho - x^\rho)^{1-\alpha}} dt, \quad x < b \quad (7)$$

à esquerda e à direita, respectivamente, com  $\rho > 0$ .

## Derivada fracionária generalizada

De maneira análoga, definimos a derivada fracionária generalizada, correspondente à integral fracionária, Eq.(6) e Eq.(7), à esquerda e à direita (KATUGAMPOLA, 2014), respectivamente.

**Definição.** Sejam  $\alpha \in \mathbb{R}$  tais que  $\alpha \notin \mathbb{N}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $n = [\alpha] + 1$  e  $\rho > 0$ . A derivada fracionária generalizada,  $({}^\rho \mathcal{D}_{a^+}^\alpha \varphi)(x)$  e  $({}^\rho \mathcal{D}_{b^-}^\alpha \varphi)(x)$ , à direita e à esquerda, é definida por

$$\begin{aligned} ({}^\rho \mathcal{D}_{a^+}^\alpha \varphi)(x) &= \delta_\rho^n ({}^\rho \mathcal{J}_{a^+}^{n-\alpha} \varphi)(x) \\ &= \frac{\rho^{1-n+\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \left( x^{1-\rho} \frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{t^{\rho-1} \varphi(t)}{(x^\rho - t^\rho)^{1-n+\alpha}} dt, \end{aligned} \quad (8)$$

e

$$\begin{aligned} ({}^\rho \mathcal{D}_{b^-}^\alpha \varphi)(x) &= (-1)^n \delta_\rho^n ({}^\rho \mathcal{J}_{b^-}^{n-\alpha} \varphi)(x) \\ &= \frac{(-1)^n \rho^{1-n+\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \left( x^{1-\rho} \frac{d}{dx} \right)^n \int_x^b \frac{t^{\rho-1} \varphi(t)}{(x^\rho - t^\rho)^{1-n+\alpha}} dt, \end{aligned} \quad (9)$$

se as integrais existem e  $\delta_\rho^n = \left( x^{1-\rho} \frac{d}{dx} \right)^n$ .

## Derivada fracionária generalizada com uma modificação do tipo Caputo

Nesta seção, definimos a derivada fracionária generalizada com uma modificação do tipo Caputo, isto é, obtemos esta derivada através de uma modificação do tipo Caputo na derivada fracionária generalizada. Logo após, enunciaremos e demonstramos o teorema que, através de dois limites convenientes, nos permite recuperar as derivadas fracionárias no sentido de Caputo e no sentido de Caputo-Hadamard.

**Definição.** Sejam  $\alpha, \rho \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \notin \mathbb{N}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $n = [\alpha] + 1$  e  $\rho > 0$ . A derivada fracionária generalizada com uma modificação do tipo Caputo, é definida, para  $0 \leq a < x < b \leq \infty$ , por

$$({}^\rho_* \mathcal{D}_{a^+}^\alpha \varphi)(x) = ({}^\rho \mathcal{J}_{a^+}^{n-\alpha} \delta_\rho^n \varphi)(x) \quad (10)$$

$$= \frac{\rho^{1-n+\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{t^{\rho-1}}{(x^\rho - t^\rho)^{1-n+\alpha}} \left( t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n \varphi(t) dt, \quad (11)$$

e

$$\begin{aligned} ({}^\rho_* \mathcal{D}_{b^-}^\alpha \varphi)(x) &= (-1)^n ({}^\rho \mathcal{J}_{b^-}^{n-\alpha} \delta_\rho^n \varphi)(x) \\ &= \frac{(-1)^n \rho^{1-n+\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{t^{\rho-1}}{(x^\rho - t^\rho)^{1-n+\alpha}} \left( t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n \varphi(t) dt, \end{aligned} \quad (12)$$

à esquerda e à direita, respectivamente, se as integrais existem. Se  $\alpha \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ , então  $({}^{\rho} \mathcal{D}_{a^+}^n \varphi)(x)$  e  $({}^{\rho} \mathcal{D}_{b^-}^n \varphi)(x)$  são representadas por

$$({}^{\rho} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \varphi)(x) = \delta_{\rho}^n \varphi(x) \quad \text{e} \quad ({}^{\rho} \mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} \varphi)(x) = (-1)^n \delta_{\rho}^n \varphi(x). \quad (13)$$

Em particular,

$$({}^{\rho} \mathcal{D}_{a^+}^0 \varphi)(x) = ({}^{\rho} \mathcal{D}_{b^-}^0 \varphi)(x) = \varphi(x).$$

O teorema a seguir mostra que, a partir da definição da derivada de ordem arbitrária generalizada com uma modificação do tipo Caputo é possível recuperar as derivadas fracionárias de Caputo e de Caputo-Hadamard.

**Teorema 1.** *Sejam  $\alpha, \rho \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \notin \mathbb{N}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $n = [\alpha] + 1$  e  $\rho > 0$ . Então, para  $x > a$*

$$(a) \quad \lim_{\rho \rightarrow 1} ({}^{\rho} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \varphi)(x) = ({}_{*} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} \varphi^{(n)}(t) dt,$$

$$(b) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0^+} ({}^{\rho} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \varphi)(x) = ({}^C \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x \left( \ln \frac{x}{t} \right)^{n - \alpha - 1} \delta^n \varphi(t) dt.$$

*Demonstração.* (a) A partir da Eq.(11), podemos escrever

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 1} ({}^{\rho} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \varphi)(x) &= \lim_{\rho \rightarrow 1} \left\{ \frac{\rho^{1-n+\alpha}}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x \frac{t^{\rho-1}}{(x^{\rho} - t^{\rho})^{1-n+\alpha}} \left( t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n \varphi(t) dt \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} \varphi^{(n)}(t) dt \\ &= ({}_{*} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \varphi)(x), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{onde } \varphi^{(n)}(t) = \left( \frac{d}{dt} \right)^n \varphi(t).$$

(b) Novamente, partimos da Eq.(11) e com o uso da regra de l'Hôpital, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0^+} ({}^{\rho} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \varphi)(x) &= ({}^C \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \varphi)(x) \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\rho^{1-n+\alpha}}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x \frac{t^{\rho-1}}{(x^{\rho} - t^{\rho})^{1-n+\alpha}} \left( t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n \varphi(t) dt \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x \lim_{\rho \rightarrow 0^+} t^{\rho-1} \left( \frac{x^{\rho} - t^{\rho}}{\rho} \right)^{n - \alpha - 1} \left( t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n \varphi(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x \left( \ln \frac{x}{t} \right)^{n - \alpha - 1} \delta^n \varphi(t) \frac{dt}{t}, \end{aligned}$$

$$\text{onde } \delta^n = \left( t \frac{d}{dt} \right)^n. \text{ A demonstração é válida, também, para o operador à direita.} \quad \square$$

## Relação entre a derivada fracionária generalizada e a derivada fracionária generalizada com uma modificação do tipo Caputo

Nesta seção apresentamos a relação entre a derivada fracionária generalizada e a derivada fracionária generalizada com uma modificação do tipo Caputo, bem como recuperamos casos particulares. Para tanto, consideremos o seguinte lema e a seguinte propriedade demonstrados em (OLIVEIRA; CAPELAS DE OLIVEIRA, 2017).

**Lema 1.** Seja  $n \in \mathbb{N}$  e  $\delta_\rho^n = \left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt}\right)^n$ , então

$$({}^\rho \mathcal{I}_{a^+}^n \delta_\rho^n \varphi)(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta_\rho^k \varphi(a)}{k!} \left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^k. \quad (15)$$

**Propriedade 1.** Sejam  $\alpha, \rho \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \notin \mathbb{N}$ ,  $n = [\alpha] + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$  e  $\rho > 0$ . Se  $\alpha > 0$  e  $0 < a < b < \infty$ , então

$$\left({}^\rho \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} (t^\rho - a^\rho)^k\right)(x) = \frac{\Gamma(k+1)\rho^{\alpha-n}}{\Gamma(k+n-\alpha+1)} (x^\rho - a^\rho)^{k+n-\alpha} \quad (16)$$

e

$$\delta_\rho^n [(x^\rho - a^\rho)^{k+n-\alpha}] = \frac{\Gamma(k+n-\alpha+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \rho^n (x^\rho - a^\rho)^{k-\alpha}. \quad (17)$$

**Teorema 2.** Sejam  $\alpha, \rho \in \mathbb{R}$  tais que  $\alpha > 0$ ,  $n = [\alpha] + 1$  e  $\rho > 0$ . A relação entre a derivada fracionária generalizada e a derivada fracionária generalizada com uma modificação do tipo Caputo é dada pelas seguintes expressões

$$({}^\rho \mathcal{D}_{a^+}^\alpha \varphi)(x) = ({}^\rho \mathcal{D}_{a^+}^\alpha \varphi)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta_\rho^k \varphi(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{k-\alpha} \quad (18)$$

e

$$({}^\rho \mathcal{D}_b^\alpha \varphi)(x) = ({}^\rho \mathcal{D}_b^\alpha \varphi)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \delta_\rho^k \varphi(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \left(\frac{b^\rho - x^\rho}{\rho}\right)^{k-\alpha}. \quad (19)$$

Em particular, quando  $0 < \alpha < 1$ , as relações Eq.(18) and Eq.(19), tomam as seguintes formas

$$({}^\rho \mathcal{D}_{a^+}^\alpha \varphi)(x) = ({}^\rho \mathcal{D}_{a^+}^\alpha \varphi)(x) - \frac{\varphi(a)}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{-\alpha}$$

e

$$({}^\rho \mathcal{D}_b^\alpha \varphi)(x) = ({}^\rho \mathcal{D}_b^\alpha \varphi)(x) - \frac{\varphi(b)}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{b^\rho - x^\rho}{\rho}\right)^{-\alpha}.$$

**Demonstração.** Consideremos, inicialmente, a derivada fracionária generalizada, à esquerda, dada por

$$({}^\rho \mathcal{D}_{a^+}^\alpha \varphi)(x) = \delta_\rho^n ({}^\rho \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \varphi)(x).$$

Escrevemos  $\varphi(t)$  na forma explicitada pela Eq.(15) e, com o auxílio da Propriedade 1, obtemos

$$\begin{aligned} ({}^\rho \mathcal{D}_{a^+}^\alpha \varphi)(x) &= \delta_\rho^n \left( {}^\rho \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \left[ ({}^\rho \mathcal{I}_{a^+}^n \delta_\rho^n \varphi)(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta_\rho^k \varphi(a)}{k!} \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^k \right] \right)(x). \\ &= (\delta_\rho^n {}^\rho \mathcal{I}_{a^+}^n {}^\rho \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \delta_\rho^n \varphi)(x) + \delta_\rho^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta_\rho^k \varphi(a)}{k!} \left( {}^\rho \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \left[ \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right]^k \right)(x) \\ &= ({}^\rho \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \delta_\rho^n \varphi)(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \delta_\rho^k \varphi(a) \frac{\rho^{\alpha-n-k}}{\Gamma(n-\alpha+k+1)} \delta_\rho^n [(x^\rho - a^\rho)^{k+n-\alpha}] \\ &= ({}^\rho \mathcal{D}_{a^+}^\alpha \varphi)(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta_\rho^k \varphi(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{k-\alpha}. \end{aligned}$$

Desta última expressão, segue, imediatamente, a Eq.(18). A demonstração da Eq.(19) é feita de maneira análoga.  $\square$

Em (KATUGAMPOLA, 2014), Katugampola recupera a derivada fracionária de Riemann-Liouville, no caso em que  $\rho \rightarrow 1$  na derivada fracionária generalizada, ou seja,  $\lim_{\rho \rightarrow 1} ({}^{\rho} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \varphi)(x) = ({}_{RL} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \varphi)(x)$  e, recupera a derivada fracionária de Hadamard quando  $\rho \rightarrow 0^+$ , isto é,  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} ({}^{\rho} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \varphi)(x) = (\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \varphi)(x)$ . Porém, nosso operador de diferenciação, recupera, como casos limites, as derivadas fracionárias no sentido de Caputo e Caputo-Hadamard. Para tanto, consideremos os convenientes limites.

- Quando  $\rho \rightarrow 1$  na Eq.(18), obtemos

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} ({}^{\rho} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \varphi)(x) = ({}_{*} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \varphi)(x) = ({}_{RL} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \varphi)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (x - a)^{k - \alpha}. \quad (20)$$

- Por outro lado, se  $\rho \rightarrow 0^+$ , novamente, com o uso da Eq.(18), temos que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} ({}^{\rho} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \varphi)(x) = ({}^C \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \varphi)(x) = (\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \varphi)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^k \varphi(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} \left( \ln \frac{x}{a} \right)^{k - \alpha}. \quad (21)$$

Portanto, quando  $\rho \rightarrow 1$  recuperamos a relação entre a derivada fracionária proposta por Caputo com a derivada fracionária no sentido de Riemann-Liouville (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006, p.91). Por outro lado, quando  $\rho \rightarrow 0^+$ , recuperamos a relação entre a derivada fracionária de Hadamard e a derivada fracionária no sentido de Caputo-Hadamard, (GAMBO et al., 2014, p.7).

## Teorema fundamental do cálculo fracionário

Nesta seção enunciamos e demonstramos o teorema fundamental do cálculo fracionário associado aos operadores de integração fracionários generalizados e os operadores de diferenciação generalizados com uma modificação do tipo Caputo, (GAMBO et al., 2014, CONTHARTEZE GRIGOLETTO; CAPELAS DE OLIVEIRA, 2013).

**Teorema 3.** *Sejam  $\alpha, \rho \in \mathbb{R}$  tais que  $\alpha > 0$  e  $\rho > 0$  com  $n = [\alpha] + 1$ . Consideremos  $AC_{\delta}^n[a, b]$  com*

$$AC_{\delta}^n[a, b] = \left\{ \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \delta_{\rho}^{n-1} \varphi(x) \in AC[a, b], \delta_{\rho} = \left( x^{1-\rho} \frac{d}{dx} \right) \right\}.$$

- (a) *Se  $\alpha \notin \mathbb{N}$  ou  $\alpha \in \mathbb{N}$  e  $\Phi(x) = ({}^{\rho} \mathcal{J}_{a^+}^{\alpha} \varphi)(x)$  ou  $\Phi(x) = ({}^{\rho} \mathcal{J}_{b^-}^{\alpha} \varphi)(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , obtemos*

$$({}^{\rho} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \Phi)(x) = \varphi(x) \quad e \quad ({}^{\rho} \mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} \Phi)(x) = \varphi(x). \quad (22)$$

- (b) *Se  $({}^{\rho} \mathcal{J}_{a^+}^{n-\alpha} \varphi)(x) \in AC_{\delta}^n[a, b]$ , então*

$$({}^{\rho} \mathcal{J}_{a^+}^{\alpha} {}^{\rho} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \Phi)(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{\delta_{\rho}^k \varphi(a)}{k!} \left( \frac{x^{\rho} - a^{\rho}}{\rho} \right)^k \quad (23)$$

e

$$({}^{\rho} \mathcal{J}_{b^-}^{\alpha} {}^{\rho} \mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} \Phi)(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{(-1)^k \delta_{\rho}^k \varphi(b)}{k!} \left( \frac{b^{\rho} - x^{\rho}}{\rho} \right)^k.$$

*No caso em que  $0 < \alpha < 1$ , temos que*

$$({}^{\rho} \mathcal{J}_{b^-}^{\alpha} {}^{\rho} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \Phi)(x) = \Phi(x) - \Phi(a) \quad e \quad ({}^{\rho} \mathcal{J}_{b^-}^{\alpha} {}^{\rho} \mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} \Phi)(x) = \Phi(x) - \Phi(b). \quad (24)$$

*Demonstração.* (a) A partir dos seguintes resultados,

$$({}^{\rho} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha, \rho} \mathcal{J}_{a^+}^{\alpha} \varphi)(x) = \varphi(x) \quad \text{e} \quad ({}^{\rho} \mathcal{D}_{b^-}^{\alpha, \rho} \mathcal{J}_{b^-}^{\alpha} \varphi)(x) = \varphi(x),$$

seguem imediatamente as Eqs.(22).

(b) Seja  $\alpha \notin \mathbb{N}$ . Utilizando a definição, Eq.(10), podemos escrever

$$({}^{\rho} \mathcal{J}_{a^+}^{\alpha, \rho} {}^{\rho} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \Phi)(x) = ({}^{\rho} \mathcal{J}_{a^+}^{\alpha, \rho} \mathcal{J}_{a^+}^{n-\alpha} \delta_{\rho}^n \Phi)(x) = ({}^{\rho} \mathcal{J}_{a^+}^n \delta_{\rho}^n \Phi)(x),$$

isto é, com o uso do Lema 1, segue a Eq.(23).

Em particular, se  $0 < \alpha < 1$ , temos que

$$\begin{aligned} ({}^{\rho} \mathcal{J}_{a^+}^{\alpha} \delta_{\rho}^{\alpha} \Phi)(x) &= \int_a^x t^{\rho-1} \left( t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right) \Phi(t) dt \\ &= \int_a^x \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right) dt = \Phi(x) - \Phi(a). \end{aligned}$$

Por outro lado, para  $\alpha = 1$ , temos

$$({}^{\rho} \mathcal{J}_b^1 {}^{\rho} \mathcal{D}_{a^+}^1 \Phi)(x) = \int_a^b \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right) dt = \Phi(b) - \Phi(a).$$

□

## Conclusões

Neste trabalho, propusemos modificar a derivada fracionária generalizada de modo a obter a derivada fracionária generalizada com uma modificação do tipo Caputo. Apresentamos e demonstramos, teoremas associados à chamada derivada fracionária generalizada com uma modificação do tipo Caputo. Enfim, através de um teorema, obtivemos a relação entre a derivada fracionária generalizada e a respectiva modificação do tipo Caputo de onde, como casos particulares, recuperamos as relações envolvendo as derivadas conforme propostas por Caputo e por Caputo-Hadamard. Como uma aplicação, enunciamos e demonstramos o teorema fundamental do cálculo fracionário associado ao nosso operador.

A continuação deste trabalho consiste em resolver equações diferenciais fracionárias envolvendo as formulações da derivadas fracionárias no sentido de Caputo-Hadamard e a derivada fracionária generalizada com uma modificação do tipo Caputo, mencionando a vantagem de usar tais formulações. Para tanto, será conveniente utilizar a metodologia da transformada de Mellin. Também, estamos interessados em mostrar o resultado envolvendo uma regra do tipo Leibniz para o nosso operador (OLIVEIRA, 2017).

## Referências

CAPELAS DE OLIVEIRA, E.; TENREIRO MACHADO, J. A. Mathematical Problems in Engineering. **A review of definitions for fractional derivatives and integral.** p.6, 2014.

CONTHARTEZE GRIGOLETTO, E.; CAPELAS DE OLIVEIRA, E. Applied Mathematics. **Fractional version of the fundamental theorem of calculus.** v.4, p.23-33, 2013.

FIGUEIREDO CAMARGO, R.; CAPELAS DE OLIVEIRA, E. **Cálculo fracionário.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.



GAMBO, Y. Y. et al. Advances in Difference Equations. **On Caputo modification of the Hadamard fractional derivatives**, v. 2014, n. 1, p. 1-12, 2014.

KATUGAMPOLA, U. N. Applied Mathematics and Computation. **New approach to a generalized fractional integral**, v. 218, n. 3, p. 860-865, 2011.

KATUGAMPOLA, U. N. Bulletin of Mathematical Analysis and Applications. **A new approach to generalized fractional derivatives**, v. 6, n. 4, p. 1-15, 2014.

KILBAS, A. A.; SRIVASTAVA, H. M.; TRUJILLO, J. J. **Theory and Applications of Fractional Differential Equations**. v.204, Elsevier Science Inc. New York. 2006.

OLIVEIRA, D. S., **Sobre derivadas fracionárias com modificações do tipo Caputo**. 2017. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) - Unicamp, Campinas, (em andamento) 2017.

OLIVEIRA, D. S.; CAPELAS DE OLIVEIRA, E. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. **On a Caputo-type fractional derivative**, (submetido à publicação), 2017.

YOUNG, Z. **Basic theory of fractional differential equations**, Singapura: World Scientific, v.6, 2014.





## Solução da equação de Poisson através do método das interfaces imersas de altas ordens

*Miguel Angel Rojas Meza*  
ICMC, USP  
*migrojas@usp.br*

*Leandro Franco de Souza*  
Depto. de Matemática Aplicada e Estatística, ICMC, USP  
*lefraso@icmc.usp.br*

*José Alberto Cuminato*  
Depto. de Matemática Aplicada e Estatística, ICMC, USP  
*jacumina@icmc.usp.br*

**Resumo:** O presente trabalho tem como principal objetivo estudar o problema de Poisson unidimensional com constante variável por partes e propor uma solução através da implementação do método das interfaces imersas, utilizando diferenças finitas explícitas e compactas com o propósito de obter altas ordens de precisão numérica.

**Palavras-chave:** Mecânica dos Fluidos e Aplicações, Equação de Poisson, Método das Interfaces Imersas.

### Introdução

O potencial elétrico na dupla camada elétrica leva a um potencial de força, em termos das equações de Navier-Stokes que é então usado para simular o fluxo resultante. Em escoamentos bifásicos uma equação de Poisson é usada para se obter o campo de pressão.

O método conhecido como Método de Interface Imersa (MII) foi desenvolvido por Leveque-Li (1994) para melhorar a ordem de precisão do Método de Fronteira Imersa que inicialmente era de ordem um. Este método trata as equações com coeficientes descontínuos e são utilizados para resolver numericamente problemas de valor inicial e de contorno em domínios com geometrias irregulares. Para modelar as discontinuidades na interface, os coeficientes no cálculo das derivadas por diferenças finitas são modificados e termos de correção são adicionados e determinados dependendo do salto da função.

Na sequência do texto apresentamos as seções onde explicamos o método das Interfaces Imersas, detalhamos o esquema compacto de sexta ordem e as diferenças finitas explícitas de segunda, quarta e sexta ordem de convergência que são utilizadas na discretização das equações e, por fim, na última seção são mostrados alguns resultados obtidos onde verificamos as ordens de convergência dos diferentes métodos.

### Série de Taylor corrigida

Considere uma função  $f(x)$  com uma descontinuidade no ponto  $x = x_\alpha$ . Deseja-se utilizar a expansão em série de Taylor no ponto  $x_i$  para aproximar  $f(x)$  no ponto  $x_{i+1}$ . Assume-se que  $f(x)$  é analítica em todos os pontos do domínio  $D = \{x | x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}\}$  exceto no ponto  $x_\alpha$  onde há um salto (descontinuidade) no valor da função e/ou suas derivadas. Se  $x_i < x_\alpha$  a expansão em série de Taylor padrão

envolvendo  $x_\alpha$  não pode ser usada para aproximar  $f(x_{i+1})$  a menos que um termo de correção  $J_\alpha$  seja adicionado:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f^{(1)}(x_i)h + f^{(2)}(x_i)\frac{h^2}{2!} + \dots + J_\alpha, \quad (1)$$

onde

$$J_\alpha = [f]_\alpha + [f^{(1)}]_\alpha(h^+) + \frac{1}{2!}[f^{(2)}]_\alpha(h^+)^2 + \dots, \quad (2)$$

$h = x_{i+1} - x_i$  e  $h^+ = x_{i+1} - x_\alpha$ . O termo  $[\phi]_\alpha$  representa o salto no valor da função em  $x = x_\alpha$ , isto é,

$$[\phi]_\alpha = \lim_{x \rightarrow x_\alpha^+} \phi(x) - \lim_{x \rightarrow x_\alpha^-} \phi(x), \quad (3)$$

assim, o termo  $[f]_\alpha$  representa o salto no valor da função em  $x = x_\alpha$ ,  $[f^{(1)}]_\alpha$  representa o salto no valor da primeira derivada da função e assim por diante. A Equação (1) é denominada *série de Taylor corrigida*. A prova da existência dessa expansão é dada por Wiegmann-Bube (2000).

Considere-se o caso em que  $x_i < x_\alpha$ . Usando o termo de correção  $J_\alpha$  pode-se agora, modificar qualquer método de diferenças finitas, e o método corrigido pelo salto irá manter a ordem de precisão do original quando o estêncil envolver uma singularidade/salto da função.

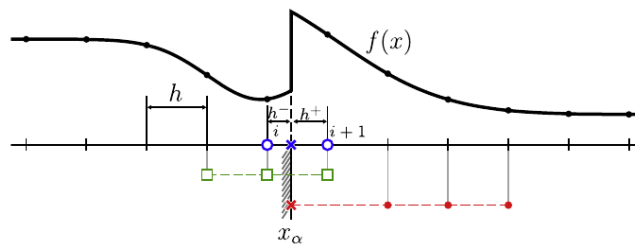


Figura 1: Ilustração da discretização explícita do domínio para o método de segunda ordem.

## Esquema Compacto de Alta Ordem

Um esquema de diferenças finitas compactas unidimensional de sexta ordem com cinco pontos será utilizado para aproximar numericamente a segunda derivada espacial, o esquema é dado por

$$2f_{i-1}^{(2)} + 11f_i^{(2)} + 2f_{i+1}^{(2)} = \frac{3}{4h^2}f_{i-2} + \frac{12}{h^2}f_{i-1} - \frac{51}{2h^2}f_i + \frac{12}{h^2}f_{i+1} + \frac{3}{4h^2}f_{i+2} + C_I, \quad (4)$$

com  $C_I = (L_I^1 J_{\alpha 2}^* - R_I^1 J_{\alpha 0}^*) + (L_I^2 J_{\alpha 2} - R_I^2 J_{\alpha 0})$ , em que

$$\begin{cases} L_I^1 = 0 & L_I^2 = 0 & R_I^1 = 0 & \text{e} & R_I^2 = \frac{3}{4h^2} & \text{se } I = i-1 \text{ ou } I = i+2, \\ L_I^1 = 0 & L_I^2 = 2 & R_I^1 = \frac{3}{4h^2} & \text{e} & R_I^2 = \frac{12}{h^2} & \text{se } I = i \text{ ou } I = i+1, \end{cases} \quad (5)$$

Nestes esquemas, o salto ocorre em  $x_i < x_\alpha < x_{i+1}$ , então quando  $I = i+1$  ou  $I = i+2$ , nestes casos  $h^+ = x_{i+1} - x_\alpha$

definimos,

$$J_{\alpha 0} = \sum_{k=0}^7 \frac{(h^+)^k}{k!} [f^{(k)}]_{\alpha}, \quad (6)$$

$$J_{\alpha 2} = \sum_{k=2}^7 \frac{(h^+)^{k-2}}{(k-2)!} [f^{(k)}]_{\alpha}, \quad (7)$$

$$J_{\alpha 0}^* = \sum_{k=0}^7 \frac{(h+h^+)^k}{k!} [f^{(k)}]_{\alpha}, \quad (8)$$

$$J_{\alpha 2}^* = \sum_{k=2}^7 \frac{(h+h^+)^{k-2}}{(k-2)!} [f^{(k)}]_{\alpha}. \quad (9)$$

quando  $I = i$  ou  $I = i - 1$ , nestes casos  $h^- = x_{\alpha} - x_{i-1}$  e

$$J_{\alpha 0} = \sum_{k=0}^7 (-1)^{k+1} \frac{(h^-)^k}{k!} [f^{(k)}]_{\alpha}, \quad (10)$$

$$J_{\alpha 2} = \sum_{k=2}^7 (-1)^{k+1} \frac{(h^-)^{k-2}}{(k-2)!} [f^{(k)}]_{\alpha}, \quad (11)$$

$$J_{\alpha 0}^* = \sum_{k=0}^7 (-1)^{k+1} \frac{(h+h^-)^k}{k!} [f^{(k)}]_{\alpha}, \quad (12)$$

$$J_{\alpha 2}^* = \sum_{k=2}^7 (-1)^{k+1} \frac{(h+h^-)^{k-2}}{(k-2)!} [f^{(k)}]_{\alpha}. \quad (13)$$

os saltos podem ser obtidos por

$$[f^{(n)}]_{\alpha} = f_{+}^{(n)} - f_{-}^{(n)}, \quad (14)$$

em que  $f_{+}^{(n)}$  e  $f_{-}^{(n)}$  podem ser obtidos pelas interpolações

$$f_{+}^{(n)} = c_{n\alpha} f_{\alpha} + c_{n_{i+2}} f_{i+2} + c_{n_{i+3}} f_{i+3} + c_{n_{i+4}} f_{i+4} + c_{n_{i+5}} f_{i+5} + c_{n_{i+6}} f_{i+6} + c_{n_{i+7}} f_{i+7} + c_{n_{i+8}} f_{i+8},$$

$$f_{-}^{(n)} = c_{n\alpha} f_{\alpha} + c_{n_{i-1}} f_{i-1} + c_{n_{i-2}} f_{i-2} + c_{n_{i-3}} f_{i-3} + c_{n_{i-4}} f_{i-4} + c_{n_{i-5}} f_{i-5} + c_{n_{i-6}} f_{i-6} + c_{n_{i-7}} f_{i-7}.$$

Os coeficientes  $c_n$  para calcular

$$f_{\alpha}^{(n)} = c_{\alpha} f_{\alpha} + c_i f_i + c_{i+1} f_{i+1} + c_{i+2} f_{i+2} + c_{i+3} f_{i+3} + c_{i+4} f_{i+4} + c_{i+5} f_{i+5} + c_{i+6} f_{i+6}, \quad (15)$$

são obtidos da resolução do sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & h_i & h_{i+1} & h_{i+2} & h_{i+3} & h_{i+4} & h_{i+5} & h_{i+6} \\ 0 & h_i^2 & h_{i+1}^2 & h_{i+2}^2 & h_{i+3}^2 & h_{i+4}^2 & h_{i+5}^2 & h_{i+6}^2 \\ 0 & h_i^3 & h_{i+1}^3 & h_{i+2}^3 & h_{i+3}^3 & h_{i+4}^3 & h_{i+5}^3 & h_{i+6}^3 \\ 0 & h_i^4 & h_{i+1}^4 & h_{i+2}^4 & h_{i+3}^4 & h_{i+4}^4 & h_{i+5}^4 & h_{i+6}^4 \\ 0 & h_i^5 & h_{i+1}^5 & h_{i+2}^5 & h_{i+3}^5 & h_{i+4}^5 & h_{i+5}^5 & h_{i+6}^5 \\ 0 & h_i^6 & h_{i+1}^6 & h_{i+2}^6 & h_{i+3}^6 & h_{i+4}^6 & h_{i+5}^6 & h_{i+6}^6 \\ 0 & h_i^7 & h_{i+1}^7 & h_{i+2}^7 & h_{i+3}^7 & h_{i+4}^7 & h_{i+5}^7 & h_{i+6}^7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{\alpha} \\ c_i \\ c_{i+1} \\ c_{i+2} \\ c_{i+3} \\ c_{i+4} \\ c_{i+5} \\ c_{i+6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\delta_{n0} \\ 1\delta_{n1} \\ 2!\delta_{n2} \\ 3!\delta_{n3} \\ 4!\delta_{n4} \\ 5!\delta_{n5} \\ 6!\delta_{n6} \\ 7!\delta_{n7} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

em que  $h_i = x_i - x_{\alpha}$  e  $\delta_{ij}$  é a função delta de Kronecker.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}. \quad (17)$$

## Esquemas Explícitos

Os coeficientes da diferenciação dos diferentes esquemas foram obtidos de Fornberg (1988). Neste artigo são apresentadas várias tabelas com diversos esquemas para a segunda derivada, onde variam-se os coeficientes de cada esquema, dependendo da posição do pontos onde gera-se uma equação de diferenças finitas. Para obter segunda ordem de convergência na segunda derivada espacial, utilizamos o seguinte esquema numérico

$$f_i^2 = R_{i-1}^2 f_{i-1} + R_i^2 f_i + R_{i+1}^2 f_{i+1} + C_I, \quad (18)$$

onde  $R_{i-1}^2 = R_{i+1}^2 = \frac{1}{h^2}$ ,  $R_i^2 = -\frac{2}{h^2}$  e  $C_I = -R_i^2 J_{\alpha 0}$ .

Neste esquema,  $I = i + 1$  se o salto ocorre em  $x_i < x_\alpha < x_{i+1}$ , e neste caso  $h^+ = x_{i+1} - x_\alpha$  e

$$J_{\alpha 0} = [f^{(0)}]_\alpha + (h^+) [f^{(1)}]_\alpha + \frac{(h^+)^2}{2!} [f^{(2)}]_\alpha + \frac{(h^+)^3}{3!} [f^{(3)}]_\alpha. \quad (19)$$

Se o salto ocorre em  $x_{i-1} < x_\alpha < x_i$ , então  $I = i - 1$  e neste caso  $h^- = x_\alpha - x_{i-1}$  e

$$J_{\alpha 0} = -[f^{(0)}]_\alpha + (h^-) [f^{(1)}]_\alpha - \frac{(h^-)^2}{2!} [f^{(2)}]_\alpha + \frac{(h^-)^3}{3!} [f^{(3)}]_\alpha. \quad (20)$$

Os saltos podem ser obtidos por

$$[f^{(n)}]_\alpha = f_+^{(n)} - f_-^{(n)}, \quad (21)$$

onde  $f_+^{(n)}$  e  $f_-^{(n)}$  podem ser obtidos pelas interpolações

$$\begin{aligned} f_+^{(n)} &= c_{n\alpha+} f_\alpha + c_{n_{i+2}} f_{i+2} + c_{n_{i+3}} f_{i+3} + c_{n_{i+4}} f_{i+4}, \\ f_-^{(n)} &= c_{n\alpha-} f_\alpha + c_{n_{i-1}} f_{i-1} + c_{n_{i-2}} f_{i-2} + c_{n_{i-3}} f_{i-3}. \end{aligned}$$

Os coeficientes  $c_n$  para calcular

$$f_\alpha^{(n)} = c_\alpha f_\alpha + c_i f_i + c_{i+1} f_{i+1} + c_{i+2} f_{i+2}, \quad (22)$$

são obtidos da resolução do sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & h_i & h_{i+1} & h_{i+2} \\ 0 & h_i^2 & h_{i+1}^2 & h_{i+2}^2 \\ 0 & h_i^3 & h_{i+1}^3 & h_{i+2}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\alpha \\ c_i \\ c_{i+1} \\ c_{i+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0! \delta_{n0} \\ 1! \delta_{n1} \\ 2! \delta_{n2} \\ 3! \delta_{n3} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

onde  $h_i = x_i - x_\alpha$  e  $\delta_{ij}$  é a função delta de Kronecker.

Um esquema de diferenças finitas explícitas unidimensional de quarta ordem com cinco pontos será utilizado para aproximar numericamente a segunda derivada espacial, o esquema é dado por

$$f_i^{(2)} = -\frac{1}{12h^2} f_{i-2} + \frac{4}{3h^2} f_{i-1} - \frac{5}{2h^2} f_i + \frac{4}{3h^2} f_{i+1} - \frac{1}{12h^2} f_{i+2} + C_I, \quad (24)$$

com  $C_I = -(R_I^1 J_{\alpha 0}^* + R_I^2 J_{\alpha 0})$ , em que

$$\begin{cases} R_I^1 = 0 & \text{e } R_I^2 = \frac{4}{3h^2} & \text{se } I = i-1 \text{ ou } I = i+2, \\ R_I^1 = -\frac{1}{12h^2} & \text{e } R_I^2 = \frac{4}{3h^2} & \text{se } I = i \text{ ou } I = i+1, \end{cases} \quad (25)$$

Nestes esquemas o salto ocorre em  $x_i < x_\alpha < x_{i+1}$ , então quando  $I = i + 1$  ou  $I = i + 2$ , nestes casos  $h^+ = x_{i+1} - x_\alpha$ ,

$$J_{\alpha 0} = \sum_{k=0}^5 \frac{(h^+)^k}{k!} [f^{(k)}]_\alpha, \quad (26)$$

$$J_{\alpha 0}^* = \sum_{k=0}^5 \frac{(h + h^+)^k}{k!} [f^{(k)}]_\alpha, \quad (27)$$

quando  $I = i$  ou  $I = i - 1$ , nestes casos  $h^- = x_\alpha - x_{i-1}$  e

$$J_{\alpha 0} = \sum_{k=0}^5 (-1)^{k+1} \frac{(h^-)^k}{k!} [f^{(k)}]_\alpha, \quad (28)$$

$$J_{\alpha 0}^* = \sum_{k=0}^5 (-1)^{k+1} \frac{(h+h^-)^k}{k!} [f^{(k)}]_\alpha, \quad (29)$$

onde

$$f_\alpha^{(n)} = c_\alpha f_\alpha + c_i f_i + c_{i+1} f_{i+1} + c_{i+2} f_{i+2} + c_{i+3} f_{i+3} + c_{i+4} f_{i+4}, \quad (30)$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & h_i & h_{i+1} & h_{i+2} & h_{i+3} & h_{i+4} \\ 0 & h_i^2 & h_{i+1}^2 & h_{i+2}^2 & h_{i+3}^2 & h_{i+4}^2 \\ 0 & h_i^3 & h_{i+1}^3 & h_{i+2}^3 & h_{i+3}^3 & h_{i+4}^3 \\ 0 & h_i^4 & h_{i+1}^4 & h_{i+2}^4 & h_{i+3}^4 & h_{i+4}^4 \\ 0 & h_i^5 & h_{i+1}^5 & h_{i+2}^5 & h_{i+3}^5 & h_{i+4}^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\alpha \\ c_i \\ c_{i+1} \\ c_{i+2} \\ c_{i+3} \\ c_{i+4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\delta_{n0} \\ 1\delta_{n1} \\ 2!\delta_{n2} \\ 3!\delta_{n3} \\ 4!\delta_{n4} \\ 5!\delta_{n5} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

as interpolações para representar os termos  $[f^{(n)}]_\alpha$  podem ser calculadas pelas fórmulas 30, onde os coeficientes de cada combinação linear é obtida a partir do sistema 31.

Para obtermos um esquema de sexta ordem vamos considerar o seguinte estêncil centrado de sete pontos

$$f_i^{(2)} = \frac{1}{90h^2} f_{i-3} - \frac{3}{20h^2} f_{i-2} + \frac{3}{2h^2} f_{i-1} - \frac{49}{18h^2} f_i + \frac{3}{2h^2} f_{i+1} - \frac{3}{20h^2} f_{i+2} + \frac{1}{90h^2} f_{i+3} + C_I, \quad (32)$$

com  $C_I = -(R_I^1 J_{\alpha 0}^* + R_I^2 J_{\alpha 0} + R_I^3 J_{\alpha 0}^{**})$ , onde

$$\left\{ \begin{array}{l} R_I^1 = -\frac{3}{20h^2} \quad R_I^2 = \frac{3}{2h^2} \quad \text{e} \quad R_I^3 = \frac{1}{90h^2} \quad \text{se} \quad I = i \quad \text{ou} \quad I = i + 1, \\ R_I^1 = \frac{1}{90h^2} \quad R_I^2 = -\frac{3}{20h^2} \quad \text{e} \quad R_I^3 = 0 \quad \text{se} \quad I = i - 1 \quad \text{ou} \quad I = i + 2, \\ R_I^1 = 0 \quad R_I^2 = \frac{1}{90h^2} \quad \text{e} \quad R_I^3 = 0 \quad \text{se} \quad I = i - 2 \quad \text{ou} \quad I = i + 3. \end{array} \right. \quad (33)$$

Nestes esquemas, o salto ocorre em  $x_i < x_\alpha < x_{i+1}$ , então quando  $I = i + 1$ ,  $I = i + 2$  ou  $I = i + 3$ . Nestes casos  $h^+ = x_{i+1} - x_\alpha$ , definimos  $J_{\alpha 0}^{**} = \sum_{k=0}^7 \frac{(2h+h^+)^k}{k!} [f^{(k)}]_\alpha$ , sendo que os termos de correção  $J_{\alpha 0}$  e  $J_{\alpha 0}^*$  são os mesmo utilizados em 6.

Quando  $I = i$ ,  $I = i - 1$  ou  $I = i - 2$ , nestes casos  $h^- = x_\alpha - x_{i-1}$  e  $J_{\alpha 0}^{**} = \sum_{k=0}^7 (-1)^{k+1} \frac{(2h+h^+)^k}{k!} [f^{(k)}]_\alpha$  e os outros dois termos de correção  $J_{\alpha 0}$  e  $J_{\alpha 0}^*$  serão os utilizados na Equação (10) e cada uma das interpolações serão obtidas mediante o sistema da Equação (16).

## Resultados Numéricos

São apresentados resultados obtidos através das aplicações das metodologias no seguinte problema elíptico unidimensional

$$(\beta u_x)_x = f, \quad 0 < x < 1 \quad \text{e} \quad 0 < \alpha < 1, \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (34)$$

$$\beta(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } 0 \leq x \leq \alpha \\ 1/2, & \text{se } \alpha < x \leq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -8 \cos(2x), & \text{se } 0 \leq x \leq \alpha \\ -2 \cos(2x-2), & \text{se } \alpha < x \leq 1 \end{cases}$$

A solução exata do problema é dada por

$$u(x) = \begin{cases} \text{sen}(2x), & \text{se } 0 \leq x \leq \alpha \\ \cos(2x-2) - 1, & \text{se } \alpha < x \leq 1 \end{cases}$$

Neste exemplo da Equação (34) do problema de Poisson unidimensional com coeficiente constante por parte, apresenta-se um salto em  $\alpha = 0.56789$  para a solução numérica da metodologia *M1* de Linnick-Fasel (2005) e logo em seguida é comparada com a solução do mesmo problema com salto em  $\alpha = 0.44$ , desta vez com a metodologia *M2* de Li-Ito (2006). Pode-se observar através da Figura (2) no lado esquerdo que o Método de Interface Imersa captura com muita precisão esses saltos em cada uma das metodologias. Na Tabela (1) temos análise de convergência ilustrada no lado direito da Figura (2) onde obtemos a segunda ordem de convergência para estas duas metodologias.

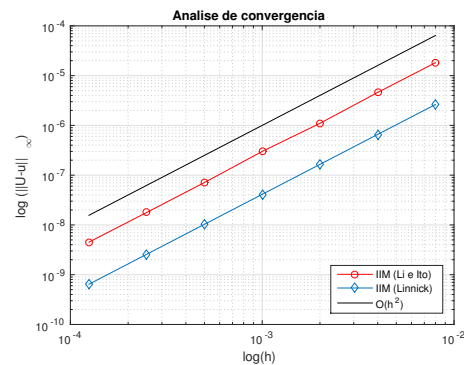
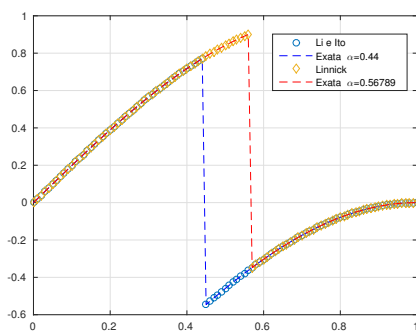


Figura 2: Solução e Erro de segunda ordem para  $(\beta u_x)_x = f$ ,  $\alpha = 0.56789$  para *M1* e  $\alpha = 0.44$  para *M2*.

Tabela 1: Erro cometido no cálculo da solução aproximada de segunda ordem no problema 34

$h$	$\ U - u\ _\infty M1$	$r1 - Li e Ito$	$\ U - u\ _\infty M2$	$r2 - Linnick$
1/250	0.0000046		6.5864e-07	
1/500	0.0000011	2.0641e+00	1.6476e-07	1.9991e+00
1/1000	0.0000003	1.8744e+00	4.1196e-08	1.9998e+00
1/2000	7.12365e-08	2.0744e+00	1.0299e-08	2.0000e+00
1/4000	1.78228e-08	1.9989e+00	2.5747e-09	2.0001e+00
1/8000	4.51009e-09	1.9822e+00	6.4305e-10	2.0014e+00

Considerando novamente o exemplo da Equação (34), resolvendo-se agora com a aplicação da metodologia *M1* de diferenças finitas explícitas de cinco pontos e com a metodologia *M2* de diferenças finitas compactas. Ambas são baseadas de Linnick-Fasel (2005). O primeiro caso apresenta um salto em  $\alpha = 0.3456$  para a solução numérica de diferenciação explícita e logo em seguida é resolvido o mesmo problema com a metodologia compacta, neste caso o salto ocorre em  $\alpha = 0.768$ . Pode-se observar através da Figura (3) (lado esquerdo) os resultados para cada uma das metodologias. Na Tabela (2) e na análise ilustrado na Figura (3) (lado direito) mostra-se a quarta ordem de convergência destas duas metodologias.



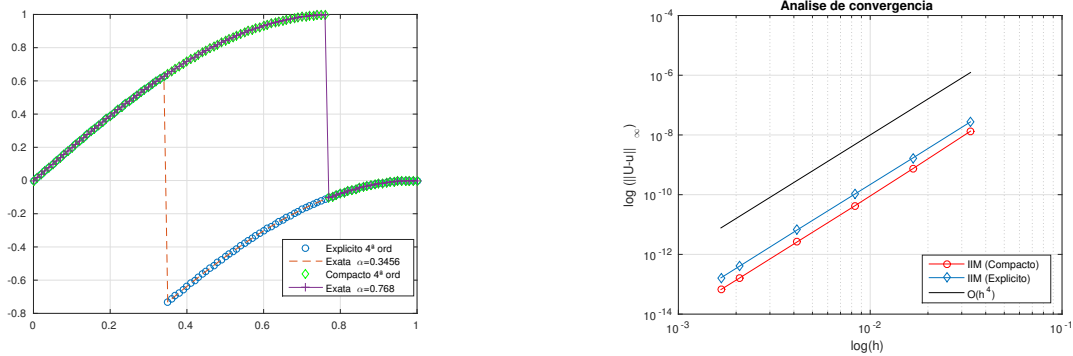


Figura 3: Solução e Erro de quarta ordem para  $(\beta u_x)_x = f$ ,  $\alpha = 0.3456$  para  $M1$  e  $\alpha = 0.768$  para  $M2$ .

Tabela 2: Erro cometido no cálculo da solução aproximada de quarta ordem, problema 34

$h$	$\ U - u\ _{\infty} M1$	$r1-Compacto$	$\ U - u\ _{\infty} M2$	$r2-Explícito$
1/30	1.3397e-08		2.7487e-08	
1/60	7.3803e-10	4.1820e+00	1.6839e-09	4.0289e+00
1/120	4.2753e-11	4.1096e+00	1.0570e-10	3.9938e+00
1/240	2.6369e-12	4.0191e+00	6.6243e-12	3.9961e+00
1/480	1.6162e-13	4.0282e+00	4.0319e-13	4.0382e+00
1/600	6.6419e-14	3.9852e+00	1.6415e-13	4.0272e+00

Foram aplicadas, também, as metodologias de alta ordem no exemplo da Equação (34), onde novamente utilizou-se as diferenças finitas compactas e explícitas de Linnick e Fasel. O primeiro caso apresenta um salto em  $\alpha = 0.12345$  para a solução numérica de diferenciação compacta e logo em seguida é resolvido o mesmo problema com a metodologia explícita, neste caso o salto ocorrendo em  $\alpha = 0.8642$ . Pode-se observar através da Figura (4) no lado esquerdo como o Método de Interface Imersa captura com muita precisão esses saltos de descontinuidades em cada uma das duas metodologias implementadas. Na Tabela (3) e na análise ilustrado no lado direito da Figura (4) tem-se sétima ordem de convergência nas diferenças finitas compactas e é atingida oitava ordem na metodologia explícita. Em ambos casos tem-se uma super convergência, já que nosso intuito era apresentar as metodologias de sexta ordem.

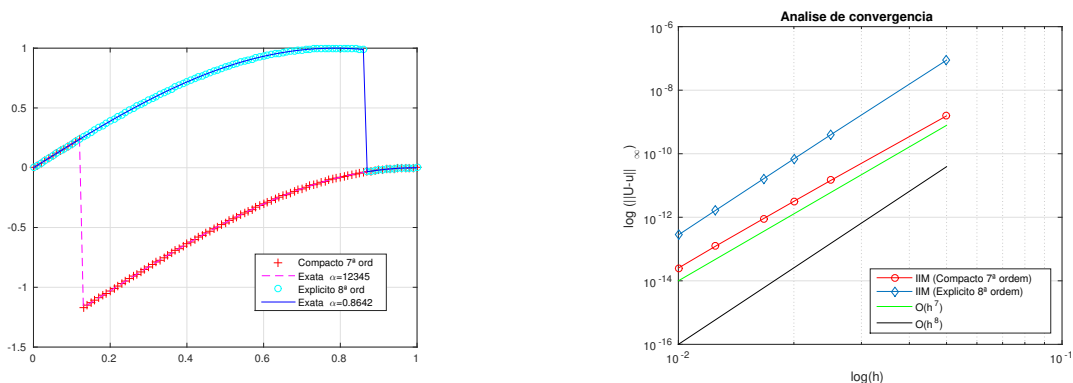


Figura 4: Solução e Erro de alta ordem para  $(\beta u_x)_x = f$ ,  $\alpha = 0.12345$  para  $M1$  e  $\alpha = 0.8642$  para  $M2$ .

Tabela 3: Erro cometido no cálculo da solução aproximada de alta ordem, problema 34

$h$	$\ U - u\ _{\infty} M1$	<i>r1-Compacto</i>	$\ U - u\ _{\infty} M2$	<i>r2-Explícito</i>
1/20	1.5544e-09		8.8023e-08	
1/40	1.4634e-11	6.7309e+00	4.0100e-10	7.7781e+00
1/50	3.1769e-12	6.8451e+00	6.8768e-11	7.9018e+00
1/60	9.0310e-13	6.8990e+00	1.6206e-11	7.9276e+00
1/80	1.2311e-13	6.9269e+00	1.6484e-12	7.9447e+00
1/100	2.5202e-14	7.1082e+00	2.7805e-13	7.9759e+00

## Conclusões

Podemos observar através das tabelas e nas figuras da seção anterior que o Método da Interface Imersa captura com muita precisão o salto de descontinuidade e verificamos as ordens de convergência das respectivas metodologias.

## Agradecimentos

Ao CNPq (Processo:130111/1025-5), pelo suporte financeiro.

## Referências

FORNBERG, B. Mathematics of computation. **Generation of finite difference formulas on arbitrarily spaced grids**, v. 51, n. 184, p. 699-706, 1988.

LEVEQUE, R.; LI, Z. SIAM Journal on Numerical Analysis. **The immersed interface method: numerical solutions of PDEs involving interfaces and irregular domains**, v.31, p. 1019-1044, 1994.

LI, Z.; ITO, K. **The immersed interface method: numerical solutions of PDEs involving interfaces and irregular domains**, ed. Philadelphia: Siam, 2006.

LINNICK, M.; FASEL, H. Journal of Computational Physics. **A high-order immersed interface method for simulating unsteady incompressible flows on irregular domains**, v. 204, p. 157-192, 2005.

WIEGMANN, A.; BUBE, K. SIAM Journal on Numerical Analysis. **The explicit-jump immersed interface method: finite difference methods for PDEs with piecewise smooth solutions**, v. 37, p. 827-862, 2000.

## Solução do problema de Fluxo de Potência Ótimo com Restrição de Segurança com controles discretos

*Marina Teixeira Costa*

*Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”; Faculdade de Engenharia de Bauru  
marinateixeiracosta@gmail.com*

*Adilson Preto de Godoi*

*Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”; Faculdade de Engenharia de Bauru  
adilsongodoi@hotmail.com*

*Edméa Cássia Baptista*

*Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”; Faculdade de Ciências  
baptista@fc.unesp.br*

*Leonardo Nepomuceno*

*Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”; Faculdade de Engenharia de Bauru  
leo@feb.unesp.br*

**Resumo:** O problema de Fluxo de Potência Ótimo determina a melhor condição de operação de um sistema elétrico de potência. Das classes de Fluxo de Potência ótimo existentes, o Fluxo de Potência Ótimo com Restrição de Segurança apresenta-se como uma importante ferramenta para os Operadores dos Sistemas de Transmissão, tanto para o planejamento operacional, quanto para a precificação da energia. Seu objetivo é minimizar os custos operacionais de geração de energia levando em consideração as restrições decorrentes da operação do sistema sob um conjunto de contingências. Neste trabalho investiga-se o Fluxo de Potência Ótimo com Restrição de Segurança em relação à sua formulação, dificuldades computacionais e método de solução. Para um tratamento do problema mais próximo à realidade adotam-se os *taps* dos transformadores como variáveis discretas. Estas são tratadas através de um método que penaliza a função objetivo quando assumem valores não discretos. Desta forma, o problema não linear discreto é transformado em um problema contínuo e o método Primal-Dual Barreira Logarítmica é utilizado em sua resolução. Testes computacionais são apresentados com o problema de Fluxo de Potência Ótimo com Restrição de Segurança associado ao sistema teste IEEE 14 barras. Os resultados obtidos e as comparações realizadas comprovam a eficiência do método escolhido.

**Palavras-chave:** Otimização, Fluxo de Potência Ótimo, Fluxo de Potência Ótimo com Restrição de Segurança, Método Primal-Dual Barreira Logarítmica.

### Introdução

Pode-se citar como uma das classes de problemas de Fluxo de Potência Ótimo (FPO), o FPO com Restrição de Segurança (FPORS), o qual leva em consideração as restrições decorrentes da operação de um Sistema Elétrico de Potência sob um conjunto de contingências (interrupção de linhas de transmissão e/ou geradores) o qual é formulado como um problema não-linear, não-convexo e de grande porte, e com variáveis contínuas e discretas (CAPITANESCU et al, 2011).

Segundo Capitanescu et al. (2011), o problema de FPORS é uma importante ferramenta para os operadores dos sistemas de transmissão, tanto para o planejamento operacional do sistema, quanto para a precificação da energia. Vários modelos são encontrados na literatura para a representação desse problema.

Propõe-se, neste trabalho, a investigação do problema de FPORS, através do modelo apresentado por Capitanescu et al. (2011) e sua resolução utilizando o Método Primal-Dual de Barreira Logarítmica, considerando a natureza discreta dos *taps* dos transformadores.

Destaca-se que, de modo geral, nas abordagens da literatura para a resolução dos problemas de FPO, as variáveis de controle discretas, como por exemplo os *taps* dos transformadores, são

modeladas como contínuas, o que distancia os resultados obtidos pela resolução do problema, da realidade do sistema elétrico, pois alguns controles podem ser ajustados apenas por passos discretos.

Foi utilizado, neste trabalho, um método para tratar as variáveis discretas do problema (os *taps* dos transformadores) através de uma função que penaliza a função objetivo quando as variáveis em questão assumem valores não discretos (SOLER, 2011). Desta forma, o problema com variáveis discretas é transformado em um problema de variáveis contínuas e pode ser resolvido pelo Método Primal-Dual de Barreira Logarítmica.

A formulação clássica do FPORS, baseada em Capitanescu et al. (2011), é apresentada como um problema de dois estágios de decisão. As primeiras decisões são denominadas de controles preventivos, em um estado de funcionamento do sistema totalmente conhecido, e têm um efeito direto sobre a função de custo. Os controles preventivos garantem a segurança do sistema no caso de ocorrência de uma contingência específica, sem ter a necessidade do Operador do Sistema de Transmissão tomar ações de correção após esta contingência. As decisões do segundo estágio correspondem a controles corretivos hipotéticos, que só serão aplicados após a ocorrência de determinada contingência para garantir a estabilidade de operação do sistema. Neste trabalho, a contingência considerada é a interrupção de uma das linhas do Sistema Elétrico.

Os problemas de FPO, FPORS preventivo e FPORS corretivo foram resolvidos através do Método Primal-Dual Barreira Logarítmica utilizado no pacote de otimização KNITRO em interface com a plataforma GAMS. Neste trabalho, consideram-se os *taps* dos transformadores como variáveis discretas. E utilizou-se a estratégia apresentada em Soler, (2011), para o tratamento das variáveis discretas através de uma função penalidade senoidal.

## O modelo do FPORS

A formulação convencional do problema de FPORS, apresentada em Capitanescu et al. (2011) consiste na extensão do problema de FPO de modo a incorporar restrições das redes de transmissão associadas às configurações  $k$ ,  $k=1, \dots, c$ , dadas em função de contingências no sistema. O FPORS é matematicamente descrito em (1)-(8):

$$\text{Minimizar } f(x_0, u_0) \quad (1)$$

$$\text{sujeito a: } g_0(x_0, u_0) = 0 \quad (2)$$

$$h_0(x_0, u_0) \leq L_t \quad (3)$$

$$g_k^s(x_k^s, u_0) = 0, \quad k = 1, \dots, c \quad (4)$$

$$h_k^s(x_k^s, u_0) \leq L_s, \quad k = 1, \dots, c \quad (5)$$

$$g_k(x_k, u_k) = 0, \quad k = 1, \dots, c \quad (6)$$

$$h_k(x_k, u_k) \leq L_m, \quad k = 1, \dots, c \quad (7)$$

$$|u_k - u_0| \leq \overline{\Delta u_k}, \quad k = 1, \dots, c \quad (8)$$

em que adotam-se  $k=0$  para a configuração de pré-contingência e  $k=1, \dots, c$  para as  $c$  configurações de pós-contingência.

Têm-se que:  $x_k^s$  é o vetor de variáveis dependentes para o estado preventivo pós-contingência, que é observado em um curto período de tempo (antes da ação corretiva do operador);  $x_k$  é o vetor de variáveis dependentes para o estado corretivo pós-contingência;  $u_k$  é o vetor de variáveis controláveis do estado corretivo pós-contingência;  $\overline{\Delta u_k} = T_k du_k/dt$  é o vetor de máximos ajustes permitidos para as variáveis de controle entre o caso básico e o  $k$ -ésimo estado de pós-contingência;  $T_k$  é o intervalo de tempo disponível para as ações corretivas para garantir a factibilidade do estado pós-contingência;

$du_k/dt$  é a taxa de alteração das variáveis de controle, em resposta à contingência, e,  $L_s, L_m, L_l$  denotam, respectivamente, os limites de operação de curto (emergência), médio e longo prazos (normal). Estes limites devem satisfazer as relações  $L_l \leq L_m \leq L_s$ , pois os limites que são suportados por um equipamento em longo prazo são menores do que os limites que ele pode suportar em curto período. Observa-se que (1)-(3) determina o problema de FPO.

### Método Primal-Dual Barreira Logarítmica

O método PDBL, é um método da classe de métodos de pontos interiores, e é o mais utilizado devido a sua eficiência e facilidade de implementação.

Seja o problema de otimização não-linear restrito :

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(x) \\ & \text{sujeito a: } g_i(x)=0, i=1,\dots,p \\ & \quad \quad \quad h_j(x)\leq 0, j=1,\dots,m \end{aligned} \quad (9)$$

em que:  $x \in \mathbb{R}^n, g(x) \in \mathbb{R}^p, h(x) \in \mathbb{R}^m$ , e as funções são de classe  $C^2$ .

A resolução do problema (9) pelo método PDBL exige que as restrições de desigualdades sejam transformadas em igualdades por meio da introdução de variáveis de folga ou excesso positivas. Adiciona-se uma função barreira logarítmica à função objetivo como forma de garantir a não negatividade das variáveis de folga:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(x) - \mu \sum_{j=1}^p \ln(s_j) \\ & \text{sujeito a: } g_i(x)=0, i=1,\dots,m \\ & \quad \quad \quad h_j(x) + s_j = 0 \quad j=1,\dots,p \end{aligned} \quad (10)$$

em que variáveis de folga,  $s_j, j=1,\dots,p$ , são estritamente positivas e o parâmetro de barreira  $\mu$  é um número positivo que tende a zero. Quando isso acontece, a solução do subproblema apresentado em (10) aproxima-se de  $x^*$ , a solução do problema (9). A função Lagrangiana associada ao subproblema (10) é:

$$L(x,s,\lambda,\pi) = f(x) - \mu \sum_{j=1}^p \ln(s_j) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) - \sum_{j=1}^p \pi_j [h_j(x) - s_j] \quad (11)$$

sendo  $\lambda_i, i=1,\dots,m$  e  $\pi_j, j=1,\dots,p$  os vetores dos multiplicadores de Lagrange, denominados de variáveis duais.

As condições necessárias de primeira-ordem são aplicadas em (11), gerando o sistema (12):

$$\nabla_d L = 0 \quad (12)$$

sendo  $d = (x, s, \lambda, \pi)^T$ .

A equação (12) representa um sistema de equações não-lineares, o qual é resolvido pelo método de Newton para solução de sistemas não lineares, que gera um sistema linear do tipo  $W \Delta d = -\nabla_d L$ ; em que  $W$  é a matriz Hessiana da função Lagrangiana;  $\nabla_d L$  é o vetor gradiente e as direções de busca  $\Delta d = (\Delta x, \Delta s, \Delta \lambda, \Delta \pi)^T$  são utilizados para atualizar as variáveis  $x, s, \lambda$  e  $\pi$  como segue:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \alpha \Delta x & \lambda^{k+1} &= \lambda^k + \alpha \Delta \lambda \\ s^{k+1} &= s^k + \alpha \Delta s & \pi^{k+1} &= \pi^k + \alpha \Delta \pi \end{aligned} \quad (13)$$

em que o tamanho de passo  $\alpha \in (0,1]$  é determinado de modo a preservar a positividade do vetor  $s$  e o sinal do vetor  $\pi$ . Isto se traduz por:

$$\alpha_p^{\max} = \tau \min \left\{ \frac{s}{|\Delta s|} : \Delta s < 0 \right\} \quad \alpha_d^{\max} = \tau \min \left\{ \frac{\pi}{|\Delta \pi|} : \Delta \pi < 0 \right\}$$

sendo o escalar  $\tau \in (0,1)$  um valor determinado empiricamente, dado por  $\tau = 0,9995$ , ou de acordo com Wright (1995), pode ser calculado pela fórmula  $1 - 1/(9\sqrt{z})$ , onde  $z$  é o número de restrições de desigualdade do problema.

### Função Penalidade para o tratamento de Variáveis Discretas

O Método para tratamento das variáveis discretas, adotado neste trabalho, é baseado na estratégia apresentada em Soler (2011) que consiste em resolver uma sequência de Problemas de Otimização Não Linear cujas soluções convergem para uma solução do Problema de Otimização Não Linear com Variáveis Contínuas e Discretas (PONLCD). Os Problemas de Otimização Não Linear são obtidos incorporando à sua função objetivo uma função que penaliza a função objetivo quando as variáveis discretas assumem valores não discretos. Desta forma, as variáveis discretas são tratadas como contínuas e uma sequência de Problemas de Otimização Não Linear é resolvida, cujas soluções convergem para a solução do PONLCD.

Considere o seguinte PONLCD:

$$\text{Minimizar } f(x_0, u_0) \quad (14)$$

$$\text{sujeito a: } g_0(x_0, u_0) = 0 \quad (15)$$

$$h_0(x_0, u_0) \leq 0 \quad (16)$$

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x} \quad (17)$$

$$y_i \in D_{y_i} \quad (18)$$

em que  $D_{y_i}$  é um conjunto de valores discretos.

Na função objetivo (15) é inserida a função penalidade descrita por:

$$\Phi(y) = \sum_{i=1}^{n_y} \left[ \text{sen} \left( \frac{y_i}{s_i^{\text{sup}} - s_i^{\text{inf}}} \pi + \alpha \right) \right]^{2\beta} \quad (19)$$

em que:  $\beta$  é um número inteiro positivo;  $s_i^{\text{inf}}$  é o valor discreto mais próximo inferiormente de  $y_i$ ;  $s_i^{\text{sup}}$  é o valor discreto mais próximo superiormente de  $y_i$  e  $\alpha$  é uma constante tal que  $0 < \alpha < \pi$  determinada de modo que a função  $\Phi(y)$  se anule somente nos valores discretos de  $y$ .

A função (19) é denominada de função penalidade senoidal. Tem-se que:



$$\Phi(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y_i \in D_{y_i}, i=1, \dots, n_y \\ \delta > 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

ou seja,  $\Phi(y)$  assume valores positivos se, e somente se,  $y$  não assumir valores discretos.

Assim, encontrar uma solução ótima para o problema (14)-(18), é equivalente a resolver uma sequência de problemas modificados (20)-(24), com  $\gamma > 0$  atualizado no decorrer das iterações, os quais contêm apenas variáveis contínuas:

$$\text{Min } f(x, y) + \gamma \Phi(y) \quad (20)$$

$$\text{s.a: } h(x, y) = 0 \quad (21)$$

$$g(x, y) \geq 0 \quad (22)$$

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x} \quad (23)$$

$$\underline{y} \leq y \leq \bar{y} \quad (24)$$

em que  $\gamma > 0$  é o fator de ajuste que determina a amplitude da função  $\Phi$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n_y})$ , onde  $\underline{y}_i = \min D_{y_i}$ , para  $i=1, 2, \dots, n_y$ , e  $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{n_y})$  com  $\bar{y}_i = \max D_{y_i}$ , para  $i=1, 2, \dots, n_y$ .

A função objetivo, em (20), do problema modificado (20)-(24) é referida como função objetivo aumentada, pois é constituída da função objetivo do problema original acrescida da função  $\Phi(y)$ . Destaca-se que, a função penalidade (19) é contínua e diferenciável, assim o problema modificado (20)-(24) pode ser resolvido por métodos de otimização que envolvem o cálculo de derivadas.

## Testes Numéricos

Para a análise dos problemas FPO e de FPORS, conforme os modelos (1)-(3) e (1)-(8), respectivamente, utilizou-se um sistema teste de 14 barras (Figura 1). Associado a esse sistema, formula-se o problema de FPO. Posteriormente, foi simulada nesse sistema uma contingência na linha 2-4, conforme apresentado na Figura 2, e, a partir deste sistema contingenciado, resolvem-se os problemas de FPORS preventivo, (1)-(5) e de FPORS corretivo, (1)-(8).

O sistema IEEE 14 barras foi inicialmente escolhido para os testes neste trabalho devido a sua dimensão e disponibilidade dos dados, que foram extraídos do pacote gratuito MathPower 5.0 para MATLAB 7.12. Para escolha do ramo a ser retirado do sistema investigou-se a importância do mesmo no sistema, através da observação dos valores mais altos para os fluxos de potência ativa nas linhas.

Os testes foram realizados em um computador com processador Intel Core i5, 2.50GHz e 8.0 GB de memória RAM. Para a leitura do banco de dados do sistema, foram desenvolvidas em Scilab versão 5.4.1 (64-bit) implementações que geram as equações dos problemas de FPO, de FPORS preventivo e de FPO corretivo para posterior leitura pela plataforma GAMS.

Os problemas de FPO, FPORS preventivo e FPORS corretivo foram resolvidos através do Método Primal-Dual Barreira Logarítmica utilizado no pacote de otimização KNITRO em interface com a plataforma GAMS. Consideram-se os *taps* dos transformadores como variáveis discretas. E utilizou-se a estratégia apresentada para o tratamento de variáveis discretas através de uma função penalidade senoidal.

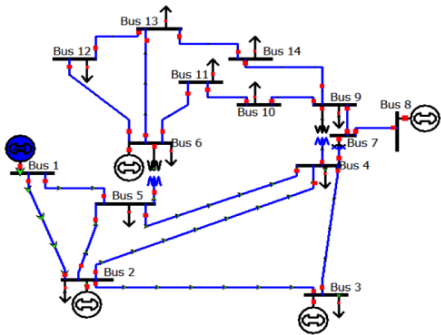


Figura 1 - Diagrama do Sistema Elétrico de 14 barras.

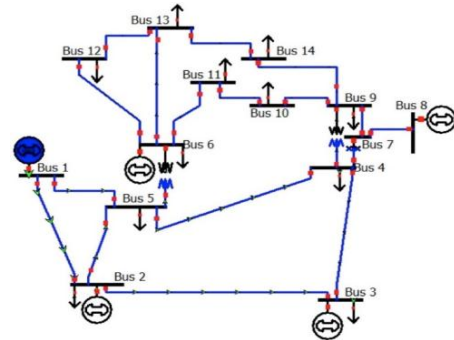


Figura 2 - Diagrama do Sistema Elétrico de 14 barras com contingência na linha 2-4.

Fonte: Illinois Center for Smarter Electric Grid(ICSEG) <http://icseg.itl.illinois.edu/ieee-14-bus-system>

Utiliza-se para os testes o sistema elétrico de 14 barras, o qual é representado na Figura 1. Este sistema possui cinco barras de geração (barras 1, 2, 3, 6 e 8) e onze barras de carga (barras 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13 e 14). Os valores para os limites de magnitudes de tensão são fixadas como  $0,94 \leq V_i^0 \leq 1,06, \forall i=1, \dots, 14$ , e, é adotado  $\theta_1^0 = 0$ . Neste caso, os taps dos transformadores são adotados pertencentes a um conjunto discreto dado por:  $D_{t_{im}}^0 = \{0,96; 0,98; 1,00; 1,02; 1,04\}$ . Desta forma, é formulado o problema de FPO associado ao sistema elétrico de 14 barras dado pelas equações (1) a (3) e tendo como função objetivo a função dada por (20).

Os resultados obtidos através da resolução do problema FPO são apresentados na Tabela 1. Observou-se que o algoritmo convergiu em um tempo de 0,082s na 1ª iteração. O valor da função objetivo obtido é:  $C(Pg) = \$ 66,431$ .

Tabela 1 - Valores obtidos para o problema de FPO

BARRA $i$	$V_i^0$	$\theta_i^0$	$Pg_i^0$
1	1,060	0,000	0,618
2	1,056	-0,016	1,400
3	1,029	-0,141	0,000
4	1,021	-0,086	-
5	1,027	-0,063	-
6	0,028	-0,064	0,604
7	0,033	-0,116	-
8	0,022	-0,110	0,035
9	0,023	-0,135	-
10	0,016	-0,128	-
11	0,017	-0,099	-
12	0,014	-0,084	-
13	0,008	-0,090	-
14	0,998	-0,134	-

Tabela 2 - Valores obtidos para os taps

RAMO $im$	$t_{im}^0$
4-7	0,960
4-9	0,960
5-6	0,960

Observa-se, da Tabela 2 que os taps dos transformadores atingiram valores discretos pertencentes ao conjunto  $D_{t_{im}}^0 = \{0,96; 0,98; 1,00; 1,02; 1,04\}$ .

### FPORS preventivo

Para a formulação do problema de FPORS preventivo para o sistema representado na Figura 2, são adotadas as equações (1)-(5) e utiliza-se a função objetivo representada em (20).

Os resultados obtidos através da resolução do problema são apresentados na Tabela 3. Observou-se que o algoritmo convergiu em um tempo de 0,27s na 10ª iteração. O valor da função objetivo é:  $C(Pg) = \$97,197$ .

Observa-se da Tabela 4 que os *taps* dos transformadores atingiram valor discreto pertencente ao conjunto:  $t_{im}^0 \in D_{t_{im}}^0 = \{0,96; 0,98; 1,00; 1,02; 1,04\}$ .

Tabela 3 - Valores obtidos para o problema de FPORS preventivo

BARRA <i>i</i>	$V_i^0$	$V_{is}^1$	$\theta_i^0$	$\theta_{is}^1$	$Pg_i^0$
1	0,988	-	0,000	0,000	0,377
2	0,977	-	-0,016	-0,015	0,000
3	1,011	-	-0,027	-0,030	1,000
4	0,994	0,998	-0,034	-0,042	-
5	0,992	0,994	-0,021	-0,026	-
6	1,025	-	0,041	0,036	0,951
7	0,974	0,975	-0,014	-0,022	-
8	1,001	-	0,038	0,030	0,288
9	0,967	0,969	-0,038	-0,045	-
10	0,968	0,969	-0,029	-0,036	-
11	0,991	0,992	0,004	0,002	-
12	1,006	1,007	0,020	0,014	-
13	0,997	0,997	0,015	0,009	-
14	0,960	0,961	-0,035	-0,041	-

Tabela 4 - Valores obtidos para os *taps*

RAMO <i>im</i>	$t_{im}^0$
4-7	1,040
4-9	1,040
5-6	0,960

### FPORS corretivo

O problema de FPORS corretivo é formulado, dado pelas equações (1)-(8). Utiliza-se a função objetivo representada em (20).

Os resultados obtidos através da resolução do problema FPORS corretivo são apresentados na Tabela 20. Observou-se que o algoritmo convergiu em um tempo de 0,62s na 1ª iteração. O valor da função objetivo é:  $C(Pg) = \$96,666$ .

Observa-se da Tabela 6, que os *taps* dos transformadores atingiram valor discreto pertencente aos conjuntos:

$$t_{im}^0 \in D_{t_{im}}^0 = \{0,96; 0,98; 1,00; 1,02; 1,04\} \text{ e}$$

$$t_{im}^1 \in D_{t_{im}}^1 = \{0,90; 0,92; 0,94; 0,96; 0,98; 1,00; 1,02; 1,04; 1,06; 1,08; 1,10\} .$$

Tabela 5 - Valores obtidos para o problema de FPORS corretivo

BARRA $i$	$V_i^0$	$V_{is}^1$	$V_i^1$	$\theta_i^0$	$\theta_{is}^1$	$\theta_i^1$	$Pg_i^0$	$Pg_i^1$
1	1,060	-	1,053	0,000	0,000	0,000	0,378	0,001
2	1,057	-	1,049	-0,016	-0,015	0,000	0,032	0,128
3	1,028	-	1,030	-0,013	-0,017	0,013	0,980	1,068
4	1,026	1,015	1,023	-0,023	-0,028	0,000	-	-
5	1,036	1,030	1,034	-0,011	-0,015	0,009	-	-
6	0,977		0,988	0,074	-0,015	0,112	1,000	1,091
7	1,020	1,015	1,010	-0,017	-0,021	0,023	-	-
8	1,012		1,013	0,023	0,018	0,080	0,230	0,327
9	1,000	0,995	0,992	-0,038	-0,04227	0,000	-	-
10	0,986	0,982	0,982	-0,025	-0,03072	0,014	-	-
11	0,976	0,974	0,979	0,020	0,00955	0,059	-	-
12	0,964	0,964	0,973	0,050	0,03379	0,088	-	-
13	0,960	0,959	0,968	0,040	0,02603	0,079	-	-
14	0,962	0,959	0,961	-0,025	-0,03243	0,014	-	-

Tabela 6 – Valores obtidos para os taps

RAMO $im$	$t_{im}^0$	$t_{im}^1$
4-7	0,960	0,980
4-9	0,960	0,980
5-6	1,040	1,040

### Conclusões

Neste trabalho, utilizou-se um Método Primal-Dual Barreira Logarítmica associado a uma função penalidade para tratar as variáveis discretas e resolver os problemas de FPO, FPORS preventivo e FPORS corretivo. No FPO o valor encontrado para função objetivo ficou menor que os demais, pois não é considerada a segurança do sistema. No FPORS Preventivo o valor da função objetivo é maior devido à segurança imposta ao sistema, a contingência da linha 2-4, assim o sistema é despachado de modo que, caso ocorra a contingência na linha 2-4, o sistema continuará operante sem afetar a distribuição. Por fim no FPORS corretivo, o valor da função objetivo é menor que no caso preventivo e maior que o caso base, e também leva em consideração a queda da linha 2-4, garantindo assim a mesma segurança no sistema, porém será necessário um redespacho caso ocorra a contingência na referida linha, fazendo assim o preço aumentar apenas durante a contingência.

A importância de resolver os problemas considerando a natureza discretas dos taps dos transformadores é a maior proximidade dos problemas da realidade. Assim a associação dos métodos mostrou-se eficiente na resolução dos três casos analisados.

### Agradecimentos

À CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro (Proc.Nº448645/2014-9 e Proc. No 309588/2013-Bolsista)

### Referências

CAPITANESCU, F. *et al.* State-of-the-art, Challenges, and Future Trends in Security Constrained Optimal Power Flow. **Electric Power Systems Research**. v. 81. p. 1731-174, 2011.

SOLER, E. M. **Resolução do Problema de Fluxo de Potência Ótimo com variáveis de controle discretas**. 2011.Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica), Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

WRIGHT, S. J. Primal-Dual Interior Point Methods, **SIAM Journal**, p. 289-304, 1995.

## SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE MÁXIMO CARREGAMENTO COM VARIÁVEIS CONTÍNUAS E DISCRETAS COM O MÉTODO *BRANCH AND BOUND* E PONTOS INTERIORES

*Graciliano Antonio Damazo*

*Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – UNESP – Bauru  
graciliano@ifsp.edu.br*

*Edméa Cássia Baptista*

*Universidade Estadual Paulista (UNESP); Faculdade de Ciências (FC)  
baptista@fc.unesp.br*

*Edilaine Martins Soler*

*Universidade Estadual Paulista (UNESP); Faculdade de Ciências (FC)  
edilaine@fc.unesp.br*

**Resumo:** A instabilidade de tensão é um dos principais fatores responsáveis por problemas em sistemas elétricos de potência de grande porte, o que torna a análise da curva característica de potência ativa e o módulo da tensão em uma barra do sistema elétrico, curva PV, de extrema importância. Através desta curva pode-se obter o ponto de máximo carregamento do sistema, antes do colapso de tensão. O problema de máximo carregamento para sistemas de potência pode ser formulado como um problema de programação não linear com variáveis contínuas e discretas. Enquanto que, na literatura os problemas de máximo carregamento são modelados como problemas não lineares com variáveis contínuas, neste trabalho propõe-se manter as características discretas das variáveis de controle tornando os resultados mais próximos à realidade, pois alguns controles devem ser ajustados por passos discretos. São apresentados testes numéricos com o sistema IEEE 14 barras, utilizando um método de solução baseado no Método *Branch and Bound* com Pontos Interiores, implementado de formas diferentes nos pacotes Knitro e Ipopt, para resolver o problema e validar as abordagens desenvolvidas.

**Palavras-chave:** Problema de Máximo Carregamento. Curva PV. Otimização. Variáveis Discretas.

### I – Introdução

Atualmente, acredita-se que um número significativo de falhas graves ocorridas nos sistemas de fornecimento de energia elétrica tem origem associada ao problema de estabilidade de tensão, o que torna a sua investigação imprescindível. Sabe-se que em um sistema estressado, um aumento súbito e relativamente pequeno da carga total é suficiente para acarretar a instabilidade de tensão, o que demonstra a necessidade de índices que indiquem, ao operador do sistema, o *status* referente à estabilidade de tensão e a margem ao máximo valor possível da demanda total para que o sistema não entre em colapso (IRISARRI et al. (1997)). Um índice de fácil compreensão, que requer apenas o modelo estático do sistema e leva em consideração as não linearidades e limites do mesmo, é a margem de carregamento (MC), que para um ponto de operação e um dado padrão de evolução da demanda, indica o maior aumento na carga de um sistema, sem provocar a instabilidade de tensão. Uma das formas mais utilizadas para medir o MC é traçar a curva PV, que evidencia o comportamento da magnitude da tensão na barra de um sistema elétrico em relação à variação da demanda, obtendo dessa forma a distância entre o ponto de operação atual e o ponto de colapso de tensão (bifurcação sela-nó).

Assim, tem-se que o Problema de Máximo Carregamento (PMC), que tem por objetivo, determinar o máximo aumento de carga em um sistema elétrico de potência satisfazendo as restrições operacionais do sistema e de equipamentos. Este problema pode ser formulado com um problema de programação não linear com variáveis discretas e contínuas. Algumas das metodologias existentes



para o cálculo do MC são: método da continuação (IBA et al. (1991)) e os métodos de otimização (BARBOZA et al. (1998)).

Muitos trabalhos atuais da literatura formulam o PMC como contínuo, desprezando a natureza discreta dos controles, com a finalidade de tornar a solução mais simples. Estas formulações, no entanto, não descrevem o problema com a realidade necessária, já que o controle só pode ser ajustado por passos discretos, distanciando os resultados da precisão procurada. Pesquisas recentes com os Métodos de Pontos Interiores (MPI) e algumas variações, têm sido utilizadas para resolver problemas não lineares de grande porte (BAPTISTA et al. (2005)). O MPI vem sendo abordado de forma combinada com variáveis discretas para resolver problemas de otimização não linear com variáveis contínuas e discretas (LIU et al. (2009)) e mais especificamente o PMC (SOLER et al. (2012)) e (SOLER et al. (2013)).

O presente trabalho tem por objetivo apresentar as características da curva PV, para evidenciar a facilidade de se obter o MC. Posteriormente as características discretas das variáveis de controle são mantidas e o problema com variáveis discretas e contínuas é resolvido pelo método *Branch and Bound* com o MPI na determinação do ponto de MC, sem a necessidade de levantar todos os pontos da curva PV. Os pacotes Knitro e Ipopt, que possuem o método *Branch and Bound* com MPI para resolução dos subproblemas contínuos da árvore de busca, são utilizados nos testes.

## II – Curva PV

A Curva PV pode ser traçada através de sucessivas soluções de fluxos de cargas para fazer o levantamento do comportamento das tensões das barras de um sistema para cada nível de carga imposta no sistema, conforme apresenta a Figura 1.

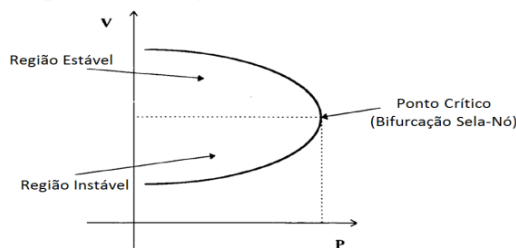


Figura 1 – Curva PV.

Ao resolver um fluxo de potência, obtém-se um ponto de operação na região estável e outra na região instável. À medida que ocorrem acréscimos de carga nas barras, sobrecargas, esses pontos vão se aproximando, até que, para um determinado valor de carga, essas duas tensões coincidem, determinando o ponto de máximo carregamento da barra. Para exemplificar esse comportamento, adota-se um sistema formado por duas barras interligadas por uma linha de transmissão. A barra 1 é a geradora, a barra 2 é somente de demanda e os efeitos capacitivo e resistivo da linha foram desprezados, conforme apresentado na Figura 2.

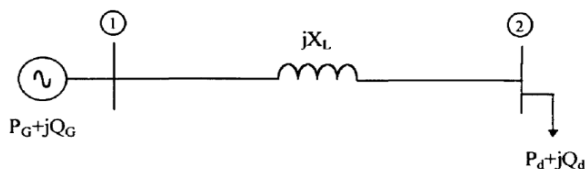


Figura 2 – Sistema de duas barras com uma linha de transmissão.

Sejam  $V_1$  (magnitude da tensão na barra 1),  $\delta_1$  (ângulo da tensão na barra 1),  $V_2$  ( magnitude da tensão na barra 2) e  $\delta_2$  (ângulo da tensão na barra 2) as variáveis do sistema e  $P_G$  (potência ativa gerada pela barra 1),  $Q_G$  (potência reativa gerada pela barra 1),  $P_d$  (demanda de potência ativa da barra 2) e  $Q_d$  (demanda de potência reativa da barra 2) constantes. Pelo fato da barra 1 ser adotada como



referência, tem-se  $V_1$  adotada como constante e o ângulo  $\delta_1 = 0^\circ$ . A demanda da barra 2 é parametrizada em relação ao fator de carregamento  $\alpha$ , conforme (1) e (2).

$$P_d(\alpha) = P_{d0} + \alpha \Delta P_d \quad (1) \quad Q_d(\alpha) = Q_{d0} + \alpha \Delta Q_d \quad (2)$$

em que,  $P_{d0}$  e  $Q_{d0}$ : valores iniciais das demandas de potência ativa e reativa, respectivamente;  $\alpha$ : parâmetro de carregamento, e  $\Delta P_d$  e  $\Delta Q_d$ : direções para o aumento das demandas de potência ativa e reativa, respectivamente.

Ao realizar o balanço de potência para o sistema apresentado na Figura 2 obtêm-se as seguintes equações:

$$\frac{V_1 V_2}{X_L} \sin(\delta_2) + P_d(\alpha) = 0 \quad (3) \quad \frac{V_2^2 - V_1 V_2 \cos(\delta_2)}{X_L} + Q_d(\alpha) = 0 \quad (4)$$

Das equações (3) e (4), obtêm-se a seguinte expressão:

$$V_2^4 + (2Q_d(\alpha)X_L - V_1^2)V_2^2 + X_L^2 \{ [P_d(\alpha)]^2 + [Q_d(\alpha)]^2 \} = 0 \quad (7)$$

a qual é uma equação biquadrada e incompleta na variável  $V_2$ , o que possibilita facilmente obter as quatro soluções ao se aplicar a fórmula de Baskara. A variável  $V_2$  não pode assumir valores negativos, portanto duas soluções da equação (7) são infactíveis e podem ser descartadas, e as duas soluções factíveis de interesse prático obtidas são apresentadas na expressão (8).

$$V_2 = \sqrt{\frac{V_1^2 - 2Q_d(\alpha)X_L \pm \sqrt{V_1^4 - 4Q_d(\alpha)X_L V_1^2 - 4[P_d(\alpha)]^2 X_L^2}}{2}} \quad (8)$$

O valor do ângulo de fase da tensão na barra 2,  $\delta_2$ , pode ser obtido analiticamente das expressões (3) e (4), respectivamente:

$$\delta_2 = -\text{tg}^{-1} \left[ \frac{P_d(\alpha)X_L}{Q_d(\alpha)X_L + V_2^2} \right] \quad (9)$$

Assim as equações (8) e (9) fornecem os valores da magnitude de tensão e o ângulo de fase, respectivamente, da barra 2, que satisfazem as equações de balanço de potência do sistema, (3) e (4). A equação (8) permite-nos concluir que como  $V_1$  é fixo, dois valores de magnitude de tensão  $V_2$  são determinados para cada  $\alpha$ . Isso permite fazer o levantamento da curva característica PV dessa barra, que não será simétrica e terá um ponto extremo.

Pela Figura 1, observa-se que a medida que a demanda na barra 2 aumenta, os dois valores da magnitude de tensão,  $V_2$ , tendem a se aproximar, tornando-se iguais no ponto extremo da curva PV. Esse valor único pode ser obtido analiticamente da expressão (8) e o valor da tensão na barra se resume a expressão que segue:

$$V_2 = \sqrt{\frac{V_1^2 - 2Q_d(\alpha)X_L}{2}} \quad (10)$$

Na situação de máximo carregamento do sistema, pode-se também obter o parâmetro de carregamento  $\alpha$ , de forma analítica combinando as equações (1), (2) e (9) o que leva à seguinte equação:

$$(2\Delta P_d X_L)^2 \alpha^2 + (4\Delta Q_d X_L V_1^2 + 8P_{d0} \Delta P_d X_L^2) \alpha + 4Q_{d0} X_L V_1^2 + 4P_{d0}^2 X_L^2 - V_1^4 = 0 \quad (11)$$

A equação (11) é uma equação quadrática completa com duas soluções. A solução prática viável é o valor positivo obtido pela expressão como segue:

$$\alpha = \frac{-\Delta Q_d V_1^2 - 2P_{d0} \Delta P_d X_L + V_1 \sqrt{V_1^2 (\Delta P_d^2 + \Delta Q_d^2) + 4\Delta P_d X_L (P_{d0} \Delta Q_d + Q_{d0} \Delta P_d)}}{2\Delta P_d^2 X_L} \quad (12)$$

Por exemplo, para os valores:  $V_1=1,0\text{pu}$ ;  $P_{d0}=0,5\text{pu}$ ;  $Q_{d0}=0,2\text{pu}$ ;  $\Delta P_d=0,005\text{pu}$ ;  $\Delta Q_d=0,002\text{pu}$  e  $X_L=0,1\text{pu}$ , de acordo com as equações (7), (8), (12), (1) e (2) obtém-se os dados da Tabela 1 e a curva PV apresentado na Figura 3.

Tabela 1 – Resultados do sistema de duas barras

$V_2$	$\delta_2$	$\alpha$	$P_d$	$Q_d$
0,604pu	-39,0994°	577,0330	3,3852pu	1,3541pu

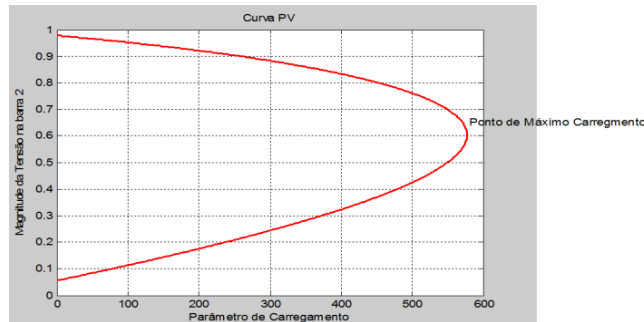


Figura 3 – Curva PV para sistema de duas barras.

### III – O Problema de Máximo Carregamento (PMC)

O objetivo do PMC é determinar o máximo aumento de carga em um sistema elétrico de potência satisfazendo as restrições operacionais do sistema e de equipamentos, e pode ser modelado como um problema de programação não linear com variáveis discretas e contínuas, dado por:

Maximizar  $\alpha$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} \Delta P_i(V, \theta, t, \alpha) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, NBCCR \\ \Delta Q_j(V, \theta, t, \alpha) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, NBC \\ \underline{Q}_l \leq Q_l(V, \theta, t) \leq \overline{Q}_l, \quad l = 1, 2, \dots, NBCR \\ \underline{V}_p \leq V_p \leq \overline{V}_p, \quad p = 1, 2, \dots, NB \\ t_o \in D_{t_o}, \quad o = 1, 2, \dots, NT \end{cases} \quad (13)$$

em que:  $NB$  é o número de barras do sistema elétrico;  $NBC$  é o número de barras de carga;  $NBCR$  é o número de barras de controle de reativo;  $NBCCR$  é o número de barras de carga e controle de reativos;  $NT$  é o número de transformadores com tap variável;  $\underline{Q}_l, \overline{Q}_l$  são limites mínimos e máximos de geração de potência reativa;  $\underline{V}_p, \overline{V}_p$  são os limites mínimos e máximos das magnitudes das tensões nas barras;  $D_{t_o}$  representa o conjunto de valores discretos que o tap do transformador pode assumir durante a operação do sistema.

As variáveis deste problema são:  $\alpha$  é o fator de carregamento;  $V = (V_1, V_2, \dots, V_{NB})^t$  é o vetor das magnitudes de tensão nas barras  $1, 2, \dots, NB$ ;  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{NB})^t$  é o vetor dos ângulos de tensão nas barras  $1, 2, \dots, NB$ ;  $t = (t_1, t_2, \dots, t_{NT})^t$  é o vetor dos taps dos transformadores  $1, 2, \dots, NT$ , respectivamente.

As seguintes funções descrevem com detalhes o primeiro termo das equações que aparecem no problema (13). Seja  $\Omega$  o conjunto de todas as linhas de transmissão do sistema;  $\Omega_k$  o conjunto de

todas as barras vizinhas à barra  $k$ ;  $g_{km}$ ,  $b_{km}$ ,  $b_{km}^{sh}$  a condutância e as susceptâncias da linha  $km$ , respectivamente;  $P_k^G$ ,  $P_k^C$  as potências ativas geradas e consumidas, respectivamente;  $Q_k^G$ ,  $Q_k^C$  as potências reativas geradas e consumidas, respectivamente, e  $\theta_{km} = \theta_k - \theta_m$ .

As restrições do problema (13) são denominadas por:

- Balanço de potência ativa para as barras de carga e de controle reativo, em que:

$$\Delta P_i(V, \theta, t, \alpha) = (P_i^G - P_i^C)(1 + \alpha) - \sum_{m \in \Omega_i} \left\{ (t_{im} V_i)^2 g_{im} - (t_{im} V_i) V_m (g_{im} \cos \theta_{im} + b_{im} \sin \theta_{im}) \right\}$$

- Balanço de potência reativa para as barras de carga, em que:

$$\Delta Q_j(V, \theta, t, \alpha) = (Q_j^G - Q_j^C)(1 + \alpha) + b_j^{sh} V_j^2 - \sum_{m \in \Omega_j} \left\{ (t_{jm} V_j)^2 (b_{jm} + b_{jm}^{sh}) + (t_{jm} V_j) V_m (b_{jm} \cos \theta_{jm} + g_{jm} \sin \theta_{jm}) \right\}$$

- Geração de potência reativa injetada nas barras de controle de reativo, em que:

$$Q_k(V, \theta, t) = Q_k^C - b_k^{sh} V_k^2 + \sum_{m \in \Omega_k} \left\{ (t_{km} V_k)^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) + (t_{km} V_k) V_m (b_{km} \cos \theta_{km} - g_{km} \sin \theta_{km}) \right\}$$

## IV – Métodos de Solução

Apresenta-se nesta seção o método *Branch and Bound* e o Método de Pontos Interiores (MPI) os quais são utilizados neste trabalho para resolver o modelo proposto.

### A. O Método *Branch and Bound*

O método *Branch and Bound* (BB), também conhecido como método de avaliação e separação, foi originalmente proposto para problemas de programação linear inteira mista, no entanto este método também é utilizado para resolução de problemas de programação não linear.

A estratégia do método consiste em uma enumeração sistemática dos candidatos a solução.

Divide-se o problema original com variáveis discretas em vários subproblemas contínuos, descartando-se conjuntos de soluções infrutíferas, a fim de se obter a solução ótima. Cada um destes subproblemas é resolvido por algum método de otimização contínuo. Neste trabalho adota-se o MPI.

Seja um problema inicial com variáveis discretas e contínuas (14):

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && f(x) \\ & \text{sujeito a :} && h(x, y_i) = 0 \\ & && g(x, y_i) \leq 0 \\ & && \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \\ & && y_i \in D_{y_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n_y \end{aligned} \quad (14)$$

em que:  $D_{y_i}, i = 1, 2, \dots, n_y$  representa os conjuntos de valores discretos que  $y_i$  deve assumir.

O método BB inicia-se resolvendo a relaxação contínua do problema (14) dada por (15):

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && f(x) \\ & \text{sujeito a :} && h(x, y) = 0 \\ & && g(x, y) \leq 0 \\ & && \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \\ & && \underline{y}_i \leq y_i \leq \bar{y}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_y \end{aligned} \quad (15)$$

em que  $\underline{y}_i = \text{Min}\{D_{y_i}\}$  e  $\overline{y}_i = \text{Max}\{D_{y_i}\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_y$ .

Se na solução deste problema for obtido  $y_i \in D_{y_i}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n_y$ , então a solução encontrada é ótima para o problema (14). Caso contrário, escolhe-se uma variável  $y_L$  para ramificação e a região factível do problema (15) é dividida em duas subregiões, fornecendo os dois subproblemas (16) e (17).

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && f(x) \\ & \text{sujeito a :} && h(x, y_i) = 0 \\ & && g(x, y_i) \leq 0 \\ & && \underline{x} \leq x \leq \overline{x} \\ & && \underline{y}_i \leq y_i \leq \overline{y}_i \\ & && y_L \leq s^{\text{inf}} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && f(x) \\ & \text{sujeito a :} && h(x, y_i) = 0 \\ & && g(x, y_i) \leq 0 \\ & && \underline{x} \leq x \leq \overline{x} \\ & && \underline{y}_i \leq y_i \leq \overline{y}_i \\ & && y_L \geq s^{\text{sup}} \end{aligned} \quad (17)$$

em que  $s^{\text{inf}}$  é o valor discreto mais próximo inferiormente de  $y_L$  e  $s^{\text{sup}}$  é o valor discreto mais próximo superiormente de  $y_L$ .

Cada subproblema é um nó na árvore *BB*. A solução de cada subproblema fornece um limitante para a subregião. Se a solução do subproblema assume valores discretos para as variáveis discretas, então esta subregião não é mais explorada. Uma subregião em que a melhor solução discreta encontrada até o momento é melhor que seu limitante, é descartada, caso contrário é explorada recursivamente. Desta forma, uma árvore de subproblemas é criada e o método termina quando não há mais subregiões a serem exploradas

### B. Método de Pontos Interiores.

A seguir apresenta-se uma descrição do método primal-dual de pontos interiores o qual é utilizado neste trabalho.

Seja o problema geral de otimização não linear representado como segue:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && f(x) \\ & \text{sujeito a :} && h(x) = 0 \\ & && g(x) \leq 0 \end{aligned} \quad (18)$$

em que:  $x \in \mathfrak{R}^n$ ,  $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $g: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ ,  $h: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^l$  e  $f$ ,  $g$  e  $h$  são de classe  $C^2$ .

Ao adicionar variáveis de folga não negativas às restrições de desigualdade de (18), estas são transformadas em restrições de igualdade. Desta forma, as restrições de não negatividade das variáveis de folga são incorporadas na função objetivo através da função barreira logarítmica e as restrições de igualdade são tratadas por multiplicadores de Lagrange dando origem a um problema irrestrito cuja nova função objetivo é dada por:

$$L(x, s, \lambda, \mu) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^m \ln(s_i) + \lambda_h^T h(x) + \lambda_g^T (g(x) + s) \quad (19)$$

em que  $s = (s_1, s_2, \dots, s_m)^T$  é o vetor das variáveis de folga, com  $s_i \in \mathfrak{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $\mu > 0$  é denominado parâmetro de barreira, e  $\lambda_h \in \mathfrak{R}^l$  e  $\lambda_g \in \mathfrak{R}^m$  são denominados de vetores dos multiplicadores de Lagrange.

A ideia do método é resolver uma sequência de problemas irrestritos cuja função objetivo é dada por (19), para um parâmetro de barreira fixo  $\mu_k$ , o qual será atualizado a cada iteração. Para a solução desses problemas irrestritos, aplica-se a condição necessária de primeira ordem na função (19) e obtém-se um sistema não linear. Esse sistema é resolvido pelo método de Newton o qual determina as direções de busca  $d_x, d_y, d_{\lambda_h}, d_{\lambda_g}$  e uma nova solução é obtida por:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_p d_x^k ; s^{k+1} = s^k + \alpha_d d_s^k ; \lambda_h^{k+1} = \lambda_h^k + \alpha_d d_{\lambda_h}^k ; \lambda_g^{k+1} = \lambda_g^k + \alpha_d d_{\lambda_g}^k \quad (20)$$

em que  $\alpha_p$  e  $\alpha_d$  são os tamanhos de passos primais e duais, respectivamente.

Observa-se que a sequência de parâmetros de barreira  $\{\mu_k\}$  deve convergir para zero, e se possível, rapidamente. Desta forma, após atualizar o parâmetro de barreira, para o novo valor,  $\mu_{k+1}$ , o processo é repetido até que um critério de convergência seja satisfeito.

## V – Testes Numéricos e Discussão dos Resultados

Os testes numéricos foram realizados utilizando o sistema IEEE 14 barras. Esse sistema possui uma barra de geração (*slack*), 4 barras de controle de reativo, 9 barras de carga, 20 linhas de transmissão, 3 transformadores de tap variável e uma susceptância shunt na barra 9, a qual foi considerada constante,  $b_9^{sh}=0,17pu$ . As variáveis discretas são os taps dos transformadores localizados entre as barras 5-6, 4-7 e 4-9, que devem assumir valores do conjunto  $\{0,95; 0,96; 0,97; 0,98; 0,99; 1,00; 1,01; 1,02; 1,03; 1,04; 1,05\}$ . As tensões em cada uma das barras variam entre 0,96 e 1,06 pu. Esse sistema foi resolvido utilizando o método *BB* com MPI implementado nos pacotes de otimização Knitro e Ipopt, na plataforma GAMS. As soluções são apresentadas na Tabela 2 seguir.

Tabela 2: Solução Utilizando o Knitro e o Ipopt

Knitro			Ipopt		
Barra	Magnitude da tensão	Ângulo Tensão	Barra	Magnitude da tensão	Ângulo Tensão
1	1,060	0,000	1	1,060	0,000
2	1,014	-0,151	2	1,014	-0,151
3	0,940	-0,402	3	0,940	-0,402
4	0,978	-0,326	4	0,978	-0,328
5	0,985	-0,278	5	0,985	-0,279
6	1,060	-0,452	6	1,060	-0,454
7	1,018	-0,429	7	1,020	-0,431
8	1,058	-0,429	8	1,060	-0,430
9	1,039	-0,477	9	1,040	-0,479
10	1,040	-0,485	10	1,041	-0,487
11	1,048	-0,474	11	1,049	-0,476
12	1,048	-0,483	12	1,049	-0,485
13	1,044	-0,489	13	1,044	-0,491
14	1,028	-0,520	14	1,028	-0,522
Controle Discreto			Controle Discreto		
<i>tap</i>			<i>Tap</i>		
t <sub>5_6</sub>	0,96		t <sub>5_6</sub>	0,96	
t <sub>4_7</sub>	0,98		t <sub>4_7</sub>	0,98	
t <sub>4_9</sub>	1,05		t <sub>4_9</sub>	1,04	
Função objetivo: 0,968			Função objetivo: 0,966		

Os resultados apresentados mostram que as tensões nas barras, seus ângulos, *taps* e o valor da função objetivo apresentaram diferenças muito pequenas para os métodos testados. A diferença existente entre os tempos computacionais pode ser desconsiderada, pois são tempos pequenos, cujos valores também são contestáveis pelas poucas simulações envolvidas.

## VI – Conclusão

Neste trabalho formulou-se o problema de máximo carregamento como em problema de programação não linear com variáveis discretas e contínuas, o que torna a sua solução mais próxima

da realidade. Para a solução do modelo utilizou-se o método *Branch and Bound* com o método de pontos interiores, o qual encontra-se implementado de dois modos diferentes nos pacotes Ipopt e Knitro.

A partir dos resultados pôde-se observar que esses métodos para o tratamento das variáveis discretas foram eficientes e que através da solução deste problema de otimização também é possível resolver o problema de máximo carregamento.

As simulações realizadas utilizando os solvers Knitro e Ipopt apresentaram pouca variação nos resultados obtidos mostrando-se ambos eficientes em sua resolução.

## VII– Agradecimentos

Ao CNPq (Proc. nº 309588/2013 - bolsista e Proc. nº 448645/2014-9) e à FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (Processo FAPESP nº 2013/03388-0) pelo apoio financeiro.

## VIII – Referências Bibliográficas

BAPTISTA, E. C.; BELATI, E. A.; COSTA, G. R. M. (2005), Logarithmic barrier-augmented Lagrangian function to the optimal power flow problem, *Electrical Power and Energy Systems*, 27, 528-532.

BARBOZA, L. V.; SALGADO, R. ; ALMEIDA, K. C. (1998), Estudo do máximo carregamento de sistemas de potência via algoritmos de pontos interiores, In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, Uberlândia, Anais do CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA. Uberlândia, 2005-2010.

IBA, K.; SUZUKI, H.; EGAWA, M.; WATANABE, T. (1991), Calculation of critical loading condition with nose curve using homotopy continuation method, *IEEE Transactions on Power Systems*, 6 (2), 584-593.

IRISARRI, G. et al. Maximum loadability of power systems using interior point nonlinear optimization method. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 12, p. 162–172, 1997.

LIU, L.; WANG, X.; DING, X.; CHEN, H. (2009), A robust approach to optimal power flow with discrete variables, *IEEE Transactions on Power Systems*, 24(3), 1182-1190.

SOLER, E. M.; SOUSA, V. A.; COSTA, G. R. M. (2012), A modified Primal-Dual Logarithmic-Barrier method for solving the Optimal Power Flow problem with discrete and continuous control variables, *European Journal of Operational*, 222, 616-622.

SOLER, E. M.; BAPTISTA, E. C. ; SOUSA, V. A. ; COSTA, G. R. M. . Resolução do Problema de Máximo Carregamento com variáveis de controle discretas. In: XLV SBPO – SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 2013, Natal - RN. Anais do XLV SBPO – SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA O PERACIONAL, 2013. p. 1205-1213.





## Solução numérica de problemas elípticos não lineares via método de diferenças finitas exponencial de alta ordem

*Beatriz Liara Carreira*

*Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho; Faculdade de Ciências e Tecnologia  
bia.liara36@hotmail.com*

*Leticia Braga Berlandi*

*Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho; Faculdade de Ciências e Tecnologia  
leticiaberlandi@gmail.com*

*Rafael de Lima Sterza*

*Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho; Faculdade de Ciências e Tecnologia  
rlsterza@gmail.com*

*Analice Costacurta Brandi*

*Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho; Faculdade de Ciências e Tecnologia  
analice@fct.unesp.br*

**Resumo:** Diversos fenômenos físicos são modelados por equações diferenciais parciais elípticas e então surge o interesse em resolver esse tipo de equação nas mais diversas áreas das ciências e engenharias. Nem sempre essas equações admitem solução analítica, por isso a importância de avaliar e buscar técnicas de soluções numéricas cada vez mais eficientes. O método de diferenças finitas é uma das técnicas numéricas mais antigas e populares na solução de equações diferenciais parciais, além de estar entre as de maior destaque. Recentemente, um novo método de diferenças finitas vem sendo estudado e aplicado na solução de equações elípticas lineares e não lineares, mostrando-se bastante satisfatório. Trata-se do método de diferenças finitas exponencial de quarta ordem. A aplicação deste novo método em equações do segundo tipo faz surgir um sistema não linear que pode ser resolvido através de métodos iterativos, por exemplo, o método de Newton, fornecendo a solução da equação em questão. Neste trabalho, uma equação elíptica não linear é resolvida através do método de diferenças finitas exponencial, em que os resultados obtidos foram discutidos e comparados com resultados analíticos e numéricos presentes na literatura.

**Palavras-chave:** Equações Não Lineares. Diferenças Finitas Exponencial. Métodos Numéricos e Aplicações. Método de Newton.

## Introdução

Problemas de equilíbrio são aqueles em que a propriedade de interesse não depende da evolução temporal. Na maioria das vezes esses problemas são modelados por equações diferenciais parciais elípticas. Esses sistemas também são conhecidos como estacionários, justamente por permanecerem constantes em relação ao tempo.

As equações de Poisson e de Laplace, cujas aplicações são as mais variadas, são muito conhecidas. Por exemplo, a equação de Poisson representa o movimento de um fluido viscoso incompressível a baixa velocidade e a equação de Laplace é empregada para descrever potencial eletromagnético, dentre outras, conforme Fortuna (2012), em que ambas representam fenômenos lineares. Entretanto a maior parte das equações que modelam os fenômenos físicos são caracterizadas pela sua não linearidade e lidar com equações desse tipo pode significar uma tarefa bastante complicada.

Essas equações podem ser resolvidas através de três tipos de abordagem: a computacional, a experimental e a analítica. Embora as duas últimas tenham suas vantagens, a abordagem computacional tem se sobressaído, pois não impõe limitações de ordem dimensional, física e espacial, tornando-a mais atrativa. Além disso, técnicas de estabilidade e convergência são incorporadas ao processo de solução garantindo a validade dos resultados.

A abordagem computacional se realiza através dos métodos numéricos que aproximam com determinada precisão a solução de equações diferenciais parciais através do auxílio de computadores. Recentemente, um novo método numérico foi desenvolvido por Pandey (2013), chamado de método de diferenças finitas exponencial de quarta ordem e simulado computacionalmente para equações diferenciais parciais elípticas de segunda ordem, com diferentes condições de contorno.

Tratando-se de equações não lineares, o sistema resultante é também não linear e portanto é mais conveniente buscar sua solução através do método de Newton, que será tratado mais adiante. Neste contexto, o objetivo deste trabalho é resolver um problema não linear através do método exponencial em diferentes malhas comparando os resultados numéricos com resultados presentes na literatura, verificando o comportamento e eficiência do método na obtenção da solução.

## Formulação matemática

O domínio de integração de uma equação diferencial parcial bidimensional é uma região  $\Omega$  cuja área é limitada pela fronteira  $\partial\Omega$ .

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = d\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right). \quad (1)$$

A Equação 1 é considerada uma equação diferencial parcial elíptica em  $\Omega$  se  $b^2 - 4ac < 0$  para todo ponto interior de  $\Omega$  de acordo com Cuminato (2013).

Uma característica dos problemas modelados por equações diferenciais parciais elípticas é que toda região  $\Omega$  seja imediatamente afetada por qualquer mudança no valor da variável dependente em um ponto do interior do domínio ou até mesmo na fronteira  $\partial\Omega$ . Isso é equivalente a dizer que as propriedades físicas de problemas elípticos propagam-se em todas as direções dentro do seu domínio e por este motivo suas condições de contorno normalmente são especificadas ao longo de toda fronteira.

As condições de contorno usualmente especificam os valores da função ou os valores de sua derivada normal ao longo do contorno  $\partial\Omega$ , ou uma mistura de ambos, que são, respectivamente, as condições de Dirichlet ( $u$  é conhecida em  $\partial\Omega$ ), de Neumann ( $\frac{\partial u}{\partial n}$  é conhecida em  $\partial\Omega$ ) e Robin ( $\alpha u = \beta \frac{\partial u}{\partial n}$  conhecida em  $\partial\Omega$ ). Em particular, considera-se neste trabalho uma região quadrada  $\Omega = \{(x,y) : a \leq x \leq b; a \leq y \leq b\}$  com condição de contorno  $u(x,y) = g(x,y)$  em  $\partial\Omega$ .

## Formulação numérica

A resolução de uma equação diferencial parcial analiticamente fica restrita a problemas simples e lineares. Problemas complexos, como é o caso dos não lineares, tornam-se difíceis ou até mesmo impossíveis de se resolver analiticamente por conta da insuficiência dos métodos existentes. Enquanto isso, a abordagem computacional é capaz de solucionar equações com alto nível de complexidade, não havendo restrições a geometrias e processos complicados. É sempre necessário que haja um cuidado especial na construção da modelagem, para que de fato, ela seja uma representação do fenômeno em questão.

A abordagem computacional é realizada por meio dos métodos numéricos, que calculam soluções aproximadas para o problema através do suporte de computadores. Primeiramente, é necessário conhecer o domínio do problema, então alguns pontos são selecionados e nesses pontos aproxima-se a solução, uma vez que o computador seria incapaz de aplicar as técnicas numéricas num domínio contínuo, contendo infinitos pontos. A esse processo denomina-se discretização.

A discretização do domínio deve ser o primeiro passo para solucionar um problema estacionário através de uma equação elíptica. Para exemplificar o processo, considera-se  $\Omega$  como sendo uma região quadrada, coberta por uma malha, conforme a Figura 1.

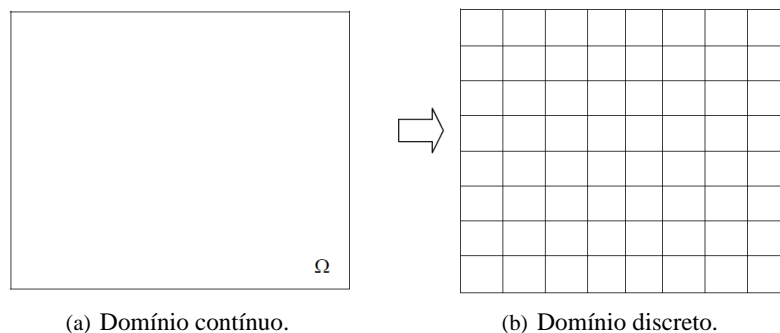


Figura 1: Discretização do domínio.

## Método de diferenças finitas exponencial

O método de diferenças finitas exponencial produz aproximações de alta ordem considerando um espaçamento uniforme  $h$  nas direções  $x$  e  $y$ . Inicialmente, é preciso considerar os oito pontos vizinhos  $(i \pm 1, j)$ ,  $(i, j \pm 1)$  e  $(i \pm 1, j \pm 1)$ , ao ponto  $(i, j)$ :

$$\begin{cases} u_{i\pm 1, j} = u(x_i \pm h, y_j) \\ u_{i, j\pm 1} = u(x_i, y_j \pm h) \\ u_{i\pm 1, j\pm 1} = u(x_i \pm h, y_j \pm h) \end{cases}$$

com  $i = 0, 1, \dots, N$ , sendo  $N$  a quantidade de subintervalos tomados.

Para aproximar a solução analítica da equação elíptica de Poisson, o método de diferenças finitas exponencial utiliza nove pontos e inicialmente é dado pela seguinte equação:

$$a_0(u_{i+1, j} + u_{i-1, j} + u_{i, j+1} + u_{i, j-1}) + a_1(u_{i+1, j+1} + u_{i-1, j+1} + u_{i+1, j-1} + u_{i-1, j-1}) + a_2 u_{i, j} = b_0 h^2 f_{i, j} e^{\phi(h)}, \quad (2)$$

onde  $a_0, a_1, a_2$  e  $b_0$  são constantes e  $\phi(h)$  é uma função diferenciável. A partir dessa equação, pode-se ainda, definir a função  $F(h, u)$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F(h, u) \equiv & a_0(u_{i+1, j} + u_{i-1, j} + u_{i, j+1} + u_{i, j-1}) + \\ & + a_1(u_{i+1, j+1} + u_{i-1, j+1} + u_{i+1, j-1} + u_{i-1, j-1}) + a_2 u_{i, j} - b_0 h^2 f_{i, j} e^{\phi(h)} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Observando a Figura 2, nota-se a disposição dos pontos envolvidos na expressão de discretização de uma equação diferencial utilizando o método de diferenças finitas exponencial.

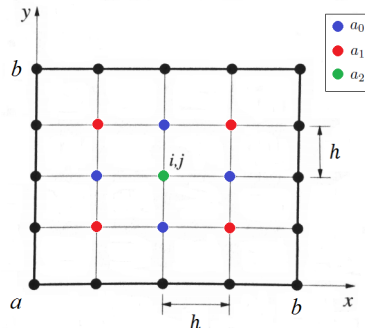


Figura 2: Estêncil da aproximação da equação elíptica utilizando o método de diferenças finitas exponencial.

A partir da Equação 3 ocorre o desenvolvimento do método de diferenças finitas exponencial de alta ordem. Primeiramente, expandindo a função diferenciável  $\phi(h)$  em série de Mac Lauren obtém-se a seguinte expressão:

$$\phi(h) = \phi(0) + h\phi'(0) + \frac{h^2}{2!}\phi''(0) + O(h^3). \quad (4)$$

Agora, aplicando expansão exponencial no termo  $e^{\phi(h)}$ , o resultado será:

$$e^{\phi(h)} = 1 + \phi(h) + \frac{\phi(h)^2}{2!} + O(h^3). \quad (5)$$

Então, o desenvolvimento do método exige que se faça a substituição da Equação 4 na Equação 5. Esse processo acaba fornecendo a expressão a seguir:

$$e^{\phi(h)} = 1 + \phi(0) + \frac{1}{2}\phi(0)^2 + h(1 + \phi(0))\phi'(0) + \frac{h^2}{2}(\phi'(0)^2 + (1 + \phi(0))\phi''(0)) + O(h^3). \quad (6)$$

Dando continuidade ao processo, é preciso expandir  $F(h, u)$  em série de Taylor em torno do ponto  $u_{i,j}$ . Truncando essa expansão até a quarta ordem, pode-se escrevê-la da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} F(i, j) = & a_0 4u_{i,j} + a_1 4u_{i,j} + a_2 u_{i,j} - b_0 h^2 f_{i,j} e^{\phi(h)} + \\ & + a_0 \left( h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{(i,j)} + a_1 \left( 2h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{(i,j)} + \\ & + a_0 \left( \frac{h^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{h^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)_{(i,j)} + a_1 \left( \frac{h^4}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{h^4}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + h^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_{(i,j)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Para simplificar a expressão será preciso considerar  $f_{i,j} = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{(i,j)}$ , e então:

$$\nabla^2 f_{i,j} = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{(i,j)} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{(i,j)}. \quad (8)$$

Usando essas notações e substituindo-as na Equação 7, tem-se:

$$\begin{aligned} & (4a_0 + 4a_1 + a_2)u_{i,j} + (a_0 + 2a_1)h^2 f_{i,j} + \frac{h^4}{12}(a_0 + 2a_1)\nabla^2 f_{i,j} + \\ & - \frac{h^4}{6}(a_0 - 4a_1) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - b_0 h^2 f_{i,j} (1 + \phi(0) + \frac{1}{2}\phi(0)^2 + \\ & + h(1 + \phi(0))\phi'(0) + \frac{h^2}{2}(\phi'(0)^2 + (1 + \phi(0))\phi''(0))) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Analisando os coeficientes de  $h^p$ , com  $p = 0, 2, 3, 4$ , constrói-se o seguinte sistema não linear:

$$\begin{cases} 4a_0 + 4a_1 + a_2 = 0 \\ (a_0 + 2a_1)f_{i,j} - b_0f_{i,j}(1 + \phi(0) + \frac{1}{2}\phi(0)^2) = 0 \\ -b_0f_{i,j}(1 + \phi(0))\phi'(0) = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

sendo:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{12}(a_0 + 2a_1)\nabla^2 f_{i,j}, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{6}(a_0 - 4a_1) \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_{(i,j)}, \\ \lambda_3 &= b_0f_{i,j} \frac{1}{2}(\phi'(0)^2 + (1 + \phi(0))\phi''(0)). \end{aligned}$$

Para resolver o sistema anterior, considera-se  $\phi(0) = 0$ ,  $\phi'(0) = 0$  e  $a_0 - 4a_1 = 0$ . Com simples substituições convenientes descobre-se facilmente os valores de  $a_0, a_2$  e  $b_0$ , como segue a partir de agora:

$$\begin{aligned} a_0 &= 4a_1, \\ a_2 &= -20a_1, \\ b_0 &= 6a_1. \end{aligned}$$

A substituição de todos esses valores conhecidos na última equação do sistema não linear fornece o valor de  $\phi''(0)$ :

$$\phi''(0) = \frac{\nabla^2 f_{i,j}}{6f_{i,j}}. \quad (11)$$

Agora que são conhecidos, os valores de  $\phi(0)$ ,  $\phi'(0)$  e  $\phi''(0)$  são utilizados na Equação 4, obtendo-se o valor de  $\phi(h)$ :

$$\phi(h) = \frac{h^2 \nabla^2 f_{i,j}}{12f_{i,j}}. \quad (12)$$

Finalmente, sabe-se os valores de todas as constantes que a princípio eram desconhecidas e além disso, uma expressão foi encontrada para a função  $\phi$ . Substituindo os valores de  $a_0, a_2, b_0$  e  $\phi(h)$  na Equação 2, obtém-se a equação do método de diferenças finitas exponencial na sua forma final:

$$4(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + (u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}) - 20u_{i,j} = 6h^2 f_{i,j} e^{\frac{h^2 \nabla^2 f_{i,j}}{12f_{i,j}}}. \quad (13)$$

O laplaciano que se encontra no expoente é aproximado por diferenças finitas de segunda ordem, como visto a seguir:

$$h^2 \nabla^2 f_{i,j} = f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 4f_{i,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1}. \quad (14)$$

Essa expressão é a discretização da equação diferencial utilizando o método de diferenças finitas, também conhecida pela fórmula dos cinco pontos.

Tratando-se de uma equação diferencial parcial elíptica não linear, a discretização dessa equação pelo método de diferenças finitas exponencial fornecerá um sistema não linear que deverá ser resolvido por um método iterativo. Neste trabalho foi utilizado o método de Newton.

## Método de Newton

Suponha um sistema de  $n$  equações não lineares a  $n$  incógnitas:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Com a definição dos vetores  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  e  $f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ , pode-se escrever o sistema não linear na sua forma compacta:

$$f(x) = 0. \quad (16)$$

O método de Newton para aproximar raízes de uma função escalar  $f$  é dado por:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k \geq 0, \quad (17)$$

considerando  $k$  a quantidade de iterações e portanto sendo  $x^{(0)}$  uma aproximação inicial da solução de  $f$ .

Para aplicar este método de Newton à resolução de um sistema não linear, substitui-se a primeira derivada da função escalar  $f$  pela matriz jacobiana da função vetorial  $f$ , conforme Quarteroni (2006):

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

em que o símbolo  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ , com  $i, j = 1, 2, \dots, n$  representa a derivada parcial de  $f_i$  em relação a  $x_j$ .

Logo, o método se resume em:

$$J\Delta x^{(k)} = -f(x^{(k)}), \quad (19)$$

sendo  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$  e  $x^{(0)}$  um vetor inicial escolhido previamente de maneira conveniente, isto é, este vetor deve estar próximo da solução analítica para garantir que a solução do método iterativo convirja para a solução do sistema.

## Resultados numéricos

Para análise dos resultados provenientes da aplicação dos métodos numéricos tratados nas seções anteriores, será utilizada a seguinte equação elíptica não linear:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y, u), \quad (20)$$

com  $f(x, y, u) = \frac{\pi^2}{4}u(1-u) + 2\text{sen}(\frac{\pi y}{2}) + \frac{\pi^2}{4}(1-x^2)^2\text{sen}^2(\frac{\pi y}{2})$  conforme Hu (2007).

A Equação 20 é definida num domínio quadrado com  $0 \leq x, y \leq 1$  e condição de contorno do tipo Dirichlet definido por  $u(x, y)$ , sendo  $u$  a solução analítica dada por  $u(x, y) = (1-x^2)\text{sen}(\frac{\pi y}{2})$ . Após a discretização pelo método exponencial, o sistema não linear resultante será resolvido pelo método de Newton, considerando um vetor solução inicial  $x^{(0)} = [0, 0, \dots, 0]^T$ .



As soluções obtidas nas simulações referentes a este problema são comparadas com a solução presente no artigo de Pandey (2013). Serão utilizados como comparação o erro máximo absoluto (MAU) e a quantidade de iterações realizadas em cada simulação. Além disso, o problema será simulado em uma malha grossa e uma malha fina, com  $N = 4$  e  $N = 8$ , respectivamente.

$$MAU = \max |x^{(k)} - x|. \quad (21)$$

Tabela 1: Resultados obtidos por Pandey (2013).

Malha	MAU	Iterações
Grossa	2.8193e-05	11
Fina	1.7285e-06	22

Tabela 2: Resultados obtidos neste trabalho.

Malha	MAU	Iterações
Grossa	2.8150e-05	4
Fina	1.8190e-06	4

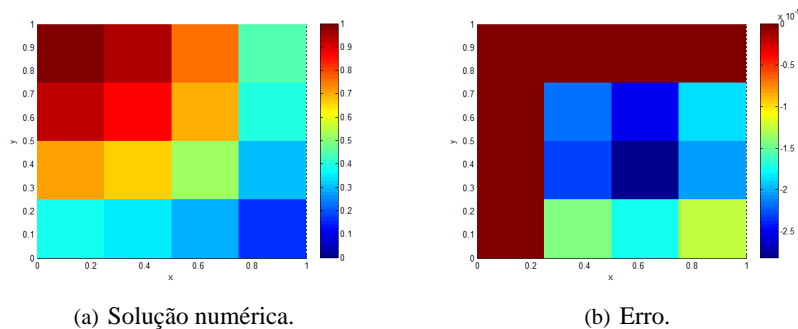


Figura 3: Resultados referentes a malha grossa.

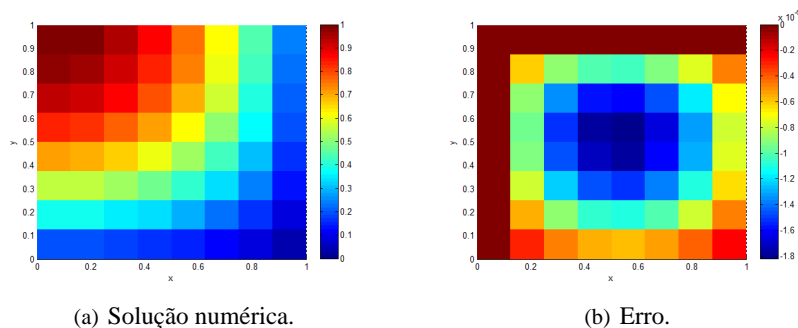


Figura 4: Resultados referentes a malha fina.

É possível notar que as aproximações obtidas no presente trabalho e por Pandey (2013) foram bem semelhantes, mantendo a mesma ordem de erro para cada malha adotada. A principal diferença está na quantidade de iterações realizadas em cada teste. Esta ocorrência pode estar relacionada com o critério de parada adotado ou mais provavelmente com o vetor solução inicial considerado pelo autor.



## Conclusão

O método exponencial é uma nova técnica de diferenças finitas que tem apresentado bons resultados, e que responde bem ao refinamento da malha, calculando melhores aproximações em malhas mais finas, cujo espaçamento foi reduzido. De modo geral, este método apresentou um bom desempenho em problemas elípticos não lineares. Com a aproximação inicial adotada o método foi capaz de convergir após realizar poucas iterações. Com base nos resultados gerados até aqui, as aproximações acompanham um erro da ordem de  $10^{-5}$  e  $10^{-6}$ , o que representa uma boa aproximação. Isso mostra o quanto este método pode ser considerado competitivo quando comparado a métodos mais clássicos.

## Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPESP pelo apoio financeiro no desenvolvimento deste trabalho, processo nº 2016/08343-2.

## Referências

- CUMINATO, J. A.; MENEGUETTE Jr., M. **Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- FORTUNA, A. O. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações**. 2. ed. São Paulo: EDUSP, 2012.
- HU, H. Y.; CHEN, J. S. Wiley InterScience. **Radial Basis Collocation Method and Quasi-Newton Iteration for Nonlinear Elliptic Problems**, vol. 24, n.3, p. 991-1017, 2007.
- PANDEY, P. K. Journal of Mathematical and Computational Science. **A higher accuracy exponential finite difference method for the numerical solution of second order elliptic partial differential equations**, vol. 3, n.5, p. 1325-1334, 2013.
- QUARTERONI, A.; SALERI, F. **Cálculo científico com MATLAB e Octave**. 2. ed. Milano: Springer-Verlag Italia, 2006.



## Tomada de decisão no setor de celulose e papel utilizando programação por metas ponderadas.

Marlon Paulo de Melo Wolff  
Faculdade Estácio São Luís  
E-mail: marlonmelowolff@gmail.com

Aleff Viegas Abreu  
Faculdade Estácio São Luís  
E-mail: aleff.v.abreu@gmail.com

**Resumo:** Neste trabalho é desenvolvido um estudo sobre uma metodologia da Pesquisa Operacional (PO) denominada Programação por Metas (PM) cuja principal característica reside na modelagem e análise de problemas de otimização considerando múltiplas metas ou objetivos, mesmo havendo sentido conflitante entre estes, tais como, reduzir custo e elevar produtividade. Uma aplicação da PM será construída contemplando o setor produtivo associado a celulose e papel, abordando especificamente a produção de papeis sanitários, onde a matéria prima advém tanto de papel reciclado quanto de fornecedores de celulose. O resultado da PM no estudo de caso considerado permite ao tomador de decisão uma melhor avaliação referente à performance das variáveis econômicas, de produção e de sustentabilidade envolvidas no processo produtivo.

**Palavras-chave:** Tomada de decisão, Programação por Metas, Indústria de Papeis.

## Introdução

Uma característica inerente às indústrias e prestadoras de serviço, em geral, é a necessidade de atingir diferentes metas simultaneamente, a Programação por Metas ou *Goal Programming*, é uma técnica da Pesquisa Operacional com perspectiva multiobjetiva em relação a problemas de tomada de decisão nestes setores. Como considera RAGSDALE (2011, p.306), em relação a Programação por Metas (PM), "é bem possível que uma variedade de funções objetivos possa ser proposta para o mesmo problema de otimização".

A PM é considerada ponderada quando a expressão matemática que descreve a função objetivo incorpora, além do conjunto de variáveis de desvios típicas dessa metodologia, valores de ponderação associadas à preferências específicas por parte do tomador de decisão em relação ao cumprimento das metas do problema formulado. Através destes parâmetros é possível reordenar a função objetivo para níveis de otimização mais desejáveis.

Neste trabalho é desenvolvida uma aplicação da PM ponderada no setor produtivo da celulose e papel, fornecendo um tratamento otimizado à tomada de decisão em relação as atividades de produtividade, de custo e de sustentabilidade que permeiam desenvolvimento fabril de indústrias deste setor.

## Setor de celulose e papel

A celulose é um produto da complexa organização industrial do setor florestal, sendo considerada no Brasil produto, madeireiro, juntamente com o carvão vegetal, madeira serrada e outros. A produção de celulose deriva principalmente das florestas de eucalipto e pinus. Segundo [BS 43 Biorrefinaria integrada a indústria de celulose no Brasil.] o Brasil tem a maior produtividade florestal do mundo, tanto no cultivo de pinus quanto no de eucalipto. Com volume médio anual de  $44m^3/ha/ano$  em produção de eucalipto





e cerca de 1,59 milhão de hectares de pinus, o Brasil dispara na frente de outros grandes centros de produção florestal, como África do Sul, Chile, Portugal e Espanha.

Dados da (IBA 2015) revelam que do total de 7,74 milhões de hectares de árvores plantadas em solo brasileiro, 34% pertencem ao segmento industrial de celulose e papel. No cenário internacional, o Brasil se mantém como quarto produtor mundial de celulose, tendo a produção brasileira registrado em 2015 um crescimento de 4,6% de janeiro a outubro, passando de 13,6 milhões de toneladas em 2014 para 14,2 milhões de toneladas em 2015 (FIEMS). Apenas cinco empresas concentram cerca de 80% da capacidade produtiva. Em 2009, somente a Fibria S.A. detinha 36,6% do percentual de produção. Segundo dados recentes a indústria de papel tem crescido em volume de vendas principalmente em exportações, tendo em vista de que entre 2014 e 2015 houve um aumento de cerca de 8,6% no volume de exportação, a China continua sendo um dos principais clientes do comércio de celulose nacional.

Segundo a revista o (Globo rural) a Europa ainda é o maior cliente da indústria brasileira, posteriormente a china foi responsável por cerca de 33,2% da receita total de vendas de papel e celulose, seguida pela América do Norte. Em uma cadeia nacional apesar das incertezas comerciais e de um cenário recessivo, esse mercado tem se mantido equilibrado, mesmo que a receita tenha sido em 2015 4,5% menor do que em 2014, os níveis de exportação tem se mostrado um bom agente de equilíbrio no mercado.

## Progamação por metas ponderadas

O modelo de PM é formulado e inserido de forma bastante similar a um modelo de programação linear, contendo, ainda assim, algumas diferenças em relação as funções objetivo que são inseridas com prioridades desejadas. Outra abordagem para a Programação por metas é declarar os objetivos como restrições, além das restrições normais do problema. A função objetivo é, portanto, montada para minimizar variáveis de desvio em relação às Metas desejadas pelo gestor. Aos desvios apresentados na função objetivo são fornecidas ponderações dadas de acordo com a visão do gestor sobre o problema.

Portanto, em relação a outras técnicas da pesquisa operacional tais como, progamação linear, progamação linear inteira, a Progamação por Metas apresenta adicionalmente variáveis de desvio ( $d_i^- + d_i^+$ ), que são marcadas por expressar as quantidades de falta ou excesso da solução em relação as metas, que por sua vez traduzem os objetivos específicos do problema. Além dos desvios, as ponderações ( $w_i^- + w_i^+$ ) representam parâmetros que são utilizados para ponderar as variáveis de desvios do problema, ou seja, podemos privilegiar algumas metas em relação a outras dependendo da situação apresentada tornando alguns valores dentro da solução (indesejáveis ou não).

A seleção dos valores de ponderação para a função objetivo da PM não é o principal foco deste trabalho, mas acentua-se que possibilidades (pesquisas futuras) podem ser devidamente tratadas, a saber:

- Através de uma conveniente interação estratégica tipificada pela Teoria dos Jogos, onde teríamos as metas, ou bloco de metas, como agentes de decisão e estratégias sendo dadas pelos valores de ( $w_i^- + w_i^+$ ).
- Execução de uma rotina computacional permitiria uma seleção conveniente para os valores das ponderações.
- O processo mais geral ocorre por tentativas e refinamento da solução mínima.

As equações de 1 a 3 representam a formulação matemática da progamação por metas ponderadas, conforme estão descritas abaixo:

$$MINZ : \sum_{i=1}^m \frac{1}{h_i} (p_i^- d_i^- + p_i^+ d_i^+). \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^m C_{ij}X_j + d_i^- + d_i^+ = h_i, i = 1, 2, \dots, k. \quad (2)$$

$$d_i^- \geq 0, d_i^+ \geq 0, i = 1, 2, \dots, k, k_j \geq 0 \forall j. \quad (3)$$

Sendo  $\frac{1}{h_i}$  o fator que permite normalizar os desvios percentuais e tendo em vista que as metas são, em geral, qualificadas de forma diferenciada por exemplo, uma meta pode referir-se a quantidade de dinheiro enquanto outra a pessoas. O termo  $h_i$  representa o valor ótimo da meta  $i$ , onde o fluxo de desenvolvimento da metodologia considera uma lógica de tratamento das metas por meio das variáveis de desvio e ponderações. As primeiras variáveis servem de sensores em relação ao cumprimento das metas, enquanto as segundas operam como instrumentos de controle do modelo de solução, permitindo a varredura de soluções mais desejáveis.

## Modelo de tomada de decisão para a empresa de papéis sanitários

Esta seção é dedicada ao estudo da Programação de Metas através de uma aplicação em uma empresa de produção de papéis sanitários, onde o conjunto de requisitos são descritos abaixo para aplicação. Apesar de não serem reais, os dados sugerem a possibilidade de aplicação em empresas reais desse segmento.

A situação problema em que será desenvolvida a Programação de metas ponderadas segue o seguinte conjunto de requisitos:

1. A empresa atua na cadeia produtiva do papel, sendo considerada uma indústria de bens de consumo com certa referência no distrito industrial onde esta localizada.
2. Seu processo produtivo esta descrito no fluxograma da Figura 1 abaixo.

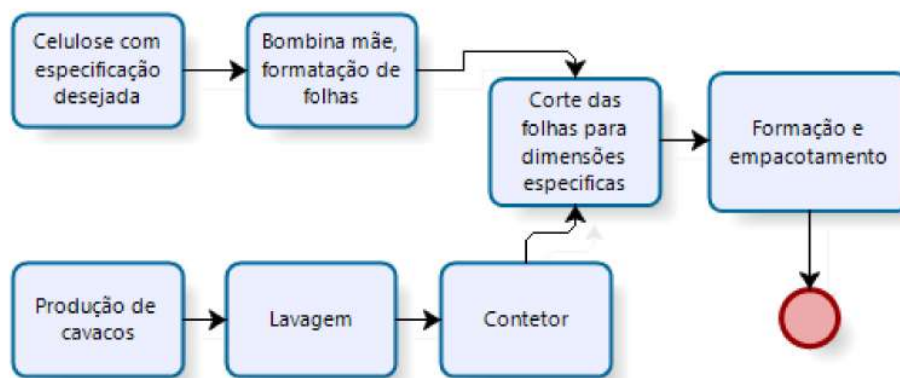


Figura 1: Processo produtivo da empresa

3. A gerência executiva da empresa avalia os resultados de produtividade e venda, verifica que o mercado tem apresentado certo desaquecimento e pretende viabilizar um planejamento satisfatório que atenda três aspectos de desempenho, a saber: produtivo, financeiro e sustentável. A partir de análises de mercado e dos processos internos, a gerência estabeleceu como metas para o próximo mês as descritas abaixo.

- META 1: Produzir aproximadamente 8000 unidades de Papel toalha PIT ( $X_1$ )
- META 2: Produzir aproximadamente 2265 unidades de Papel toalha PTB ( $X_2$ )



- META 3: Produzir aproximadamente 1119 unidades de Papel toalha PIM ( $X_3$ )
- META 4: Produzir aproximadamente 860 unidades de Papel Big Roll PRB ( $X_4$ )
- META 5: Produzir aproximadamente 423 unidades de Papel Lençol H PLH ( $X_5$ )
- META 6: Produzir aproximadamente 19000 unidades de Papel higiênico PH ( $X_6$ )
- META 7: Produzir aproximadamente 2110 unidades de Papel toalha PT ( $X_7$ )
- META 8: Alcançar uma receita líquida de aproximadamente 380.000 reais ( $X_8$ )
- META 9: Alcançar um Custo de produção de aproximadamente 200.000 reais ( $X_9$ )
- META 10: Consumir aproximadamente 95.000 litros de água ( $X_{10}$ )

## Modelagem matemática

O processo de modelagem matemática dentro da programação de metas é relativamente similar ao utilizado pela programação linear, por isso, podemos considerar as metas de 8 a 10 como restrições do problema. As metas podem ser escritas matematicamente como restrições flexíveis, conforme mostra as Equações 4 a 14. A seguir são demonstrados cada tipo de papel e sua respectiva meta, juntamente com o valor de cada receita, custo e consumo de água por unidade de cada tipo de papel.

Os números que antecedem os valores nas equações de receita, custo e consumo de água, são referentes a cada tipo de papel e quanto cada um gera uma receita, custo e quanto ao uso de fontes de energia para sua produção.

$$X_1 + d_1^- - d_1^+ = 8000 \quad (4)$$

$$X_2 + d_2^- - d_2^+ = 2265 \quad (5)$$

$$X_3 + d_3^- - d_3^+ = 1119 \quad (6)$$

$$X_4 + d_4^- - d_4^+ = 860 \quad (7)$$

$$X_5 + d_5^- - d_5^+ = 423 \quad (8)$$

$$X_6 + d_6^- - d_6^+ = 19000 \quad (9)$$

$$X_7 + d_7^- - d_7^+ = 2110 \quad (10)$$

$$12X_1 + 12X_2 + 15X_3 + 10X_4 + 12X_5 + 15X_6 + 12X_7 + d_8^- - d_8^+ = 380.000 \quad (11)$$

$$6X_1 + 8X_2 + 7X_3 + 6X_4 + 10X_5 + 8X_6 + 5X_7 + d_9^- - d_9^+ = 200.000 \quad (12)$$

$$2X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 2X_4 + 1X_5 + 2X_6 + 2X_7 + d_{10}^- - d_{10}^+ = 95000 \quad (13)$$

$$\frac{w_1^-}{8000}d_1^- + \frac{w_2^-}{2265}d_2^- + \frac{w_3^-}{1119}d_3^- + \frac{w_4^-}{860}d_4^- + \frac{w_7^-}{2110}d_7^- + \frac{w_8^-}{380.000}d_8^+ + \frac{w_9^+}{200.000}d_9^+ + \frac{w_{10}^+}{95000}d_{10}^+ \quad (14)$$

Na função objetivo descrita pela Equação 14 percebemos a presença dos pesos ( $w_i^- + w_i^+$ ), para o nosso problema consideramos que todas as metas de produção de papel seja indesejável que a resposta seja abaixo do valor estabelecido, com peso 1 e indiferente em relação ao valor ser acima da meta com peso 0. Nesse contexto, também consideramos indesejável a solução ser abaixo da receita de 380.000 reais, e consideramos indesejáveis uma solução com valores acima da meta relacionada a custo e consumo de água. A solução de programação de metas é viabilizada neste trabalho Solver/Excel.



## Solução computacional e análise de resultados

A Figura 2, apresenta o layout desenvolvido no excel. Destacamos que é possível encontrar layouts dos mais diversos, porém, todos possuem estruturas similares quanto aos modelos de parametrização, a forma pelo qual você pode organizar as células no excel depende da sua forma de visualização do problema.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Colunas1	Colunas2	Colunas3	Colunas4	Colunas5	Colunas6	Colunas7	Colunas8	Colunas9	Colunas10	Colunas11
2	Tipo de papel	PIT	PTB	PIM	PBR	PLH	PH	PTG			
3	Receita unitaria	12	12	15	10	12	15	12			
4	Consumo unitario	6	8	7	6	10	8	5			
5	Consumo de agua	2	2	3	2	1	2	2			
6											
7											
8	Tipo de papel	PIT	PTB	PIM	PRB	PLH	PH	PTG	Receita	Custo	Consumo de Agua
9	Quantidade atual	0	0	0	0	0	0	0	R\$ 0	R\$ 0	0
10	Under	0	0	0	0	0	0	0	R\$ 0	R\$ 0	0
11	Over	0	0	0	0	0	0	0	R\$ 0	R\$ 0	0
12	Objetivos	0	0	0	0	0	0	0	R\$ 0	R\$ 0	0
13	Metas	8000	2265	1119	860	423	19000	2110	R\$ 380.000	R\$ 200.000	95000
14											
15	Percentual de desvio										
16	Under	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
17	Over	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
18											
19	Ponderação										
20	Under	1	1	1	1	1	1	1	2	0	0
21	Over	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2
22											
23	Objetivo	0,00									
24											

Figura 2: Layout no excel do problema

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Colunas1	Colunas2	Colunas3	Colunas4	Colunas5	Colunas6	Colunas7	Colunas8	Colunas9	Colunas10	Colunas11
2	Tipo de papel	PIT	PTB	PIM	PBR	PLH	PH	PTG			
3	Receita unitaria	12	12	15	10	12	15	12			
4	Consumo unitario	6	8	7	6	10	8	5			
5	Consumo de agua	2	2	3	2	1	2	2			
6											
7											
8	Tipo de papel	PIT	PTB	PIM	PRB	PLH	PH	PTG	Receita	Custo	Consumo de Agua
9	Quantidade atual	8000	2265	1119	860	423	13403	2110	R\$ 380.000	R\$ 201.114	57055
10	Under	0	0	0	0	0	5597	0	R\$ 0	R\$ 0	37945
11	Over	0	0	0	0	0	0	0	R\$ 0	R\$ 1.114	0
12	Objetivos	8000	2265	1119	860	423	19000	2110	R\$ 380.000	R\$ 200.000	95000
13	Metas	8000	2265	1119	860	423	19000	2110	R\$ 380.000	R\$ 200.000	95000
14											
15	Percentual de desvio										
16	Under	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	29,86%	0,00%	0,00%	0,00%	39,94%
17	Over	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,56%	0,00%
18											
19	Ponderação										
20	Under	1	1	1	1	1	1	1	2	0	0
21	Over	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2
22											
23	Objetivo	0,31									
24											

Figura 3: Primeira solução

Como podemos observar na Figura 3, através do método da programação por metas, e seguindo os valores estabelecidos pela direção da empresa, o solver apresenta uma solução em que a quantidade específica de cada tipo de papel a ser fabricadas em unidades será de: 8000 Papel Interfolheado toalha, 2265 Papel toalha bobina, 1119 Papel intercalado multiuso, 860 Papel big roll, 423 Papel lençol hospitalar, 13403 Papel higiênico, 2110 Papel tipo guardanapo. Seguindo esses valores mostrados no solver, teremos uma receita e custo respectivamente de: 380.000 e 201.114 reais, com esses valores encontrare-

mos um lucro de 178.886 reais. Seguindo essa indicação de produção teremos um consumo de água de 57.055 litros, estando esse último cerca de 40% abaixo do consumo total de água estabelecido pela meta de 95.000 litros. Nesse contexto, percebemos que grande parte das metas foram alcançadas.

Contudo, o solver nos mostra que a quantidade de papel do tipo higiênico está abaixo da meta estabelecida em 29,46%, e também que a meta relacionada ao custo total foi ultrapassada em 0,56%. Vale ressaltar que embora a solução nos mostre um pequeno desvio em relação ao custo da produção em apenas 0,56%, devemos considerar que um desvio abaixo da meta em 29,46% na produção de papel higiênico pode ser considerado um problema, tendo em vista de que este tipo de produto é um dos que geram uma das maiores receitas dentro da empresa.

Para fazer alterações no cenário inicial de uma solução dada pelo solver, é importante destacar que cabe ao tomador de decisão a aplicação de seu conhecimento dentro dos critérios das necessidades da empresa. Com o objetivo de demonstração, faremos algumas modificações na tabela apresentando alguns resultados diferentes e explicando novos valores do problema. Sendo assim, vamos considerar que o tomador de decisão considere inviável que a produção de papel tipo higiênico esteja 29,46% abaixo da meta e resolva alterar valores na tabela com o objetivo de satisfazer a meta. Podemos aumentar o valor da célula G20, para considerarmos uma penalização maior para o caso de não se alcançar a meta.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Colunas1	Colunas2	Colunas3	Colunas4	Colunas5	Colunas6	Colunas7	Colunas8	Colunas9	Colunas10	Colunas11
2	Tipo de papel	PIT	PTB	PIM	PBR	PLH	PH	PTG			
3	Receita unitaria	12	12	15	10	12	15	12			
4	Consumo unitario	6	8	7	6	10	8	5			
5	Consumo de agua	2	2	3	2	1	2	2			
6											
7											
8	Tipo de papel	PIT	PTB	PIM	PBR	PLH	PH	PTG	Receita	Custo	Consumo de Agua
9	Quantidade atual	8000	2265	1119	860	423	19000	2110	R\$ 463.961	R\$ 245.893	68250
10	Under	0	0	0	0	0	0	0	R\$ 0	R\$ 0	26750
11	Over	0	0	0	0	0	0	0	R\$ 83.961	R\$ 45.893	0
12	Objetivos	8000	2265	1119	860	423	19000	2110	R\$ 380.000	R\$ 200.000	95000
13	Metas	8000	2265	1119	860	423	19000	2110	R\$ 380.000	R\$ 200.000	95000
14											
15	Percentual de desvio										
16	Under		0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	28,16%
17	Over		0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	22,10%	22,95%	0,00%
18											
19	Ponderação										
20	Under	1	1	1	1	1	5	1	2	0	0
21	Over	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2
22											
23	Objetivo	0,46									
24											

Figura 4: Alteração do cenário inicial

Conforme percebemos na Figura 4, ao aumentar a ponderação de 1 para 5 considerando indesejável não alcançar essa meta, o solver nos indica que o valor foi alcançado em 19000 unidades de papel do tipo higiênico atendendo todas as metas de produção em unidades de papel, conseqüentemente a isso, percebemos que também houveram alterações nos valores de receita e custo. Analisando o novo cenário percebemos que os valores de receita e custo foram de 463.961 e 245.893 reais, representando respectivamente novos desvios acima de 22,10% e 22,95%, dentro destes parâmetros temos um lucro de 218.068 reais para a empresa. O consumo de água permaneceu abaixo da meta total estando 28,16% abaixo da meta estabelecida o que pode ser visto como uma excelente perspectiva do ponto de vista ambiental e econômico.

Também podemos destacar que a solução embora tenha se desviado acima tanto em receita como em custo, nos mostrou um aumento de lucro para essas novas condições de produção de : 39.182 reais a mais em relação a primeira solução, subtraindo a primeira receita gerada de 218.068 reais da segunda cujo o valor encontrado foi de 178.886 reais.

Por isso, é importante destacar que na PM é necessário que se faça na maioria dos casos mais de uma simulação e análise dos novos resultados. Embora as metas de custo e receita tenham sido alteradas





mediante as ponderações atribuídas, a possibilidade de novas soluções possibilitou maior lucratividade, logo, no exemplo demonstrado percebemos que a necessidade de trabalhar com outros cenários forneceu ao tomador de decisão mais detalhamento da solução 1 em detrimento da solução 2.

Porém, é importante ressaltar novamente que tudo depende do posto de vista e análise do gestor, para cada caso uma necessidade diferente, se aplicarmos conceitos de demanda ou até mesmo aplicações da ferramenta GUT (gravidade, urgência e tendência), as possibilidades utilizando a técnica de Programação por Metas são infinitas, até que o tomador de decisão considere a solução satisfatória para a aplicação.

## Conclusão

A preocupação com a tomada de decisão nos setores industriais conduz de forma geral a sistemas multiobjetivos, pois o processo decisório nesses casos agrega diversos níveis de decisão, quase sempre intercalados. A Programação por Metas vem se mostrando, nas suas mais diversas abordagens, como uma metodologia interessante para subsidiar no equilíbrio dos objetivos a serem otimizados, possibilitando certa margem de manipulação (através das ponderações) ao gestor industrial.

Neste trabalho foram desenvolvidas a modelagem matemática, a solução computacional e uma análise para uma aplicação da Programação por Metas Ponderadas em um problema de decisão associado ao processo produtivo de papéis sanitários, elencando um cenário em que estavam envolvidas metas de produção, econômicas e sustentáveis. Perturbando a função objetivo do modelo, através dos parâmetros de ponderação, e observando o conjunto de taxas de variação das metas, foi possível obter um nível satisfatório de otimização.

## Referências

RAGSDALE, T. **Managerial Decision Modeling**. 9.ed. United States: Cengage Learning, Inc Mason OH, 2011. p.306.

Schniederjans, M.J **Goal Programming: Methodology and Applications**. 1. ed. Springer Science+Business media, 1995.

Dan, E; Desmond, O. Research Journal in Engineering and Applied Sciences. **Goal programming-an application to Budgetary Allocation of an Institution of Higher Learning** v.2, n.2, p.95-105, 2013.

Magliano, L; Nali, E. Biblioteca Digital do BNDES. **Biorrefinaria integrada á industria de celulose no Brasil: oportunidade ou necessidade ?** v.43, p.257-294, 2016.

IBA-INDÚSTRIA BRASILEIRA DE ÁRVORES. Relatório IBA. 2015. Disponível em: <http://iba.org/pt/9-contéudo-pt/338-outras publicações>. Acesso em: 20 jul. 2016.

REVISTA GLOBO RURAL. Fibria aumenta preço de celulose para a Ásia. 2016. Disponível em : [revistagloborural.globo.com/Noticias/Empresas-e-Negócios](http://revistagloborural.globo.com/Noticias/Empresas-e-Negócios). Acesso em : 25 dec. 2016.



## Um estudo de estabilidade para um modelo fracionário de crescimento de câncer avascular

*Robinson Tavoni*

*Programa de pós-graduação em Biometria; Unesp, Botucatu, SP  
Docente da Área de Matemática, IFSP, Araraquara  
tavoni@ibb.unesp.br*

*Paulo Fernando de Arruda Mancera*

*Departamento de Bioestatística, Unesp, Botucatu, SP  
pmancera@ibb.unesp.br*

*Rubens de Figueiredo Camargo*

*Departamento de Matemática, Unesp, Botucatu, SP  
rubens@fc.unesp.br*

**Resumo:** Esse trabalho trata da análise de estabilidade de um modelo de ordem não inteira de crescimento de câncer avascular. Além disso, foram feitas algumas simulações numéricas através do método de diferenças finitas não clássico. Tais resultados numéricos estão de acordo com os resultados analíticos.

**Palavras-chave:** Cálculo Fracionário. Análise de Estabilidade. Crescimento Tumoral.

### Introdução

Assim como no cálculo usual, o estudo de estabilidade é necessário no cálculo fracionário, uma vez que nem sempre o resultado adquirido é o mesmo. No modelo presa-predador estudado por Ahmed et al.(2007) um ponto de equilíbrio que é de sela no modelo de ordem inteira torna-se estável no modelo de ordem fracionária.

Com o objetivo de estudar a estabilidade de um modelo de câncer avascular na sua versão fracionária e comparar com o modelo usual, neste trabalho, apresentamos resultados e definições do cálculo fracionário, análise de estabilidade para sistemas e comparamos os retratos de fases.

### Conceitos preliminares

Nesta seção apresentamos alguns resultados do cálculo de ordem fracionária: operador integral, definição da derivada de Caputo, além de algumas propriedades e lemas e algumas definições referentes à teoria de ponto de equilíbrio e estabilidade.

**Definição 0.1** *Função Gel'fand-Shilov.* A função Gel'fand-Shilov é definida, para  $\nu \notin \mathbb{Z}_-$ , como (Camargo, 2015)

$$\phi_\nu(t) := \begin{cases} \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0. \end{cases} \quad (1)$$

**Definição 0.2** *Definimos as funções de Mittag-Leffler, com um e dois parâmetros, respectivamente, como*

$$E_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + 1)} \quad e \quad E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + \beta)}, \quad z \in \mathbb{C} \text{ e } \operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\beta) > 0. \quad (2)$$

Claramente, para  $\alpha = 1$  recuperamos a função exponencial, isto é,  $E_1(z) = e^z$  e  $E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z)$ .

**Definição 0.3** Integral de ordem arbitrária de Riemann-Liouville. Seja  $f(t)$  uma função integrável, utilizamos a generalização do conceito de fatorial pela função gama, para definir a integral de ordem  $\nu$  de  $f(t)$ , denotada por  $I^\nu f(t)$ , como

$$I^\nu f(t) = \phi_\nu(t) * f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} f(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Por conveniência,  $I^0 f(t)$  será o operador identidade.

**Propriedade 0.1** Lei dos expoentes:  $I^\gamma I^\beta f(x) = I^{\gamma+\beta} f(x)$ , com  $\gamma, \beta \in \mathbb{R}^+$ .

**Definição 0.4** Derivada Fracionária de Caputo. Sejam  $f(t)$  uma função diferenciável,  $m \in \mathbb{N}$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$  com  $\text{Re}(\alpha) > 0$  tais que  $m-1 < \text{Re}(\alpha) \leq m$ . A derivada de ordem  $\alpha$  no sentido de Caputo é definida como sendo a integral fracionária de uma derivada de ordem inteira, de forma que a lei dos expoentes faça sentido, isto é<sup>1</sup>

$$D^\alpha f(t) = I^{m-\alpha} D^m f(t) = \phi_{m-\alpha} * D^m f(t). \quad (4)$$

Como  $I^0$  é o operador identidade, para  $\alpha \in \mathbb{N}$  recuperamos a derivada usual.

## Pontos de equilíbrio e análise de estabilidade

Seja  $\alpha \in (0, 1]$  e consideremos o sistema

$$\begin{cases} D^\alpha x_1(t) = f_1(x_1, x_2) \\ D^\alpha x_2(t) = f_2(x_1, x_2) \end{cases}, \quad (5)$$

com  $x_1(0) = x_{01}$  e  $x_2(0) = x_{02}$ .

Para calcular os pontos de equilíbrio  $(x_1^{eq}, x_2^{eq})$  basta tomar  $D^\alpha x_1(t) = 0$  e  $D^\alpha x_2(t) = 0$ , isto é,

$$f_1(x_1^{eq}, x_2^{eq}) = 0 = f_2(x_1^{eq}, x_2^{eq}).$$

Para avaliar a estabilidade

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1^{eq} + \varepsilon_1(t), \\ x_2(t) &= x_2^{eq} + \varepsilon_2(t), \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} D^\alpha(x_1^{eq} + \varepsilon_1) &= f_1(x_1^{eq} + \varepsilon_1, x_2^{eq} + \varepsilon_2), \\ D^\alpha(x_2^{eq} + \varepsilon_2) &= f_2(x_1^{eq} + \varepsilon_1, x_2^{eq} + \varepsilon_2), \end{aligned}$$

tomando  $i = 1, 2$  o que implica

$$D^\alpha \varepsilon_i(t) = f_i(x_1^{eq} + \varepsilon_1, x_2^{eq} + \varepsilon_2)$$

e

<sup>1</sup>Segue, como consequência da definição, que  $D^\alpha t^\beta = t^{\beta-\alpha} \Gamma(\beta+1) / \Gamma(\beta-\alpha+1)$ , que recupera o resultado clássico quando  $\alpha = n$  e  $\beta = m$ , com  $n, m \in \mathbb{N}$ .

$$f_i(x_1^{eq} + \varepsilon_1, x_2^{eq} + \varepsilon_2) \simeq f_i(x_1^{eq}, x_2^{eq}) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Big|_{eq} \varepsilon_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \Big|_{eq} \varepsilon_2 + \dots$$

$$\Rightarrow f_i(x_1^{eq} + \varepsilon_1, x_2^{eq} + \varepsilon_2) \simeq \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Big|_{eq} \varepsilon_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \Big|_{eq} \varepsilon_2,$$

em que  $f_i(x_1^{eq}, x_2^{eq}) = 0$ , então

$$D^\alpha \varepsilon_1(t) \simeq \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Big|_{eq} \varepsilon_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \Big|_{eq} \varepsilon_2.$$

Podemos escrever o sistema  $D^\alpha \varepsilon = A\varepsilon$ , com condições iniciais  $\varepsilon_1(0) = x_1(0) - x_1^{eq}$  e  $\varepsilon_2(0) = x_2(0) - x_2^{eq}$ , em que

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

e

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2.$$

Temos que  $B^{-1}AB = C$ , em que  $C$  é a matriz diagonal de  $A$  dada por

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

em que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são autovalores da  $A$  e  $B$  é o autovetor de  $A$ , então

$$AB = BC, \quad A = BCB^{-1},$$

implica que

$$D^\alpha \varepsilon = (BCB^{-1})\varepsilon, \quad d^\alpha(B^{-1}\varepsilon) = C(B^{-1}\varepsilon),$$

então,

$$D^\alpha \eta = C\eta, \quad \eta = B^{-1}\varepsilon, \quad (9)$$

em que

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

ou seja,

$$D^\alpha \eta_1 = \lambda_1 \eta_1, \quad D^\alpha \eta_2 = \lambda_2 \eta_2, \quad (11)$$

as soluções de (11) são dadas pela função:

$$\eta_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_i)^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \eta_i(0) = E_\alpha(\lambda_i t^\alpha) \eta_i(0), \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

Utilizando o resultado de Matignon (1996), se:

$$|\arg(\lambda_1)| > \alpha\pi/2 \quad \text{e} \quad |\arg(\lambda_2)| > \alpha\pi/2, \quad (13)$$



se  $\eta_1(t)$  e  $\eta_2(t)$  são decrescentes então,  $\varepsilon_1(t)$  e  $\varepsilon_2(t)$  são decrescentes.

Assim o ponto de equilíbrio  $(x_1^{eq}, x_2^{eq})$  é localmente estável e ambos os autovalores da matriz  $A$  são negativos (13).

## Modelo de crescimento tumoral fracionário

Consideramos o modelo proposto por Fassoni (2016) de ordem inteira

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = r_N - \mu_N N - \beta_1 NA \\ \frac{dA}{dt} = r_A A \left(1 - \frac{A}{K_A}\right) - \beta_2 NA - (\mu_A + \varepsilon_A) A \end{cases}, \quad (14)$$

em que  $N$  e  $A$  correspondem, respectivamente, as quantidades de células tumorais e normais. O parâmetro  $r_N$  representa a taxa de reprodução total constante de células normais,  $\mu_A$  é a taxa de mortalidade natural das células cancerosas e  $\varepsilon_A$  a taxa de mortalidade por apoptose,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  representam a taxa de mortalidade das células normais e cancerosas, respectivamente, devido a competição entre elas;  $K_A$  é a capacidade de suporte e  $r_A$  a taxa de proporcionalidade de crescimento das células cancerosas.

Reescrevendo o sistema usando a derivada de Caputo ( $0 < \alpha \leq 1$ ):

$$\begin{cases} D^\alpha N(t) = r_N - \mu_N N - \beta_1 NA \\ D^\alpha A(t) = r_A A \left(1 - \frac{A}{K_A}\right) - \beta_2 NA - (\mu_A + \varepsilon_A) A \end{cases}. \quad (15)$$

O sistema na equação 15 tem três pontos de equilíbrio. O ponto de equilíbrio trivial  $P_0 = \left(\frac{r_N}{\mu_N}, 0\right)$  e dois pontos não-triviais :

$$P_i = (N_i, A_i) = \left(\frac{r_N}{\mu_N + \beta_1 A_i}, A_i\right) \quad i = 1, 2,$$

$A_1$  e  $A_2$  são as raízes da equação  $aA^2 + bA + c = 0$  com coeficientes:  $a = \frac{\beta_1 r_A}{K_A} > 0$ ,  $b = l_A(\beta_1^{th} - \beta_1)$ ,  $c = r_N(\beta_2 - \beta_2^{th})$ , em que  $\beta_1^{th} = \frac{\mu_N r_A}{l_A K_A}$  e  $\beta_2^{th} = \frac{\mu_N}{r_N} l_A$ . Os pontos  $P_1$  e  $P_2$  podem ser reais, ou não, dependendo dos parâmetros.

Resumidamente, o sistema (15) pode ter somente um único ponto de equilíbrio (caso 1), três pontos de equilíbrio ( $P_0, P_1, P_2$ ) (caso 2) ou apenas dois pontos de equilíbrio ( $P_0$  e  $P_2$ ) (caso 3), dependendo dos valores dos parâmetros  $\beta_1$  e  $\beta_2$  (FASSONI, 2016).

Para o ponto de equilíbrio  $P_0$  os autovalores da matriz  $A$  são  $\lambda_1 = -\mu_N < 0$  e  $\lambda_2 = \frac{r_N}{\mu_N}(\beta_2^{th} - \beta_2)$ . Então,  $P_0$  é estável se  $\beta_2 > \beta_2^{th}$ , e instável caso contrário.

O ponto de equilíbrio  $P_1$  será um ponto de sela sempre que for positivo (caso 2) e pela equação (13) o ponto  $P_2$  será estável sempre que positivo (casos 2 e 3).

## Simulação numérica

Comparamos a simulação numérica para ordem inteira do caso 2 (ver Tabela 1) com ordem fracionária.

O método numérico utilizado foi de diferenças finitas não clássico (NSFD) com a função denominador  $\phi = h^\alpha$ , levando em consideração que uma equação diferencial fracionária é um operador não local (ver ONGUN et al., 2013).

Tabela 1: Parâmetros do modelo (caso 2). (FASSONI, 2016)

Parâmetro	descrição	valor
$\mu_N$	$\frac{1}{\mu_N}$ é o tempo de vida de uma célula normal	0.01 dia <sup>-1</sup>
$r_N$	taxa constante de reprodução de células normais	10 <sup>6</sup> célula dia <sup>-1</sup>
$r_A$	taxa de crescimento das células tumorais	0.05 dia <sup>-1</sup>
$K_A$	capacidade de suporte do tumor	0.75 x 10 <sup>8</sup> células
$\mu_A$	taxa de mortalidade natural das células cancerosas	0.01 dia <sup>-1</sup>
$\varepsilon_A$	taxa extra de mortalidade de células cancerosas	0.01 ia <sup>-1</sup>
$\beta_1$	agressividade das células cancerosas	0.40 x 10 <sup>-9</sup> célula <sup>-1</sup> dia <sup>-1</sup>
$\beta_2^{II}$	resposta do tecido às células cancerosas	0.32 x 10 <sup>-9</sup> célula <sup>-1</sup> dia <sup>-1</sup>

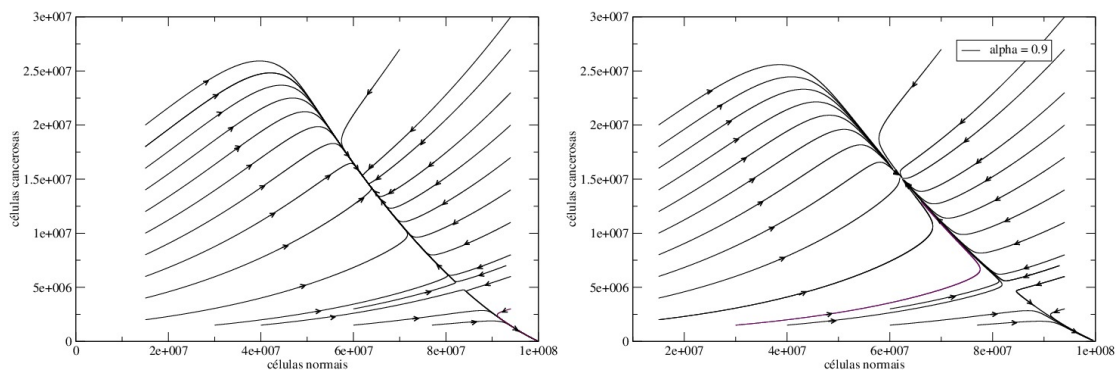


Figura 1: Retrato de fase,  $\alpha = 1$  (esquerda) e  $\alpha = 0.9$  (direita) .

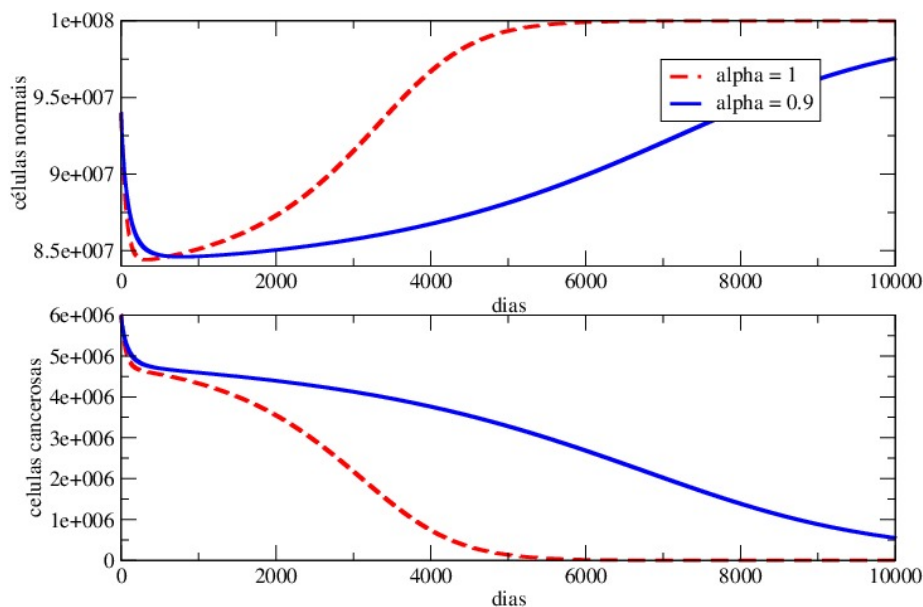


Figura 2: Solução numérica de (15) com  $N(0) = 0,94 \cdot 10^8$  e  $A(0) = 0,06 \cdot 10^8$  células para  $\alpha$  igual a 1 e 0,9 .

Observemos que o retrato de fase de ordem inteira e fracionária (para  $\alpha = 0,9$ ) são similares. E comparamos o crescimento do tumor em relação ao tempo (Figura 2) no caso inteiro e  $\alpha = 0,9$ . A escolha



da ordem fracionária  $\alpha = 0,9$  é apenas um exemplo para o trabalho. As simulações para  $\alpha = 0,97; 0,9$  e  $0,8$  apresentam o mesmo comportamento, ou seja, quanto menor a ordem da derivada maior o tempo para atingir o equilíbrio.

## Conclusões

Estudamos os pontos de equilíbrio e estabilidade e aproximamos a solução por meio de um método numérico do sistema proposto por Fassoni (2016) e concluímos que os casos de estabilidade são os mesmos. Nesse modelo a diferença entre a modelagem de ordem inteira e a fracionária está no tempo para atingir o equilíbrio.

## Referências

- Ahmed, E.; El-Sayed, A. M. A. D.; El-Saka, H. A. A. Journal of Mathematical Analysis and Applications. **Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional-order predator-prey and rabies models**, p. 542-553, 2007.
- Camargo, R. F. **Cálculo fracionário e aplicações**.2009. Tese (Doutorado em Matemática) – IMECC/UNICAMP, Campinas, 2009.
- Camargo, R. F.; Oliveira, E. C. **Cálculo Fracionário**. São Paulo: Livraria da Física, 2015.
- Fassoni, A. C. **Modelos matemáticos em câncer abordando fase inicial e tratamento de tumor avascular**.2016. Tese (Doutorado em Matemática) – IMECC/UNICAMP, Campinas, 2016.
- Matignon, D. . Computational Engineering in System Application . **Stability results for fractional differential equations with applications to control processing**., vol 2, France, 1996.
- Ongun, M. Y.; Arslan, D.; Garrappa, R. Springer: Advances in Difference Equations. **Nonstandard finite difference schemes for a fractional-order Brusselator system**, 2013.



## Um estudo sobre a memória epidemiológica: modelo SIRC fracionário

*Ana Carla Ferreira Nicola Gomes*

*Universidade Federal do Rio Grande; Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF  
anagomes.mat@gmail.com*

*Adriano De Cezaro*

*Universidade Federal do Rio Grande; Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF  
adrianocezaro@furg.br*

**Resumo:** A facilitação da mobilidade populacional e a formação de aglomerados em grandes centros urbanos, são dois dos fenômenos que contribuem de maneira significativa para o aumento de epidemias em populações humanas. Por esses e outros fatores, epidemias se tornaram cada vez mais frequentes e por conseguinte o seu estudo e a sua modelagem cada vez mais importantes. O presente trabalho tem como enfoque o modelo compartimental SIRC, que relaciona os indivíduos divididos em classes: suscetíveis (S), infectados (I), recuperados (R) e imunidade cruzada (C). Mas aqui, este modelo será abordado com o enlace da teoria do cálculo fracionário, objetivando a introdução da memória epidemiológica no sistema. Esta memória, é um componente do mecanismo de sobrevivência e sucesso reprodutivo, estando presente em todos os reinos biológicos, inclusive nos seres humanos. Esta proposta objetiva uma análise teórica e numérica do modelo, visando perceber o que ocorre quando a ordem da derivada é não inteira, a fim de comparar os resultados obtidos, percebendo que existe um retardo no comportamento do sistema.

**Palavras-chave:** Modelo Compartimental SIRC. Epidemiologia Matemática. Cálculo Fracionário e Aplicações.

### Introdução

O interesse por estudar epidemias causadas por doenças infecciosas é bem antigo. Uma das motivações desse estudo, é que doenças infecciosas afetam populações humanas, animais e vegetais há muito tempo, causando custos aos cofres públicos e devastando populações. E ainda, "epidemias continuam sendo as principais causas de mortalidade em países em desenvolvimento", conforme (HETHCOTE, 2000, p. 599).

Atualmente os estudos sobre epidemiologia tem se desprendido da área das ciências da saúde e adentrado nas pesquisas em física, computação, estatística e matemática conforme apresenta Almeida (2011). O primeiro estudo matemático que se tem conhecimento acerca de doenças epidemiológicas, foi realizado por Daniel Bernoulli, Bernoulli (1760).

Na matemática, as pesquisas em sua maioria tem como objeto de estudo, os modelos obtidos através de equações diferenciais. Estes procuram fornecer da forma mais fidedigna possível informações sobre os processos de disseminação e a dinâmica das doenças, assim como as formas de contágio e cura, buscando ser de grande auxílio na tomada de decisão dos órgãos governamentais.

Os modelos epidemiológicos obtidos através de equações diferenciais, na sua maioria, são tratados como modelos compartimentais, segundo Silva (2012), e objetivam ilustrar a dinâmica de doenças infecciosas.

Tais estudos persistem nesse enfoque devido ao fato de que modelos estimados através de equações diferenciais carregarem consigo muitos dados e parâmetros, modelos compartimentais tem como hipótese que a totalidade da população deve ser dividida em subpopulações, compartimentos, criados em conformidade com a doença que está sendo analisada.

Estes modelos distinguem os indivíduos de uma população de acordo com seu estado em relação à doença e os indivíduos trocam de compartimento conforme as taxas de infecção, taxas de recuperação entre outras, estas estipuladas pelas doenças que se optou por estudar, isso fica visivelmente ilustrado na figura (1).

Neste trabalho apresenta-se o modelo SIRC, posteriormente se introduz o modelo com a ordem da derivada não inteira, subsequentemente se apresenta brevemente os resultados de existência, unicidade e dependência contínua para o modelo SIRC fracionário e finalmente, analisa-se as diferenças de simulações com a ordem da derivada inteira e não inteira.

## Modelo SIRC

O modelo SIRC foi introduzido por Casagrandi (2006), trazendo uma inovação para a epidemiologia matemática. Tem como acréscimo a inserção de um novo compartimento C, intitulado imunidade cruzada, ao modelo do tipo SIR, que teve sua primeira versão proposta por Kermack e McKendrick em 1927 e reúne os indivíduos em três compartimentos: Suscetíveis, Infectados e Recuperados, Kermack-McKendrick (1927).

O modelo SIRC tem quatro compartimentos, sendo eles:

- Compartimento Suscetível (S), onde fica a população que não possui anticorpos para o combate da doença e estão aptos a contraí-la quando expostos ao agente infeccioso.
- Compartimento dos Infectado (I), fica o indivíduo que já esteja infectado com a doença. Os indivíduos neste estado estão infectados pelo agente patogênico e são capazes de transmitir a doença aos indivíduos suscetíveis.
- Compartimento Recuperado (R), onde fica a população após o final do período de infecção. Esse estado inclui os casos nos quais o indivíduo recuperou-se da infecção e adquire imunidade a doença através de anticorpos e não poderá mais contraí-la, adquire imunidade temporária à infecção ou é removido da população por morte.
- Compartimento Imunidade Cruzada (C), é o novo compartimento que foi incluído para considerar doenças que sofram mutações através do tempo. Nele ficam os indivíduos que já foram infectados e após um tempo recuperados, com imunidade, passam a ser suscetíveis não a doença original, mas a uma mutação dela.

O tipo de imunidade e a existência dela, ou não, vai depender do tipo de doença estudada. A imunidade total ocorre para doenças em que o indivíduo contaminado adquire anticorpos necessários para não contrair mais a doença, enquanto na imunidade parcial ou temporária o indivíduo produzirá anticorpos úteis para combater a doença durante um determinado período de tempo, após o período o indivíduo poderá contrair novamente a doença.

Por considerar esta imunidade parcial que existe nas doenças que sofrem mutações, o modelo SIRC tornou-se mais efetivo para descrever doenças como a Influenza A e outras Iacoviello-Stasio (2013).

## Modelo SIRC Fracionário

Mudanças de comportamento em indivíduos como resposta as modificações ambientais, é uma característica essencial a vida e é aparente em casos de epidemias, devido a existência da memória imunológica conforme Pimenov (2012) apresenta em seus estudos.

Esta memória imunológica é uma capacidade do sistema imune adaptativo que propicia respostas mais eficientes e rápidas quando ocorre exposição à antígenos encontrados previamente, seja na forma de exposição natural, ou na forma de vacinas.

Para que o modelo SIRC fosse melhorado e considerasse a memória epidemiológica, propõe-se aqui a utilização das derivadas de ordem fracionária, que aqui resolvida pela definição de Caputo, como expressa por Diethelm (2004).

Quando for analisado o problema de valor inicial com derivadas de ordem fracionária percebe-se que o método de Caputo é mais adequado para aplicação em sistemas biológicos quando comparado com o método de Riemann-Liouville, visto que para o primeiro a derivada de uma constante é nula.

Além disso, as condições iniciais em sistemas de EDO's fracionárias dependem de condições que são fisicamente interpretáveis. Mesmo que derivadas de ordem fracionária segundo Riemann-Liouville sejam um problema bem posto (existência, unicidade de solução e dependência contínua), o problema depende de condições iniciais que não possui uma interpretação do ponto de vista biológico para o modelo analisado aqui.

Portanto, para esta modelagem, emprega-se derivadas de ordem fracionária segundo Caputo com o objetivo de obter um modelo fiel ao nosso objetivo.

Apresenta-se o Modelo SIRC Fracionário, que pode ser exposto da seguinte forma (1):

$$\begin{aligned}
 D_*^\theta(S(t)) &= \mu(N - S(t)) - \beta S(t)I(t) + \gamma C(t) \\
 D_*^\theta(I(t)) &= \beta S(t)I(t) + \sigma \beta C(t)I(t) - (\mu + \alpha)I(t) \\
 D_*^\theta(R(t)) &= (1 - \sigma)\beta C(t)I(t) + \alpha I(t) - (\mu + \delta)R(t) \\
 D_*^\theta(C(t)) &= \delta R(t) - \beta C(t)I(t) - (\mu + \gamma)C(t)
 \end{aligned} \tag{1}$$

No modelo (1),  $S(0) = S_0$ ,  $I(0) = I_0$ ,  $R(0) = R_0$  e  $C(0) = C_0$  são as condições iniciais. Já  $N = S + I + R + C$ , representando o total da população, e  $0 < \theta \leq 1$  é a ordem da derivada. Em particular, quando  $\theta = 1$  o modelo é o proposto por Casagrandi (2006).

O parâmetro  $\mu$  representa a taxa de mortalidade e natalidade, vista como iguais, que é supostamente formada de indivíduos suscetíveis. Uma vez que a população total é considerada constante, seu inverso  $\mu^{-1}$  pode ser calibrado com a média do tempo de vida da população.

Os parâmetros  $\alpha$ ,  $\delta$  e  $\gamma$  são os inversos do tempo em que os indivíduos ficam respectivamente nos compartimentos I, R e C, onde devem ser estimado através de observações clínicas por alguns dias. Já  $\sigma$ , pode ser estimado como a probabilidade média de reinfeção do indivíduo que esteja no compartimento C. E ainda  $\beta$ , é a taxa de contato entre indivíduos dos compartimentos S e I, estes dois últimos são mais difíceis de constatar, precisam de um tempo maior de observação.

Estes parâmetros, fazem com que as populações fluam entre os compartimento, mudando seus estados perante a doença. Essa dinâmica fica melhor descrita pela figura (1).

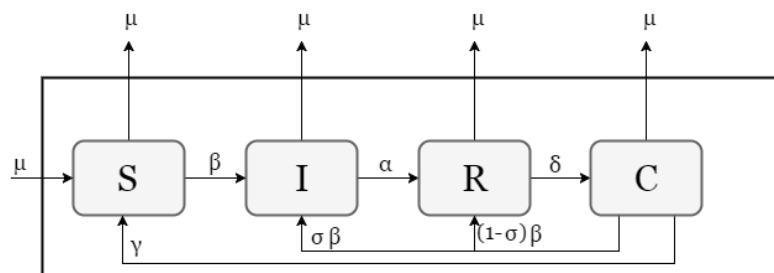


Figura 1: Diagrama Compartmental do modelo SIRC.

## Resultados de Boa Colocação do Modelo

Tendo posto o modelo (1), agora será apresentados os resultados de Boa Colocação, segundo Hadamard. Para uma facilitação, olharemos para (1) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} D_*^\theta(u(t)) &= f(t, u(t)) \\ D_*^\theta(u(t_0)) &= u_0 \end{aligned} \quad (2)$$

Onde,  $f(t, u(t))$  é a função vetorial do lado direito de (1). Como o jacobiano de  $f(t, u(t))$  tem todas as suas coordenadas contínuas e o intervalo  $[0, T]$  é compacto, segue do teorema do valor médio expandido que  $f(t, u(t))$  é Lipschitz contínua em relação a segunda coordenada. Esses fatos são suficientes para provar o seguinte resultado de boa colocação para o modelo (1).

**Teorema.** Existe um única solução contínua do modelo (1). Tal solução depende continuamente dos dados iniciais e da ordem da derivada. Este teorema é uma construção através das ideias de Diethelm (2004), Rihan (2014) e Bai-Sun-Zhang (2013).

## Resultados Numéricos

Aqui serão apresentados os resultados simulados no *Scilab*, que é um software livre e de código aberto para computação numérica, proporcionando um ambiente computacional com variadas aplicações científicas.



Tabela 1: Parametros do modelo SIRC.

Parâmetro	Valor
$\mu$	0,011
$\alpha$	0,16
$\delta$	1
$\gamma$	0,5
$\sigma$	0,06
$\beta$	0,15
$N$	11

Os parâmetros utilizados para as simulações são os apresentados na tabela (1), retirados de Rihan (2014), com as seguintes condições iniciais  $S_0 = 10, I_0 = 1, R_0 = 0$  e  $C_0 = 0$ , que são puramente fictícias, somente para ilustrar o comportamento do modelo (1), figura (2) e figura (3).

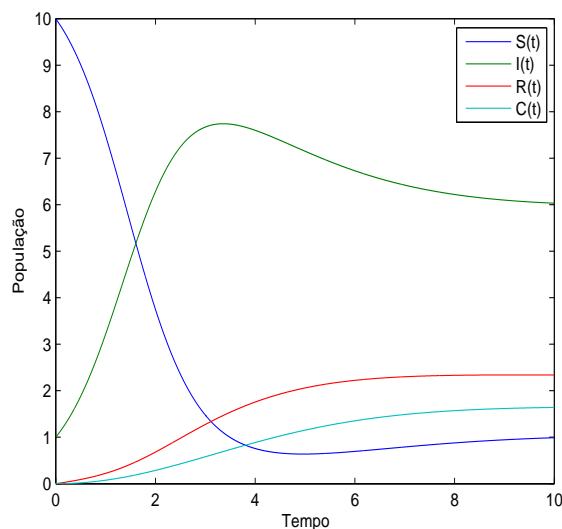


Figura 2: Simulação com  $\theta = 1$ .

Este comportamento da figura (2), com as condições normalmente consideradas nos trabalhos que envolvem o modelo SIRC, ou seja,  $\theta = 1$ , representa o decaimento ou crescimento da quantidade de indivíduos em cada um dos compartimentos.

Na figura (3), ilustra-se o comportamento do modelo SIRC fracionário, quando a submetido a um  $\theta = 0,8$ . A sua resolução, feita pela definição de Caputo, evidencia que, a imposição da ordem fracionária no sistema, causa um retardo no seu comportamento (3), sendo esse o efeito da memória epidemiológica.

## Conclusões

Neste trabalho foi apresentado uma extensão do modelo SIRC para a ordem fracionária. Para o SIRC fracionário provou-se os resultados de boa colocação no sentido de Hadamard. Os testes numéricos realizados mostram que realmente há um retardo no comportamento do sistema quando a ordem fracionária é imposta.

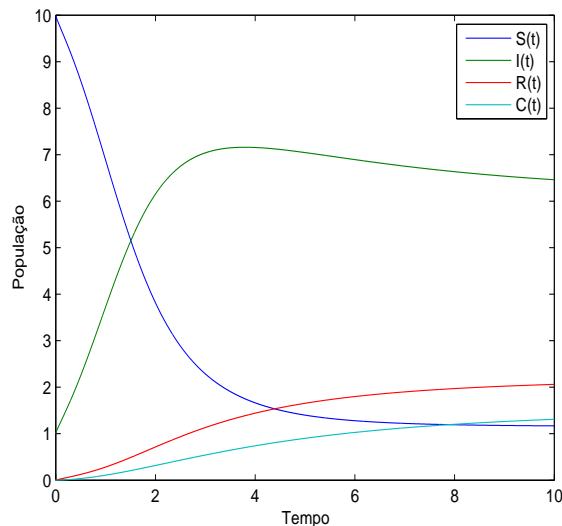


Figura 3: Simulação com  $\theta = 0,8$ .

Acredita-se que esse retardo é causado pelo efeito que a consideração da memória epidemiológica faz no sistema, fato este que gostaremos de comprovar teoricamente em trabalhos futuros. Além disso, utilizar dados reais para comprovar a eficácia do modelo.

Usar a teoria do cálculo fracionário para modelar a memória é uma alternativa interessante, e que pode ser explorada para um melhoramento de vários modelos que consideram mecanismos biológicos.

## Agradecimentos

Agradece-se a Universidade Federal do Rio Grande, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional pelo suporte e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pelo financiamento.

## Referências

- ALMEIDA, A.C.L. **Modelos Matemáticos de Propagação de Epidemias Baseados em Redes Sociais e Detecção de Clusters de Doenças**. 2011. 113f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.
- BAI, Z., SUN, W., ZHANG, W. *Abstract and Applied Analysis*. **Positive Solutions for Boundary Value Problems of Singular Fractional Differential Equations**. v.2013, 2013.
- BERNOULLI, D. *Mém. Math. Phys. Acad. Roy. Sci*. **Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir**, v. 1, p.1-45, 1760.
- CASAGRANDE, R. et al. *Mathematical Biosciences*. **The SIRC model and influenza A**, v. 200, n.2, p. 152-169, 2006.
- DIETHELM, K. **The Analysis of Fractional Differential Equations**. Braunschweig: Springer, 2004.
- HETHCOTE, H. W. *SIAM Review*. **The mathematics of infectious diseases**, v.42, n.2, p. 599-653, 2000.



Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional  
De 2 a 5 de Maio de 2017  
Unesp, Faculdade de Ciências - Bauru/SP

IACOVIELLO, D., STASIO, N. *Comput Methods Programs Biomed.* **Optimal control for SIRC epidemic outbreak**, v. 110, n.3, p. 333-342, 2013.

KERMACK, W. O., MCKENDRICK, A. G. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing papers of a Mathematical and Physical Character.* **A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics**, v. 115, n.772, p. 700-721, 1927.

PIMENOV, A., et al. *Math. Model. Nat. Phenom.* **Memory Effects in Population Dynamics: Spread of Infectious Disease as a Case Study**, v.7, n.3, p. 204-226, 2012.

RIHAN, F. A., et al. *Abstract and Applied Analysis.* **On Fractional SIRC Model with Salmonella Bacterial Infection**, v.2014, 2014.

SCILAB. **Open source software for numerical computation.** 2017. Disponível em: <http://www.scilab.org/>. Acesso em: 12 mar. 2017.

SILVA, S. O. **Modelagem de propagação da dengue com o uso de equações diferenciais e modelos tipo SEIR.** 2012. 89 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Sistemas) – UFLA, Lavras, 2012.



## Um modelo bi-integrado do processo de produção de papel

*Amanda Ortega de Castro Ayres*  
Unicamp; Faculdade de Ciências Aplicadas  
amanda.ayres@fca.unicamp.br

*Carla Taviane Lucke da Silva Ghidini*  
Unicamp; Faculdade de Ciências Aplicadas  
carla.ghidini@fca.unicamp.br

*Washington Alves de Oliveira*  
Unicamp; Faculdade de Ciências Aplicadas  
washington.oliveira@fca.unicamp.br

*Betania Silva Carneiro Campello*  
Unicamp; Faculdade de Ciências Aplicadas  
betania.campello@fca.unicamp.br

**Resumo:** Neste trabalho, propomos um modelo matemático que trata o processo de produção de papel. O mesmo consiste em produzir jumbos de papel, os quais, posteriormente, são cortados em bobinas menores com tamanhos pré-determinados. Parte dessas bobinas são destinadas para atender uma carteira de pedidos e as demais serão cortadas para produzir os formatos de papel com demandas específicas. Este modelo chamamos de bi-integrado por ser composto por dois problemas integrados de dimensionamento de lotes e corte de estoque e a ideia foi deixá-lo generalista, para que possa ser usado em qualquer indústria de papel. Experimentos computacionais foram realizados com algumas configurações do modelo utilizando dados gerados aleatoriamente com base em uma indústria de papel de grande porte. Os resultados obtidos mostram que é possível melhorar o processo global de fabricação e corte do papel, medidos pelos custos totais de produção.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática e Aplicações. Problemas de Dimensionamento de Lotes. Problemas de Corte de Estoque. Problemas Integrados.

## Introdução

A fabricação de papel é um processo complexo e extenso. Em termos gerais, podemos dizer que ele é composto por três fases principais: 1- produção de jumbos; 2- produção de bobinas; 3- produção de formatos. Analisando a literatura, percebemos uma tendência de integrar tais fases de produção, com o objetivo de obter custos globais menores do que a soma dos custos das fases abordadas separadamente. Poltroniere et al. (2008), por exemplo, integram os problemas de dimensionamento de lotes de jumbos e de corte unidimensional de jumbos em bobinas. Keskinocak et al. (2002) consideram, além da programação da produção de jumbos e bobinas, a distribuição dos produtos finais, por meio de uma abordagem multi-critério. No trabalho de Chauhan et al. (2008), é proposto um modelo de decisão para determinar a melhor escolha de bobinas a serem estocadas e suas respectivas atribuições em formatos com demandas específicas, gerando uma menor perda de material. Correia et al. (2004) enumeram as combinações de larguras de bobinas e determinam as quantidades a serem produzidas e os padrões de corte a serem utilizados, por meio de um modelo matemático para o problema de corte de estoque em 1,5 dimensão. Por fim, Kallrath et al. (2014) apresentam várias abordagens para resolver problemas de corte unidimensional e bidimensional, inclusive uma nova abordagem de geração de colunas para tratar problemas com diferentes larguras de jumbos, estoque limitado de jumbos e problemas em que a sub-produção é permitida, mas deve ser evitada.

Como não identificamos nenhum trabalho na literatura que trate as fases de produção de jumbos, bobinas e formatos juntas, decidimos criar e resolver um modelo de otimização cujo objetivo é minimizar os custos dessas três fases. O modelo proposto tem como característica o fato de ser generalista, com o intuito de poder ser adaptado às diferentes configurações de indústria de papel. Utilizamos os problemas clássicos de dimensionamento de lotes e corte de estoque como ponto de partida na formulação.

## Processo de produção de papel

A Figura 1 representa o processo de produção de papel abordado neste trabalho. Ele é dividido em três fases e o produto de cada uma delas pode ser entregue ao cliente, estocado ou usado imediatamente na fase seguinte. A primeira fase consiste na fabricação de jumbos, que são grandes bobinas provenientes de pastas de celulose enroladas em torno de um cilindro. Essa etapa do processo constitui um problema de dimensionamento de lotes, em que as quantidades de jumbos a serem fabricadas em cada período do horizonte de planejamento devem ser decididas, de modo a atender a demanda de jumbos da fase atual e de bobinas e formatos das fases seguintes, minimizando os custos de produção, estoque e *setup* de máquina.

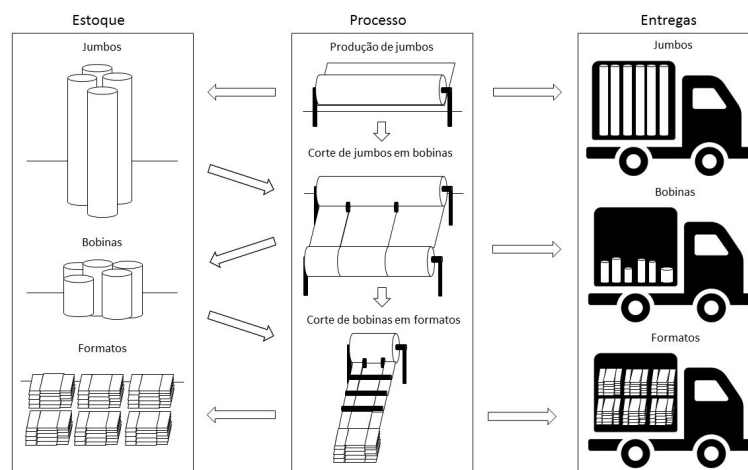


Figura 1: Processo de produção de jumbos, bobinas e formatos

A segunda fase consiste em fazer cortes longitudinais nos jumbos enquanto eles são rebobinados em máquinas conhecidas como rebobinadeiras, para obter as bobinas. Essas bobinas podem ser tanto o produto final requerido pelo cliente quanto um produto intermediário necessário para a fabricação de formatos. Portanto, essa etapa é ao mesmo tempo um problema de corte de estoque unidimensional, cujo objetivo é minimizar o desperdício de material, como também um novo problema de dimensionamento de lotes, já que as quantidades de jumbos a serem cortadas em cada período do horizonte de planejamento devem ser decididas, de modo a atender a demanda de bobinas da fase atual e de formatos da fase seguinte, minimizando os custos de estoque e *setup* de máquina. O número de tipos de bobinas cortadas nessa fase é composto pelos diferentes tipos de bobinas demandadas pelos clientes e pelas melhores combinações das larguras dos formatos possíveis de serem cortadas pela rebobinadeira.

A terceira e última fase é o corte de bobinas em formatos em máquinas conhecidas como cortadeiras, por meio de cortes longitudinais e transversais nas bobinas sendo desenroladas. Essa etapa constitui um problema de corte de estoque bidimensional, cujo objetivo é atender à demanda de formatos, minimizando o desperdício de material e os custos de estoque e *setup* de máquina.

O modelo matemático proposto envolve dois problemas integrados de dimensionamento de lotes e

corte de estoque: um entre as duas primeiras fases e outro entre a segunda e a terceira fases. Por esse motivo, o denominamos como modelo bi-integrado.

## Modelagem Matemática

Apresentamos o modelo matemático de otimização linear inteiro do processo de produção de papel a seguir. Para diferenciar os parâmetros e variáveis, acrescentamos o índice correspondente à fase a qual cada um pertence. Por exemplo, temos os parâmetros  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  referem-se aos custos de produção das fases 1, 2 e 3, respectivamente. Neste modelo, utilizamos a técnica de horizonte rolante, que consiste em dividir o horizonte de planejamento em períodos e o primeiro período também é dividido em sub-períodos. A primeira e a segunda fases são resolvidas para todos os períodos e a terceira para os sub-períodos. Ao final do primeiro período, rolamos o planejamento para o período seguinte e recalculamos os parâmetros. Com isso, é possível adaptar o modelo às mudanças do ambiente fabril.

A seguir, apresentamos os índices, na Tabela 1, e parâmetros, nas Tabelas 2, 3 e 4, bem como os valores dos intervalos utilizados nos experimentos computacionais, que serão abordados na próxima seção. Além disso, as variáveis estão detalhadas nas Tabelas 5, 6 e 7.

Tabela 1: Índices

Índice	Intervalo	Definição	Valor nos experimentos computacionais
$k$	$1, \dots, K$	gramaturas de papel produzidas	$K = 1$
$m_1$	$1, \dots, M_1$	número de máquinas para a produção de jumbos	$M_1 = 3$
$m_2$	$1, \dots, M_2$	número de rebobinadeiras	$M_2 = 3$
$m_3$	$1, \dots, M_3$	número de cortadeiras	$M_3 = 4$
$t$	$1, \dots, T$	número de períodos no horizonte de planejamento	$T = 4$
$\tau$	$1, \dots, \theta$	número de sub-períodos dentro do primeiro período	$\theta = 5$
$i_2$	$1, \dots, Nf_2$	número de tipos de bobinas cortadas	$Nf_2 = 2$
$i_3$	$1, \dots, Nf_3$	número de tipos de formatos demandados	$Nf_3 = 2$
$j_2$	$1, \dots, Nm_1$	número de padrões de corte unidimensionais para os jumbos de largura $L_{m_1}$	Depende das dimensões da instância
$j_3$	$1, \dots, Ni_2$	número de padrões de corte bidimensionais para as bobinas de largura $l_{i_2}$	Depende das dimensões da instância
		$\{1, \dots, Nf_2\} = S_2(1) \cup S_2(2) \cup \dots \cup S_2(K)$ , sendo $S_2(k) = \{i_2 \text{ tal que a bobina } i_2 \text{ é de gramatura } k\}$	
		$\{1, \dots, Nf_3\} = S_3(1) \cup S_3(2) \cup \dots \cup S_3(K)$ , sendo $S_3(k) = \{i_3 \text{ tal que o item } i_3 \text{ é de gramatura } k\}$	

Tabela 2: Parâmetros da fase 1

Parâmetro	Definição	Intervalo
$c_{1,k,m_1,t}$	custo de produção do jumbo de gramatura $k$ na máquina $m_1$ no período $t$	R\$ [7,5; 12,5]
$s_{1,k,m_1,t}$	custo de preparação para produzir jumbos de gramatura $k$ na máquina $m_1$ no período $t$	R\$ [15; 25]
$h_{1,k,t}$	custo/kg de estocar jumbos de gramatura $k$ no final do período $t$	R\$ [3,75; 6,25] / kg
$L_{m_1}$	comprimento do jumbo produzido pela máquina $m_1$	[800; 2000] cm
$b_{1,k,m_1}$	peso do jumbo de gramatura $k$ produzido na máquina $m_1$	$\text{volume} \times \frac{\text{gramatura}}{\text{espessura}}$
$d_{1,k,m_1,t}$	demanda de jumbos de gramatura $k$ e largura $L_{m_1}$ para serem entregues como produto final no período $t$	[0; 30]



Tabela 2: Parâmetros da fase 1

Parâmetro	Definição	Intervalo
$f_{1k,m_1}$	tempo gasto para produzir um jumbo de gramatura $k$ na máquina $m_1$	[110, 8; 166, 7] min
$g_{1k,m_1}$	tempo de preparação para produzir um jumbo de gramatura $k$ na máquina $m_1$	[1; 2] min
$C_{1t}$	tempo disponível para produção de jumbos no período $t$	[8; 24] h/dia * $M_1$

Tabela 3: Parâmetros da fase 2

Parâmetro	Definição	Intervalo
$c_{2k,t}$	custo de perda de papel de gramatura $k$ durante o processo de corte, no período $t$	R\$ $\frac{\sum_{m_1=1}^{M_1} c_{1k,m_1,t}}{100M_1} / cm^2$
$p_{2m_1}^{j_2}$	perda de papel no padrão de corte $j_2$ usado para cortar um jumbo de comprimento $L_{m_1}$	$L_{m_1} - \sum_{i_2=1}^{N_{f_2}} a_{2i_2,m_1}^{j_2} l_{i_2}$
$s_{2k,m_1,m_2,t}^{j_2}$	custo de preparação para cortar jumbos de gramatura $k$ e comprimento $L_{m_1}$ na máquina $m_2$ no período $t$ segundo o padrão de corte $j_2$	R\$ [3; 5]
$h_{2i_2,t}$	custo/kg de estocar bobinas do tipo $i_2$ no final do período $t$	R\$ [ 0,75; 1,25] / kg
$b_{2i_2}$	peso da bobina do tipo $i_2$	$volume \times \frac{gramatura}{espessura}$
$d_{2i_2,t}$	demanda de bobinas de tipo $i_2$ para serem entregues como produto final no período $t$	[0; 300]
$f_{2k,m_1}^{j_2}$	tempo gasto para cortar um jumbo de gramatura $k$ e comprimento $L_{m_1}$ na máquina $m_2$ , segundo o padrão $j_2$	[30; 83,3] min
$g_{2k,m_1}^{j_2}$	tempo de preparação para cortar jumbos de gramatura $k$ e comprimento $L_{m_1}$ na máquina $m_2$ , segundo o padrão $j_2$	[25; 50] min
$C_{2t}$	tempo disponível para corte de jumbos no período $t$	[8; 24] h/dia * $M_2$
$a_{2i_2,m_1}^{j_2}$	quantidade de itens do tipo $i_2$ cortados no jumbo de comprimento $L_{m_1}$ segundo o padrão $j_2$	Depende das dimensões da instância

Tabela 4: Parâmetros da fase 3

Parâmetro	Definição	Intervalo
$c_{3k,\tau}$	custo por perda de papel de gramatura $k$ durante o processo de corte no sub-período $\tau$	R\$ $\frac{\sum_{m_1=1}^{M_1} \sum_{t=1}^T c_{1k,m_1,t}}{2500M_1T} / cm^2$
$p_{3i_2}^{j_3}$	perda de papel no corte da bobina de tipo $i_2$ segundo o padrão $j_3$	$l_{i_2} - \sum_{i_3=1}^{N_{f_3}} a_{3i_3,i_2}^{j_3} l_{i_3}$
$s_{3i_2,m_3,\tau}^{j_3}$	custo de preparação para o corte da bobina de tipo $i_2$ na máquina $m_3$ no sub-período $\tau$ segundo o padrão $j_3$	R\$ [0,075; 0,125]
$h_{3i_3,\tau}$	custo/kg de estocar formatos do tipo $i_3$ no sub-período $\tau$	R\$ [0,05; 0,08] / kg
$b_{3i_3}$	peso do formato de tipo $i_3$	$larg. \times compr. \times gramatura$
$d_{3i_3,\tau}$	demanda de formatos do tipo $i_3$ no sub-período $\tau$	[0; 30000]
$f_{3i_2,m_3}^{j_3}$	tempo gasto para cortar uma bobina do tipo $i_2$ de comprimento $l_{2i_2}$ na máquina $m_3$ segundo o padrão $j_3$	[50; 200] min
$g_{3i_2,m_3}^{j_3}$	tempo de preparação para cortar bobinas do tipo $i_2$ de comprimento $l_{2i_2}$ na máquina $m_3$ segundo o padrão $j_3$	[25; 50] min
$C_{3\tau}$	tempo disponível para corte de bobinas no sub-período $\tau$	[8; 24] h/dia * $M_3$
$a_{3i_3,i_2}^{j_3}$	quantidade de itens do tipo $i_3$ cortados na bobina do tipo $i_2$ segundo o padrão $j_3$	Depende das dimensões da instância

Tabela 5: Variáveis de decisão da fase 1

Parâmetro	Definição
$x_{1k,m_1,t}$	quantidade de jumbos de gramatura $k$ produzidos na máquina $m_1$ no período $t$
$z_{1k,m_1,t}$	variáveis binárias que indicam se houve ou não produção do jumbo de gramatura $k$ na máquina $m_1$ no período $t$
$e_{1k,m_1,t}$	quantidade de jumbos de gramatura $k$ produzidos na máquina $m_1$ estocados no final do período $t$

Tabela 6: Variáveis de decisão da fase 2

Parâmetro	Definição
$y_{2k,m_1,m_2,t}^{j_2}$	quantidade de jumbos de gramatura $k$ produzidos na máquina $m_1$ , cortados unidimensionalmente na rebobinadeira $m_2$ no período $t$ usando o padrão de corte $j_2$
$z_{2k,m_1,m_2,t}^{j_2}$	variáveis binárias que indicam se houve ou não corte de jumbo de gramatura $k$ e comprimento $L_{m_1}$ na máquina $m_2$ no período $t$ usando o padrão de corte $j_2$
$e_{2i_2,t}$	quantidade de bobinas do tipo $i_2$ em estoque no final do período $t$

Tabela 7: Variáveis de decisão da fase 3

Parâmetro	Definição
$y_{3i_2,m_3,\tau}^{j_3}$	quantidade de bobinas do tipo $i_2$ que são cortadas segundo o padrão de corte guilhotinado dois estágios $j_3$ na cortadeira $m_3$ no sub-período $\tau$ ;
$z_{3i_2,m_3,\tau}^{j_3}$	variáveis binárias que indicam se houve corte da bobina do tipo $i_2$ na máquina $m_3$ no sub-período $\tau$ , usando o padrão de corte $j_3$
$e_{3i_3,\tau}$	quantidade de formatos de tipo $i_3$ em estoque no final do sub-período $\tau$

## Modelo Matemático

O modelo matemático que representa o processo descrito é dado por:

minimizar

$$\sum_{t=1}^T \sum_{m_1=1}^{M_1} \sum_{k=1}^K (c_{1k,m_1,t} x_{1k,m_1,t} + s_{1k,m_1,t} z_{1k,m_1,t} + h_{1k,t} b_{1k,m_1} e_{1k,m_1,t}) + \quad (1a)$$

$$\sum_{t=1}^T \sum_{m_1=1}^{M_1} \sum_{m_2=1}^{M_2} \sum_{k=1}^K \sum_{j_2=1}^{N_{m_1}} (c_{2k,t} p_{2m_1}^{j_2} y_{2k,m_1,m_2,t}^{j_2} + s_{2k,m_1,m_2,t}^{j_2} z_{2k,m_1,m_2,t}^{j_2}) + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K \sum_{i_2 \in S_2(k)} h_{2i_2,t} b_{2i_2} e_{2i_2,t} + \quad (1b)$$

$$\sum_{\tau=1}^{\Theta} \sum_{m_3=1}^{M_3} \sum_{k=1}^K \sum_{j_3=1}^{N_{i_2}} \sum_{i_2 \in S_2(k)} (c_{3k,\tau} p_{3i_2}^{j_3} y_{3i_2,m_3,\tau}^{j_3} + s_{3i_2,m_3,\tau}^{j_3} z_{3i_2,m_3,\tau}^{j_3}) + \sum_{\tau=1}^{\Theta} \sum_{k=1}^K \sum_{i_3 \in S_3(k)} h_{3i_3,\tau} b_{2i_3} e_{3i_3,\tau} \quad (1c)$$

sujeito a

$$\sum_{m_1=1}^{M_1} \sum_{k=1}^K (f_{1k,m_1} x_{1k,m_1,t} + g_{1k,m_1} z_{1k,m_1,t}) \leq C_{1t}, \quad t = 1, \dots, T; \quad (1d)$$

$$x_{1k,m_1,t} \leq Q z_{1k,m_1,t}, \quad k = 1, \dots, K, \quad m_1 = 1, \dots, M_1, \quad t = 1, \dots, T; \quad (1e)$$

$$\sum_{m_1=1}^{M_1} \sum_{m_2=1}^{M_2} \sum_{j_2=1}^{N_{m_1}} \sum_{i_2 \in S_2(k)} (a_{2i_2, m_1}^{j_2} y_{2k, m_1, m_2, t}^{j_2} + e_{2i_2, t-1} - e_{2i_2, t}) = d_{2i_2, t}, \quad k = 1, \dots, K, \quad i_2 \in S_2(k), \quad t = 2, \dots, T; \quad (1f)$$

$$\sum_{m_1=1}^{M_1} \sum_{m_2=1}^{M_2} \sum_{k=1}^K \sum_{j_2=1}^{N_{m_1}} (f_{2k, m_1, m_2}^{j_2} y_{2k, m_1, m_2, t}^{j_2} + g_{2k, m_1, m_2}^{j_2} z_{2k, m_1, m_2, t}^{j_2}) \leq C_{2t}, \quad t = 1, \dots, T; \quad (1g)$$

$$y_{2k, m_1, m_2, t}^{j_2} \leq Q z_{2k, m_1, m_2, t}^{j_2}, \quad k = 1, \dots, K, \quad m_1 = 1, \dots, M_1, \quad m_2 = 1, \dots, M_2, \quad t = 1, \dots, T, \quad j_2 = 1, \dots, N_{m_1}; \quad (1h)$$

$$\sum_{m_3=1}^{M_3} \sum_{j_3=1}^{N_{i_2}} \sum_{i_2 \in S(k)} (a_{3i_3, i_2}^{j_3} y_{3i_2, m_3, \tau}^{j_3} + e_{3i_3, \tau-1} - e_{3i_3, \tau}) = d_{3i_3, \tau}, \quad i_3 \in S_3(k), \quad k = 1, \dots, K, \quad \tau = 1, \dots, \Theta; \quad (1i)$$

$$\sum_{m_3=1}^{M_3} \sum_{k=1}^K \sum_{j_3=1}^{N_{i_2}} \sum_{i_2 \in S(k)} (f_{3i_2, m_3}^{j_3} y_{3i_2, m_3, \tau}^{j_3} + g_{3i_2, m_3}^{j_3} z_{3i_2, m_3, \tau}^{j_3}) \leq C_{3\tau}, \quad \tau = 1, \dots, \Theta; \quad (1j)$$

$$y_{3i_2, m_3, \tau}^{j_3} \leq Q z_{3i_2, m_3, \tau}^{j_3}, \quad j_3 = 1, \dots, N_{i_2}, \quad i_2 \in S_2(k), \quad k = 1, \dots, K, \quad m_3 = 1, \dots, M_3, \quad \tau = 1, \dots, \Theta; \quad (1k)$$

$$\sum_{m_1=1}^{M_1} \sum_{m_2=1}^{M_2} \sum_{j_2=1}^{N_{m_1}} a_{2i_2, m_1}^{j_2} y_{2k, m_1, m_2, 1}^{j_2} - e_{2i_2, 1} = d_{2i_2, 1} + \sum_{\tau=1}^{\Theta} \sum_{m_3=1}^{M_3} \sum_{j_3=1}^{N_{i_2}} y_{3i_2, m_3, \tau}^{j_3}, \quad i_2 \in S_2(k), \quad k = 1, \dots, K; \quad (1l)$$

$$x_{1k, m_1, t} + e_{1k, m_1, t-1} - e_{1k, m_1, t} = d_{1k, m_1, t} + \sum_{m_2=1}^{M_2} \sum_{j_2=1}^{N_{m_1}} y_{2k, m_1, m_2, t}^{j_2}, \quad k = 1, \dots, K, \quad m_1 = 1, \dots, M_1, \quad t = 1, \dots, T; \quad (1m)$$

$$x_{1k, m_1, t}, e_{1k, m_1, t} \geq 0 \text{ e inteiros}, \quad z_{1k, m_1, t} \in \{0, 1\}, \quad e_{1k, m_1, 0} = 0 \quad k = 1, \dots, K, \quad m_1 = 1, \dots, M_1, \quad t = 1, \dots, T; \quad (1n)$$

$$y_{2k, m_1, m_2, t}^{j_2}, e_{2i_2, t} \geq 0 \text{ e inteiros}, \quad z_{2k, m_1, m_2, t}^{j_2} \in \{0, 1\}, \quad e_{2i_2, 0} = 0 \\ k = 1, \dots, K, \quad i_2 \in S_2(k), \quad m_1 = 1, \dots, M_1, \quad m_2 = 1, \dots, M_2, \quad t = 1, \dots, T, \quad j_2 = 1, \dots, N_{m_1}; \quad (1o)$$

$$y_{3i_2, m_3, \tau}^{j_3}, e_{3i_3, \tau} \geq 0 \text{ e inteiros}, \quad z_{3i_2, m_3, \tau}^{j_3} \in \{0, 1\}, \quad e_{3i_3, 0} = 0; \quad k = 1, \dots, K, \quad i_3 \in S_3(k), \\ i_2 \in S_2(k), \quad m_3 = 1, \dots, M_3, \quad \tau = 1, \dots, \Theta, \quad j_3 = 1, \dots, N_{i_2}. \quad (1p)$$

A função objetivo é composta pelos custos provenientes de cada uma das três fases. A parcela da fase 1 (1a) equivale aos custos de produção de jumbos, preparação de máquina e estoque de jumbos. A expressão referente à fase 2, (1b), é a soma dos custos de desperdício de material, preparação de máquina e estoque de bobinas. Por último, a expressão (1c) contabiliza os custos de desperdício de material, preparação de máquina e estoque de formatos.

O grupo composto por (1d) e (1e) são as restrições referentes à primeira fase. Em (1d), fazemos com que a utilização das máquinas não exceda a capacidade disponível. As restrições (1e) fazem com que as variáveis de preparação de máquina assumam o valor 1 quando há produção e 0 caso contrário.

As restrições da fase 2 são representadas por (1f), (1g) e (1h). Nas restrições (1f), fazemos com que a demanda de bobinas seja atendida para os períodos posteriores ao primeiro. Em (1g), restringimos a utilização das rebobinadeiras à capacidade disponível. As restrições (1h) são de preparação de máquina.

A fase 3 é representada por (1i), (1j) e (1k). As restrições (1i) são de atendimento à demanda de formatos, (1j) são de atendimento à capacidade disponível e (1k) são de preparação de máquina.

As restrições (1l) e (1m) são as responsáveis por integrar as três fases. (1l) integra as fases 2 e 3: o total de bobinas disponível no primeiro período da fase 2 deve ser suficiente para atender a demanda de bobinas a serem entregues ao cliente nesse mesmo período mais o total de bobinas que serão cortadas em

formatos em todos os sub-períodos da fase 3. Já (1m) integra as fases 1 e 2: o total de jumbos disponível em cada período do horizonte de planejamento deve atender a demanda a ser entregue ao cliente e a quantidade que será cortada em bobinas.

Por fim, as restrições de (1n) a (1p) delimitam o escopo das variáveis: as de tipo  $x$  e  $e$  como inteiras positivas e as de tipo  $z$  como binárias. Além disso, consideramos os estoques iniciais nulos.

## Experimentos Computacionais

Para testar o desempenho do modelo proposto, testamos 100 instâncias com as restrições de preparação de máquina e integralidade das variáveis relaxadas e com dimensões pequenas, conforme especificado na Tabela 1. Assim, pudemos resolver o modelo utilizando o *solver* Cplex. Os parâmetros foram gerados aleatoriamente nos intervalos especificados nas Tabelas 2, 3 e 4.

Resolvemos o problema do processo de produção de papel por meio de duas estratégias diferentes. Na primeira, consideramos o modelo bi-integrado relaxado (1). Na segunda, resolvemos as três fases de maneira sequencial, conforme esquematizado na Figura 2: primeiro, resolvemos o modelo da fase 3, composto por (1c), (1i) e (1j); com as quantidades de bobinas necessárias para essa fase, alimentamos a fase 2, composta por (1b), (1f), (1g) e (1l); por fim, com as quantidades necessárias de jumbos, alimentamos a fase 1, constituída por (1a), (1i), (1j) e (1m).

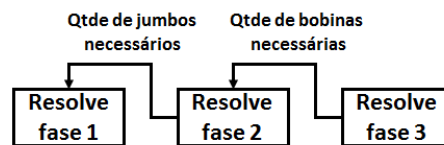


Figura 2: Resolução por meio de 3 Fases Sequenciais

Seja o custo calculado pelo modelo bi-integrado,  $c_{bi}$ , e o custo calculado pela estratégia sequencial,  $c_{seq}$ . A medida utilizada para comparar o desempenho das estratégias é o *gap*, definido por:

$$gap = \frac{c_{bi}}{c_{seq}} - 1 \quad (2a)$$

A Figura 3 mostra o desempenho do modelo bi-integrado em relação ao sequencial. Em cada fase do processo, indicamos o *gap* entre as duas estratégias para os custos constituintes. Os *gaps* negativos (indicados por barras azuis) ocorrem quando o custo em questão diminui ao adotar a estratégia bi-integrada. Já o *gap* positivo (indicado pela barra vermelha) representa um aumento do custo. Os valores representados aqui são as medianas das 100 instâncias testadas.

Vemos que o custo total diminuiu em 8% ao tratar o processo de produção de papel por meio do modelo bi-integrado (1). O desperdício de formatos sofreu um aumento de 37%, porque as bobinas que foram usadas para gerar os formatos não foram as mesmas de antes. Essas bobinas fazem com que haja um desperdício de material maior ao gerar os formatos, porém o desperdício para que elas sejam geradas a partir dos jumbos diminuiu em 15%. Além disso, os custos de produção de jumbos também caíram em 2%. Por fim, os custos de estoque de bobinas e formatos também tiveram uma queda de 82% e 100%, respectivamente.

## Conclusão

Neste trabalho, propusemos um modelo que integra as três fases do processo de produção de papel. Testamos os custos obtidos resolvendo o modelo bi-integrado com os custos resolvendo as três fases do

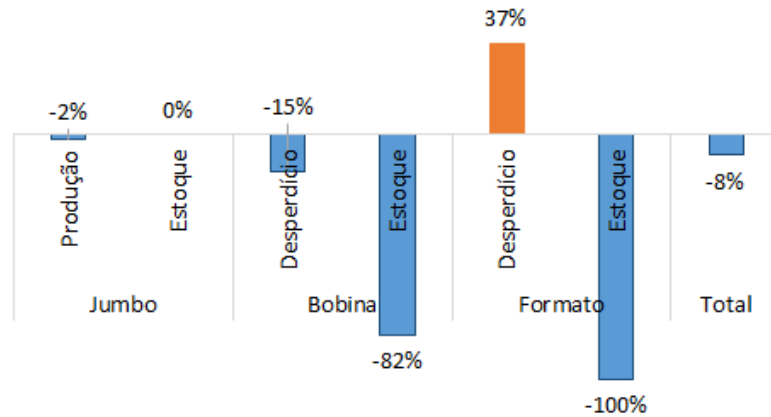


Figura 3: Gap dos Custos entre Modelos Bi-Integrado e Sequencial

processo de forma sequencial, como o que é feito geralmente na indústria. Obtivemos uma redução de mediana 8% no custo total.

Este resultado nos mostra que é possível obter economias consideráveis ao abordar o processo produtivo como um todo, e não em uma visão setorial como acontece em geral nas empresas. Ao tratar o modelo de maneira completa, temos uma visão macro dos melhores comprimentos de jumbos que precisam ser produzidos para serem cortados nas melhores combinações de bobinas, que, por sua vez, gerarão os formatos. Resultados piores em alguma das fases podem até ser obtidos, mas no final, o custo global diminui.

## Agradecimentos

Agradecemos à FAEPEX-Unicamp e à FAPESP pelo apoio financeiro.

## Referências

- CHAUHAN, S. S.; MARTEL, A.; D'AMOUR, S. Computers and Operations Research. **Roll assortment optimization in a paper mill: An integer programming approach**. v. 35, n. 2, p. 614-627, 2008
- CORREIA, M. H.; OLIVEIRA, J. F.; FERREIRA, S. S. Computers and Operations Research. **Reel and sheet cutting at a paper mill**. v. 31, n. 8, p. 1223-1243, 2004
- KALLRATH, J. et al. European Journal of Operational Research. **Solving real-world cutting stock-problems in the paper industry: Mathematical approaches, experience and challenges**. v. 238, n. 1, p. 374-389, 2014
- KESKINOCAK, P. et al. Operations Research. **Scheduling Solutions for the Paper Industry**. v. 50, n. 2, p. 249-259, 2002
- POLTRONIERE, S. C. et al. Annals of Operations Research. **A coupling cutting stock-lot sizing problem in the paper industry**. v. 157, n. 1, p. 91-104, 2008



## Um modelo não-linear de equilíbrio espacial de preços sem estoque regulador e o Método de Pontos Interiores

*Táise Caroline Lopes Albano*

*Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”; Faculdade de Engenharia de Bauru  
taisealbano@gmail.com*

*Maurício Móz Crhistofolletti*

*Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”; Faculdade de Engenharia de Bauru  
mau.christofolletti@gmail.com*

*Edméa Cássia Baptista*

*Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”; Faculdade de Ciências  
baptista@fc.unesp.br*

**Resumo:** A sazonalidade dos preços de produtos agrícolas é decorrente da falta de ajuste entre oferta e demanda, dado que a oferta costuma ser concentrada em alguns meses enquanto a demanda é distribuída ao longo do ano. Apesar da relevância deste assunto, a literatura apresenta poucos modelos matemáticos que consideram sua formulação utilizando a programação não linear, e consequentemente, métodos de otimização para sua solução. Deste modo, o presente artigo tem como objetivo resolver um problema de equilíbrio espacial de mercado para produtos sazonais, o qual é modelado como um problema de programação não linear e resolvido através do Método de Pontos Interiores. Os resultados obtidos mostram que a modelagem através da programação não linear e o Método de Pontos Interiores são eficientes na modelagem e solução, respectivamente, desses problemas.

**Palavras-chave:** Otimização. Método de Pontos Interiores. Sazonalidade dos Preços. Estoque Regulador.

### 1. Introdução

Toda organização precisa, de alguma forma, saber dimensionar suas capacidades produtivas de modo que estas se encaixem perfeitamente com as demandas, evitando, assim, o desperdício de tempo, material, energia ou a falta de produtos para atender o mercado. A previsão de demanda pode ser realizada por técnicas quantitativas, através de modelo matemático, ou qualitativas, através da observação de cenários. O modelo matemático é construído a partir da análise da curva de demanda, a qual pode revelar as tendências, as sazonalidades e também variações irregulares. A previsão de demanda permite que os administradores destas organizações antecipem o futuro e planejem de forma mais conveniente suas ações (TUBINO, 2000).

Os estoques não agregam valor aos produtos, logo, quanto menor for o nível de estoques dentro de uma organização, mais eficiente o seu sistema produtivo será (POVOA, 2013). Mas no caso de organizações que fornecem serviços, como restaurantes, pequenos supermercados ou atacadistas de vegetais, o tamanho dos lotes, a forma de reposição e os estoques de segurança são dimensionados utilizando-se outras variáveis, como a perecibilidade dos produtos comercializados, que é um fator limitante para a manipulação dos estoques (DIAS, 1993).

A sazonalidade dos preços de produtos agrícolas, por exemplo, é decorrente da falta de ajuste entre oferta e demanda, dado que a oferta costuma ser concentrada em alguns meses, enquanto a demanda é distribuída ao longo do ano. Essa variabilidade de preços ao longo dos meses do ano-safra justifica a adoção de políticas de estoques reguladores, quer por ações públicas, quer por ações privadas ou mistas (POSSAMAI; PESCADOR; MAYERLE, 2014).





As sazonalidades podem ser causadas por fatores climáticos, sociais e financeiros. Uma das formas de se realizar a previsão considerando a sazonalidade é assumir que o próximo período sazonal será igual ao anterior (SLACK, 1997).

Um dos instrumentos de estabilização dos preços, frequentemente utilizados na literatura econômica, é o estoque regulador. A função básica deste tipo de estoque consiste em armazenar uma certa quantidade de mercadoria em períodos de alta, quando o preço é baixo e liberar uma certa quantidade de produtos nos períodos de baixa, quando o preço é alto (ATHANASIOU; KARAFYLLIS; KOTSIOS, 2008)

Um sistema está em equilíbrio quando as variáveis de estado não se modificam ao longo do tempo. As variáveis de estado em um mercado são os preços, as quantidades produzidas, as quantidades transportadas e as quantidades consumidas (POSSAMAI; PESCADOR; MAYERLE, 2014).

Um dos modelos de equilíbrio de mercado é o de concorrência perfeita, em que somente há fluxo entre produtor e consumidor se o custo marginal de produção na origem, somado ao custo de transporte, for igual ao preço no mercado consumidor. Caso este valor seja maior não haverá transporte entre esses mercados (NAGURNEY, 1999).

Apesar da relevância da sazonalidade dos preços de produtos agrícolas, na literatura existem poucos modelos matemáticos que utilizam programação não-linear, e consequentemente, métodos de otimização em sua resolução.

Os problemas práticos de otimização frequentemente envolvem comportamento não-linear, que tem que ser levado em consideração. Às vezes, é possível reformular estas não-linearidades para ajustar a um formato de programação linear. Entretanto, a melhor abordagem, muitas vezes, é usar uma formulação de programação não-linear, visto que a maioria dos modelos que retratam problemas reais apresentam algum grau de não-linearidade (HILLIER; LIEBERMAN, 2012).

Destaca-se que, no sentido de resolver problemas de otimização, o Método de Pontos Interiores (MPI) tem sido uma das ferramentas mais interessantes da otimização desde o surgimento do método simplex (FREUND; MIZUNO, 1996), e segundo Gondizio (2012), esse método revolucionou o campo da otimização. Inicialmente, diversos algoritmos para o MPI foram propostos, e tendo-se em vista o sucesso desse método para programação linear e quadrática, iniciaram-se as investigações da sua aplicação para problemas de programação não linear. Uma versão do MPI para a programação não linear foi apresentada por El-Bakry *et al.* (1996). Motivados pelos resultados eficientes fornecidos pelo MPI, para programação não linear, aplicado nas mais diversas áreas do conhecimento, muitos pesquisadores tem se dedicado a essa área de pesquisa (DUTRA, 2004).

Tendo em vista que os MPIS tem sido utilizados com sucesso nas mais diversas áreas do conhecimento, o presente artigo tem como objetivo resolver o modelo de equilíbrio espacial de mercado para produtos sazonais proposto no trabalho de Possamai, Pescador e Mayerle (2014), e modelado como um problema de programação não-linear. A modelagem é descrita por um sistema de concorrência perfeita, onde o objetivo é maximizar o excedente da sociedade.

O trabalho encontra-se dividido da seguinte maneira. Na seção 2 apresenta-se a descrição e caracterização do modelo. Na sequência, seção 3, apresenta-se o método de resolução utilizado no trabalho, enquanto na seção 4 os resultados obtidos são apresentados, concluindo-se o artigo na seção 5.

## 2. Descrição e Caracterização do Modelo

O modelo investigado, neste artigo, foi proposto por Possamai, Pescador e Mayerle (2014). Neste, considera-se um mercado formado por um conjunto de regiões produtoras,  $P=\{1,\dots,m\}$ , e um conjunto de mercados consumidores,  $M=\{1,\dots,n\}$ , espacialmente distribuídos, onde a quantidade de produto ofertada por cada região sofre variações sazonais.

Nas Tabelas 1 e 2 são exibidas as variáveis consideradas e as funções (continuamente diferenciáveis) do modelo matemático em questão, respectivamente.

Tabela 1: Variáveis consideradas no modelo matemático.

Variável	Definição
$i$	Região produtora
$j$	Região consumidora
$t, t \in \{1, 2\}$	Período de tempo
$q_i^t$	Quantidade produzida pela região produtora $i$ no período $t$ .
$d_j^t$	Quantidade consumida pelo mercado consumidor $j$ no período $t$ .
$x_{ij}^t$	Quantidade transportada (fluxo) da região produtora $i$ para o mercado consumidor $j$ no período $t$ .

Tabela 2: Funções continuamente diferenciáveis consideradas no modelo matemático.

Função	Descrição
$S_i^{-1}(q_i^t)$	Curva inversa da oferta do mercado produtor no período $t$ .
$D_j^{-1}(d_j^t)$	Curva inversa de demanda do mercado consumidor $j$ no período $t$ .
$C_{ij}^t(x_{ij}^t)$	Custo marginal de transporte entre o produtor $i$ e o consumidor $j$ no período $t$ .

No trabalho de Possamai, Pescador e Mayerle (2014) duas variantes são apresentadas, o fato de não existir estoque regulador e o caso em que há estoque regulador operado por um agente público que armazena os excessos de oferta de um período para serem comercializados e consumidos no período de baixa produção. Neste trabalho adota-se somente o modelo sem estoque regulador. Neste caso, considera-se que toda a oferta disponível deve ser consumida em um mesmo período  $t$ , não ocorrendo a presença de um estoque intermediador, isto é, a produção é encaminhada diretamente para o mercado consumidor. Assim, consideram-se dois períodos isolados denotados por  $t \in \{1, 2\}$ .

De acordo com Harker (1986), as quantidades e os preços nesses mercados são definidos por um modelo de equilíbrio perfeito, devendo satisfazer as condições descritas em (1).

$$\forall i, j, S_i^{-1}(q_i^t) \begin{cases} = D_j^{-1}(d_j^t), se x_{ij}^t > 0 \\ \geq D_j^{-1}(d_j^t), se x_{ij}^t = 0 \end{cases} \quad (1)$$

O modelo investigado, neste trabalho pode ser formulado como um problema de programação não linear dado por:

maximizar:

$$f(d, q, x) = \sum_{j=1}^n \int_0^{d_j^t} D_{jt}^{-1}(w) dw - \sum_{i=1}^m \int_0^{q_i^t} S_{it}^{-1}(w) dw - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \int_0^{x_{ij}^t} C_{ij}^t(w) dw \quad (2)$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^t = q_i^t, \forall i = 1, \dots, m \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij}^t = d_j^t, \forall j = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$x_{ij}^t \geq 0, \forall i, j \quad (5)$$

em que: (2) refere-se à função objetivo, a qual representa a maximização do excedente da sociedade, no período  $t$ , de acordo com um sistema de concorrência perfeita, em que só haverá fluxo entre produtor e consumidor se o custo marginal de produção na origem, somado aos custos de transporte, for igual ao preço no mercado consumidor. Nesta função temos o primeiro termo como sendo o excedente do consumidor, representado pela integral da curva inversa da demanda em relação ao preço; o segundo termo como o excedente do produtor, representado pela integral da curva inversa da oferta em relação ao preço, e o terceiro termo como a integral do custo marginal de transporte entre produtor e consumidor, representando o caso em que produtores e consumidores encontram-se espacialmente dispersos, o que representa melhor situações reais de mercado.

As equações (3) e (4) representam, respectivamente, as quantidades produzidas pela região produtora  $i$ , no período  $t$  e as quantidades consumidas no mercado  $j$  no período  $t$ , em função das quantidades transportadas entre as regiões produtoras e os mercados consumidores, nesse mesmo período, e a inequação (5) representa a condição de não-negatividade dos fluxos entre as regiões produtoras e os mercados consumidores.

### 3. O Método de Pontos Interiores

Com a finalidade de resolver problemas não lineares restritos, cujo interior é não vazio, o Método de Pontos Interiores foi introduzido por Frisch (1955) e por Carrol (1961), por meio do uso do método da função barreira, mas se popularizaram com o trabalho de Karmarkar (1984). Estes métodos transformam o problema restrito em uma sequência de problemas irrestritos o introduzirem as restrições na função objetivo através de um parâmetro de barreira. Tais parâmetros geram barreiras que impedem as variáveis de violarem seus limites, trabalhando no interior dessa região. Neste trabalho utilizaremos o método primal dual de pontos interiores apresentado por Waltz *et al.* (2006).

Considere o problema de programação não linear restrita:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } f(x) \\ & \text{sujeito a: } \quad g_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & \quad \quad \quad h_j(x) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (6)$$

sendo:  $m < n, x \in R^n, g(x) \in R^m, h(x) \in R^p$ , e as funções  $f, g$  e  $h$  são de classe  $C^2$ .

No método primal dual de pontos interiores, as restrições de desigualdade são transformadas em restrições de igualdade por meio da introdução de variáveis de folga. Assim, o problema descrito em (6) pode ser escrito:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } f(x) \\ & \text{sujeito a: } \quad g_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & \quad \quad \quad h_j(x) + s_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (7)$$

sendo  $s \in R^p$  denominado de vetor das variáveis de folga, com  $s_j \geq 0$ , para  $j = 1, \dots, p$ . Para o caso do método de pontos interiores adota-se  $s_j > 0$ , para  $j = 1, \dots, p$ .

Ao problema modificado (7), associa-se uma função barreira logarítmica a qual garante a não negatividade dessas variáveis de folga.

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } f(x) - \mu \sum_{j=1}^p \ln(s_j) \\ & \text{sujeito a: } \quad g_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & \quad \quad \quad h_j(x) + s_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (8)$$

no qual  $\mu$  é um número positivo que tende a zero, denominado de parâmetro de barreira.

Quando o parâmetro de barreira tende a zero, a solução do problema apresentado em (8), aproxima-se da solução ótima,  $x^*$ , do problema (6).

Associando a função Lagrangiana ao problema (8), tem-se:

$$L = f(x) - \mu \sum_{j=1}^p \ln(s_j) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \pi_j [h_j(x) + s_j] \quad (9)$$

em que  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, m$  e  $\pi_j, j = 1, 2, \dots, p$  são as coordenadas dos vetores dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente. O problema irrestrito é obtido por minimizar a função apresentada em (9), em relação à variável  $x$ , para  $\mu$  fixo.

Para isso, aplicam-se as condições necessárias de primeira-ordem em (9), e tem-se:

$$\nabla L(w) = 0 \quad (10)$$

sendo  $w = (x, s, \lambda, \pi)^T$

A equação (10) representa um sistema de equações não-lineares, o qual é resolvido pelo Método de Newton, que gera um sistema do tipo  $Wd = -\nabla L(w)$ . Nesse sistema,  $W$ , é a matriz Hessiana da função Lagrangiana (9);  $\nabla L(w)$  é o vetor gradiente; e o vetor das direções de busca  $d = (d_x, d_s, d_\lambda, d_\pi)^T$  é utilizado para atualizar as variáveis  $x, s, \lambda$  e  $\pi$  como segue:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \alpha_p d_x \\ s^{k+1} &= s^k + \alpha_p d_s \\ \lambda^{k+1} &= \lambda^k + \alpha_d d_\lambda \\ \pi^{k+1} &= \pi^k + \alpha_d d_\pi \end{aligned} \quad (11)$$

sendo o comprimento do passo  $\alpha_p \in (0, 1]$  e  $\alpha_d \in (0, 1]$  para preservar a positividade do vetor  $s$  e o sinal do vetor  $\pi$ .

Um ponto estritamente factível não é obrigatório, mas as condições  $s > 0$  e  $\pi > 0$  devem ser satisfeitas em todos os pontos. O parâmetro de Barreira é atualizado seguindo alguma heurística e o processo de minimização em  $x$  é repetido. O processo de otimização termina quando as condições de KKT são satisfeitas.

#### 4. Resultados e discussões

Neste espaço, apresentam-se os resultados computacionais obtidos. Para a resolução do modelo investigado, neste trabalho, foi utilizado um algoritmo baseado no MPI, o qual se encontra-se implementado no pacote de algoritmos de otimização Knitro (WALTZ, 2010). O MPI é implementado

na plataforma GAMS (BROOKE, 1997). Os testes foram realizados em um computador Intel® Core i5, com 6GB de memória RAM e 500GB de HD.

Para resolução do modelo, consideraram-se os dados numéricos exibidos nas Tabelas 3, 4 e 5, respectivamente. São considerados quatro mercados consumidores e três produtores, para dois períodos de tempo semestrais.

Tabela 3: Curva de demanda dos mercados consumidores.

Consumidor	Semestre 1 e 2
	$D_j^{-1}(d_j^t) = a_j + b_j d_j^t$
$M_1$	$D_{11}^{-1}(d_1^t) = 110 - 0,22d_1^t$
$M_2$	$D_{21}^{-1}(d_2^t) = 128 - 0,25d_2^t$
$M_3$	$D_{31}^{-1}(d_3^t) = 118 - 0,17d_3^t$
$M_4$	$D_{41}^{-1}(d_4^t) = 125 - 0,16d_4^t$

Fonte: POSSAMAI; PESCADOR; MAYERLE, 2014.

Tabela 4: Curva de oferta dos mercados produtores.

Produtor	Semestre 1	Semestre 2
	$S_{i1}^{-1}(q_i^1) = a_i + b_i q_i^1$	$S_{i2}^{-1}(q_i^2) = a_i + b_i q_i^2$
$P_1$	$S_{11}^{-1}(q_1^1) = 17 + 0,12q_1^1$	$S_{12}^{-1}(q_1^2) = 4 + 0,02q_1^2$
$P_2$	$S_{21}^{-1}(q_2^1) = 19 + 0,15q_2^1$	$S_{22}^{-1}(q_2^2) = 10 + 0,03q_2^2$
$P_3$	$S_{31}^{-1}(q_3^1) = 16 + 0,13q_3^1$	$S_{32}^{-1}(q_3^2) = 3 + 0,01q_3^2$

Fonte: POSSAMAI; PESCADOR; MAYERLE, 2014.

Tabela 5: Custos de transporte em \$ por unidade transportada.

De	Para	Vetor custo de transporte
Produtor	Consumidor	$C(x) = (C_{11}^t(x_{11}^t), \dots, C_{14}^t(x_{14}^t), C_{21}^t(x_{21}^t), \dots,$ $C_{24}^t(x_{24}^t), C_{31}^t(x_{31}^t), \dots, C_{34}^t(x_{34}^t)) = (5,20 \ 5,30 \ 7,20$ $8,40 \ 7,80 \ 5,70 \ 4,90 \ 8,23 \ 5,27 \ 5,48 \ 8,16 \ 9,12)$

Fonte: POSSAMAI; PESCADOR; MAYERLE, 2014.

De acordo com os dados apresentados nas Tabelas 3, 4 e 5 determinou-se o modelo conforme (2)-(5).

Os resultados obtidos, através do MPI, para a maximização do excedente da sociedade (2) nos dois períodos considerados se encontram na Tabela 6.



Tabela 6: Resultados da maximização do excedente da sociedade para os dois períodos considerados.

1º Semestre	2º Semestre
\$52.883,4	\$18.418,1

Dos resultados apresentados na Tabela 6, é possível verificar a variação da maximização do excedente da sociedade entre o primeiro e o segundo semestre, isto é, há a variação das curvas de oferta e demanda entre os períodos, afetando conseqüentemente o custo dos produtos ofertados ao mercado. Observa-se que no primeiro semestre, quando a oferta é escassa, os preços praticados são mais elevados, resultando em uma redução de 65,2% do valor no segundo semestre, quando comparado ao primeiro.

Os resultados apresentados na Tabela 6, obtidos através do MPI, se aproximam dos obtidos por Possamai; Pescador; Mayerle (2014), em que fora observado uma redução dos preços médios entre os períodos analisados de 68,6%, tendo-se utilizado o Método do Gradiente Projetado para resolução do modelo.

## 5. Conclusões

A sazonalidade dos preços de produtos agrícolas é decorrente da falta de ajustamento entre oferta e demanda, dado que a oferta costuma ser concentrada em alguns meses, enquanto a demanda é distribuída ao longo do ano.

O presente artigo abordou a aplicabilidade do Método de Pontos Interiores, a fim de se verificar, comparativamente, a questão da variação das curvas da oferta e demanda consideradas em um ano, através do modelo matemático de programação não linear de Possamai; Pescador; Mayerle (2014) para o problema de equilíbrio espacial de preços para produtos sazonais num ambiente de concorrência perfeita.

Os resultados apresentados na Tabela 6 evidenciam a eficiência do Método de Pontos Interiores na resolução do modelo (2)-(5).

## Agradecimentos

Ao CNPq (processo nº 309588/2013-8 (Bolsista CNPq) e nº 448645/2014-9) e a CAPES pelo apoio financeiro.

## Referências

ATHANASIOU, G.; KARAFYLLIS, I.; KOTSIOS, S. Price stabilization using buffer stocks. **Journal Of Economic Dynamics And Control**, v. 32, n. 4, p.1212-1235, abr. 2008.

BROOKE, A.; KENDRIK, D.; MEERAUS, A. **Gams - Sistema Geral de Modelagem Algébrica**. São Paulo: Edgardblücher, 1997.

CARROL, C W. The Created Response Surface Technique for Optimizing Nonlinear Restrained Systems. **Operations Research**, 9, p.325-331, 1961.

DUTRA, S. **Método de Pontos Interiores Aplicado a um Problema de Sequenciamento Job-Shop**. 2004. 112 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal da Bahia, Salvador - Bahia, 2004.

EL-BAKRY, A.S.; TAPIA, R.A.; TSUCHIYA, T.; ZHANG, Y. On the Formulation and Theory of the Newton Interior-Point Method for Nonlinear Programming. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v.89, n.3, p. 507-541, 1996.





Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional  
De 2 a 5 de Maio de 2017  
Unesp, Faculdade de Ciências - Bauru/SP

FREUND, R. M.; MIZUNO, S. Interior Point Methods: Current Status and future directions. **Optima**, -, v. 51, p.1-9, 1996.

FRISCH, K. R. The logarithmic Potential Method of Convex Programming. **University Institute Of Economics**, Oslo, 1955.

GONDZIO, J. Interior point methods 25 years later, **European Journal of Operational Research**, vol. 218, no. 3, pp. 587-601, 2012.

HARKER, P. T. Alternative Models of Spatial Competition. **Operations Research**, v. 34, n. 3, p.410-425, jun. 1986.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à Pesquisa Operacional**. 9. ed. Porto Alegre: Mcgraw-hill, 2012.

KARMAKAR, N.. A new polynomial-time algorithm for linear programming. **Proceedings Of The Sixteenth Annual Acm Symposium On Theory Of Computing - Stoc '84**, [s.l.], p.302-311, 1984.

NAGURNEY, A. **Network Economics - A Variational Inequality Approach**. 2. ed. Boston: Kluwer Academic Publishers., 1999.

POSSAMAI, J. P.; PESCADOR, A.; MAYERLE, S. F. **Equilíbrio espacial de preços com estoque regulador**. *Production*, v. 24, n. 4, p.861-871, 2014.

POVOA, Barbara Batista. Gestão de estoque: os desafios dos itens de MRO e a importância dos indicadores de performance. **XXXIII Encontro Nacional de Engenharia de Produção(ENEGEP)**, Salvador-BA, 2013.

SLACK, N.; et al. **Administração da Produção**. São Paulo:Atlas, 1997.

TUBINO, D. F. **Manual de planejamento e controle da produção**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2000.

WALTZ, R.A. et al. **An interior algorithm for nonlinear optimization that combines line search and trust region steps**. *Mathematical Programming*, v. 107, n. 3, p.391-408, 2006.

WALTZ, R.A.; PLATENGA, T.D.. **Knitro User's Manual. Version 7.0**. Technical Report: Ziena Optimization, USA, 2010.



## Uma Aplicação Clássica para o Método dos Elementos Discretos utilizando Processamento Paralelo

*Sanches, Luiz Carlos Facundo*

*Universidade Estadual Paulista - Unesp; Câmpus de São João da Boa Vista  
lsanches@sjbv.unesp.br*

*Carrion, Ronaldo*

*Universidade de São Paulo - Usp; Escola Politécnica  
rcarrion@usp.br*

*Lima, Carlos Héracles Morais*

*Universidade Estadual Paulista - Unesp; Câmpus de São João da Boa Vista  
carlos.lima@sjbv.unesp.br*

**Resumo:** O Método dos Elementos Discretos tem sido usado recentemente para simular meios contínuos e descontínuos. Ao ser aplicado tanto em meios fluidos como sólidos, o método é computacionalmente caro. Por outro lado, novas arquiteturas computacionais podem ser usadas para torná-lo menos exigente. Pesquisas envolvendo a Unidade Central de Processamento e a Unidade de Processamento Gráfico têm atraído muita atenção quando se procura acelerar as simulações. Na verdade, existem arquiteturas de computação paralela que procuram acelerar o tempo de processamento ao fazer uso efetivo da memória disponível. Resultados encontrados na literatura demonstram que a programação paralela pode ser executada de forma semelhante tanto em placas de processamento gráfico como também em plataformas com processamento central. O algoritmo proposto aqui utiliza a segunda alternativa. Ao longo do trabalho procurou-se descrever o método e a viabilidade de usar computação paralela em computadores pessoais com processadores de vários núcleos. O esquema em questão foi aplicado em um problema clássico de deposição de material granular. Alguns resultados apresentados mostraram interessante decaimento do tempo de processamento para o esquema de paralelização utilizado. Os valores encontrados estão de acordo com a literatura.

**Palavras-chave:** Métodos Numéricos e Aplicações. Métodos dos Elementos Discretos. Computação Científica. Computação Paralela.

### Introdução

De acordo com a bibliografia consultada, vários autores destacam que o Método de Elementos Discretos (MED) foi inicialmente descrito por Cundall e Strack (1979). Ele tem sido amplamente utilizado em análises numéricas envolvendo dinâmica de meios fluidos e sólidos. O esquema básico é uma abordagem Lagrangeana onde as partículas individuais são calculadas com base na segunda lei de *Newton* do movimento. Os elementos discretos nos permitem investigar por exemplo, o fluxo granular de partículas e seu movimento precisamente. Por outro lado, quando o número de partículas aumenta, os algoritmos tradicionais tornam-se muito dispendiosos. Novas modelagens e técnicas de processamento paralelo são necessárias para implementar este método quando é necessário utilizar processos em grande escala.

Nos últimos anos, poderosos *clusters* de computadores e super computadores foram usados para simular sistemas complexos com grande número de partículas. No entanto, seus custos excessivos de implantação limitaram sua popularidade. Problemas semelhantes foram relatados para outras aplicações como, dinâmica de fluidos computacional, análises estruturais e simulações de corpo rígido. Recentemente, observa-se que o número de núcleos disponíveis em uma *Central Processing Unit* (CPU) de um computador pessoal tem aumentando constantemente. Sakai, et al. (2010) destaca que o processamento paralelo em vários núcleos de uma CPU pode ser uma promissora alternativa para permitir que a paralelização se torne mais acessível. Algumas estratégias gerais para paralelização em CPUs são descritas por Munjiza, et al. (2012). Segundo Wang, et al. (2013), outra alternativa é o processamento em *Graphics Processing Unit* (GPU). Em 2014, Lukas et al. apresentou uma abordagem bidimensional para a paralelização do método híbrido de elementos finitos e elementos discretos visando o uso de computadores de mesa.

O presente trabalho, tem como proposta descrever o método dos elementos discretos e examinar o desempenho de um esquema paralelo em CPUs com vários processadores considerando um problema clássico de deposição de material.

## O Método dos Elementos Discretos

Materiais granulares podem ser representados como um conjunto de partículas esféricas, cada uma das quais interagem entre si e também com paredes planas através de um esquema simplificado de interação força-deslocamento. A solução numérica envolve a computação da força que atua sobre cada partícula em um dado instante. O montante e uma taxa de sobreposição entre elementos vizinhos são utilizados para determinar as forças de contato em cada instante de tempo. São atualizadas as velocidades e posições das partículas através de um esquema explícito de integração de diferenças finitas de primeira ordem no tempo. As forças e momentos agindo sobre cada partícula são calculados com base no equilíbrio local de vizinhos, e são usados para estimar a aceleração instantânea de cada partícula. As forças de contato são atualizadas e as novas forças e momentos resultantes no centro de gravidade de cada elemento são computados. O ciclo é repetido com pequenos incrementos até a solução final ser obtida. Na formulação, o tempo pode representar o tempo real ou um parâmetro fictício para representar o incremento de carga de um estágio de carregamento para o seguinte (CUNDALL; STRACK, 1979). De acordo com esses autores, as equações que regem o equilíbrio dinâmico de translação e rotação de uma partícula  $i$  com massa  $m_i$  são:

$$\frac{d^2 x_i(t)}{dt^2} = \ddot{x}_i(t) = \frac{F_{x_i}(t)}{m_i}, \quad (1)$$

e

$$\frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = \ddot{\theta}_i(t) = \dot{\omega}_i(t) = \frac{T_i(t) + M_i(t)}{I_i}, \quad (2)$$

sendo  $x_i(t)$  as posições dos centróides de uma partícula esférica  $i$  dispostas em um sistema de coordenadas cartesiano fixo,  $\ddot{x}_i$  é o vetor de aceleração para a  $i$ -ésima partícula,  $F_{x_i}$  são as forças de contato,  $m_i$  é a massa da partícula,  $\theta$  é a rotação,  $\dot{\omega}_i$  é o vetor da aceleração angular,  $T_i$  é o torque da partícula  $i$ ,  $M_i$  é o momento resultante que atua através do centróide da partícula  $i$  e  $I_i$  é o seu momento de inércia.

### Atualização da Posição das Partículas

Considerando o equilíbrio dinâmico e conhecendo as forças resultantes agindo sobre as partículas, é possível calcular as acelerações para a  $i$ -ésima partícula. Particularmente, para movimento de translação, temos:

$$m_i a_i^t = F_i^t, \quad (3)$$

sendo  $m_i$  a matriz de inércia (massa),  $a_i^t$  o vetor de aceleração no tempo  $t$  e  $F_i^t$  o vetor de força resultante.

Para atualizar tais parâmetros é necessário implementar métodos de integração (CUNDALL e STRACK, 1979). A relação entre o vetor de aceleração e velocidade é:

$$a_i^t = \frac{\mathbf{1}}{\Delta t} (v_i^{t+\Delta t/2} - v_i^{t-\Delta t/2}), \quad (4)$$

sendo  $v_i^{t-\Delta t/2}$  e  $v_i^{t+\Delta t/2}$  as velocidades em  $t - \Delta t/2$  e  $t + \Delta t/2$ , respectivamente, para a  $i$ -ésima partícula. A Equação 4 é também conhecida como esquema de integração no tempo de *Verlet*. A velocidade no tempo  $t + \Delta t/2$  é então calculada como:

$$v_i^{t+\Delta t/2} = v_i^{t-\Delta t/2} + \Delta t \frac{\mathbf{1}}{m_i} (F_i^t), \quad (5)$$

A velocidade no tempo  $t + \Delta t/2$  é igual à velocidade média calculada dentro do intervalo de  $t$  para  $t + \Delta t$ . Então, podemos calcular a posição da partícula atualizada como:

$$x_i^{t+\Delta t} = x_i^t + \Delta t \times v_i^{t+\Delta t/2}, \quad (6)$$

onde o vetor  $x$  de posição de partículas dá as coordenadas cartesianas das partículas e, quando necessário, a rotação total em torno do eixo principal.

### O Cálculo das Forças de Contato

O movimento de translação e de rotação (quando necessário) das partículas foram incrementados utilizando um procedimento de integração numérica no qual as configurações de montagem foram geradas em intervalos de tempo  $\Delta t$ . As forças de contato consistem em componentes normais e tangenciais, cada uma das quais tinha um termo de dissipação viscoso proporcional à componente da velocidade nessa direção (O'SULLIVAN, 2011).  $F_n$  denota a componente normal da força de contato, enquanto a componente tangencial é denotada por  $F_t$ . A força normal de contato pode ser calculada como:

$$F_n = F_N - c_n v_n, \quad (7)$$

sendo  $F_N$  a parte elástica da interação normal,  $c_n$  o coeficiente de amortecimento da interação normal,  $v_n = (v \cdot n)n$  com  $n$  representando o vetor unitário da interação entre os centros das duas partículas e  $v$  o vetor da velocidade de translação da partícula. O segundo termo do lado direito da Equação 7 representa o amortecimento de contato. Há também uma interação tangencial, a componente de atrito que é dada por:

$$F_T = \mu F_N \left( 1 - \left( 1 - |\delta_t| / \delta_{m\acute{a}x} \right)^{3/2} \right) \quad (8)$$

sendo  $\delta_t$  o deslocamento tangencial total entre as duas superfícies a partir do ponto em que eles entraram em contato inicialmente. Se  $|\delta_t| > \delta_{m\acute{a}x}$ , então o deslizamento bruto é considerado como tendo iniciado e a força de atrito assume um valor constante dado pela lei de *Amonton*,  $F_T = \mu F_N$ , onde  $\mu$  é o coeficiente de atrito.

Neste caso, a escolha de  $\delta_{m\acute{a}x}$  (deslocamento tangencial máximo) é tipicamente várias ordens de grandeza maior do que para um contato típico. Além disso, a força de interação tangencial total em qualquer tempo é:

$$F_t = F_T - c_t v_t, \quad (9)$$

O segundo termo do lado direito da Equação 9 é a força de amortecimento de contato proporcional à componente tangencial da velocidade relativa,  $v_t = v \times n$  e  $c_t$  é o coeficiente de amortecimento da interação tangencial. No modelo adotado, foram utilizadas algumas simplificações. Em primeiro lugar, utilizou-se partículas não-rotacionais para avaliar um meio granular. Outra simplificação é a utilização de uma parede com malha sem atrito. Isto resultará num padrão de fluxo mais largo do que o habitual, com partículas deslizando mais facilmente.

## Processamento Paralelo

Neste trabalho, um código aberto modular de simulação orientado a objetos escrito em C++ foi testado. Seguindo as orientações descritas por Weatherley et al. (2014), a decomposição do domínio espacial (em subdomínios) é implementada usando uma estratégia "mestre escravo" com comunicações inter-processo usando *Message Passing Interface* (MPI). Para isso, é empregado um algoritmo de pesquisa de vizinhança de *Verlet* para detecção de partículas vizinhas e um esquema finito explícito de integração no tempo de primeira ordem. Além disso, uma *Application Programming Interface* (API) permite avaliar as simulações através de *scripts* escritos em linguagem de programação *Python*.

Durante todas as iterações e etapas de carregamento, cada conjunto de elementos discretos funciona de forma independente. A paralelização é conseguida pela decomposição do domínio do problema em subdomínios, onde a interface de cada subdomínio precisa ser duplicada para que as informações sejam intercambiadas entre dois subdomínios vizinhos (WEATHERLEY, et al., 2014).

As simulações foram feitas no sistema *Linux Ubuntu 14.02* em um computador pessoal usando sua CPU. O processamento foi implementado por um processador *Intel Core i-5 4210U* com cinco núcleos, *2,40 GHz* de CPU *clock* e *8,0 GB* de memória *RAM*.

## Análise Numérica

O processamento numérico foi realizado com a proposta de analisar o colapso de um conjunto de partículas não ligadas mas, com atrito entre elas e sob a ação da gravidade, incorporando tanto repulsão elástica como resistência ao atrito entre as partículas de contato.



Para isto, considerou-se um cubo tridimensional quadrado de lado 10 m, contendo partículas esféricas cujo raio variou de 0,2 m a 0,5 m, apoiado na sua parte inferior por uma parede rígida. Foi implementada repulsão elástica e atrito entre as partículas e entre as partículas e a parede. Nas partículas, o coeficiente de rigidez normal foi adotado o valor de 1.000,0 N/m, o tangencial 100,0 N/m e o coeficiente de atrito 0,63. Além disso, foram definidos para o coeficiente de aceleração da gravidade o valor de  $9,81 \text{ m/s}^2$  e para a viscosidade 0,6. Na parede, o coeficiente de rigidez normal é 10.000,0 N/m.

Executou-se a simulação para  $10^5$  interações com um incremento de passo de tempo de  $10^{-4}$  segundos. Também foi usado o programa de visualização *POVray* (WEATHERLEY, et al., 2014) para gravar instantâneos (*snapshots*) a cada  $10^3$  passos de tempo.

Alguns *snapshots* com resultados da deposição das partículas são apresentados na Figura 1.

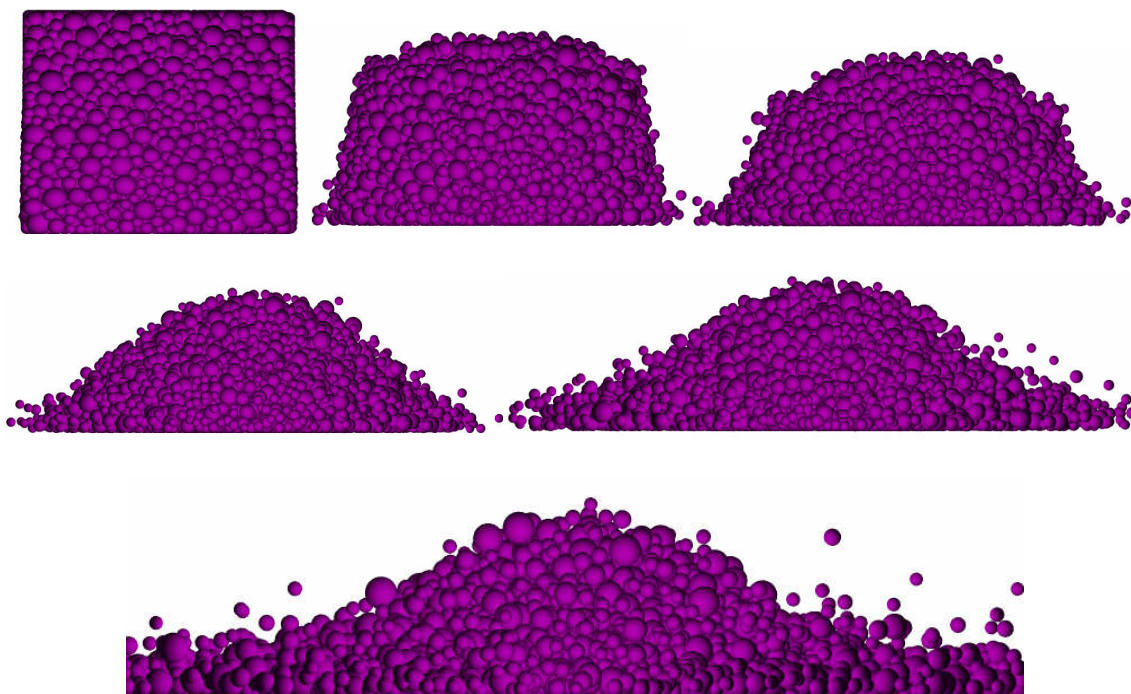


Figura 1: Colapso de um conjunto de partículas em cima de uma base rígida.

Na Figura 1, podemos observar que quando duas partículas se tocam, uma rigidez ao cisalhamento é criada no ponto de contato. As forças das partículas circundantes farão com que as duas partículas comecem a deslizar uma após a outra com a rigidez ao cisalhamento resistindo ao movimento. Quando a força de cisalhamento excede a força normal multiplicada pelo coeficiente de atrito, o deslizamento dinâmico começa (a força de cisalhamento máxima é governada pela força normal e o coeficiente de atrito). Este parece ser um método simples e eficaz para simular a deformação estática em contatos de atrito e deslizamento com atrito dinâmico.

Além disto, para um número fixo de partículas no domínio, registramos o tempo computacional e comparamos as respectivas velocidades usando diferentes números de processadores  $n_p$ , que especifica o número de processos paralelos MPI usados na simulação (Figura 2). Foram considerados até quatro núcleos de CPU físicos.



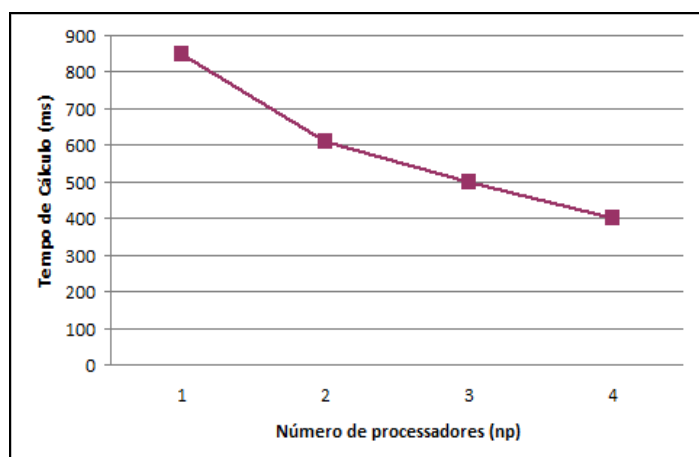


Figura 2: Tempo de cálculo em função do número de processos paralelos.

Como esperado, a Figura 2 mostra que o tempo de cálculo diminui em função do aumento do número de processadores e, conseqüentemente, de processos paralelos. Resultados semelhantes aos apresentados na literatura.

### Conclusões

Neste trabalho, foi apresentada uma implementação do Método dos Elementos Discretos, mais comumente chamado de método de partículas. Foi utilizado processamento paralelo em CPUs com vários núcleos. O código foi testado em computador pessoal contendo até cinco processadores. A proposta foi modelar um problema granular de deposição de material e verificar a eficiência da programação paralela. Os resultados encontrados são bastante promissores e estão de acordo com os descritos na literatura. Investigações futuras precisam ser realizadas para examinar o efeito das CPUs com uma maior quantidade de processos paralelos e também a eficiência da programação paralela em GPUs.

### Agradecimentos

Os autores agradecem a Comissão Organizadora do ERMAC 2017 pela oportunidade.

### Referências

CUNDALL, P. A., STRACK, O. D. L., A discrete numerical model for granular assemblies. **Geotechnique**, v. 29, p. 47–65, 1979.

LUKAS, T., D'ALBANO, G. G. S., MUNJIZA, A. A. Space decomposition based parallelization solutions for the combined finite-discrete element method in 2D. **Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering**. v. 6, p. 607-615, 2014.

MUNJIZA, A. A., KNIGHT, E. E., ROUGIER, E. **Computational Mechanics of Discontinua**. Wiley Series in Computational Mechanics. Chichester, UK: Wiley, 2012.



Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional  
De 2 a 5 de Maio de 2017  
Unesp, Faculdade de Ciências - Bauru/SP

O'SULLIVAN, C. **Particulate Discrete Element Modelling: a Geomechanics Perspective**. New York: Spon Press, 2011.

SAKAI, M., YAMADA, Y., SHIGETO, Y., SHIBATA, K., KAWASAKI, V. M., KOSHIZUKA, S. Large-scale DEM modeling in a fluidized bed. **Int. J. Num. Meth. in Fluids**, v.64, p. 1319–35, 2010.

WANG, L., LI, S., ZHANG, G., MA, Z. ZHANG, L., A GPU-Based Parallel Procedure for Nonlinear Analysis of Complex Structures Using a Coupled FEM/DEM Approach. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2013. Article ID 618980.

WEATHERLEY, D. K., BOROS, V. E., HANCOCK, W. R., ABE, S. **ESyS-particle Tutorial and User Guide Version 2.3.1**. The University of Queensland. Australia, 2014.



## Uma equação diferencial parcial tempo-fracionária e o teste ESR

*José Vanterler da Costa Sousa*

Imecc - Unicamp; Departamento de Matemática Aplicada  
ra160908@ime.unicamp.br

Edmundo Capelas de Oliveira

Imecc - Unicamp; Departamento de Matemática Aplicada  
capelas@ime.unicamp.br

Luiz Alberto Magna

Fcm - Unicamp; Departamento de Genética Médica  
amagna@uol.com.br

**Resumo:** Consideramos uma equação diferencial parcial associada a um modelo matemático descrevendo a concentração de nutrientes no sangue que interfere diretamente na taxa de sedimentação dos eritrócitos no caso de uma velocidade média do fluido igual a zero. Introduzindo a derivada fracionária no sentido de Caputo, propomos um modelo matemático tempo-fracionário que contém, como um caso particular, o modelo proposto por Sharma et al. (SHARMA et al.). Nosso objetivo principal é obter uma solução analítica desta equação diferencial parcial tempo-fracionário em termos da função de Mittag-Leffler e da função de Wright.

**Palavras-chave:** Cálculo Fracionário. ESR. EDP tempo-fracionária. Função de Mittag-Leffler. Função de Wright.

### Introdução

Em 1897, o médico polonês E. F. Biernacki introduziu um exame de sangue que ajudou no diagnóstico da fase aguda das doenças inflamatórias e no acompanhamento da própria inflamação do corpo, conhecida como taxa de sedimentação de eritrócitos (ESR)(KUCCHARZ, E.). A descoberta foi anunciada em dois artigos: o primeiro, em polonês, em *Lekarska Gazeta*, o segundo, em alemão, em *Deutsche Medizinische Wochenschrift* (BIERNACKI, E.). Por outro lado, no início do século XIX, Robin Fahraeus e A. Westergren, quando realizaram testes de gravidez e tuberculose, desenvolveram um teste semelhante ao ESR conhecido como o teste de Fahraeus-Westergren (WESTERGREN, A. e FAHRAEUS, R.).

A ESR não é bastante específica, é necessário realizar mais testes para confirmar o resultado obtido pela ESR, a fim de evitar resultados falso-positivos e falso-negativos, que são susceptíveis de ocorrer na presença de algum fator cuja influência nas propriedades do sangue afeta os resultados do teste (BROEK et al.), por exemplo: Fatores analíticos, como um tubo inclinado e temperatura ambiente, que respectivamente, aumentam e diminuem a ESR. Outros fatores que afetam os resultados são a presença de vibrações externas e deformação do tubo. Fatores fisiológicos e patológicos, como anemia, gravidez e velhice, resultando em aumento ESR; policitemia e aumento de leucócitos, resultando em diminuição da ESR.

Whelan et al. (WHELAN et al.) publicaram um trabalho no que diz respeito a concentração de eritrócitos no sangue em tempos diferentes em amostras de 5 homens. No mesmo ano, Huang et al. (HUANG et al.) desenvolveram um modelo matemático para descrever o comportamento da concentração de células sanguíneas, dando-se importância a problemas de fronteiras móveis. Movido pela trabalho de 1971 de Huang, em 1990 Reuben e Shannon (REUBEN, A. e SHANNON, A.) discutiram alguns problemas na modelagem matemática da concentração de eritrócitos. No entanto, os autores desses estudos

não levaram em conta a transferência de nutrientes dos capilares para os tecidos. Devido a este fato, Sharma et al. (SHARMA et al.) estabeleceram um modelo matemático considerando a transferência de nutrientes, tornando-o um modelo mais preciso.

A principal motivação para o estudo da concentração  $C(x,t)$  por meio do cálculo fracionário é o modelo matemático proposto por Sharma et al. (SHARMA et al.). Aqui apresentamos uma aplicação do cálculo fracionário, especificamente da derivada fracionária no sentido de Caputo, para estudar o comportamento de  $C(x,t)$ . Como estamos buscando o mesmo objetivo, é útil fazer algumas comparações para destacar os desenvolvimentos trazidos por este trabalho. Na verdade, não é tarefa fácil, e muito menos trivial, encontrar a solução analítica do modelo fracionário proposto e apresentar seu comportamento graficamente. Elencamos, a seguir as principais diferenças e as semelhanças com relação ao caso inteiro: **1.** Admitimos a velocidade média  $U = 0$ , no modelo de Sharma et al., restringindo-nos assim ao modelo de difusão. Utilizamos este modelo e a partir dos conceitos básicos do cálculo fracionário apresentamos o nosso modelo matemático fracionário. **2.** Propomos um modelo com a derivada fracionária no sentido de Caputo no tempo com a ordem  $0 < \mu \leq 1$ . Consequentemente, a solução depende do parâmetro  $\mu$ . No limite  $\mu \rightarrow 1$  recuperamos a solução de Sharma et al. como um caso particular. **3.** O que se espera é que as soluções de cada modelo sejam distintas, e isso é o que realmente acontece. De fato, a solução analítica obtida por Sharma et al. é expressa em termos de um produto da função exponencial  $\exp(\cdot)$  e da função erro complementar  $\text{erfc}(\cdot)$ . Por outro lado, a solução obtida para o modelo matemático fracionário é dado em termos da função de Mittag-Leffler e da função Wright. **4.** O comportamento analítico da solução obtida com a derivada fracionária permite uma análise mais detalhada, porque temos a liberdade no parâmetro  $\mu$  ( $0 < \mu \leq 1$ ), o que possibilita maiores informações a respeito da concentração de nutrientes no sangue.

## Modelo Matemático Fracionário

Apresentamos uma versão fracionária da equação diferencial parcial (EDP) associada ao modelo matemático de Sharma et al. usado para descrever o comportamento da concentração de nutrientes no sangue, um fator que afeta diretamente a ESR. Admitimos que a velocidade média do fluido é igual a zero. Nosso modelo pode ser considerado uma generalização do modelo de Sharma et al., no sentido de que ele recupera este como um caso particular, como veremos do decorrer do trabalho.

A concentração de nutrientes no sangue, denotada por  $C(x,t)$ , satisfaz a seguinte EDP tempo-fracionário não-homogênea,

$$D_L \mathcal{D}_x^2 C(x,t) - \mathcal{D}_t^\mu C(x,t) = \phi(x,t), \quad (1)$$

com  $0 < \mu \leq 1$ , onde  $D_L$  é uma constante positiva e  $\phi(x,t)$  é a função que descreve a taxa de transferência de nutrientes e que satisfaz a EDP:

$$D \mathcal{D}_x^2 \phi(x,t) - k\phi(x,t) - \mathcal{D}_t \phi(x,t) = 0, \quad (2)$$

com  $D$  e  $k$  ambas constantes positivas.

As condições inicial e de fronteira impostas aqui são dadas por

$$\begin{cases} \phi(x,0) = \exp\left(-\sqrt{\frac{k-a}{D}}x\right), & k \geq a, D > 0, \\ \phi(0,t) = \exp(-at), & t > 0, \\ \phi(\infty,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

A solução da Eq.(2) pode ser escrita como

$$\phi(x,t) = \exp(-(at + bx)),$$

onde  $b^2 = \frac{(k-a)}{D} > 0$  e  $a$  é uma constante a ser escolhida a partir de um valor conhecido de  $\phi(x, t)$ .

Para o modelo matemático fracionário proposto, admitimos que  $0 < \mu \leq 1$  e a derivada fracionária de ordem  $\mu$  é considerada no sentido de Caputo (PODLUBNY, I.). O caso particular  $\mu = 1$ , recupera o resultado obtido por Sharma et al. Além disso, devemos impor as seguintes condições iniciais e de contorno para a Eq.(1):

$$\begin{cases} C(x, 0) = 0, & x \geq 0 \\ C(0, t) = 1, & t > 0 \\ C(\infty, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (3)$$

A partir destas considerações, segue-se que o modelo matemático tempo-fracionário a ser abordado é composto por uma EDP fracionária não homogênea

$$D_L \mathcal{D}_x^2 C(x, t) - \mathcal{D}_t^\mu C(x, t) = \exp(-(at + bx)), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

com condições inicial e de fronteira das pela Eq.(3).

## Solução Analítica

Para resolver esse problema, empregamos a metodologia da transformada de Laplace para converter a EDP fracionária não-homogênea em uma equação diferencial ordinária linear não-homogênea.

Então, aplicando a transformada de Laplace (DEBNATH, L e BRATTA, D.) em relação à variável temporal  $t$  em ambos os membros da Eq.(4), usando os métodos de equação característica e coeficientes indeterminados, obtemos a solução geral, dada por

$$C(x, s) = \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{(s+a)(s^\mu - \frac{b^2}{\alpha^2})} \right) \exp(-\alpha x s^{\mu/2}) + \frac{\exp(-bx)}{(s+a)(\frac{b^2}{\alpha^2} - s^\mu)}, \quad (5)$$

onde  $\alpha^2 = \frac{1}{D_L}$  e  $D_L > 0$ .

A fim de recuperar a solução na variável temporal, tomamos a transformada de Laplace inversa em ambos os membros da Eq.(5) e introduzindo a mudança  $\beta^2 = b^2 D_L$ , obtemos

$$C(x, t) = C_1(x, t) + C_2(x, t) - \exp(-bx)C_3(x, t),$$

com

$$\begin{aligned} C_1(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\exp(-\alpha x s^{\mu/2})}{s} \right\}; \\ C_2(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\exp(-\alpha x s^{\mu/2})}{(s+a)(s^\mu - \beta^2)} \right\}; \\ C_3(x, t) &= \lim_{x \rightarrow 0} C_2(x, t). \end{aligned} \quad (6)$$

Para prosseguir, calculamos cada transformada de Laplace inversa separadamente. Para calcular  $C_1(x, t)$  introduzimos a série de MacLaurin associada à função exponencial, escolhendo  $f^{(k)}(0) = 1$  na série, aplicando a transformada de Laplace inversa e usando o resultado

$$\mathcal{L}^{-1} \{s^{-q}\} = \frac{t^{q-1}}{\Gamma(q)},$$

com  $\text{Re}(q) > 0$ ,  $q = 1 - \mu k/2$ , temos:

$$C_1(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha x/t^{\mu/2})^k}{k! \Gamma(1 - \mu k/2)}. \quad (7)$$

Além disso, considerando  $\beta = 1$ ,  $\alpha = -\mu/2$  e  $z = -\frac{\alpha x}{t^{\mu/2}}$  na definição de função de Wright (MAI-NARDI, F. and PAGNINI, G.), podemos escrever

$$\mathbb{W}(-\mu/2, 1; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(-\mu k/2 + 1)}. \quad (8)$$

Então, a partir das Eq.(7) e Eq.(8), obtemos

$$C_1(x, t) = \mathbb{W}\left(-\mu/2, 1; -\frac{\alpha x}{t^{\mu/2}}\right). \quad (9)$$

Agora, avaliamos a segunda transformada de Laplace inversa  $C_2(x, t)$ . Em analogia a  $C_1(x, t)$ , também escrevemos a função exponencial em termos da série de MacLaurin. Então, temos

$$\frac{1}{(s+a)(s^\mu - \beta^2)} \exp(-\alpha x s^{\mu/2}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\alpha x)^m}{m!} \frac{s^{\mu m/2}}{(s+a)(s^\mu - \beta^2)}. \quad (10)$$

Mais uma vez, aplicando a transformada de Laplace inversa na Eq.(10), podemos escrever

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+a)(s^\mu - \beta^2)} \exp(-\alpha x s^{\mu/2}) \right\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\alpha x)^m}{m!} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\mu m/2}}{(s+a)(s^\mu - \beta^2)} \right\}. \quad (11)$$

Para avaliar esta Eq.(11), consideramos a seguinte expressão (CAMARGO, R. F. et al.):

$$\Omega = \frac{s^\sigma}{s^\alpha + \tilde{a}s^\delta + bs^\gamma + cs^\mu + d},$$

com  $\tilde{a}, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $\alpha, \delta, \gamma, \mu \in \mathbb{R}$  de modo que  $\tilde{a} \neq 0$  e  $\alpha > \delta > \gamma > \mu$ .

Admitimos a condição  $\left| \frac{bs^\gamma + cs^\mu + d}{s^\alpha + \tilde{a}s^\delta} \right| < 1$ , usando a série geométrica, o teorema binomial, a definição de coeficientes binomiais e tomando a transformada de Laplace inversa nesse sentido, obtemos

$$\mathcal{L}^{-1} \{ \Omega \} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b^k k! \sum_{l=0}^k \frac{(d/b)^l}{l!} \sum_{j=0}^{k-l} \frac{(c/b)^j}{j! (k-l-j)!} t^{\xi-1} \mathbb{E}_{\alpha-\delta, \xi}^{k+1}(-\tilde{a}t^{\alpha-\delta}), \quad (12)$$

com  $\xi = -\sigma + \alpha + (\alpha - \gamma)k + \gamma l - (\mu - \gamma)j$  e onde  $\mathbb{E}_{\alpha-\delta, \xi}^{k+1}(\cdot)$  é a função de Mittag-Leffler de três parâmetros (CAMARGO, R. F. et al. GORENFLO, R. et al.). Em particular, considerando  $c = 0$  na Eq.(12), temos que  $j = 0$  é o único termo que contribui para a soma e concluímos que

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^\sigma}{s^\alpha + \tilde{a}s^\delta + bs^\gamma + d} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b^k k! \sum_{l=0}^k \frac{(d/b)^l}{l! (k-l)!} \mathbb{E}_{\alpha-\delta, \xi}^{k+1}(-\tilde{a}t^{\alpha-\delta}), \quad (13)$$

onde  $\xi = -\sigma + \alpha + (\alpha - \gamma)k + \gamma l$  e  $\alpha > \delta > \gamma$ .

Então, colocando  $\sigma = \mu m/2$ ,  $d = -a\beta^2$ ,  $\alpha = \mu + 1$ ,  $\gamma = \mu$ ,  $\delta = 1$ ,  $b = a$  e  $\tilde{a} = -\beta^2$  na Eq.(13) e voltando à Eq.(11), podemos escrever

$$C_2(x, t) = t^\mu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\alpha x t^{-\mu/2})^m}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} (-at)^k k! \sum_{l=0}^k \frac{(-\beta^2 t^\mu)^l}{l! (k-l)!} \mathbb{E}_{\mu, \theta}^{k+1}(\beta^2 t^\mu), \quad (14)$$

onde  $\theta = -\mu m/2 + \mu + 1 + k + \mu l$ .

Como o objetivo é obter a solução da EDP em termos da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, avaliamos a soma em  $l$  na última expressão, a fim de encontrar uma relação entre a função de Mittag-Leffler de dois e três parâmetros. Usando a identidade

$$\Lambda = \sum_{j=0}^k \frac{(z)^j}{j! (k-j)!} \mathbb{E}_{\lambda, \lambda j + \delta}^\rho(-z) = \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(z)^j}{j! (k-j)!} \frac{(\rho)_l (-z)^l}{l! \Gamma(\lambda l + \lambda j + \delta)}, \quad (15)$$



onde  $(\rho)_l = \rho(\rho + 1) \dots (\rho + l - 1)$ , junto com a definição e as propriedades do coeficiente binomial, escolhendo  $z = -\beta^2 t^\mu$ ,  $\rho = k + 1$ ,  $\lambda = \mu$ ,  $j = l$  e  $\delta = k + \mu + 1 - \mu m/2$  na Eq.(15) e substituindo o resultado na Eq.(14), concluímos que

$$C_2(x, t) = t^\mu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\alpha x t^{-\mu/2})^m}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} (-at)^k \mathbb{E}_{\mu, \mu+k+1-\mu m/2}(\beta^2 t^\mu), \quad (16)$$

onde  $\mathbb{E}_{\alpha, \beta}(\cdot)$  é a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros.

A última transformada de Laplace inversa,  $C_3(x, t)$ , é obtida por meio do limite conveniente, isto é, consideramos  $x \rightarrow 0$  na Eq.(16). O único termo que contribui nesse limite é  $m = 0$ , isto é, temos

$$C_3(x, t) = t^\mu \sum_{k=0}^{\infty} (-at)^k \mathbb{E}_{\mu, \mu+k+1}(\beta^2 t^\mu). \quad (17)$$

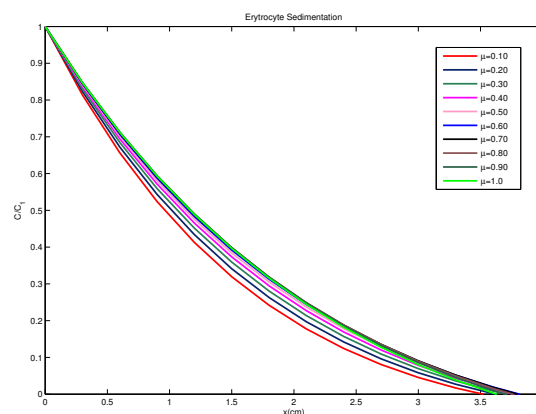
Assim, a partir dos resultados obtidos nas Eq.(9), Eq.(16) e Eq.(17), obtemos a solução associada ao nosso problema inicial, isto é, uma solução da Eq.(4) satisfazendo as condições dadas pela Eq.(3)

$$C(x, t) = t^\mu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\alpha x t^{-\mu/2})^m}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} (-at)^k \mathbb{E}_{\mu, \mu+k+1-\mu m/2}(\beta^2 t^\mu) + \mathbb{W}\left(-\mu/2, 1; -\frac{\alpha x}{t^{\mu/2}}\right) - \exp(-bx) t^\mu \sum_{k=0}^{\infty} (-at)^k \mathbb{E}_{\mu, \mu+k+1}(\beta^2 t^\mu), \quad (18)$$

onde os parâmetros são dados por  $\alpha^2 = 1/D_L$ ,  $\beta^2 = b^2 D_L$  e  $0 < \mu \leq 1$ .

Vamos agora realizar uma análise gráfica. Por esse motivo, temos que escolher os valores para alguns parâmetros que aparecem na solução dada pela Eq.(18). Foram utilizados os seguintes valores: coeficiente de dispersão axial  $D_L = 4.8 \times 10^{-4} \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ ; coeficiente de difusividade do oxigênio  $D = 9.8 \times 10^{-5} \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$  (GROTE et al); coeficiente de transferência de nutrientes  $k = 1.5 \times 10^{-4} \text{ms}^{-1}$ ;  $a = -0.005 \times 10^{-4} \text{ms}^{-1}$  (AKSNES et al.). Por fim fixamos um tempo  $t = 15 \text{s}$  e consideramos um determinado intervalo  $x = [0, 4]$ , no qual pode ser estendido.

Figura 1: Solução analítica da EDP de ordem fracionária, Eq.(18).



Observa-se que à medida que  $x$  (espaço) aumenta, o valor de  $C/C_1$  (concentração de nutrientes) diminui, isto é, quando nos movemos para a extremidade da artéria ( $x \neq 0$ ) a concentração de soluto no sangue diminui. Diminuindo a concentração de soluto significa que as células não são suficientemente eficientes para obter sua nutrição, portanto, concluímos que a eficiência do transporte de nutrientes perto da artéria é maior do que em sua extremidade venosa.

Com a liberdade dada ao parâmetro  $\mu$  ( $0 < \mu \leq 1$ ), é possível descrever com maior precisão as informações sobre a concentração de nutrientes próximo à extremidade arterial porque, como visto acima, a fracionalização da equação, permite isso.

### Caso Particular: $\mu \rightarrow 1$

Aqui, analisamos a solução da EDP fracionária no limite  $\mu \rightarrow 1$ , a fim de recuperar o resultado encontrado por Sharma et al.

Uma vez que a solução da EDP fracionária Eq.(4) é dada pela Eq.(18), tomando o limite  $\mu \rightarrow 1$ , segue que

$$C(x,t) = t \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\alpha x t^{-1/2})^m}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} (-at)^k \mathbb{E}_{1,k+2-m/2}(\beta^2 t) + \mathbb{W}\left(-1/2, 1; -\frac{\alpha x}{t^{1/2}}\right) - \exp(-bx) t \sum_{k=0}^{\infty} (-at)^k \mathbb{E}_{1,k+2}(\beta^2 t). \quad (19)$$

Nos últimos dois termos da soma na Eq.(19), podemos usar os seguintes resultados (MAINARDI et al.):

$$\mathbb{W}(-1/2, 1; -x) = \operatorname{erfc}(x/2)$$

e

$$t \sum_{k=0}^{\infty} (-at)^k \mathbb{E}_{1,2+k}(\beta^2 t) = \frac{\exp(\beta^2 t) - \exp(-at)}{a + \beta^2}.$$

Então, a Eq.(19) pode ser escrita como

$$C(x,t) = t \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\alpha x t^{-1/2})^m}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} (-at)^k \mathbb{E}_{1,k+2-m/2}(\beta^2 t) + 1 + \operatorname{erf}(-\alpha x/2\sqrt{t}) - \exp(-bx) \frac{\exp(\beta^2 t) - \exp(-at)}{a + \beta^2}. \quad (20)$$

Para recuperar o resultado apresentado por Sharma et al., precisamos expressar a Eq.(20) em termos das funções  $\operatorname{erfc}(\cdot)$  e  $\exp(\cdot)$ , já que a solução da equação de convecção-difusão é dada em termos do produto das funções  $\exp(\cdot)$  e  $\operatorname{erfc}(\cdot)$ . Com este objetivo, avaliamos a transformada de Laplace inversa na Eq.(6) usando frações parciais.

Tomando o limite  $\mu \rightarrow 1$  na Eq.(6), segue que

$$C_2(x,t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\exp(-\alpha x \sqrt{s})}{(s+a)(s-\beta^2)} \right\}. \quad (21)$$

Usando frações parciais e o seguinte resultado (COSTA et al.):

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\exp(-k\sqrt{s})}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+b)} \right\} = \exp(bk) \exp(b^2 t) \operatorname{erfc} \left( b\sqrt{t} + \frac{k}{2\sqrt{t}} \right), \quad (22)$$

com  $k \geq 0$ ,  $b \in \mathbb{C}$  e  $\operatorname{erfc}(x)$  a função erro complementar, então a Eq.(21) pode ser escrita como

$$2(\beta^2 + a) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\exp(-\alpha x \sqrt{s})}{(s+a)(s-\beta^2)} \right\} = \exp(\beta \alpha x) \exp(\beta^2 t) \operatorname{erfc} \left( \beta \sqrt{t} + \frac{\alpha x}{2\sqrt{t}} \right) + \exp(-\beta \alpha x) \exp(\beta^2 t) \operatorname{erfc} \left( -\beta \sqrt{t} + \frac{\alpha x}{2\sqrt{t}} \right) - \exp(i\alpha \sqrt{ax}) \exp(-at) \operatorname{erfc} \left( i\sqrt{at} + \frac{\alpha x}{2\sqrt{t}} \right) - \exp(-i\alpha \sqrt{ax}) \exp(-at) \operatorname{erfc} \left( -i\sqrt{at} + \frac{\alpha x}{2\sqrt{t}} \right). \quad (23)$$

Finalmente, como calculamos a transformada de Laplace inversa no caso  $\mu = 1$  por dois caminhos diferentes, Eq.(19) e Eq.(23), podemos escrever a relação principal que precisamos para recuperar a solução proposta por Sharma et al., e retornando aos parâmetros originais  $\beta = \sqrt{\frac{k-a}{D}}D_L$ ,  $b = \sqrt{\frac{k-a}{D}}$ , concluímos que pela Eq.(20):

$$\begin{aligned}
 C(x,t) = & \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{D_L t}}\right) - \frac{\exp\left(-\sqrt{\frac{k-a}{D}}x\right)}{k\left(\frac{D_L}{D}\right) + a\left(1 - \frac{D_L}{D}\right)} \left( \exp\left(\left(\frac{k-a}{D}\right)D_L t\right) - \exp(-at) \right) + \\
 & + \frac{\exp\left(\left(\frac{k-a}{D}\right)D_L t\right)}{2\left[k\left(\frac{D_L}{D}\right) + a\left(1 - \frac{D_L}{D}\right)\right]} \left[ \begin{aligned} & \exp\left(\sqrt{\frac{k-a}{D}}x\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x+2D_L t\sqrt{\frac{k-a}{D}}}{2\sqrt{D_L t}}\right) \\ & + \exp\left(-\sqrt{\frac{k-a}{D}}x\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x-2D_L t\sqrt{\frac{k-a}{D}}}{2\sqrt{D_L t}}\right) \end{aligned} \right] - \\
 & - \frac{\exp(-at)}{2\left[k\left(\frac{D_L}{D}\right) + a\left(1 - \frac{D_L}{D}\right)\right]} \left[ \begin{aligned} & \exp\left(\frac{i\sqrt{ax}}{\sqrt{D_L}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x+2it\sqrt{D_L a}}{2\sqrt{D_L t}}\right) \\ & + \exp\left(-\frac{i\sqrt{ax}}{\sqrt{D_L}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x-2it\sqrt{D_L a}}{2\sqrt{D_L t}}\right) \end{aligned} \right], \quad (24)
 \end{aligned}$$

que é exatamente o resultado obtido em (SHARMA et al.).

## Conclusão

Após uma breve introdução ao estudo da concentração de nutrientes no sangue, fator que interfere na ESR, por meio de um modelo matemático fracionário, aqui proposto, utilizando a derivada fracionária no sentido de Caputo, obtivemos sua solução analítica em termos da função de Mittag-Leffler e da função de Wright, a partir da metodologia da transformada de Laplace na variável temporal  $t$ . Aqui, foi possível recuperar a solução do caso inteiro, aplicando o limite  $\mu \rightarrow 1$  à solução analítica, Eq.(18), da EDP fracionária, Eq.(4). Quanto ao que se esperava sobre a relação entre o modelo matemático fracionário em relação ao modelo de ordem inteira de, é que o nosso modelo fracionário fornece informações mais precisas sobre a concentração de nutrientes no sangue, devido a liberdade do parâmetro  $\mu$  (SOUSA, J. et al.)

AKNES, D. and EGGE, J., Oldendorf. **A theoretical model for nutrient uptake in phytoplankton.** *Marine Ecology Progress Series*, **70**, n. 1, 65-72, (1991).

BIERNACKI, E., DMW-Deutsche Medizinische Wochenschrift, Georg Thieme Verlag, Stuttgart. **Die spontane blutsedimentirung als eine wissenschaftliche und praktisch-klinische untersuchungsmethode**, **23**, n. 48, 769-772, (1897). *Gazeta Lekarska.* **Samoistna sedymentacja krwi, jako naukowa i praktyczno-kliniczna metoda badania**, **36**, 962-968, (1897).

BROEK, N. Van den. and LETSKY, E., British J. of Obstetrics and Gynaecology, Elsevier. **Pregnancy and the erythrocyte sedimentation rate**, **108**, n. 11, 1164-1167, (2001).

CARMARGO, R. Figueiredo, OLIVEIRA, E. Capelas and VAZ Jr, J., J. Math. Phys. **On anomalous diffusion and the fractional generalized Langevin equation for a harmonic oscillator**, **50**, 123518, (2009).



COSTA, F. Silva, OLIVEIRA, E. Capelas de and VAZ Jr, J., **On a class of inverse Laplace transform**; não publicado, (2010).

DEBNATH, L. and BATTI, D., *Integral Transforms and Their Applications*. Second Edition, Chapman & Hall/CRC, Taylor and Francis Group, Boca Raton, (2007).

FAHRAEUS, R., *Am. Physiological Soc.* **The suspension stability of the blood**. *Physiological Reviews*, **9**, n. 2, 241-274, (1929).

GORENFLO, R., KILBAS, A. A., MAINARDI, F. and ROGOSIN, S.V., **Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications**; Springer, Berlin, (2014).

GROTE, J., SUSSKIND, R. and VAUPEL, P., *Pflügers Archiv*, Springer. **Oxygen diffusivity in tumor tissue ds-carcinoma under temperature conditions within the range of 20-40 c**, **372**, n. 1, 37-42, (1977).

HUANG, C. R., WHELAN, J., WANG, H. H. and COPLEY, A., *J. Biorheology*. **A mathematical model of sedimentation analysis applied to human whole blood**, **8**, n. 3, 157-163, (1971).

KUCHARZ, E., *The J. of laboratory and clinical medicine*. **The forgotten contribution of dr. Edmund Faustyn Biernacki (1866-1911) to the discovery of the erythrocyte sedimentation rate**, **112**, n. 2, 279-280, (1988).

MAINARDI, F. and PAGNINI, G., *Appl. Math. Comput.* **The Wright functions as solution of the time-fractional diffusion equation**, **141**, 51-62, (2003).

PODLUBNY, I., *Fractional Differential Equation, Mathematics in Science and Engineering*, **198**, Academic Press, San Diego, (1999).

REUBEN, A. and SHANNON, A., *Math. Med. and Bio., IMA*. **Some problems in the mathematical modelling of erythrocyte sedimentation**, **7**, n. 3, 145-156, (1990).

SHARMA, G. C., JAIN, M. and SARAL, R. N., *Comput. Biol. Med.* **A mathematical model for concentration of blood affecting erythrocyte sedimentation**, **26**, 1-7, (1996).

SOUSA, J. Vanterler da C., OLIVEIRA, E. Capelas and MAGNA, L. A., **Fractional Calculus and the ESR test**, submetido à publicação, (2016). WESTERGREN, A., *Am. Rev. Tuberc.* **The technique of the red cell sedimentation reaction**, **14**, 94-101, (1926).

WHELAN, J. HUANG, C. R. and COPLEY, A. L., *J. Biorheology*. **Concentration profiles in erythrocyte sedimentation in human whole blood**, **7**, n.4, 205-212, (1971).



## Uma nova heurística para a abordagem híbrida de condicionamento em sistemas lineares oriundos do método de pontos interiores

*Carla Taviiane Lucke da Silva Ghidini*  
UNICAMP; FCA  
[carla.ghidini@fca.unicamp.br](mailto:carla.ghidini@fca.unicamp.br)

*Kelly Cadena Madrid*  
UNICAMP; IMECC  
[ra098170@ime.unicamp.br](mailto:ra098170@ime.unicamp.br)

*Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira*  
UNICAMP; IMECC  
[aurelio@ime.unicamp.br](mailto:aurelio@ime.unicamp.br)

**Resumo:** A etapa mais importante do método de pontos interiores preditor-corretor consiste em resolver sistemas de equações lineares para determinar as direções de busca. Porém, esse é o passo mais caro computacionalmente do método e, assim, deve ser realizado da maneira eficiente. Para isso, o sistema linear pode ser reduzido em um sistema de equações normais equivalente, cuja matriz é simétrica e definida positiva e o método iterativo dos gradientes conjugados condicionado é usado para resolvê-lo. Encontrar um condicionador que funcione bem em todas as iterações do método preditor-corretor não é fácil, pois os sistemas vão se tornando cada vez mais mal condicionados. Uma abordagem híbrida de condicionamento proposta na literatura, combina dois condicionadores especialmente adaptados para esses sistemas, a Fatoração Controlada de Cholesky e o Separador. Neste trabalho, propomos uma heurística nova para determinar o melhor momento para fazer a troca dos condicionadores, a qual utiliza como parâmetro uma estimativa do número de condição da matriz do sistema, com o objetivo de melhorar a eficiência e robustez do método preditor-corretor. Apresentamos os resultados obtidos nos experimentos computacionais realizados com diversos problemas de programação linear pertencentes a coleções com acesso livre e comparamos com uma heurística da literatura.

**Palavras-chave:** Otimização. Método de pontos interiores. Sistemas lineares. Condicionamento.

## Introdução

Os métodos de pontos interiores buscam a solução ótima de um problema de programação linear percorrendo o interior de sua região de factibilidade. Uma característica importante desses métodos é o fato de encontrar uma solução ótima para os problemas em poucas iterações.

Os métodos de pontos interiores do tipo primal-dual são considerados os mais eficientes dentre as diversas variações e apresentam melhores propriedades teóricas para a análise de complexidade e convergência (TAPIA; ZHANG, 1992). Eles podem ser vistos como a aplicação do método de Newton para calcular aproximações da solução de uma sequência de sistemas não lineares perturbados por um parâmetro originado do uso da função barreira para relaxar as restrições de não negatividade. Os sistemas lineares envolvidos nos métodos de pontos interiores podem ser resolvidos por métodos diretos, que fornecem a solução exata ou por métodos iterativos, que dependem das condições de convergência para obter a solução, mas requer um esforço computacional menor que os diretos. Neste trabalho, utilizamos o método iterativo dos gradientes conjugados condicionado, por preservar a esparsidade da matriz e ter menor custo computacional.

O condicionamento de uma matriz melhora o seu condicionamento e, conseqüentemente, pode melhorar e acelerar a convergência do método iterativo, no caso, gradientes conjugados. Campos (1995) propôs o preconditionador Fatoração Controlada de Cholesky (FCC), o qual tem melhor desempenho nas primeiras iterações do método de pontos interiores. Já Oliveira (1997) propôs o preconditionador Separador, que apresenta melhores resultados nas iterações finais dos métodos de pontos interiores, quando o sistema já está bastante mal condicionado. Bocanegra (2005) propôs uma abordagem híbrida de preconditionamento para os sistemas lineares oriundos do método de pontos interiores, a qual combina os preconditionadores FCC e Separador aproveitando suas características, ou seja, nas primeiras iterações utiliza o FCC e depois de algumas iterações, quando o FCC perde eficiência, o preconditionador Separador passa a ser utilizado. Velazco, Oliveira e Campos (2011) apresentaram uma melhoria nessa heurística utilizada para fazer a troca de preconditionadores conforme os resultados obtidos nos experimentos computacionais. Neste trabalho, desenvolvemos uma nova heurística para a troca de preconditionadores, a qual utiliza uma estimativa do número de condição da matriz do sistema, que não é calculado de forma exata, pois o número de operações necessárias para determiná-lo é muito grande, principalmente, para matrizes de grande porte, o que inviabilizaria o uso na heurística. Para calcular o valor aproximado do número de condição utilizamos a heurística proposta por Kenney, Laub e Reese (1998), a qual determina uma estimativa da norma de Frobenius da inversa da matriz do sistema. Com esta nova heurística pretendemos resolver os sistemas lineares para o cálculo das direções preditora e corretora de maneira mais eficiente de modo que o método preditor-corretor tenha um melhor desempenho e se torne mais robusto ao solucionar problemas de programação linear, principalmente, os de grande porte.

## Método Preditor-Corretor

Considere o problema de programação linear primal escrito na forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \quad (1)$$

sendo  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a matriz de restrições do problema com posto completo  $m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  o vetor dos coeficientes da função objetivo,  $b \in \mathbb{R}^m$  o vetor de termos independentes e  $x \in \mathbb{R}^n$  o vetor das variáveis de decisão, em que cada componente  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  é não negativa.

Todo problema primal (1) tem associado um problema dual, o qual possui a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & b^T y \\ \text{s.a} \quad & A^T y + z = c \\ & z \geq 0, \end{aligned} \quad (2)$$

em que  $y \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de variáveis livres e  $z \in \mathbb{R}^n$  representa o vetor das variáveis de folga.

As condições de otimalidade de primeira ordem (KKT) dos Problemas (1) e (2) são dadas por:

$$\begin{aligned} A^T x - b &= 0 \\ A^T y + z - c &= 0 \\ XZe &= 0 \\ (x, z) &\geq 0, \end{aligned} \quad (3)$$

sendo  $X = \text{diag}(x)$ ,  $Z = \text{diag}(z)$ ,  $e \in \mathbb{R}^m$ , tal que  $e^T = (1, \dots, 1)$ .

Um dos mais bem sucedidos métodos de pontos interiores do tipo primal-dual para a resolução de PPL é o método preditor-corretor, desenvolvido por Mehrotra (1992). Nesse método, uma solução ótima  $(x^*, y^*, z^*)$  para os Problemas (1) e (2) é encontrada aplicando variações do método de Newton às



condições de otimalidade (3). A direção de busca,  $\Delta = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ , é composta pela soma de duas direções:  $\Delta = \Delta_a + \Delta_c$ .

A direção afim escala  $\Delta_a$ , também chamada de preditora, é obtida resolvendo o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ Z & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_a x \\ \Delta_a y \\ \Delta_a z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_p \\ r_d \\ r_a \end{bmatrix}, \quad (4)$$

em que os resíduos são dados por:  $r_p = b - Ax$ ,  $r_d = c - A^t y - z$  e  $r_a = -XZe$ .

Eliminando as variáveis  $\Delta_a z$  de (4) e depois  $\Delta_a x$ , reduzimos o sistema original a um sistema de equações normais:  $ADA^T \Delta_a y = r_p + ADr$ , em que  $D = Z^{-1}X$ ,  $r = r_d - X^{-1}r_a - X^{-1}r_p$ .

A direção  $\Delta_c$ , chamada de corretora, é obtida resolvendo um sistema linear como em (4) alterando o lado direito para  $[0 \ 0 \ r_c]^T$ , em que  $r_c = \mu^k e - \Delta_a X^k \Delta_a Z^k e$ . O termo  $\Delta_c$  tem por objetivo fazer com que a nova iterada seja a mais centrada possível.

Observe que o vetor de termos independentes para determinar  $\Delta_c$  depende da solução do Sistema (4). Assim, a direção de busca  $\Delta$  pode ser obtida diretamente, resolvendo o Sistema (4) com o vetor de termos independentes substituído por:  $[r_p \ r_d \ r_a + r_c]^T$ .

## Sistemas de Equações Lineares

Resolver os sistemas lineares a cada iteração do método preditor-corretor para determinar as direções de busca é o passo que requer maior esforço computacional. Assim, a escolha adequada de qual método utilizar na resolução de tais sistemas é fundamental para se obter eficiência e bom desempenho.

Conforme dito anteriormente, estamos utilizando o método dos gradientes conjugados preconditionado, o qual é considerado o método mais eficiente para resolver sistemas lineares de grande porte.

### Abordagem Híbrida de Precondicionamento

A abordagem híbrida de preconditionamento consiste em combinar dois ou mais preconditionadores distintos com intuito de melhorar a eficiência de um método iterativo para a resolução de sistemas lineares. A seguir, apresentamos os preconditionadores Fatoração Controlada de Cholesky e Separador considerados nesse trabalho.

### Fatoração Controlada de Cholesky

A Fatoração Controlada de Cholesky, proposta por Campos (1995), é uma variação da Fatoração Incompleta de Cholesky. O objetivo principal é construir uma matriz preconditionadora que possua os autovalores agrupados e próximos a unidade, de forma a acelerar a convergência do método dos gradientes conjugados. Este tipo de fatoração tem algumas vantagens, tais como, o armazenamento previsível e o controle do preenchimento de acordo com a memória disponível. Considere a matriz  $ADA^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  fatorada da seguinte forma:

$$ADA^T = LL^T = \tilde{L}\tilde{L}^T + R, \quad (5)$$

sendo  $L$  o fator obtido pela fatoração completa de Cholesky,  $\tilde{L}$  o fator obtido pela fatoração incompleta de Cholesky e  $R$  a matriz resto.

Usando  $\tilde{L}$  como uma matriz preconditionadora para  $ADA^T$ , temos:

$$\tilde{L}^{-1}(ADA^T)\tilde{L}^{-T} = (\tilde{L}^{-1}L)(L^T\tilde{L}^{-T}) = (\tilde{L}^{-1}L)(\tilde{L}^{-1}L)^T. \quad (6)$$

Definindo  $E = L - \tilde{L}$  e substituindo  $L = \tilde{L} + E$  na última igualdade obtemos:

$$\tilde{L}^{-1}(ADA^T)\tilde{L}^{-T} = (I + \tilde{L}^{-1}E)(I + \tilde{L}^{-1}E)^T.$$

Observe que, quando  $\tilde{L} \rightarrow L$  então  $E \rightarrow 0$  e  $\tilde{L}^{-1}(ADA^T)\tilde{L}^{-T} \rightarrow I$ .  
Por outro lado, da equação (5), temos:

$$R = LL^T - \tilde{L}\tilde{L}^T = L(E + \tilde{L})^T - (L - E)\tilde{L}^T = LE^T + L\tilde{L}^T - \tilde{L}\tilde{L}^T + E\tilde{L} = LE^T + E\tilde{L}. \quad (7)$$

A Fatoração Controlada de Cholesky é construída com base na minimização da norma de Frobenius de  $E$ , visto que, quando  $\|E\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|R\| \rightarrow 0$ . Dessa forma, considere o seguinte problema:

$$\min \|E\|_F^2 = \sum_{j=1}^n c_j, \text{ sendo } c_j = \sum_{i=1}^n |l_{ij} - \tilde{l}_{ij}|^2.$$

Dividindo  $c_j$  em dois somatórios temos:

$$c_j = \sum_{k=1}^{m_j+\eta} |l_{ikj} - \tilde{l}_{ikj}|^2 + \sum_{k=m_j+\eta+1}^n |l_{ikj}|^2,$$

sendo  $m_j$  o número de elementos não nulos abaixo da diagonal principal na  $j$ -ésima coluna da matriz  $ADA^T$ ,  $\eta$  o número de elementos não nulos extras permitidos por coluna e  $n$  a ordem da matriz.

### Precondicionador Separador

O precondicionador Separador proposto por Oliveira (1997) foi desenvolvido especialmente para os sistemas lineares oriundos do método de pontos interiores e apresenta bons resultados nas proximidades de uma solução do problema, quando os sistemas lineares já estão muito mal condicionados, porém ele não é eficiente nas primeiras iterações. Considere a matriz  $ADA^T$  e escreva  $A = [B \ N]P$ , em que  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz de permutação tal que  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$  é não singular. Assim,

$$ADA^T = [B \ N]PDP^T \begin{bmatrix} B^T \\ N^T \end{bmatrix} = [B \ N] \begin{bmatrix} D_B & 0 \\ 0 & D_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^T \\ N^T \end{bmatrix} = BD_B B^T + ND_N N^T.$$

O precondicionador é dado por:  $D_B^{-\frac{1}{2}} B^{-1}$  e a matriz pré-condicionada  $M$  é como segue:  $M = D_B^{-\frac{1}{2}} B^{-1} (ADA^T) B^{-t} D_B^{-\frac{1}{2}} = I_m + WW^T$ , em que  $W = D_B^{-\frac{1}{2}} B^{-1} ND_N^{\frac{1}{2}}$ .

Note que próximo a uma solução pelo menos  $n - m$  elementos em  $D^{-1}$  são grandes. Dessa forma, uma escolha adequada das colunas de  $B$  faz com que os elementos em  $D_B^{-1/2}$  e  $D_N$  sejam muito pequenos nesta situação. Neste caso,  $G$  aproxima-se da matriz nula,  $M$  se aproxima da matriz identidade e ambos, o menor e o maior autovalor de  $M$ , se aproximam do valor 1, assim como o número de condição  $\kappa_2(M)$ .

### Nova heurística para abordagem híbrida

Motivados pela importância da troca de fase na abordagem híbrida de condicionamento utilizada para resolver os sistemas lineares oriundos dos métodos de pontos interiores, propomos uma nova heurística que permita aperfeiçoar as existentes na literatura.

Sabemos que o número de condição da matriz de um sistema linear está diretamente relacionado com a eficiência e convergência do método de gradientes conjugados e por isso, desenvolvemos uma nova heurística para a troca de fase que o utiliza.

O número de condição de uma matriz  $A$  não singular qualquer pode ser determinado por:

$$\kappa_F(A) = \|A\|_F \|A^{-1}\|_F, \quad (8)$$

em que  $\|\cdot\|_F$  significa que a norma de Frobenius está sendo considerada.

Porém, o cálculo em particular de  $A^{-1}$  muitas vezes é caro computacionalmente ou mesmo impossível de realizar e, conseqüentemente, o valor de  $\|A^{-1}\|_F$  também. Assim, determinamos uma estimativa do valor de  $\|A^{-1}\|_F$  utilizando a heurística proposta por Kenney, Laub e Reese (1998) para então calcular o valor de  $\kappa_F(A)$ .

#### Algoritmo da estimativa $\|A^{-1}\|_F$

Dados:  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $m$  (dimensão de  $A$ ) faça:

**Passo 1:** Gere um vetor  $\tilde{b} \in N(0, 1)$  com  $\dim(\tilde{b}) = m$ .

**Passo 2:** Faça  $b = \frac{\tilde{b}}{\|\tilde{b}\|}$ .

**Passo 3:** Resolva o sistema  $Az = b$ .

**Passo 4:** Calcule  $\|z\|_F$ .

**Passo 5:** Calcule  $W_m = \sqrt{\frac{2}{\pi(m-\frac{1}{2})}}$ .

**Passo 6:**  $\|A^{-1}\|_F \approx \frac{\|z\|_F}{W_m}$ .

Uma vez determinado um valor aproximado para o número de condição  $\kappa_F(A)$ , o utilizaremos na heurística proposta para troca de preconditionadores, cujo algoritmo é apresentado a seguir.

#### Algoritmo da Nova Heurística para Mudança de Fase

Dados:  $iterGC$  (iterações do gradiente conjugado),  $\eta$  (número de não nulos na FCC),  $iter$  (iteração do método de preditor-corretor) e  $m$  (dimensão da matriz), faça:

**Passo 1:** Se ( $iter \geq 3$ )

**Passo 2:** Se ( $3 * iterGC > m$ )

Calcular o valor estimado para  $\kappa$ ;

**Passo 3:** Se ( $\kappa \leq 5 * 10^5$ )

$\eta = \eta + 10$ ;

**Passo 4:** Senão  $troca = 1$ ; (Troca de fase)

**Passo 5:**  $iter = iter + 1$ ;

**Passo 6:**  $iter = iter + 1$ ;

Esta heurística, primeiramente avalia se o número de iterações do método preditor-corretor é maior ou igual a 3. Em caso afirmativo, o próximo passo é verificar se o número de iterações do método dos gradientes conjugados preconditionado é maior que  $m/3$ . Se for, então é calculada uma estimativa para o valor do número de condição ( $\kappa$ ) da matriz preconditionada  $D_2^{-1/2}L^{-T}D_1ADA^TD_1L^{-T}D_2^{-1/2}$ , em que  $D_2 = (diag(ADA^T))^{1/2}$ ,  $D_1 = D^{1/2}$  e  $D$  é a matriz diagonal resultante da fatoração controlada de Cholesky  $ADA^T = LDL^T$ . Obtido o valor estimado, se ele for menor que  $5 * 10^5$ , é feita a atualização do  $\eta$  acrescentando 10 unidades ao seu valor. Caso contrário, é feita a troca de preconditionadores.

## Experimentos Computacionais

Os experimentos computacionais foram realizados em um processador Intel Core i7-6700 CPU @ 3.40 GHz x 8, 32 GB RAM, 2 TB HD e Sistema Operacional Linux.

Os 32 problemas de programação linear usados nos testes pertencem as coleções de livre acesso NETLIB, QAPLIB e KENNINGTON. Estes problemas foram escolhidos por satisfazerem os critérios: o número de linhas maior que 400, o problema convergiu com alguma das heurísticas consideradas, o problema trocou de fase com pelo menos uma das heurísticas.

Tabela 1: Comparação entre as heurísticas HV e HN.

Problema	Linhas	PCx_HV			PCx_HN				
		It	It-Tr	T.Tot	It	It-Tr	T.Tot	T-Est	HN-HV
cre-a	2989	27	13	5,10	27	15	7,96	1,34	2,86
cre-b	5328	43	25	34,16	43	16	31,20	2,76	-2,95
cre-d	4094	42	25	21,08	42	15	19,45	1,67	-1,63
ken11	9964	22	19	5,51	22	20	22,72	13,82	17,21
ken13	22365	28	23	41,26	28	24	124,22	63,68	82,96
ken18	785382	34	30	686,77	34	32	2091,49	907,17	1404,72
ex05	832	36	13	5,62	36	4	7,16	0,15	1,54
ex09	1821	43	17	45,48	45	12	52,94	0,69	7,46
qap12	2794	20	6	79,98	20	4	99,88	0,83	19,9
qap15	5698			*	24	4	1355,83		
els19	4350	31	12	39,74	31	8	38,59	1,06	-1,18
chr22b	5587	29	12	13,68	29	9	7,83	1,38	-5,85
chr25a	8149	28	12	30,24	28	9	16,84	2,94	-13,4
scr15	2234	24	10	7,51	24	6	5,78	0,28	-1,73
scr20	5079	21	13	58,94	21	8	62,79	1,40	3,85
rou20	7359	24	11	701,33	24	6	1743	5,18	1041,67
nug12	2794	20	5	95,62	20	4	104,81*	0,85	
nug15	5698			*	24	4	1828,69		
agg2	514	23	-	0,29	24	15	0,25	0,01	-0,04
agg3	514	27	-	0,43	22	13	0,20	0,01	-0,23
bn11	610	40	17	0,9	40	32	0,64	0,05	-0,26
degen2	442	18	5	0,19	12	5	0,17	0,02	-0,02
degen3	1501	16	7	5,01	16	4	3,08	0,27	-1,93
ganges	1113	17	12	0,38	17	12	0,54	0,16	0,16
nesm	654	31	5	1,5	31	8	1,73	0,08	0,23
scfxm3	915	20	8	0,85	20	10	0,94	0,13	0,09
fit2p	3000	43	-	56,09 *	21	11	4,88	0,79	
seba	448	15	-	0,90	14	12	0,11	0,01	-0,79
pilotwe	701	61	31	3,49 *	60	45	1,40	0,08	
25fv47	788	40	15	3,06	40	15	4,85*	0,04	
fort48	1156	37	8	8,85 *	15	-	0,91	-	
fort49	1156	36	6	8,47 *	15	13	1,06	0,19	

\* representa os problemas que não atingiram o ótimo

- representa os problemas em que não trocaram de fase

A heurística para determinar uma estimativa para o número de condição e a heurística nova para a troca de condicionadores foram incorporadas ao código do PCx Modificado, que é uma versão do PCx (CZYZYK et al., 1999) que utiliza métodos iterativos para resolução dos sistemas lineares ao invés de métodos diretos. Na Tabela 1, os resultados obtidos ao usar a heurística nova (HN) na abordagem híbrida de condicionamento foram comparados com os resultados obtidos quando a heurística (HV) proposta por Velazco, Oliveira e Campos (2011) foi usada na fase de troca de condicionadores. Nesta tabela, utilizamos a seguinte notação:

**Linhas:** número de linhas da matriz do problema de programação linear.

**HV:** heurística proposta por Velazco, Oliveira e Campos (2011).

**HN:** heurística nova.

**It:** número total de iterações do método preditor-corretor.

**It-Tr:** iteração do método preditor-corretor em que ocorreu a troca de preconditionador.

**T\_Tot:** tempo total de resolução do problema de programação linear.

**T-Est:** tempo gasto para calcular a estimativa do número de condição.

**HN-HV:** diferença entre os tempos de resolução para as heurísticas HN e HV.

De acordo com os dados da Tabela 1, vemos que a HN conseguiu resolver 6 problemas a mais que a HV. Porém, a HV resolveu 2 problemas que não foram resolvidos pela HN, ou seja, a HN obteve a solução de 94% dos problemas, enquanto que a HV resolveu 81% dos problemas. Isto mostra que o método de pontos interiores preditor-corretor é mais robusto quando utiliza a HN.

Além disso, observamos que em 22% dos problemas o número total de iterações do método de preditor-corretor usando a HN foi menor, enquanto que em 6% dos problemas esse número aumentou. Com relação ao tempo total de resolução, o desempenho foi melhor para a heurística HN em 56% dos problemas e em 44% dos problemas para a HV.

Vale ressaltar que nos problemas *ganges* e *scfxm3* o tempo gasto pela HN para resolvê-los foi maior que pela HV devido ao tempo relativamente grande usado para calcular a estimativa do número de condição. Por outro lado, nos problemas *ex05* e *rou20* o tempo total de resolução foi maior para a HN pelo fato da troca de preconditionadores ter sido feita muito cedo. Nesse caso, a matriz do sistema não estava mal condicionada o suficiente para que o preconditionador separador tivesse melhor desempenho.

## Conclusões

Neste trabalho, propomos uma nova heurística (HN) para a troca de preconditionadores na abordagem híbrida de preconditionamento das matrizes dos sistemas lineares resolvidos a cada iteração do método preditor-corretor.

Esta heurística, que utiliza uma estimativa para calcular o número de condição da matriz preconditionada, foi implementada e incorporada ao software PCx Modificado. De acordo com os experimentos computacionais realizados em um conjunto diversificado de problemas de programação linear, houve uma redução no número de iterações do método de pontos interiores em 7 dos 32 problemas e um aumento em 2 problemas.

Além disso, observamos que utilizando o número de condição como parâmetro na nova heurística para a troca de preconditionadores, foi possível medir o mal condicionamento e adiantar ou adiar o momento da troca, conseguindo, desta forma, melhorar a qualidade da solução e reduzir o tempo computacional gasto pelo método dos gradientes conjugados preconditionado usado para resolver os sistemas lineares que determinam as direções de busca no método preditor-corretor. Consequentemente, o tempo total de resolução dos problemas de programação linear também foi menor em uma quantidade maior de problemas quando a HN foi usada.

Assim, concluímos que o método preditor-corretor tornou-se um pouco mais robusto e eficiente utilizando a heurística nova proposta.

Considerando esses bons resultados obtidos, daremos continuidade a esse trabalho, implementando outras formas de calcular o número de condição da matriz preconditionadora propostas na literatura e explorar outras características dos problemas, tais como, dimensão e densidade da matriz, de tal forma que o critério de avaliação do número de condição seja dinâmico e não estático em relação a cada problema.

## Agradecimentos

À FAPESP pelo apoio financeiro.



## Referências

- BOCANEGRA, S. **Algoritmos de Newton-Krylov condicionados para métodos de pontos interiores**. 2005. Tese (Doutorado) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, 2005.
- CAMPOS, F.F. **Analysis of Conjugate Gradients-type methods for solving linear equations**. Tese (Doutorado) – Oxford University Computing Laboratory, Oxford, 1995.
- CZYZYK, J. et al. Optimization Methods and Software. **PCx An Interior Point Code for Linear Programming**, v. 11-2, n. 1-4, p. 397-430, 1999.
- KENNEY, C. S.; LAUB, A. J.; REESE, M. S. SIAM J. Sci. Statist. Comput. **Statistical condition estimation for linear systems**, v. 19(2), p. 566-583, 1998.
- MEHROTRA, S. SIAM Journal on Optimization. **On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point Method**, v. 2, n. 4, p. 575-601, 1992.
- OLIVEIRA, A. R. L. **A New Class of Preconditioners for Large-Scale Linear Systems from Interior Point Methods for Linear Programming**. 1997. Tese (Doutorado), Houston TX, 1997.
- TAPIA, R. A.; ZHANG, Y. Journal of Optimization Theory and Applications. **Superlinear and Quadratic Convergence of Primal-Dual Interior Point Methods for Linear Programming Revised**, v. 73, p. 229-242, 1992.
- VELAZCO, M. I.; OLIVEIRA, A. R. L.; CAMPOS, F. F. Pesquisa Operacional. **Heuristics for Implementation of a Hybrid Preconditioner for Interior-Point Methods**, v. 34, n. 9, p. 2553-2561, 2011.



## Uso do método primal dual barreira logarítmica para o dimensionamento de biodigestores modelo indiano

*Márcia A. Zanoli Meira e Silva*

*UNESP; FC; Departamento de Computação; Bauru-SP*  
[marciazm@fc.unesp.br](mailto:marciazm@fc.unesp.br)

*Helenice de Oliveira Florentino Silva*

*UNESP; IB; Departamento de Bioestatística; Botucatu-SP*  
[helenice@ibb.unesp.br](mailto:helenice@ibb.unesp.br)

*Wellington Carlos Massola*

*UNESP; FC; Departamento de Computação; Bauru-SP*  
[wellingtonmassola@gmail.com](mailto:wellingtonmassola@gmail.com)

**Resumo:** A modernização do setor agropecuário, o alto custo de energia no Brasil e a preocupação com o meio ambiente despertam nos produtores rurais o interesse pela economia de energia e o tratamento de dejetos animais e resíduos de culturas. Uma solução econômica para estes problemas envolve o uso de biodigestores, que reaproveitando detritos e utilizando a fermentação anaeróbica geram biogás e biofertilizantes. O dimensionamento de biodigestores envolve uma grande quantidade de cálculos que, se não realizados com certa precisão, podem influenciar na eficiência desses equipamentos. Este trabalho apresenta um sistema computacional, desenvolvido nas plataformas *free Java* e *NetBeans*, utilizando o método primal dual barreira logarítmica para determinar os principais parâmetros necessários para o dimensionamento de biodigestores indiano. O software desenvolvido além de obter melhores valores para os parâmetros desejados, minimizando o volume desses biodigestores, ao fazer uso de ferramentas *open source* torna-o acessível a qualquer produtor rural.

**Palavras-chave:** Biodigestores. Método Primal Dual Barreira Logarítmica. Sistema Computacional. Otimização.

### Introdução

A modernização e o crescimento do setor agropecuário no Brasil têm aumentado a produção de dejetos animais e restos de cultura, que se não descartados corretamente podem causar danos ao meio ambiente. Uma alternativa econômica e eficiente para esse problema consiste no uso de biodigestores que, através da fermentação anaeróbica, produzem o biogás, rico em metano, e o biofertilizante, resíduo da matéria orgânica após a fermentação. Desta forma, o uso de biodigestores além de fornecer um destino adequado aos dejetos fornece também energia e fertilizantes para os produtores rurais.

Para o dimensionamento de um biodigestor considera-se o tipo e a quantidade de dejetos disponíveis (matéria prima), a necessidade diária (consumo de energia) e onde será utilizado (motores, iluminação, cozimento, entre outros). Cada matéria prima possui um fator de rendimento que é obtido em laboratório ou adquirido na literatura.

Conhecidos esses dados determina-se os principais parâmetros do biodigestor: a altura (H) e o diâmetro (D). Os demais parâmetros são dependentes da altura e do diâmetro e todos devem satisfazer algumas relações fundamentais para um funcionamento eficiente (ORTOLANI et al., 1991), porém tais cálculos são complexos.

A literatura apresenta várias técnicas para o dimensionamento de biodigestores (ABURAS et al., 1996; ADEOTI et al., 2000), inclusive alguns aplicativos computacionais com licença paga (Portes, 2005).

Uma abordagem para este problema de dimensionamento utilizando programação não linear é apresentada em Florentino (2003). O modelo proposto determina as variáveis básicas  $H$  e  $D$ , minimizando o volume do biodigestor, cujas restrições correspondem as relações fundamentais propostas em Ortolani et al. (1991).

Este trabalho utiliza o modelo não linear proposto por Florentino (2003) para desenvolver um software para dimensionar um biodigestor do modelo indiano. O modelo é abordado utilizando-se o método Primal Dual Barreira Logarítmica e ferramentas *free* para a implementação do novo modelo proposto.

## Biodigestores

Os biodigestores classificam-se principalmente de acordo com o seu abastecimento com biomassa podendo ser do tipo contínuo (modelos indiano e chinês) ou batelada. Nos biodigestores contínuos o fornecimento dos dejetos é realizado em intervalos de tempos curtos e regulares, isto é, periodicamente. Em contra partida, no modelo batelada a alimentação com os dejetos é realizada de uma só vez e mantidos fechados por um período conveniente, sendo a matéria orgânica fermentada e descarregada posteriormente (BENINCASA et al., 1991).

Um biodigestor do modelo indiano é constituído por um corpo cilíndrico com uma parede interna construída em alvenaria ou pedra, que separa o tanque de fermentação em duas câmaras, um gasômetro flutuante em aço e uma caixa de entrada e outra de saída.

A Figura 1 mostra a vista frontal, em corte, do biodigestor, com os principais parâmetros para a sua construção.

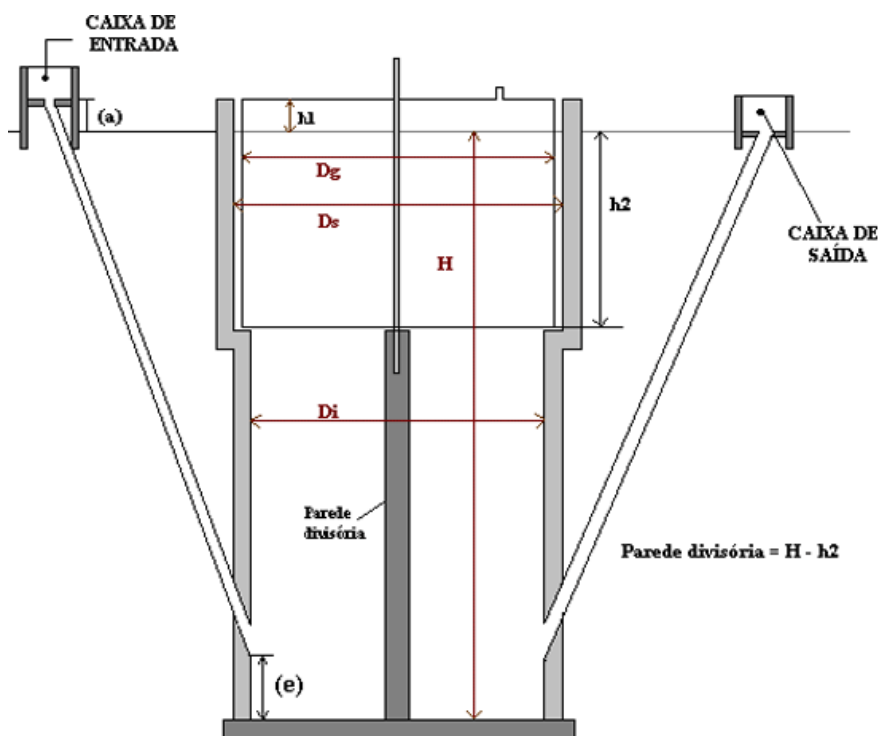


Figura 1: Vista frontal, em corte, do biodigestor modelo indiano.

Os parâmetros apresentados na Figura 1 são definidos como:

- H**: altura do nível do substrato;
- D<sub>i</sub>** ou **D**: diâmetro interno do biodigestor;
- D<sub>g</sub>**: diâmetro do gasômetro;
- D<sub>s</sub>**: diâmetro interno da parede superior;
- h<sub>1</sub>**: altura ociosa (reservatório do biogás);
- h<sub>2</sub>**: altura útil do gasômetro;
- a**: altura da caixa de entrada;
- e**: altura de entrada do cano com afluente.

Na Figura 2 tem-se a representação tridimensional, em corte, do biodigestor modelo indiano mostrando o seu interior.



Figura 2: Corte tridimensional do biodigestor modelo indiano.

O biodigestor indiano é do tipo contínuo e possui pressão de operação constante, pois o gasômetro desloca-se verticalmente à medida que o volume de gás produzido não é consumido, mantendo assim a pressão constante no interior do biodigestor.

Outro dado importante refere-se ao resíduo a ser utilizado. Este deve possuir uma concentração de sólidos totais (ST) não superior a 8% a fim de auxiliar a circulação do resíduo no interior da câmara de fermentação evitando o entupimento dos canos de entrada e saída de material (TORRES et al., 2012).

## Modelo Matemático

Ortolani et al. (1991) apresenta uma metodologia para o dimensionamento de biodigestores rurais, sem o uso de agitadores, aquecedores e controladores de temperatura, que atende uma demanda energética máxima de 25m<sup>3</sup> de biogás por dia. Nesta metodologia os autores calculam o diâmetro interno (D) e a altura (H) do biodigestor por “tentativa e erro” de modo a satisfazer algumas relações que garantem a eficiência do biodigestor. O procedimento consiste em atribuir um valor inicial para D e H e verificar se satisfazem as relações fundamentais. Caso tais relações não sejam satisfeitas é necessário realizar alguns ajustes nessas medidas repetindo-se o processo. Estes ajustes tornam essa metodologia lenta e complexa.

Com o objetivo de eliminar essa complexidade Florentino (2003) apresenta um modelo de programação não linear que além de determinar os valores do diâmetro D e altura H minimiza o volume do biodigestor cujas restrições consideram as relações de eficiência do biodigestor mencionadas em Ortolani et al.(1991).

O modelo proposto por Florentino (2003) para o biodigestor indiano é dado por:

$$\text{Minimizar } \frac{\pi}{4} D^2 H \quad (1)$$

sujeito a:

$$\frac{\pi}{4} D^2 H \geq x K B \quad (2)$$

$$D - H \leq 0 \quad (3)$$

$$D - 0.6H \geq 0 \quad (4)$$

$$3 \leq H \leq 6 \quad (5)$$

sendo:

D = diâmetro interno do biodigestor (m)

H = altura do biodigestor (m)

x = Porcentagem mínima a ser acrescentada no volume útil do biodigestor sendo seu valor 10%

K = fator de rendimento (adquirido em literatura específica para cada tipo de biomassa)

B = demanda energética diária (m<sup>3</sup>)

Na equação (2) a multiplicação de K por B corresponde ao volume útil do biodigestor e deve obedecer a relação  $2 \leq KB \leq 25$ . A expressão xKB corresponde ao volume bruto, pois x representa um acréscimo de 10% no volume útil do biodigestor.

A restrição (2) garante a demanda energética local e as restrições de (3) a (5) estão associadas ao dimensionamento de um sistema adequado para pequenas propriedades rurais, fatores de capacidade e funcionalidade, como discutido em Ortolani et al. (1991).

Florentino (2003) resolve esse modelo utilizando o PROC NLP do módulo OR do Sistema SAS, que é uma ferramenta paga, e os dados de entrada fornecidos por Ortolani et al. (1991).

O presente trabalho propõe uma nova abordagem para a resolução desse modelo não linear utilizando o algoritmo do método Primal Dual Barreira Logarítmica (PDBL) que transforma um problema não linear restrito em um problema não linear irrestrito introduzindo as restrições na função objetivo através de um parâmetro de barreira.

O método PDBL utiliza três blocos fundamentais: o método de Newton para resolver sistemas de equações não lineares e, conseqüentemente, para a otimização irrestrita; o método dos

multiplicadores de Lagrange para tratar as restrições de igualdade e o método de barreira de Fiacco e McCormick para tratar as restrições de desigualdade.

Aplicando-se o algoritmo PDBL de Baptista et al. (2006) no modelo de Florentino (2003), equações de (1) a (5), tem-se um novo modelo com doze variáveis, a saber  $D$ ,  $H$ ,  $s_i$ ,  $\pi_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ ,  $s$  e  $\pi > 0$ . Este novo modelo proposto é dado por:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } L = & \frac{\pi}{4} D^2 H - \mu (\ln(s_1) + \ln(s_2) + \ln(s_3) + \ln(s_4) + \ln(s_5)) + \\ & \pi_1 \left( xKB - \frac{\pi}{4} D^2 H + s_1 \right) + \pi_2 (D - H + s_2) + \pi_3 (0.6H - D + s_3) + \\ & \pi_4 (H - 6 + s_4) + \pi_5 (3 - H + s_5) \end{aligned} \quad (6)$$

## Aplicação

Utilizando-se o modelo (6) desenvolveu-se um software com o uso das ferramentas computacionais *open source* Java e NetBeans. O software foi desenvolvido para desktop, não dependendo de conexão com a internet, que pode não estar disponível nas propriedades rurais ou apresentar um funcionamento insatisfatório. Escolheu-se a linguagem Java por ela ser gratuita e se adequar a qualquer sistema operacional.

O sistema computacional possui três etapas: 1) recebimento dos equipamentos a serem considerados e seus respectivos consumos de energia diários; 2) recebimento dos horários de uso desses equipamentos e 3) retorno dos parâmetros necessários para a construção do biodigestor, de modo a minimizar o uso de material para sua construção e gerar energia suficiente para cumprir as necessidades energéticas diárias dos equipamentos informados.

As informações das etapas 1 e 2 são: o tipo de resíduo, a quantidade de pessoas que moram na propriedade, o número de fogões, a quantidade de chuveiros, o número de lâmpões e quantas horas eles ficam ligados por dia, informações sobre a quantidade, potência e uso de motores na residência, e a frequência de retirada dos resíduos em dias. A Figura 3 mostra a tela de entrada de dados da etapa 1.

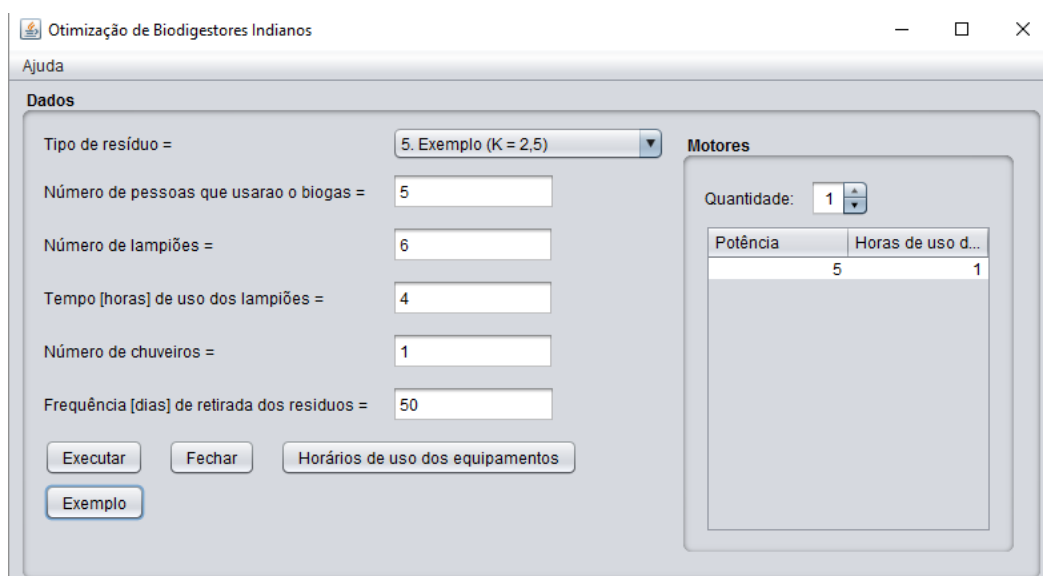
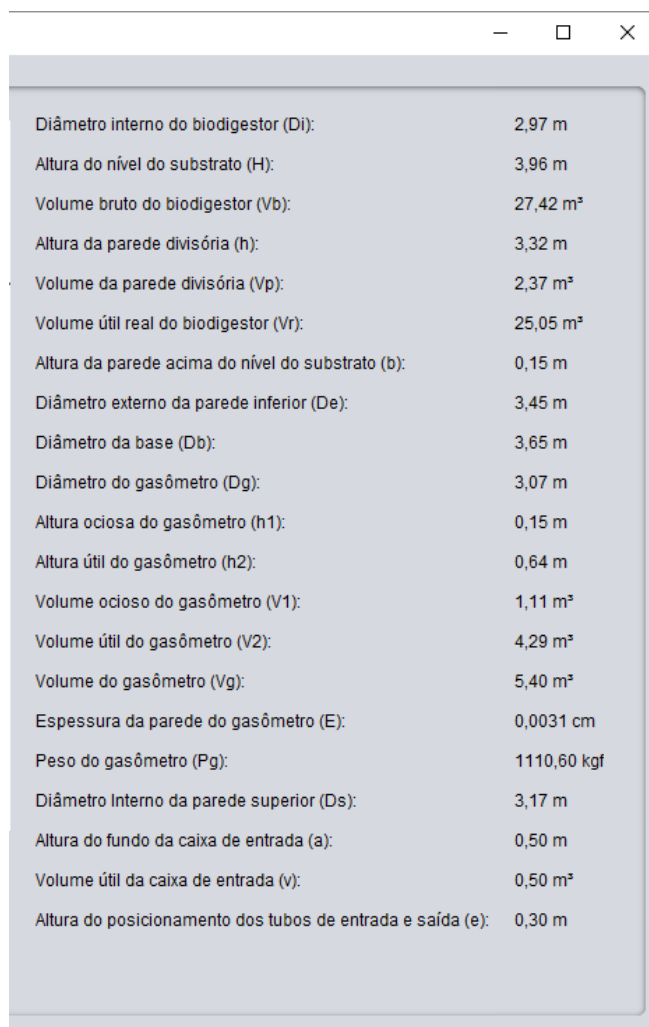


Figura 3: Tela de entrada de dados da etapa 1

A etapa 3 é realizada após as etapas 1 e 2 e nela deve-se preencher as informações sobre os períodos em que os equipamentos são utilizados, isto é, o usuário deve colocar os horários de maior consumo (ORTOLANI et al., 1991). Após o fornecimento desses dados é possível calcular os dados necessários para a construção do biodigestor. A Figura 4 mostra os valores dos parâmetros obtidos pela resolução do software.



Diâmetro interno do biodigestor (Di):	2,97 m
Altura do nível do substrato (H):	3,96 m
Volume bruto do biodigestor (Vb):	27,42 m <sup>3</sup>
Altura da parede divisória (h):	3,32 m
Volume da parede divisória (Vp):	2,37 m <sup>3</sup>
Volume útil real do biodigestor (Vr):	25,05 m <sup>3</sup>
Altura da parede acima do nível do substrato (b):	0,15 m
Diâmetro externo da parede inferior (De):	3,45 m
Diâmetro da base (Db):	3,65 m
Diâmetro do gasômetro (Dg):	3,07 m
Altura ociosa do gasômetro (h1):	0,15 m
Altura útil do gasômetro (h2):	0,64 m
Volume ocioso do gasômetro (V1):	1,11 m <sup>3</sup>
Volume útil do gasômetro (V2):	4,29 m <sup>3</sup>
Volume do gasômetro (Vg):	5,40 m <sup>3</sup>
Espessura da parede do gasômetro (E):	0,0031 cm
Peso do gasômetro (Pg):	1110,60 kgf
Diâmetro Interno da parede superior (Ds):	3,17 m
Altura do fundo da caixa de entrada (a):	0,50 m
Volume útil da caixa de entrada (v):	0,50 m <sup>3</sup>
Altura do posicionamento dos tubos de entrada e saída (e):	0,30 m

Figura 4: Valores dos parâmetros pelo software

O exemplo utilizado para validação do software refere-se à avaliação das dimensões de um biodigestor do modelo indiano, em alvenaria com um gasômetro em chapa de ferro, que satisfaz as necessidades diárias de energia para: cozinhar para 5 pessoas, operar um motor de 5HP durante uma hora, iluminação durante 4 horas com 6 lâmpadas de 40W e chuveiro para 5 pessoas, com 50 dias de retenção e um fator de rendimento  $K = 2.5$ . O horário de trabalho para estes aparelhos, tipo e diluição de matérias-primas a serem usados no biodigestor, fator de capacidade e período de pressão e de retenção são apresentados em Ortolani et al. (1991).

Todos os métodos necessários para o desenvolvimento do software aqui proposto foram desenvolvidos utilizando-se apenas tecnologias *open source* e processados em um microcomputador i7-3770 com 8GB de RAM.



## Resultados e Conclusão

A Tabela 1 apresenta os valores encontrados para os parâmetros diâmetro (D) e altura (H) pelo método de tentativa e erro (ORTOLANI et al., 1991), pelo modelo não linear restrito de Florentino (2003) e pela proposta deste trabalho. Observa-se nesta tabela que o volume (V) obtido para o biodigestor pela nova metodologia apresentada é menor que o volume obtido pelas metodologias comparadas.

Tabela 1: Comparação dos valores D, H e o volume de um biodigestor modelo indiano

Modelo	D	H	V
Ortolani et al. (1991)	3.000	3.900	27.567
Florentino (2003)	2.998	3.897	27.510
Proposto	2.970	3.960	27.435

Além desses resultados satisfatórios, pois a função objetivo consiste em minimizar o volume do biodigestor, a vantagem do software apresentado em relação ao processo de Ortolani et al. (1991) é que toda a dificuldade dos cálculos é realizada pelo sistema de forma rápida e segura.

Considerando os dados de Florentino (2003) a vantagem do sistema desenvolvido, além de um volume menor, é a utilização de tecnologias *open source* e a não necessidade de internet para ser utilizado, fatos esses que o torna acessível a qualquer produtor.

## Referências

ABURAS, R.; HAMMAD, M.A.; HIARY, S.E.; QOUSOUS, S.; ABU-REESH, I. **Construction and operation of a demonstration biogas plant, problems and prospects.** Energy Conversion and Management, v.37, p.611-614, 1996.

ADEOTI, O.; ILORI, M.O.; OYEBISI, T.O.; ADEKOYA, L.O. **Engineering design and economic evaluation of a family-size biogas project in Nigeria.** Technovation, v.20, p.103-108, 2000.

BAPTISTA, E.C.; BELATI, E.A.; SOUSA V.A. and COSTA G.R.M. **Primal-Dual Logarithmic Barrier and Augmented Lagrangian Function to the Loss Minimization in Power Systems.** Electric Power Components and Systems, 34:7, 775-784, 2006.

BENINCASA, M.; ORTOLANI, A.F.; LUCAS JUNIOR, J. **Biodigestores convencionais.** Jaboticabal: Faculdade de Ciências Agrárias e Veterinárias, Universidade Estadual Paulista, FUNEP, 1991. 25p.

FLORENTINO, H.O. **Mathematical tool to size rural digesters.** Scientia Agricola, Piracicaba, v. 60, n.1, p. 185-190, 2003.

ORTOLANI, A.F.; BENINCASA, M.; LUCAS JÚNIOR, J. **Biodigestores rurais: modelos indiano, chinês e batelada.** Jaboticabal: Faculdade de Ciências Agrárias e Veterinárias, Universidade Estadual Paulista, FUNEP, 1991. 35 p.



Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional  
De 2 a 5 de Maio de 2017  
Unesp, Faculdade de Ciências - Bauru/SP

PORTES, Z.A. **Aplicativo Computacional para Projetos de Biodigestores Rurais**. 2005. 82 f. Dissertação (Mestrado em Energia na Agricultura) Faculdade de Ciências Agrônômicas, Universidade Estadual Paulista, Botucatu, 2005.

TORRES, A.; PEDROSA J.F.; MOURA J.P. **Fundamentos de implantação de biodigestores em propriedades rurais**. Revista Eletrônica Educação Ambiental, n.40, Ano XI, 2012. Disponível em <http://www.revistaea.org/artigo.php?idartigo=1248>>. Acesso em: 10 fev. 2017.



Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional  
De 2 a 5 de Maio de 2017  
Unesp, Faculdade de Ciências - Bauru/SP

## **Resumos**

## Análise da influência de parâmetros elétricos no comportamento de um sistema eletromecânico

*Matheus Mikael Quartaroli*

*Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, FEB/UNESP, Bauru/SP  
matheusquartaroli93@gmail.com*

*Bento Rodrigues de Pontes Junior*

*Departamento de Engenharia Mecânica, FEB/UNESP, Bauru/SP  
brpontes@feb.unesp.br*

**Resumo:** O presente trabalho tem com proposta analisar a dinâmica de um sistema eletromecânico, onde possa verificar a influência dos parâmetros elétricos no comportamento do sistema mecânico, pois há uma maior facilidade na alteração desses parâmetros, para isso fez-se o uso de um transdutor de bobina móvel para interligar os sistemas (elétrico e mecânico). Para a modelagem matemática do sistema usou-se o método de energia de Lagrange, encontrando as duas equações que descrevem o movimento do conjunto eletromecânico. Pode-se verificar que somente com a variação da resistência elétrica ocorreram variações na resposta em frequência, podendo assim evitar faixas indesejadas.

**Palavras-chave:** Eletromecânico. Dinâmica. Matemática Aplicada à Engenharia.

### Introdução

Nos últimos anos, sistemas acoplados estão sendo estudados por diversos autores (MUNTEANU, 2013; PONTES JUNIOR, 2013; SIMO, 2011; TCHAKUL, 2016), dentre esses sistemas o eletromecânico no qual é constituído por duas partes (elétrica e mecânica) e interligado através de transdutores magnéticos, piezoelétricos, piezoresistivos ou capacitivo (DVORAK, 2013), já vem sendo introduzindo em diversos setores industriais. O objetivo desse trabalho é verificar a influência de parâmetros elétricos no comportamento do conjunto mecânico.

### Modelagem e Simulação

O esboço do sistema completo está ilustrado na Figura 1-a, onde o sistema mecânico constituído por uma massa ( $m$ ), uma mola ( $k$ ), um amortecedor ( $d$ ) e uma força externa senoidal ( $F_{ex}$ ), está interligada através de um transdutor de bobina móvel (Figura 1-b) com um sistema elétrico RLC em série.

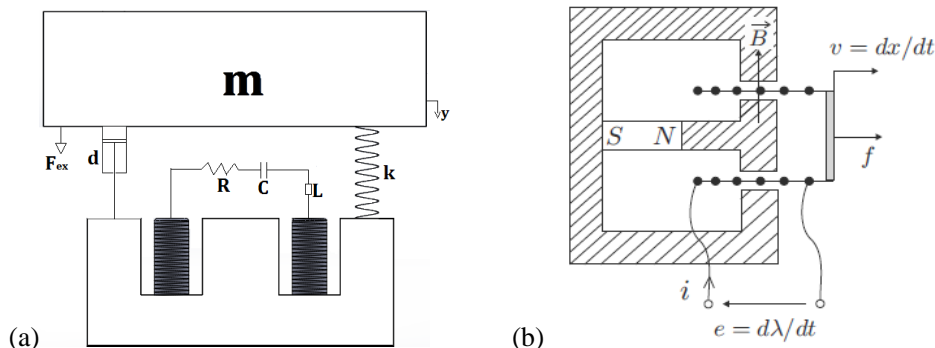


Figura 1: (a) Sistema eletromecânico e (b) Transdutor de bobina móvel (PREUMONT, 2006).

Através do método de Lagrange encontrou-se as equações (1) e (2), que regem o movimento do sistema ilustrado na Figura 1-a:

$$m\ddot{y} + d\dot{y} + ky - Bl\dot{q} = A\sin(\omega t) \quad (1)$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + C^{-1}q + Bl\dot{y} = 0 \quad (2)$$

onde  $y$  é a coordenada do deslocamento linear da estrutura e  $q$  é a carga elétrica do sistema. Para as simulações numéricas, foi utilizado o integrador numérico de Runge-Kutta de ordem média (quarta e quinta ordem). E os valores utilizados são baseados em um quarto de um automóvel (PONTES JUNIOR, 2015) cujo os parâmetros fixos estão indicados na Tabela 1.

Tabela 1: Parâmetros fixos utilizados.

Parâmetros		
Massa, m	250	[Kg]
Constante de amortecimento, d	0	[N.s/m]
Constante de rigidez, k	4e4	[N/m]
Indutância, L	0,762749	[H]
Capacitância, C	1400e-6	[F]
Variável de acoplamento, Bl	502,6548	[T.m]
Amplitude da força, A	5000	[N]

Com isso, analisamos o comportamento do sistema para quatro valores de resistência elétrica (R), verificando sua influência no amortecimento do conjunto mecânico, para isso foi plotado a resposta em frequência, com a variação da frequência de excitação de 0 a 50 rad/s, para os valores de resistência de 1Ω, 50Ω, 110Ω e 200Ω, mostrado na Figura 2.

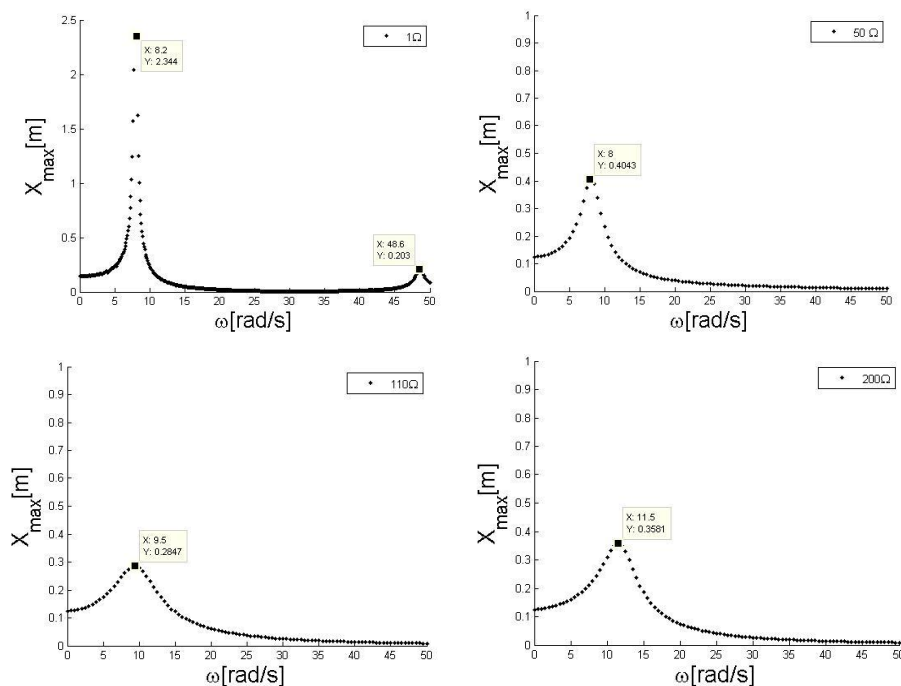


Figura 2: Análise da resposta em frequência para diferentes valores de resistência.

## Conclusões

Pode-se concluir analisando os gráficos da Fig.2, que os parâmetros elétricos podem ter influências no comportamento do sistema, com a variação da resistência foi verificado que houve uma alteração nas frequências de ressonância, podendo assim evitar as faixas críticas, e um menor pico na amplitude de deslocamento foi averiguado na resistência de  $110\Omega$ , cujo valor foi de  $0,2847m$ .

## Referências

DVORAK, A.; KUZMA, P.; PERLIKOWSKI, P.; ASTAKHOV, V.; KAPITANIAK, T.; **Dynamics of three Toda oscillators with nonlinear unidirectional coupling**. Eur. Phys. J. Special Topics, v. 222, p. 2429-2439, oct., 2013.

MUNTEANU, L.; CHIROIU, V.; SIRETEANU, T.; **On the response of small buildings to vibrations**. Nonlinear Dynamics, Dordrecht, v. 73, p. 1527-1543, abr., 2013.

PONTES JUNIOR, B. R.; SILVEIRA, M.; MAZOTTI, A. C.; GONÇALVES, P. J. P.; BALTHAZAR, J. M.; **Contribution of Electrical Parameters on The Dynamical Behaviour of a Nonlinear Electromagnetic Damper**. Nonlinear Dynamics, Dordrecht, v. 79, n. 3, p. 1957-1969, fev., 2015.

PREUMONT, A. **Mechatronics: Dynamics of Electromechanical and Piezoelectrics Systems**. Dordrecht: Springer, 2006.

SIMO, H.; WOAFO, P.; **Bursting oscillations in electromechanical systems**. Mechanics Research Communications, v.38, p. 537-541, jul., 2011.

TCHAKUL, M. V.; FONDJO, V. Y. T.; WOAFO, P.; **Bifurcation structures in three unidirectionally coupled electromechanical systems with no external signal and with regenerative process**. Nonlinear Dynamics, Dordrecht, v. 84, p. 1961-1972, jan., 2016.



## **Análise descritiva do comportamento da série brasileira de produção de automóveis para posterior identificação de seu processo gerador**

*Giovanna Gomes Huysmans*

*Universidade Estadual Paulista; Faculdade de Engenharia de Bauru  
giovanna.huysmans@gmail.com*

*Nair Cristina Margarido Brondino*

*Universidade Estadual Paulista; Faculdade de Ciências  
brondino@fc.unesp.br*

**Resumo:** O propósito deste trabalho é a utilização de métodos estocásticos e estatísticos para análise do comportamento da série temporal de produção de automóveis. A análise descritiva será utilizada para posterior identificação de seu processo gerador ARIMA pela metodologia Box & Jenkins. A identificação da ordem de integração de uma série e possíveis perturbações nesta, tais como padrões sazonais e quebras estruturais, são os principais objetivos deste trabalho.

**Palavras-chave:** Métodos Estocásticos e Estatísticos, Séries Temporais, ARIMA, Metodologia Box & Jenkins.

### **Introdução**

Identificar o mecanismo gerador de uma série possibilita prever o comportamento futuro da mesma, além de justificar o comportamento, que pode ser causado por suas próprias defasagens ou por dependência de outras variáveis. Entretanto, para a identificação desse mecanismo gerador, é necessário que a série apresente certas características, em especial, estacionariedade.

### **Séries Temporais e Processos Estocásticos**

Um processo estocástico é definido como uma coleção de variáveis aleatórias ordenadas no tempo, que pode ser contínuo ou discreto. Os elementos de uma série temporal observada  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  podem ser considerados como uma realização de um processo estocástico. O processo é dito *fracamente estacionário* se as três condições seguintes são observadas para todo  $t$  e  $t-s$ .

$$E(y_t) = E(y_{t-s}) = \mu; \text{Var}(y_t) = \text{Var}(y_{t-s}) = \sigma_y^2; \text{Cov}(y_t, y_{t-s}) = \text{Cov}(y_{t-j}, y_{t-j-s}) = \gamma_s$$

Para um processo *fortemente estacionário*, a média e a variância não precisam ser finitas. Séries não estacionárias tendem a ter erros também não estacionários, apresentando autocorrelação e podem se tornar estacionárias em uma ou mais diferenças.

A análise de estacionariedade precede a estimação de modelos ARIMA, pois a metodologia Box & Jenkins assume esse pressuposto na obtenção dos coeficientes do modelo. Além de análise visual, a estacionariedade de uma série é analisada por Testes de Raiz Unitária. O entendimento destes está relacionado às soluções das equações de diferenças que modelam o comportamento da série, uma vez que a econometria de séries temporais dedica-se à estimação de equações de diferença, cujos componentes são estocásticos.

Uma equação de diferenças de ordem  $p$  é tal que  $y_t$  depende de seus  $p$  valores passados. O modelo mais geral é apresentado em (1), onde o termo  $x_t$  pode ser uma função do tempo, dos valores presentes e defasados de outras variáveis e/ou distúrbios estocásticos (ENDERS, 2009). Um caso importante é aquele em que  $x_t = \sum_{i=0}^p \beta_i \varepsilon_{t-i}$ , onde os  $\beta_i$  são constantes e os elementos da sequência  $\{\varepsilon_t\}$  não são funções dos  $x_t$ . Um processo gerado dessa forma é denominado *processo de médias móveis de ordem q* e é denotado por MA(q). Se todos os  $\beta_i$  são nulos, com exceção de  $\beta_0$  (geralmente assume-se  $\beta_0 = 1$ ), então  $x_t = \varepsilon_t$ . Uma sequência  $\{y_t\}$  gerada a partir de (2) é denominada *processo autoregressivo de ordem p* e denotada por AR(p). Utilizando o *operador defasagem*  $Ly_t = y_{t-1}$ , a equação (2) pode ser reescrita como em (3), onde  $\varepsilon_t$  é ruído branco.

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + x_t \quad (1)$$

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2)$$

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) y_t = c + \varepsilon_t \quad (3)$$

Em geral, trabalha-se com as variáveis centradas e então pode-se fazer  $c = 0$  sem perda de generalidade.

As raízes da equação característica  $1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p = 0$  fornecerão as soluções da equação homogênea. Se  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  são soluções, então toda combinação linear como a dada em (4) também é. As constantes  $A_1, A_2, \dots, A_p$  podem ser eliminadas pela imposição de  $n$  condições iniciais e os  $\alpha_i$  podem ser reais ou complexos. Se  $|\alpha_i| > 1$ , solução diverge quando  $t$  aumenta. Como as raízes  $\alpha_i$  são dadas em função dos coeficientes  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ , pode-se impor condições sobre esses coeficientes de tal forma que  $y_t^h$  seja estável. Numa equação de ordem  $p$ , uma condição necessária é que  $\sum_{i=1}^p \phi_i < 1$  e uma condição suficiente é que  $\sum_{i=1}^p |\phi_i| < 1$  (ENDERS, 2009).

$$y_t^h = A_1(\alpha_1)^t + A_2(\alpha_2)^t + \dots + A_p(\alpha_p)^t \quad (4)$$

Se  $\{x_t\}$  é um processo MA(q),  $q \neq 0$ , então (1) é chamada de processo ARMA (p,q). Com o operador defasagem, esse processo pode ser escrito como em (5), em que  $\phi(L) = (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p)$  e  $\theta(L) = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q)$ . Pode-se mostrar (BROCKWELL & DAVI, 2002) que a solução de (5) é estável se as raízes de  $\phi(L)$  estiverem dentro e as raízes de  $\theta(L)$  fora do círculo unitário.

$$\phi(L)y_t = \theta(L)\varepsilon_t \quad (5)$$

Se for necessário diferenciar a série  $d$  vezes para torna-la estacionária, o processo será denominado ARIMA (p,d,q). A estimação dos valores de  $p$ ,  $d$  e  $q$  do processo ARIMA de uma série é feita pela metodologia Box-Jenkins. Para isso, recorre-se às Funções de Autocorrelação (FAC) e função de autocorrelação parcial (FACP). De acordo com Enders (2009), o uso da FAC e da FACP amostrais como aproximadores para o processo gerador assume que a sequência  $\{y_t\}$  seja estacionária. Também é necessário que o modelo seja inversível, ou seja, que  $\{y_t\}$  possa ser representada por um processo autoregressivo convergente de ordem finita, pois o uso da FAC e da FACP assume implicitamente que a sequência  $\{y_t\}$  pode ser representada por um modelo autoregressivo.

A função de autocorrelação amostral no lag  $k$  é dada por (6). A partir dos gráficos da FAC e da FACP para vários lags, é possível inferir sobre o mecanismo gerador da série. O gráfico da autocorrelação em diferentes defasagens é denominado Correlograma e a identificação de  $p$  e  $q$  é feita pelo reconhecimento de padrões típicos apresentados nos gráficos das duas funções.

Uma série também pode apresentar uma componente sazonal. A presença dessa componente mostra seu comportamento periódico e pode levar a conclusões erradas em testes de estacionariedade, apresentando uma raiz sobre o círculo unitário, alterando a ordem de integração da série e levando a modelos ARIMA que não representam a série original. Sendo assim, a sazonalidade de uma série deve ser identificada e neutralizada. A identificação de comportamento sazonal é feita pela presença de picos periódicos nos gráficos de autocorrelação e autocorrelação parcial.

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} \quad (6)$$

onde  $\hat{\gamma}_k = \frac{\sum (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{n}$  e  $\hat{\gamma}_0 = \frac{\sum (y_t - \bar{y})^2}{n}$ .

## Resultados e Discussões

Os gráficos para análise descritiva da série do Logaritmo Natural do número de automóveis produzidos no Brasil são apresentados na Figura 1. Uma análise visual dos dois primeiros gráficos revela

uma queda na produção no final de 2008, um provável reflexo da crise econômica norte-americana. A diminuição na produção observada a partir de 2015 reflete o início da crise econômica brasileira e é sugestiva de uma quebra estrutural. Observando a Figura 1(c), pode-se ver que a série não é estacionária, pois suas autocorrelações tendem a zero muito lentamente, além de apresentar picos por volta dos lags 12, 24 e 36, indicando possível sazonalidade na série, com período de 12 meses. O padrão sazonal também é observado no gráfico de autocorrelação parcial.

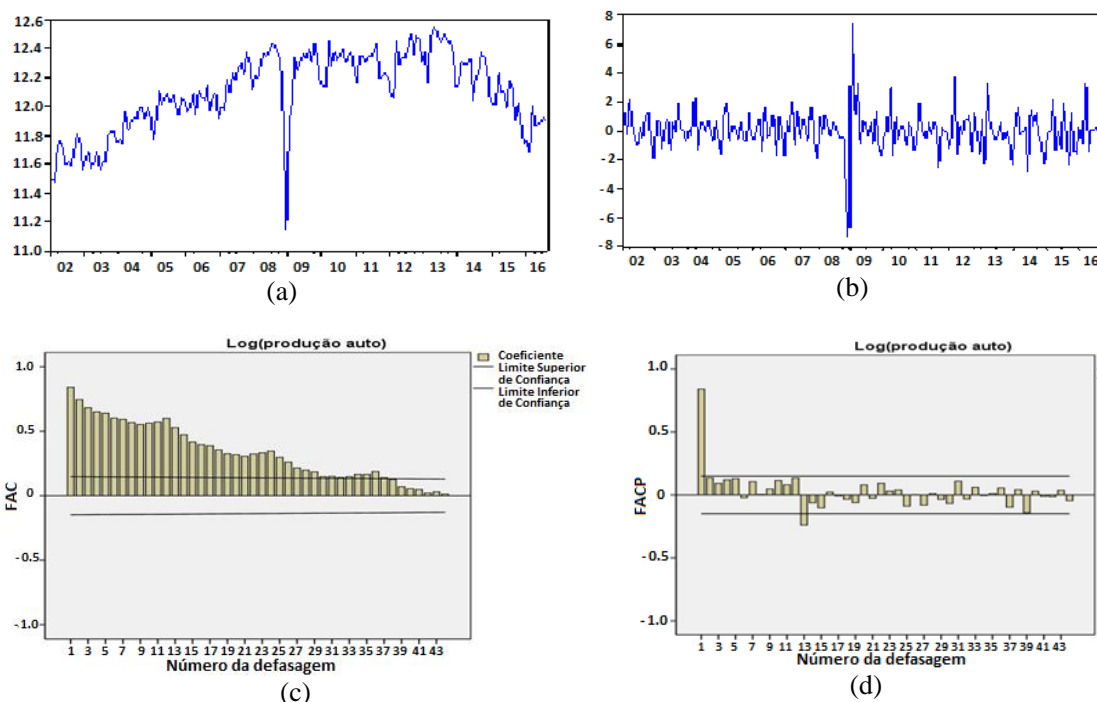


Figura 1: (a) Logaritmo Natural do número de automóveis produzidos no Brasil x tempo; (b) Primeira diferença da série logaritmo do número de automóveis produzidos no Brasil; (c) ACF para o Log do número de automóveis produzidos no Brasil; (d) PACF para o Log do número de automóveis produzidos no Brasil.

## Conclusões

Os gráficos apresentados indicam que a série não é estacionária e também apresenta características de comportamento sazonal. Ambas as características interferem no processo de obtenção dos coeficientes do modelo e, portanto, para a aplicação da metodologia de Box & Jenkins, é necessário que a sazonalidade seja removida e quebras estruturais sejam analisadas e tratadas a priori.

## Agradecimentos

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo apoio financeiro ao projeto sob processo número 2016/13727-4.

## Referências

Associação Nacional dos Fabricantes de Veículos Automotores (2016). Número de veículos produzidos e licenciados mensalmente, por tipo, a partir de janeiro de 1990, em unidades. Disponível em: <<http://www.anfavea.com.br/tabelasnovos.html>> - Acesso em 25.nov.2016.

Enders, W. (2009). **Applied Econometric Time Series**, 3.ed, New York: Jon Wiley & Sons.

Brockwell, P. J.; Davis, R. A. (2002). **Introduction to time series and forecasting**, 2. ed. Springer texts in statistics.



## Aplicação da função Zeta de Lerch para acelerar a convergência de uma série relevante para o Cálculo Fracionário

*Arianne Vellasco Gomes*

*Unesp - Universidade Estadual Paulista; POSMAT  
ariannevellasco@fc.unesp.br*

*Rubens Figueiredo de Camargo*

*Unesp - Universidade Estadual Paulista; Faculdade de Ciências de Bauru  
rubens@fc.unesp.br*

*Alexys Bruno-Alfonso*

*Unesp - Universidade Estadual Paulista; Faculdade de Ciências de Bauru  
alexys@fc.unesp.br*

**Resumo:** É apresentado e analisado um método de aceleração da convergência de uma série. A aceleração é feita com auxílio da função Zeta de Lerch. São apresentadas diferentes formas de aproximação da série. A convergência de cada aproximação é ilustrada por gráficos e tabelas, gerados pelo software *Mathematica*.

**Palavras-chave:** Função Zeta de Lerch, Séries, Aceleração da Convergência, Cálculo Fracionário e Aplicações.

### Introdução

Na ciência há muitos problemas cujas soluções são expressas mediante séries, tais como as séries de Taylor e as séries de Fourier [Knopp, 1951]. Há casos em que o valor limite da série não pode ser calculado de forma exata, ou em que não é conhecido tal procedimento. Isto faz com que precisemos utilizar cálculos numéricos. Nesses cálculos, as séries são muitas vezes aproximadas mediante truncamento até os  $N$  primeiros termos. No caso de convergência lenta, faz-se necessário utilizar métodos de aceleração.

Neste trabalho vamos tratar de uma série que tem importância para a resolução de problemas em Cálculo Fracionário. Para acelerar a convergência da série truncada, é utilizada uma aproximação do erro de truncamento. Essa aproximação é expressa em termos da função Zeta de Lerch [Lagarias, 2016].

### Funções de Lerch

A função Zeta de Lerch é dada pela série [Lagarias, 2016; Lerch, 1887]

$$L(\xi, s, \kappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \xi n}}{(n + \kappa)^s}, \quad (1)$$

em que  $\xi, \kappa \in \mathbb{R}$ , enquanto  $s$  pode ser complexo. Com restrições para  $\kappa \notin \mathbb{Z}_-$  e  $\text{Re}(s) > 1$ .

### Aplicação da função Zeta de Lerch

Na resolução do modelo fracionário de Kronig-Penney [Jarosz, 2016], é útil considerar a série

$$G^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{2\pi i (\kappa+n)\xi}}{\varepsilon - |\kappa + n|^s}, \quad (2)$$

em que  $s, \varepsilon, \kappa, \xi \in \mathbb{R}$ , com as restrições  $s > 1$ , e  $\{n \in \mathbb{Z} : \varepsilon = |\kappa + n|^s\} = \emptyset$ . Além disso, é preciso avaliar numericamente a série com muitas casas decimais corretas (20 ou mais).

Ao truncar essa série, tomando valores de  $n$  em  $\mathbb{Z}_N = \{n \in \mathbb{Z} : -N \leq n \leq N\}$ , obtemos a função

$$G_N^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi) = \sum_{\mathbb{Z}_N} \frac{e^{2\pi i(\kappa+n)\xi}}{\varepsilon - |\kappa + n|^s}. \quad (3)$$

Quando  $s < 2$ , a série truncada apresenta uma convergência muito lenta, como será ilustrado adiante. Para obtermos uma aproximação da série que convirja mais rapidamente do que a série truncada, faremos uma estimativa do erro de truncamento. Para isso, utilizaremos a função Zeta de Lerch. O erro de truncamento exato é dado por

$$E_N^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi) = g_N^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi) + g_N^{(s)}(\varepsilon, -\kappa, -\xi), \quad (4)$$

com

$$g_N^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi) = e^{2\pi i(\kappa+N+1)\xi} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m L(\xi, s(m+1), \kappa+N+1). \quad (5)$$

Apesar da série da Equação 5 ser difícil de avaliar exatamente, ela converge muito rapidamente. Portanto, como estimativa do erro de truncamento temos

$$E_N^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi) \approx E_{N,M}^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi) = g_{N,M}^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi) + g_{N,M}^{(s)}(\varepsilon, -\kappa, -\xi), \quad (6)$$

em que

$$g_{N,M}^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi) = e^{2\pi i(\kappa+N+1)\xi} \sum_{m=0}^M \varepsilon^m L(\xi, s(m+1), \kappa+N+1). \quad (7)$$

Em lugar de aproximar a série pela forma truncada  $G_N^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi)$ , que converge lentamente, usaremos a aproximação da forma

$$G_{N,M}^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi) = G_N^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi) + E_{N,M}^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi), \quad (8)$$

que converge mais rapidamente. A sequência de valores de  $G_{N,M}^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi)$  é chamada de série acelerada.

## Testes de convergência

Nesta seção será possível comparar as velocidades de convergência da série truncada,  $G_N^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi)$ , e da série acelerada,  $G_{N,M}^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi)$ , por meio de tabelas e gráficos desenvolvidos no software *Mathematica*.

Na Tabela 1 são mostrados os valores da  $G_N^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi)$ , e os valores da  $G_{N,M}^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi)$ , para  $M = 2$ . Observa-se que  $G_N^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi)$  apresenta uma convergência extremamente lenta. De fato, em  $N = 100000$  algumas das casas decimais mostradas apresentam variação. Diferentemente, até a precisão mostrada,  $G_{N,2}^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi)$  vale  $-6.762766191$ , a partir de  $N = 20$ . Na Figura 1 são mostrados os valores da  $G_N^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi)$ , e os valores da  $G_{N,M}^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi)$ . Variou-se  $N$  de 0 a 200 com passo 5, para (a)  $s = 1.6$ , (b)  $s = 1.8$  e (c)  $s = 2.0$ . No painel (a) pode-se perceber que  $G_{N,2}^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi)$  converge rapidamente para um valor próximo de  $-6.762766191$ . Tomando este valor como referência, é fácil compreender o quanto é lenta a convergência da  $G_N^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi)$ . Nota-se que os termos além de  $N = 200$  terão uma contribuição de aproximadamente 0.14 para a soma. Nos painéis (b) e (c), as séries aceleradas convergem aproximadamente para  $-6.154672731$  e  $-5.839424019$ , respectivamente. Numa análise geral, a comparação dos três painéis permite concluir que, independentemente do valor de  $s$ , a função  $G_{N,2}^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi)$  mostra-se mais eficiente, por apresentar uma convergência muito mais rápida. Observa-se que, quanto menor o valor de  $s$ , mais lenta é a convergência da série truncada. Além disso, é possível verificar que a estimativa do erro de truncamento,  $E_{N,2}^{(s)}$ , tende a zero como  $1/N^{s-1}$ .



Tabela 1: Valores da  $G_N^{(s)}$  e da  $G_{N,2}^{(s)}$ , com valores dos parâmetros sendo  $s = 1.6$ ,  $\varepsilon = -0.3$ ,  $\kappa = 0.2$ ,  $\xi = 0$ .

$N$	$G_N^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi)$	$G_{N,M}^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi)$
19	-6.202327531	-6.762766192
20	-6.218862128	-6.762766191
21	-6.234157613	-6.762766191
⋮	⋮	⋮
99999	-6.759432847	-6.762766191
100000	-6.759432867	-6.762766191
100001	-6.759432887	-6.762766191

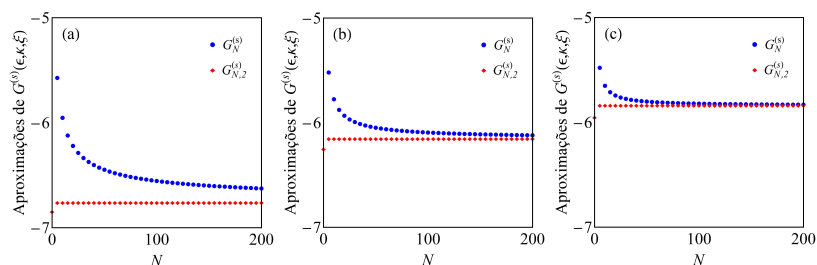


Figura 1: Valores da  $G_N^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi)$  e da  $G_{N,2}^{(s)}(\varepsilon, \kappa, \xi)$ , para (a)  $s = 1.6$ , (b)  $s = 1.8$  e (c)  $s = 2$ .

## Conclusão

Através das tabelas e gráficos apresentados pode-se concluir que a série sob investigação converge lentamente para valores do expoente  $s$  menores que 2. Foi visto que, graças à aceleração da convergência, pode-se trabalhar satisfatoriamente com uma quantidade relativamente pequena de termos. Espera-se que o método aqui utilizado também seja de utilidade para outros grupos de pesquisa na área de Cálculo Fracionário e que possa ser estendido para tratar outras séries em pesquisas na área de Análise Numérica.

## Agradecimentos

Os autores agradecem CAPES, CNPq e o grupo de pesquisa CF@FC - Cálculo Fracionário/Unesp.

## Referências

- LAGARIAS, J.; LI, C. The Lerch Zeta function III. Polylogarithms and special values. **Research in the Mathematical Sciences**, v. 3, n. 1, p. 1-54, 2016.
- KNOPP, K. **Theory and Application of Infinite Series**. London: Blackie & Limited, 1951.
- LERCH, M. Note sur la fonction  $\mathcal{L}(\omega, x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2k\pi ix}}{(\omega+k)^s}$ . **Acta Math.**, v. 11, p. 19-24, 1887.
- JAROSZ, S. **Equação de Schrödinger Fracionária para Potenciais Delta**. 2016. 90f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Unicamp, Campinas, 2016.



## **Aplicação de um modelo matemático para estimação do custo industrial do processamento do leite in natura**

*Vitória Castro Santos Barreto*

*Faculdade de Tecnologia de Botucatu  
vitoriabarreto28@gmail.com*

*Paulo André de Oliveira*

*Faculdade de Tecnologia de Botucatu  
poliveira@fatecbt.edu.br*

*Danilo Simões*

*Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”  
danilo@itapeva.unesp.br*

**Resumo:** O contexto econômico-financeiro exige dos laticínios o ajuste das estratégias de produção, para que seja possível assegurar um melhor controle gerencial e competitividade. Objetivou-se modelar uma função que permita encontrar o custo unitário do produto vendido em diferentes volumes de produção para o leite in natura em um laticínio do Centro-Oeste do Estado de São Paulo. Com as possíveis relações entre custo fixo e variável, simulou-se um ajuste para funções que determinassem o custo unitário do litro de leite envasado em diferentes cenários de volume de produção e custo da matéria prima. Os modelos estimados apresentaram coeficiente de determinação ( $R^2$ ) de 98%, concluindo-se que as funções permitem obter o custo unitário do produto vendido em um intervalo de 100.000 a 310.000 litros de forma eficaz.

**Palavras-chave:** Matemática Aplicada à Economia e a Finanças. Custo unitário. Função. Ponto de equilíbrio.

### **Introdução**

A atividade leiteira no Brasil, tem sofrido instabilidades econômicas frequentes por estar vulnerável a oscilações de mercado e políticas econômicas, desse modo a gestão de custos garante que a empresa não pratique preços inferiores aos esforços investidos na fabricação de seus produtos (PELEIAS et al., 2015).

Com a grande variação de produção existe grande variabilidade nos custos, com isso uma função matemática pode facilitar a apuração do custo unitário do produto vendido de uma forma mais rápida e menos complexa do que planilhas contábeis para as políticas de preços de um laticínio.

### **Material e Métodos**

A fim de modelar uma função que permita encontrar o custo unitário do produto para diferentes volumes de produção, foram consideradas: quantidade de mão-de-obra para operação e custo; equipamentos utilizados e custo de aquisição e consumo de materiais para produção. Os dados foram obtidos em um laticínio localizado no Centro-Oeste do Estado de São Paulo no período de abril e maio de 2016 e os custos de matéria prima no Instituto de Economia Agrícola (IEA, 2016).

Inicialmente, foram calculados os custos de mão-de-obra e seus respectivos encargos, custos de depreciação e energia utilizada. Os valores de depreciação de benfeitorias, máquinas e equipamentos, foram calculados conforme o preconizado pela Instrução Normativa SRF nº 162 Receita Federal (1998). Em seguida, apurou-se o custo fixo e variável e o preço de equilíbrio para o maior volume de produção do laticínio. Entre possíveis relações do custo fixo e variável, simulou-se um ajuste para a função que determinasse o custo unitário para volumes menores de produção no laticínio.

## Resultados

Os dados coletados no laticínio permitiram a análise dos custos de produção. Na Tabela 1, foram ponderados os custos fixos, em que a mão de obra representou 49,25% do custo total e variáveis considerando o preço da matéria prima a R\$ 1,08, constituindo 93,10% do custo total.

Tabela 1: Custo fixo e variável mensal.

Custo Fixo Mensal	Valor (R\$)	%
Mão de obra	13.730,89	49,25
Depreciação	4.628,32	16,60
Limpeza	4.064,28	14,58
Energia elétrica	3.068,50	11,01
Lenha	2.388,44	8,57
<b>Total</b>	<b>27.880,44</b>	<b>100,00</b>
<b>Custo variável</b>		
Matéria prima/l	1,08	93,10
Embalagem/u	0,08	6,90
<b>Total</b>	<b>1,16</b>	<b>100,00</b>

Considerando uma produção mensal de 309.750 litros por mês, encontrou-se, custo fixo unitário de R\$ 0,09 centavos; custo variável unitário de R\$ 1,16 reais e preço de equilíbrio de R\$ 1,25 reais, valor resultante da soma do custo fixo e variável unitário.

Para encontrar o preço de equilíbrio contábil, pode-se utilizar a fórmula apresentada por (BRUNI, 2006)

$$q = \frac{CFT}{Pu - CVu}, \quad (1)$$

sendo:  $q$  quantidade,  $CFT$  custos fixos totais,  $Pu$  preço unitário e  $CVu$  custos variáveis unitários.

O preço unitário de equilíbrio foi obtido rearranjando a fórmula (1), tendo em vista que o lucro zero é igual ao custo unitário do produto vendido tem-se

$$CuPV = \frac{CFT}{q} + CVu \quad (2)$$

Aplicando-se a fórmula (2) para volumes de produção entre 100.000 e 310.000 litros de leite obteve-se a Figura 1.

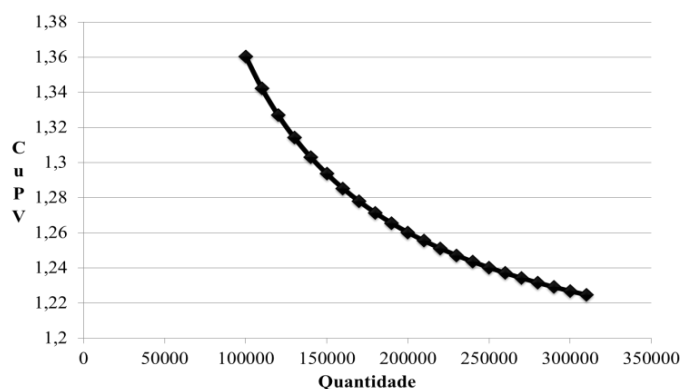


Figura 1: Ajuste para volumes de envase de leite.

A fim de ajustar a função à Figura 1 testaram-se as funções linear, polinomial de segundo grau, logarítmica e a função potência. O melhor ajuste ocorreu com a função potência como na função (3).

$$CuPV = 5,6269 * q^{-0,12} \quad (3)$$

Na Tabela 2 simularam-se outras situações para variações no custo do litro de leite, com o preço da matéria prima variando de R\$ 0,98 a R\$ 1,08. Como pode-se observar, o modelo das funções se ajustaram explicando mais 98% dos dados observados.

Tabela 2: Funções do custo unitário para diversos cenários de preço do leite.

Preço (R\$)	Função do CuPV	R <sup>2</sup>
0,98	$y = 5,8522 * q^{-0,12}$	0,9821
1,00	$y = 5,8006 * q^{-0,12}$	0,9821
1,02	$y = 5,7525 * q^{-0,12}$	0,9820
1,04	$y = 5,7076 * q^{-0,12}$	0,9819
1,06	$y = 5,6659 * q^{-0,12}$	0,9818
1,08	$y = 5,6269 * q^{-0,12}$	0,9817

As funções permitem que se obtenha o custo unitário do produto vendido substituindo-se no  $q$  (quantidade) o volume produzido para o período de um mês entre 100.000 e 310.000 litros.

## Conclusões

Em um laticínio a grande variação do volume justificou a mudança da premissa considerando-se o volume dado para se encontrar o custo unitário de produção. O estudo permitiu concluir que o uso da função pode possibilitar ao gestor incluir diferentes volumes de produção e encontrar o custo unitário do litro de leite de forma rápida e efetiva.

## Referências

BRUNI, A. L. **A administração de custos, preços e lucros**. Atlas, 2006.

IEA. Instituto de Economia Agrícola. 2016. Disponível em:  
<<http://www.iea.sp.gov.br/out/index.php>>. Acesso em: 10 out. 2016.

PELEIAS, I. R. et al. ABCustos. **Proposta de relatórios para gestão de custos em uma indústria calçadista de pequeno porte da cidade de São Paulo**, São Paulo, v. 5, n. 2, 2015.

RECEITA FEDERAL. Instrução normativa SRF n 162. 1998.

## Aproximação de funções por polinômios trigonométricos e aplicação em sistemas mecânicos utilizando o GeoGebra

*João Paulo de Freitas Gama*

*Universidade Federal do Rio Grande do Norte;  
defreitasgama11@gmail.com*

*Fabiana T. Santana*

*Universidade Federal do Rio Grande do Norte;  
fabianasantana@ect.ufrn.br*

**Resumo:** Neste trabalho foi feito um estudo detalhado de aproximações por Mínimos Quadrados em espaços vetoriais ortogonais. Em particular, utilizamos esta teoria para obter a melhor aproximação de uma função  $f$  no espaço  $W$ , gerado pelas funções  $1, \cos(t), \cos(2t), \dots, \cos(nt), \dots, \sin(t), \sin(2t), \dots, \sin(nt)$  utilizando um produto interno apropriado. Tal função é denominada de polinômio trigonométrico e coincide com a  $n$ -ésima soma parcial da série de Fourier da função  $f$ , uma vez que seus coeficientes coincidem com os coeficientes de Fourier de  $f$ . O polinômio obtido foi utilizado para aproximar uma força que atua sobre um sistema mecânico com o uso do software GeoGebra o que permitiu compreender melhor a construção da função e, ao mesmo tempo, a representação gráfica mostrou que aumentando o grau do polinômio melhor é a aproximação obtida.

**Palavras-chave:** Mínimos Quadrados. Séries de Fourier. Sistemas mecânicos. Matemática Aplicada à Física.

### Aproximação de funções por polinômios trigonométricos

Aproximar funções  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas em  $[-L, L]$  por outras mais simples, como  $F(t) = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{\pi t}{L}\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi t}{L}\right) + \dots + a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_1 \sin\left(\frac{\pi t}{L}\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{L}\right) + \dots + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$ , constituídas por somas de senos e cossenos, é frequentemente usado para facilitar a resolução de equações diferenciais.

Considerando o espaço  $W$  gerado pelas funções ortonormais  $\phi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2L}}$ ,  $\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\frac{k\pi t}{L}$  e  $\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\frac{k\pi t}{L}$ , para  $1 \leq k \leq n$ , com o produto interno  $\langle g, h \rangle = \int_{-L}^L \phi(t) \varphi(t) dt$ , a Álgebra Linear, em particular o processo de mínimos quadrados, mostra que a melhor aproximação da função  $f$  contínua  $[0, 2\pi]$  em  $W$  é a projeção  $F(t) = \langle f, \phi_0 \rangle \phi_0 + \langle f, \phi_1 \rangle \phi_1 + \dots + \langle f, \phi_n \rangle \phi_n + \langle f, \phi_1 \rangle \phi_1 + \langle f, \phi_2 \rangle \phi_2 + \dots + \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$ .

Desenvolvendo os cálculos e considerando  $a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt$ ,  $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\frac{n\pi t}{L} dt$ , e  $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin\frac{n\pi t}{L} dt$  obtém-se:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{k=1}^n b_k \sin\frac{n\pi t}{L} \quad (1)$$

que coincide com a  $n$ -ésima soma parcial da série de Fourier da função  $f$ . (ANTON; RORRES, 2001).

### Aplicação em sistemas mecânicos utilizando o GeoGebra

O sistema mecânico da Figura 1, conhecido por martelo de forjar, sob certas condições, é modelado pelo sistema massa mola  $Mx'' + Kx = f$ , onde a força  $f$  atua sobre uma massa  $M$  e  $K$  é a constante da

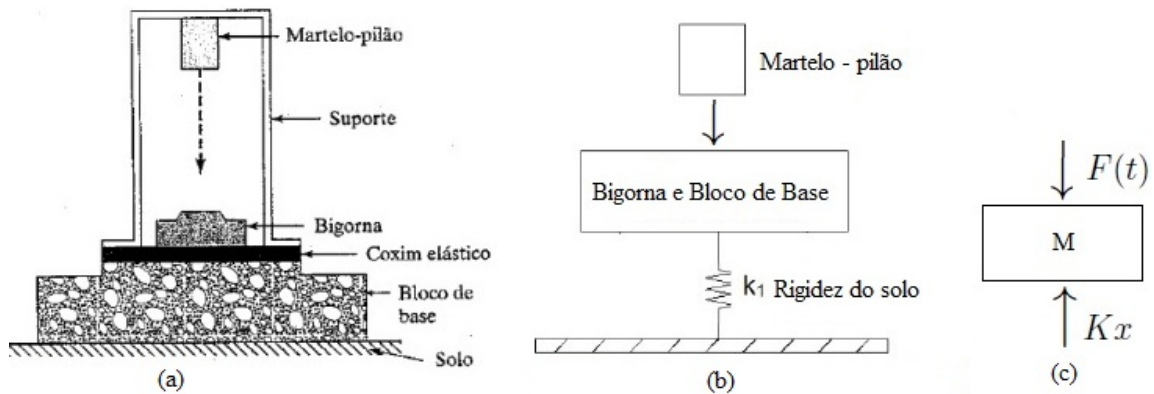


Figura 1: Sistema mecânico conhecido por martelo de forjar.

mola. Se  $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$ , então  $x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + (f_0 \cos(\omega_0 t)) / (\omega^2 - \omega_0^2)$  é uma solução geral, onde  $\omega = \sqrt{k/M}$  é a frequência natural e  $\omega_0$  é a frequência excitadora do sistema, (RAO, 2008).

Para os casos em que  $f$  não é combinação linear de senos e cossenos, utilizou-se o estudo feito anteriormente para obter  $F \in W$ , que é a melhor aproximação de  $f$ , dada pela equação (1). Este procedimento é muito utilizado para facilitar a resolução de equações diferenciais. Em particular, os cálculos e representações geométricas mostrados aqui foram feitos para a função  $f(t) = t^2 + \pi$ , se  $-\pi < t < 0$  e  $f(t) = -t^2 + \pi$ , se  $0 \leq t < \pi$  com o auxílio do software GeoGebra.

Para esta aplicação foram utilizados os seguintes comandos no GeoGebra: “Se[<Condição>, <Então>]”, Este comando é usado para definir funções com mais de uma sentença. A ferramenta “Controle Deslizante” possibilita agregar às funções ou exemplos um feito dinâmico. Os coeficientes  $a_0$ ,  $a_k$  e  $b_k$  foram garantidos pelos comandos “Integral[<Função>, <Valor inicial>, <Valor final>]” e “Sequência[Expressão, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>, <Incremento>]” (utilizado para listar uma sequência de números). Pode-se atribuir como Valor Final de uma sequência um Controle Deslizante. Com isso, à medida que se move o controle deslizante os valores da lista são modificados. A função “Soma” é responsável por somar todos os números listados. Também é possível usar o comando Soma conjuntamente com o comando Sequência. Neste caso, na “Entrada” do GeoGebra digita-se “Soma[Sequência[Expressão, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>]]”.

A função  $f$  foi definida com o comando “ $f(x) = \text{Se}[-\pi < x < 0, x^2 + \pi, 0 \leq x < \pi, -x^2 + \pi]$ ” no “Entrada” do GeoGebra. O efeito dinâmico no grau do polinômio foi obtido com o comando “controle deslizante” denotado por  $k$ , fazendo  $n$  variar com  $k$ . O coeficiente  $a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$  foi obtido com “ $a_0 = (1/(2*\pi)) * \text{Integral}[f, -\pi, \pi]$ ”,  $a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L (f(x) \cos \frac{k\pi x}{L}) dx$  com “ $\text{lista1} = \text{Sequência}[(1/\pi) * \text{Integral}[f * \cos((n*\pi*x)/\pi), -\pi, \pi], n, 1, k]$ ” e  $b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L (f(x) \sin \frac{k\pi x}{L}) dx$  com “ $\text{lista2} = \text{Sequência}[(1/\pi) * \text{Integral}[f * \sin((n*\pi*x)/\pi), -\pi, \pi], n, 1, k]$ ”.

Em seguida, foram definidos os termos da soma que compõem a função  $F$ , dada na equação (1).

O termo  $g = \sum_{k=1}^n \left( a_k \cos \frac{k\pi x}{L} \right)$  garantido por “ $g = \text{Soma}[\text{Sequência}[(1/\pi) * \text{Integral}[f * \cos((n*\pi*x)/\pi), -\pi, \pi] * \cos((n*\pi*x)/\pi), n, 1, k]$ ” e  $h = \sum_{k=1}^n \left( b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right)$  com “ $h = \text{Soma}[\text{Sequência}[(1/\pi) * \text{Integral}[f * \sin((n*\pi*x)/\pi), -\pi, \pi] * \sin((n*\pi*x)/\pi), n, 1, k]$ ”. Por fim, a função  $F$ , que corresponde à melhor aproximação, foi definida com o comando “ $F = \text{Função}[a_0 + h + g, x, -\pi, \pi]$ ”.

Quanto maior for o grau  $n$  do polinômio, melhor é a aproximação  $F$  obtida. Na Figuras 2 e 3, pode-se

ver os cálculos e a representação da aproximação por um polinômio de grau 2 e 18, respectivamente.

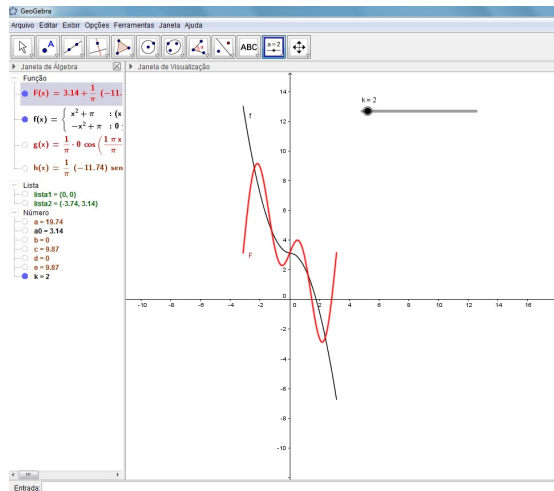


Figura 2: Aproximação com polinômio trigo-nométrico de grau 2.

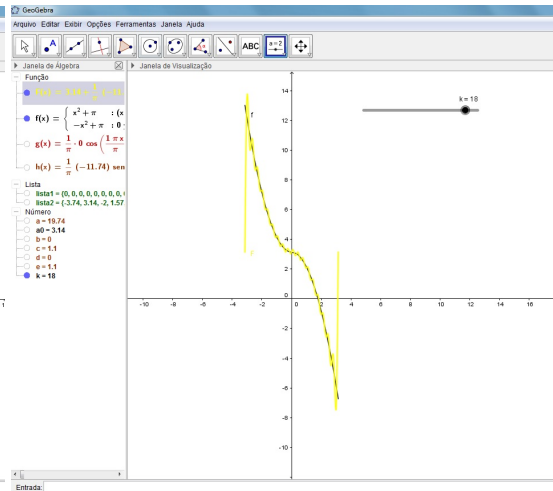


Figura 3: Aproximação com polinômio trigo-nométrico de grau 18.

## Conclusões

Aproximar funções reais em espaços ortogonais  $W$  gerados pelas funções é um caminho para se obter a Séries de Fourier. O estudo da Série de Fourier associado à utilização de softwares matemáticos merece atenção devido sua importância na resolução de equações diferenciais. Com o exemplo feito no GeoGebra, além da facilidade em se obter com precisão os valores dos coeficientes, também foi possível perceber claramente que a medida que o grau do polinômio aumenta, melhor é a aproximação.

## Agradecimentos

Os autores agradecem a UFRN pelo apoio financeiro.

## Referências

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**, Bookman, 2001.

RAO, S. S. **Vibrações Mecânicas**. Revisor técnico José Juliano de Lima Júnior; Tradução Arlete Simille. São Paulo, Pearson Prentice Hall, 2008.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**, vol. 2, Makron Books, 2007.





## Cadeias de Markov: modelo probabilístico e Teorema de Perron-Frobenius

*Amanda Silvieri Leite de Oliveira*  
UNESP; Faculdade de Ciências  
amandasilvieri@hotmail.com

*Camila Sabrina Baião Ferro*  
UNESP; Faculdade de Ciências  
camilasabrina07@hotmail.com

*Fabiano Borges da Silva*  
UNESP; Faculdade de Ciências  
fabiano@fc.unesp.br

**Resumo:** Neste trabalho apresentamos uma discussão sobre os modelos probabilísticos em Cadeias de Markov finita e discreta, uma versão do Teorema de Perron-Frobenius e suas aplicações.

**Palavras-chave:** Métodos Estocásticos e Estatísticos. Cadeia de Markov. Probabilidade. Processos Estocásticos.

### Introdução

Considere um espaço de estados com um número finito (ou enumerável) de elementos  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ . Um processo estocástico discreto  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma Cadeia (ou Processo) de Markov se a probabilidade condicional satisfizer

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) \quad (1)$$

para todo  $n \geq 1$  e para toda sequência  $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$  de elementos do espaço de estados  $E$ . Essa condição (1) significa, em linguagem natural, que o futuro do processo, uma vez conhecido o estado presente, é independente do passado.

As probabilidades condicionais

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = e_i | X_n = e_j)$$

são chamadas probabilidades de transição. E se para cada  $i, j$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = e_i | X_n = e_j) = \mathbb{P}(X_1 = e_i | X_0 = e_j)$$

para todo natural  $n$ , a cadeia de Markov é dita estacionária e as probabilidades de transição, que não mudam ao longo do tempo, são denotadas por  $p_{ij}$ .

Um processo de Markov está completamente definido a partir do momento em que se especifica as probabilidades de transição e a distribuição inicial de probabilidades dos estados (ver por exemplo BRZEZNIAK; ZASTAWIAK p.85). E ao processo associa-se uma matriz de probabilidades de transição  $T$ , onde as entradas da matriz são dadas pelas probabilidades de transição  $p_{ij}$ , ou seja,

$$T = [p_{ij}]_{r \times r}.$$

As entradas da matriz  $T^n$  correspondem à probabilidade de, saindo do estado  $e_j$ , chegar-se ao estado  $e_i$  depois de  $n$  passos. Desta maneira, dada uma distribuição inicial, representada matricialmente por

$$v^0 = [v_1 \dots v_r]^t,$$

a distribuição do processo no tempo  $n \geq 1$  é dada por

$$v^n = T^n \cdot v^0.$$

Neste trabalho estaremos interessados em estudar a dinâmica das distribuições de probabilidade  $v^n$  que evoluem com o tempo  $n \in \mathbb{N}$ .

## Resultados.

Quando a matriz de transição associada a uma determinada Cadeia de Markov é regular, é possível fazer previsões a longo prazo e até mesmo determinar a distribuição de probabilidade estacionária. Mais precisamente, temos o seguinte resultado, que é uma versão do Teorema de Perron-Frobenius.

**Teorema:** Seja  $T$  uma matriz estocástica regular, isto é, existe número natural  $k$ , tal que  $T^k$  é uma matriz em que todas suas entradas são não nulas. Então temos que:

- i)  $T^n$  se aproxima de uma matriz  $M$ , no sentido de que cada entrada da matriz  $T^n$  aproxima-se da entrada correspondente em  $M$ ;
- ii) Todas as colunas de  $M$  são iguais, sendo dadas por um vetor coluna da forma  $w = [w_1, \dots, w_r]$  com  $w_i > 0$ , para  $i = 1, \dots, r$ ;
- iii) Para qualquer vetor de probabilidades inicial  $v^0 = [v_1^0, \dots, v_r^0]^t$  temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n v^0 = w;$$

- iv)  $w$  é o único vetor de probabilidade que satisfaz  $Tw = w$ .

A demonstração do resultado acima pode ser visto, por exemplo, em SILVA; ROTA. Daremos a seguir uma aplicação deste resultado.

**Exemplo:** Vamos supor que temos uma partícula que salta a cada instante nos estados 1 e 2, ou seja,  $E = \{1, 2\}$ , e que no momento inicial ela se encontra no estado 1, ou seja, nosso vetor de probabilidade é dado por  $v^0 = [1, 0]^t$ . Além disso, vamos supor que a matriz de transição desta partícula é dada por

$$T = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{bmatrix}.$$

As possíveis trajetórias que a partícula irá realizar podem ser representadas por sequências. Por exemplo, a trajetória  $\omega = (1, 2, 2, 2, \dots)$  representa que a partícula estava inicialmente no estado 1, depois saltou para o estado 2, e nos demais instantes permaneceu saltando em 2. O conjunto destas sequências é geralmente denotado por  $\Omega$ .

Por meio do processo estocástico  $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$ , onde cada variável aleatória  $X_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$X_j(\omega) = X_j(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_j, \dots) = \omega_j,$$

e está associada a um determinado espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , pode-se mostrar que este exemplo é de fato uma Cadeia de Markov, ou seja, verifica a igualdade (1) (para maiores detalhes, ver BRZEZNIAK; ZASTAWIAK p.88).

Notemos que matriz de transição  $T$  é regular, pois  $T^1$  já possui todas as entradas não nulas. Logo a distribuição assintótica  $w$ , mencionada acima, independe da condição inicial  $v^0$ . Além disso, como

$$\begin{bmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3/8 \\ 5/8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/8 \\ 5/8 \end{bmatrix},$$



segue que  $w = [\frac{3}{8}, \frac{5}{8}]$  é o vetor de distribuição de probabilidades da partícula a longo prazo, ou seja, 37,5% de se encontrar no estado 1 e 62,5 % no estado 2 quando  $n \rightarrow \infty$ .

Este mesmo modelo pode ser aplicado em diversas situações. Por exemplo: suponhamos que a cada ano 5% da população da cidade de Jaú migra para a cidade de Bauru, enquanto que 3% da população bauruense migra para cidade de Jaú. Consideremos que as migrações sejam somente entre as cidades de Bauru e Jaú e que estas porcentagens de migração continuem as mesmas. Neste exemplo a matriz  $T$  citada acima, representa as probabilidades de transição entre as duas cidades. E a distribuição de probabilidade  $v^n$  entre estas cidades depois de  $n$  anos seria dada por

$$v^n = T^n v^0,$$

onde  $v^0$  representa a distribuição inicial.

## Considerações finais

Cadeias de Markov modelam diversos problemas de engenharia, biologia (ver por exemplo ALLEN, p.105) e até mesmo social, como por exemplo o caso das migrações que comentamos acima, que envolvem aleatoriedade, o que torna esta área de estudo relevante.

## Agradecimentos

A primeira autora gostaria de agradecer a FAPESP, processo 2016/21006-5, pelo suporte financeiro.

## Referências

- ALLEN, 2003 **An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology**. Pearson Education Inc., Upper Saddle River, New Jersey.
- BRZEZNIAK, Z.; ZASTAWIAK, T; 1999 **Basic Stochastic Processes: A Course Through Exercises**. Springer: Undergraduate Mathematics Series, London.
- SILVA, F. B.; ROTA, I. S; 2016 **Convergência de matrizes estocásticas regulares**. C.Q.D. Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 8, p. 4-14, dez. Edição Iniciação Científica.



## Corpos quadráticos e a construção de reticulados

*Victor Passarelli Destefane*

*Universidade Estadual Paulista; IGCE- Matemática  
victorpassarelli5@gmail.com*

*Lucas Yudy Juang*

*Universidade Estadual Paulista; IGCE- Matemática  
lucasjuang@gmail.com*

*Carina Alves*

*Universidade Estadual Paulista; IGCE-Departamento de Matemática  
carina@rc.unesp.br*

**Resumo:** Reticulados tem sido amplamente estudados para solucionar problemas relacionados a teoria da informação. Um dos problemas mais difíceis envolvendo a teoria de reticulados é encontrar reticulados com maior densidade de empacotamento. Neste trabalho apresentamos uma construção do reticulado de maior densidade de empacotamento no  $\mathbb{R}^2$  via corpos quadráticos.

**Palavras-chave:** Matemática Discreta. Reticulados. Corpos Quadráticos. Densidade de Centro.

## Introdução

Uma das técnicas de gerar reticulados e avaliar sua densidade de empacotamento é através da aplicação de determinados homomorfismos a certos  $\mathbb{Z}$ -módulos livres de posto  $n$  contidos num corpo de números  $K$  de grau  $n$ . Os reticulados gerados por este método são conhecidos como reticulados algébricos.

A vantagem de obter reticulados por este método é que podemos identificar os pontos do reticulado no  $\mathbb{R}^n$  com os elementos de  $K$ . Desta forma, podemos utilizar algumas propriedades do corpo  $K$ , que possuem uma estrutura algébrica mais rica no estudo de tais reticulados. Com isso, o estudo de parâmetros relacionados a probabilidade de erro e que do ponto de vista geométrico são difíceis de se calcular, podem ser traduzidos num contexto algébrico.

Neste trabalho, usamos a teoria de corpos quadráticos para apresentar uma construção algébrica do reticulado hexagonal  $A_2$ , que é o reticulado de maior densidade de empacotamento na dimensão 2.

## Reticulados

Intuitivamente, um reticulado em  $\mathbb{R}^n$  é um conjunto infinito e discreto de pontos do  $\mathbb{R}^n$  dispostos de forma regular. Formalmente, tem-se a seguinte definição:

**Definição 1** *Seja  $\{v_1, \dots, v_m\}$  um conjunto de vetores linearmente independentes em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $m \leq n$ . O conjunto de pontos  $\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i, \lambda_i \in \mathbb{Z} \text{ para todo } i = 1, \dots, m \right\}$  é chamado de **reticulado** e  $\{v_1, \dots, v_m\}$  é chamada uma base do reticulado.*

**Exemplo 1** *O reticulado hexagonal  $A_2$  é um reticulado gerado pelos vetores  $v_1 = (1, 0)$  e  $v_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .*

Dado um empacotamento no  $\mathbb{R}^n$ , associado a um reticulado  $\Lambda$ , com  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$  uma  $\mathbb{Z}$ -base, definimos a sua densidade de empacotamento como sendo a proporção do espaço  $\mathbb{R}^n$  coberta pela união das esferas. A densidade de centro de  $\Lambda$  é dada por  $\delta(\Lambda) = \frac{\rho^n}{\text{vol}(\Lambda)}$ , onde  $\rho = \frac{1}{2} \min\{|\lambda|; \lambda \in \Lambda, \lambda \neq 0\}$  é o maior raio para o qual é possível distribuir esferas centradas nos pontos de  $\Lambda$  e obter um empacotamento. Em dimensão dois, o reticulado hexagonal  $\Lambda = A_2$ , é o de maior densidade dada por  $\delta(\Lambda) = 0,288675$ .

## Mergulho canônico

Sejam  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  os  $n$  monomorfismos de um corpo de números  $K$  e vamos ordenar os  $\sigma_i$ 's de modo que, para todo  $x \in K$ ,  $\sigma_i(x) \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq r_1$  e  $\sigma_{j+r_2}(x)$  é o complexo conjugado de  $\sigma_j(x)$  para  $r_1 + 1 \leq j \leq r_1 + r_2$ . Note que  $r_1 + 2r_2 = n$ . Chamamos o *mergulho canônico*  $\sigma_K : K \rightarrow \mathbb{R}^{r_1+2r_2}$  o isomorfismo definido por

$$\sigma_K(x) = (\sigma_1(x), \dots, \sigma_{r_1}(x), \Re\sigma_{r_1+1}(x), \Im\sigma_{r_1+1}(x), \dots, \Re\sigma_{r_1+r_2}(x), \Im\sigma_{r_1+r_2}(x)),$$

onde as notações  $\Re(x)$  e  $\Im(x)$  representam as partes real e imaginária do número complexo  $x$ , respectivamente. Utilizando os monomorfismos temos as seguintes definições:

**Definição 2** a) Para cada  $\alpha \in K$ , definimos o *traço* e a *norma* de  $\alpha$  por

$$\text{Tr}(\alpha) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(\alpha) \text{ e } N(\alpha) = \prod_{i=1}^n \sigma_i(\alpha).$$

b) Dado  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K$ , definimos o seu *discriminante* por

$$d_{K/\mathbb{Q}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \det(\text{Tr}(\alpha_i \alpha_j)), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

O próximo resultado, que pode ser encontrado em Samuel (1967), é o principal ingrediente para a geração de reticulados no  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposição 1** Seja  $K$  um corpo de números de grau  $n$  e  $M$  um  $\mathbb{Z}$ -submódulo livre de  $K$  de posto  $n$ . Se  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  é uma  $\mathbb{Z}$ -base de  $M$ , então  $\sigma_K(M)$  é um reticulado em  $\mathbb{R}^n$ .

Como  $\mathcal{O}_K$ , o anel dos inteiros algébricos de  $K$ , e seus ideais são  $\mathbb{Z}$ -módulos livres de posto  $n$ , podemos mergulhá-los em  $\mathbb{R}^n$  para obter um reticulado algébrico.

Uma **matriz geradora** de um reticulado  $\Lambda$  construído usando o mergulho canônico de  $K$ , é dada por

$$G = \begin{pmatrix} \sigma_1(\alpha_1) & \sigma_2(\alpha_1) \cdots & \Re\sigma_{r_1+1}(\alpha_1), \dots, \Im\sigma_{r_1+r_2}(\alpha_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_1(\alpha_n) & \sigma_2(\alpha_n) \cdots & \Re\sigma_{r_1+1}(\alpha_n), \dots, \Im\sigma_{r_1+r_2}(\alpha_n) \end{pmatrix},$$

onde  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  é uma base de  $\mathcal{O}_K$  e  $\text{vol}(\Lambda) = |\det(G)|$ .

## Corpos quadráticos e o reticulado $A_2$

Uma extensão de corpos de grau 2 sobre  $\mathbb{Q}$  é chamada um *corpo quadrático*. Todo corpo quadrático é da forma  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ , sendo  $d$  um inteiro livre de quadrados.

O próximo teorema, que pode ser encontrado em Stewart (1987), fornece o anel dos inteiros algébricos, base integral e discriminante de um corpo quadrático.

**Teorema 1** Se  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  é um corpo quadrático com  $d \in \mathbb{Z}$  livre de quadrados, então o anel dos inteiros algébricos  $\mathcal{O}_K$  de  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  é dado por:

- a)  $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  se  $d \equiv 2$  ou  $d \equiv 3 \pmod{4}$ . Neste caso  $\{1, \sqrt{d}\}$  é uma base integral de  $K$  e  $d_K = 4d$ ;  
b)  $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z} \left[ \frac{1+\sqrt{d}}{2} \right]$  se  $d \equiv 1 \pmod{4}$ . Neste caso  $\{1, \frac{1+\sqrt{d}}{2}\}$  é uma base integral de  $K$  e  $d_K = d$ .

**Exemplo 2** Seja  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ . Como  $-3 \equiv 1 \pmod{4}$  segue que a base integral de  $K$  é  $\{1, (1+i\sqrt{3})/2\}$ . Os dois monomorfismos são  $\sigma_1(i\sqrt{3}) = i\sqrt{3}$ ,  $\sigma_2(i\sqrt{3}) = -i\sqrt{3}$ , uma matriz geradora é dada por

$$G = \begin{pmatrix} \Re\sigma_1(1) & \Im\sigma_1(1) \\ \Re\sigma_1\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) & \Im\sigma_1\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \text{ e } \text{vol}(\Lambda) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Observação 1** Se  $K$  é um corpo de números, podemos reescrever o raio de empacotamento do reticulado  $\sigma_K(\mathcal{O}_K)$  da seguinte forma:

$$\rho(\sigma_K(\mathcal{O}_K)) = \frac{1}{2} \min\{|\sigma_K(x)|, x \in \mathcal{O}_K, x \neq 0\} = \frac{1}{2} \min\left\{\sqrt{c_K \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(x\bar{x})}, x \in \mathcal{O}_K, x \neq 0\right\},$$

onde  $c_K = 1$  se  $K$  for totalmente real e  $c_K = 1/2$  se  $K$  for totalmente imaginário.

**Exemplo 3** Seja  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ , então  $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z} \left[ \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right]$  e  $d_K = -3$ . Se  $x = a + b \left( \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) \in \mathcal{O}_K$  com  $a, b \in \mathbb{Z}$ , então  $x\bar{x} = (a + b \frac{1+i\sqrt{3}}{2})(a + b \frac{1-i\sqrt{3}}{2}) = a^2 + ab + b^2$ ,  $\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(x\bar{x}) = 2(a^2 + ab + b^2)$  e  $\min\left\{\sqrt{\frac{1}{2}\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(x\bar{x})}, x \in \mathcal{O}_K, x \neq 0\right\} = 1$ , para  $a = 1, b = 0$ . Assim

$$\delta(\sigma_K(\mathcal{O}_K)) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 0,288675.$$

Temos que o reticulado  $\sigma_K(\mathcal{O}_K)$  tem a mesma densidade de centro do reticulado  $A_2$ , que é o reticulado de maior densidade na dimensão 2. Portanto, via o corpo quadrático  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$  é possível construir algebricamente o reticulado  $A_2$ .

## Agradecimentos

Agradeço à bolsa de estudos do Programa de Educação Tutorial (PET) e à minha orientadora, Profa. Dra. Carina Alves, pelo incentivo e orientação.

## Referências

ALVES, C. **Reticulados via Corpos Ciclotômicos**. 2005. 125f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2005.

CONWAY, J.H.; SLOANE, N.J.A. **Sphere Packings, Lattices and Groups**. New York:Springer-Verlag, 1999.

SAMUEL, P. **Algebraic Theory of Numbers**. Hermana, Paris, 1967.

STEWART, I.; TALL, D. **Algebraic Number Theory**. New York: Chapman & Hall, 1987.



## Decomposição em valores singulares de um conjunto de séries temporais envolvendo variáveis econômicas e sociodemográficas brasileiras

*Eduardo Godinho*

*Universidade Estadual Paulista; Faculdade de Engenharia de Bauru  
eduardorosagodinho@icloud.com*

*Nair Cristina Margarido Brondino*

*Universidade Estadual Paulista; Faculdade de Ciências  
brondino@fc.unesp.br*

**Resumo:** Grande parte dos combustíveis utilizados no transporte rodoviário é proveniente de fontes não renováveis, o que faz com que a crescente demanda por este tipo de energia cause danos cada vez maiores ao meio ambiente. Neste contexto, o conhecimento de variáveis que influenciam nos níveis de emissões de CO<sub>2</sub> pelo transporte pode auxiliar no planejamento e elaboração de políticas que visem a minimizar os efeitos ambientais causados pelo setor. Nesse trabalho, dezenove séries temporais de variáveis de natureza econômica e sociodemográfica, que podem interferir nas emissões, foram coletadas junto a sites de órgãos oficiais e posteriormente submetidas à Decomposição em Valores Singulares, com vistas a reduzir a dimensão do conjunto.

**Palavras-chave:** Métodos Estocásticos e Estatísticos. Emissões de CO<sub>2</sub>. SVD. Transporte Rodoviário.

### Introdução

Em todo o mundo, o transporte rodoviário cresceu 68% desde 1990 e respondeu por três quartos das emissões de gás carbônico do setor em 2013, de acordo com dados da Agência Internacional de Energia (IEA, 2015). Entre outros fatores, esse efeito deve-se, em grande parte, ao crescimento econômico e populacional e, desta forma, o conhecimento da relação entre as emissões de CO<sub>2</sub> e variáveis dessa natureza pode servir como ferramenta auxiliar na proposta de políticas públicas que visem a reduzir tais emissões.

Para essa aplicação, dezenove séries temporais de variáveis econômicas e sociodemográficas foram coletadas em sites de órgão oficiais (BACEN (2016); IPEA (2016); ANP (2016); ANFAVEA (2016)). Na sequência, aplicou-se Decomposição em Valores Singulares (KRUSKAL, 1982), com vistas a identificar as variáveis que mais contribuem para a variabilidade total do sistema e, assim, promover uma redução de dimensão no conjunto de dados.

### Decomposição em Valores Singulares - SVD

O método de Decomposição em Valores Singulares (SVD) promove a decomposição de uma matriz por meio da Equação 1.

$$X = UV^T, \quad (1)$$

onde  $X$  é uma matriz  $m \times n$  de posto  $r$ ,  $U$  e  $V$  são ortogonais e  $\Sigma$  é diagonal.

A matriz  $X^T X$  é proporcional à covariância das linhas de  $X$ , mantendo as colunas como dimensão amostral. A matriz  $U$  é ortogonal e, portanto,  $UU^T$  é a matriz identidade. Além disso, por  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  ser uma matriz diagonal, tem-se  $\Sigma = \Sigma^T$ . Usando essas propriedades, a matriz  $X^T X$  é dada por:

$$X^T X = V \Sigma^T U^T U \Sigma V^T = V \Sigma^T \Sigma V^T = V \Sigma^2 V^T. \quad (2)$$

A matriz  $X^T X$  é simétrica e positiva semi-definida. Pelo Teorema Espectral, a mesma é diagonalizável numa base de autovetores ortonormais e seus autovalores são reais positivos. Pode-se observar na Equação 2 que a matriz  $V$  diagonaliza  $X^T X$  e, portanto, suas colunas são os autovetores ortonormais (*componentes*) de  $X^T X$  associados aos autovalores  $\lambda_i = \sigma_i^2$ .

Fazendo a mesma análise para  $XX^T$ , que é proporcional à variância das colunas de  $X$ , constata-se que as colunas de  $U$  são os autovetores normalizados de  $XX^T$ . Os elementos da diagonal de  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  são denominados *valores singulares*, são arranjados em ordem decrescente e são tais que  $\sigma_i > 0$  para  $1 \leq i \leq r$  e  $\sigma_i = 0$  para  $r + 1 \leq i \leq n$ . Os  $r$  valores singulares da diagonal de  $\Sigma$  são as raízes quadradas dos autovalores não nulos de  $XX^T$  e  $X^T X$  e são tais que os  $\sigma_i^2$  são proporcionais às variâncias das componentes principais.

A SVD pode ser utilizada para promover a redução da dimensionalidade do conjunto de dados, a partir da manutenção no conjunto de  $k$  valores singulares que expliquem a maior proporção de variância (PV) possível, conforme dado por:

$$PV = \frac{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_k^2}{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2}, \quad (3)$$

onde  $\sigma_1$  e  $\sigma_r$  são o maior e o menor valor singular, respectivamente.

A matriz  $U$  é organizada de tal forma que o primeiro eixo é o mais significativo, uma vez que corresponde ao maior autovalor e conseqüentemente a variância dos pontos ao longo desse eixo é a maior. Usualmente a aplicação do método permite escolher a dimensão da matriz  $X$  que contém a estrutura de interesse e aquela que contém variabilidade amostral.

## Resultados e Métodos

Para essa aplicação considerou-se 19 séries temporais, obtidas junto a sites de órgão oficiais, a saber: Exportações (E); Importações (I); PIB em US\$; População (P) em milhões; Preços em US\$ da gasolina (PG), do diesel (PD), do álcool (PA); Produção de automóveis (PAu), de comerciais leves (PCL), de caminhões (PC) e de ônibus (PO); Número de Licenciamentos de automóveis (LA), de comerciais leves (LCL), de caminhões (LC) e de ônibus (LO); Consumo em m<sup>3</sup>/mês de gasolina (CG), de diesel (CD), de álcool hidratado (CAH) e de álcool anidro (CAA). A matriz  $X$ , de ordem  $19 \times 181$ , foi organizada de tal forma que as variáveis relativas a cada uma das séries temporais foram normalizadas e dispostas por linhas. O software Matlab foi utilizado para obter a SVD.

Partindo-se da Equação (3), foi possível obter o gráfico apresentado na Figura 1, em que o eixo horizontal faz referência aos maiores valores singulares em ordem decrescente e o eixo vertical à fração explicada da variância por cada valor singular (colunas) e à fração cumulativa explicada pelos primeiros valores singulares (linha). Pode-se observar que a base formada pelos cinco primeiros autovetores responde por 95% da variância total.

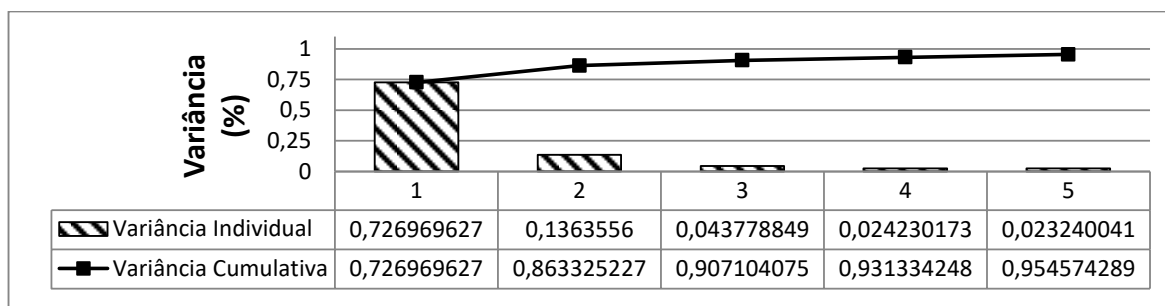


Figura 1: Variâncias relativas e cumulativas explicadas pelos valores singulares.

A Figura 2 apresenta os *biplots* com as duas primeiras componentes (Painel A) e as componentes obtidas a partir da rotação das mesmas pelo método *varimax* (Painel B). O método de rotação *varimax* (KRUSKAL, 1982) permite que cada componente tenha um número pequeno de cargas altas e um número grande de cargas baixas, de tal forma que a mesma represente um número pequeno de variáveis. Pode-se observar no painel (A) que a identificação de algum agrupamento a partir da componente 1 não é de fácil visualização. Utilizando a rotação, observa-se um melhor agrupamento das variáveis com relação às componentes 1 e 2, assim como pode-se visualizar os escores de cada uma delas. Vetores aproximadamente paralelos na figura 2(A) indicam que as variáveis envolvidas contribuem com a mesma informação para o sistema e, portanto, uma pode ser descartada, sem muita perda de informação. Os ângulos  $\theta$  entre pares de vetores que aparecem na figura 2(B) foram calculados e para aqueles pares em que  $\theta = 0 \pm 0,1rad$  ou  $\theta = \pi \pm 0,1rad$ , uma das variáveis foi mantida, escolhendo como critério a de maior módulo.

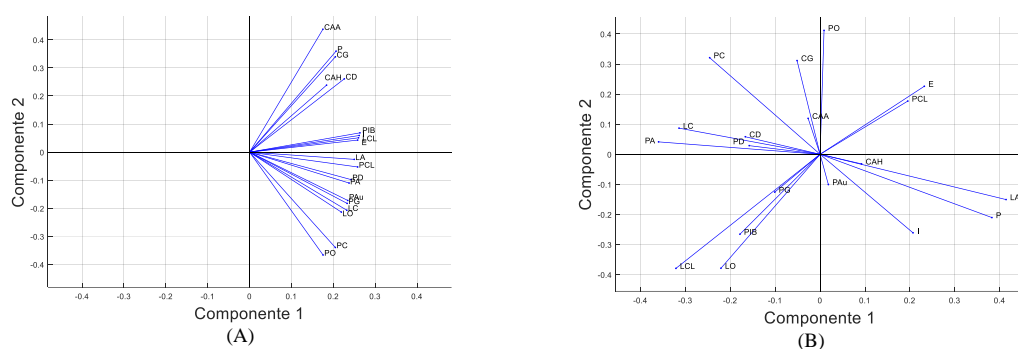


Figura 2: (A) *Biplot* das componentes 1 e 2; (B) *Biplot* obtido pela rotação das componentes 1 e 2.

## Conclusões

É possível identificar a partir do Gráfico 1 que 86,33% da variância total é representada pelos dois primeiros vetores singulares. Após rotação desses vetores, foi possível identificar não só um agrupamento de variáveis, como também indícios de dependência linear entre as mesmas.

Utilizando o critério dos ângulos entre pares de vetores na Figura 2(B) e comparando os resultados obtidos, as variáveis que devem ser mantidas no sistema são: Número de Comerciais Leves Licenciados, Produção de Caminhões, Número de Caminhões Licenciados, Número de Ônibus Licenciados, Produção de Ônibus, Preço do Alcool, Número de Automóveis Licenciados e População.

## Referências

ANFAVEA - Associação Nacional dos Fabricantes de Veículos Automotores. **Produção e vendas de autoveículos**, 2016. Disponível em: <<http://www.anfavea.com.br>>. Acesso em 25 nov. 2016.

ANP - Agência Natural de Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis. **Síntese dos preços praticados – Brasil**, 2016. Disponível em: <<http://www.anp.gov.br>>. Acesso em 24 out. 2016.

BACEN - Banco Central do Brasil. **Sistema Gerador de Séries Temporais**, 2016. Disponível em: <<http://www.bcb.gov.br>>. Acesso em 05 nov. 2016.

IEA - International Energy Agency. **CO<sub>2</sub> Emissions from Fuel Combustion**, 2015. Disponível em: <<http://www.iea.org>> - Acesso em 26.abril.2016.

IPEA - Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada. **Volume de exportações e importações (FOB) em milhões de dólares**, 2016. Disponível em: <<http://www.ipeadata.gov.br>>. Acesso em 27 set. 2017.

KRUSKAL, J. B. **Multilinear Methods**. In: **Statistical Data Analysis**. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics. American Mathematical Society, v. 28, 1982.



## Detecção de ataques a sistemas de reconhecimento facial: uma abordagem baseada nas Máquinas de Boltzmann Restritas

*Gustavo Botelho de Souza*

*Universidade Federal de São Carlos (UFSCar); Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
gustavo.souza@dc.ufscar.br*

*Aparecido Nilceu Marana e João Paulo Papa*

*Universidade Estadual Paulista (UNESP); Faculdade de Ciências  
nilceu@fc.unesp.br, papa@fc.unesp.br*

**Resumo:** Nos últimos anos, a Biometria vem se configurando como opção robusta e conveniente para a identificação de pessoas. Apesar da maior praticidade do reconhecimento facial, sistemas de reconhecimento pela face são os primeiros a sofrer com ataques de apresentação de características sintéticas (fotografias) por meliantes (ataques de *spoofing*). Neste sentido, métodos capazes de detectar automaticamente se a face capturada pela câmera do sistema biométrico é real ou artificial se tornam indispensáveis. Neste trabalho propõe-se uma nova abordagem baseada no descritor LBP (*Local Binary Patterns*) e nas Máquinas de Boltzmann Restritas para a extração das características de textura mais relevantes das faces apresentadas a fim de detectar ataques de *spoofing* facial com maior acurácia. Resultados obtidos sobre a base de imagens NUAA indicam que o método proposto apresenta boas taxas de acerto, mesmo em casos de pouca variabilidade interclasse, como na base avaliada.

**Palavras-chave:** Processamento de Sinais. Métodos Estocásticos e Estatísticos. Campos Aletórios de Markov.

### Introdução

A identificação de pessoas desempenha um papel importante em nossa sociedade. Nos últimos anos, a Biometria vem se configurando como opção de segurança robusta e conveniente para tal fim (JAIN; ROSS; NANDAKUMAR, 2011). Dentre as características biométricas, a face se configura como uma das opções mais convenientes. Entretanto, apesar da praticidade, os sistemas de reconhecimento facial são os primeiros a sofrer com tentativas de fraude visto que meliantes, nos dias atuais, podem facilmente obter imagens faciais de outros indivíduos na rede mundial e apresentá-las aos sistemas de reconhecimento (ataques de *spoofing*).

Para conter tais ataques, métodos de contramedida são necessários. A maioria deles trabalha com descritores tradicionais, extraindo características referenciadas como *handcrafted*, isto é, pré-definidas na formulação da técnica (TAN et al., 2010). Entretanto, resultados recentes têm mostrado que os métodos baseados em redes neurais, que trabalham com características autoaprendidas a partir dos dados de treinamento, vêm superando as técnicas estado-da-arte em muitas tarefas complexas, em especial por permitirem a identificação e extração das características mais relevantes a cada problema (HINTON, 2002).

### Máquinas de Boltzmann Restritas (RBM)

Uma RBM (*Restricted Boltzmann Machine*) (HINTON, 2002), corresponde a um campo aleatório de Markov associado a um grafo bipartido. As RBMs podem ser vistas também como redes neurais estocásticas que aprendem importantes aspectos de distribuições de probabilidade a partir de amostras destas distribuições. Os vértices (neurônios) se dispõem em duas camadas, uma visível  $\mathbf{v}$  (que recebe os vetores de entrada) e outra escondida  $\mathbf{h}$ , com arestas (sinapses) entre vértices de camadas diferentes.

Para se trabalhar com vetores de entrada reais (tons de cinza), emprega-se a chamada GB-RBM (Gaussian-Bernoulli RBM). A função de energia de uma GB-RBM é dada por:

$$E(\mathbf{v}, \mathbf{h}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{(v_i - a_i)^2}{\sigma_i^2} - \sum_{j=1}^n b_j h_j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{v_i}{\sigma_i} h_j w_{ij} \quad (1)$$

onde  $m$  e  $n$  correspondem à quantidade de neurônios visíveis e escondidos, respectivamente;  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  aos *biases* dos neurônios das camadas visível e escondida, nesta ordem;  $w_{ij}$  corresponde ao peso da conexão entre os neurônios  $i$  da camada visível e  $j$  da camada escondida; e  $\sigma_i^2$  corresponde à variância da distribuição gaussiana do neurônio visível  $i$ .

A probabilidade marginal da rede apresentar uma configuração  $\mathbf{v}$  em sua camada visível é dada por:

$$P(\mathbf{v}) = \frac{1}{Z} \sum_{\mathbf{h}} e^{-E(\mathbf{v}, \mathbf{h})} \quad (2)$$

onde  $Z$  corresponde à função de partição (baseada em todas as configurações possíveis da rede).

As ativações dos neurônios da camada visível e dos neurônios da camada escondida são dadas por:

$$P(v_i | \mathbf{h}) = \mathcal{N} \left( v_i \left| \sum_{j=1}^n w_{ij} h_j + a_i, \sigma_i^2 \right. \right) \quad (3)$$

$$P(h_j = 1 | \mathbf{v}) = \phi \left( \sum_{i=1}^m w_{ij} v_i + b_j \right) \quad (4)$$

onde  $\mathcal{N}(\cdot)$  corresponde à distribuição normal de variância  $\sigma^2$  e  $\phi(\cdot)$  à função sigmoideal.

Seja  $\theta = (\mathbf{W}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  o conjunto de parâmetros de uma GB-RBM, o aprendizado da rede consiste no ajuste de tais parâmetros de forma a maximizar as probabilidades de ocorrência de todos os vetores de treinamento. Emprega-se, para resolver este problema, o método denominado Divergência Contrastiva (HINTON, 2002), o qual, em suma, simula o processo de amostragem de Gibbs, inicializando as unidades visíveis da rede com os vetores de treinamento (já normalizados com média zero e variância unitária).

## Abordagem Proposta

Neste trabalho, propõe-se o uso de uma GB-RBM discriminativa, seguindo Montavon, Orr e Müller (2012), a fim aprender as características mais relevantes e classificar imagens faciais em reais ou sintéticas com maior acurácia com base em informações de textura, muitas usadas neste tipo de problema, extraídas pelo descritor LBP (*Local Binary Patterns*) (OJALA; PIETIKÄINEN; HARWOOD, 1996). A arquitetura de uma GB-RBM discriminativa é idêntica à de uma GB-RBM tradicional, exceto pelo fato de que são inseridos, na camada visível da rede, dois neurônios adicionais que servem para representar a classe do vetor (imagem) de entrada: se real ou falsa.

No treinamento, conforme mostra a Figura 1, após converter cada imagem facial conhecida para sua versão LBP, os valores de seus pixels servem de entrada para os nós visíveis tradicionais da GB-RBM e os dois valores referentes à classe da imagem (“1 e 0” se face real, ou “0 e 1” se falsa) são considerados como ativação para os dois neurônios especiais. Dadas todas as imagens de treinamento e suas respectivas classes, procede-se então com a Divergência Contrastiva a fim de ajustar os parâmetros, isto é, o modelo interno da rede, à distribuição de tais amostras conhecidas.

Para determinar a classe de uma dada imagem facial de teste, aplica-se o LBP sobre a mesma, servindo seus pixels de entrada para os nós visíveis tradicionais da GB-RBM e verifica-se qual configuração dos dois neurônios especiais (se “1 e 0”, ou “0 e 1”) apresenta maior probabilidade de ocorrência segundo a distribuição de probabilidades aprendida pela rede. Para isto, calcula-se a energia livre (HINTON, 2002) fornecida pela GB-RBM discriminativa ao se apresentar a imagem de teste e os valores “1 e 0” e ao se apresentar a mesma imagem e os valores “0 e 1” à sua camada visível. A configuração dos dois nós adicionais responsável pela energia livre mínima indica a classe da imagem de teste.



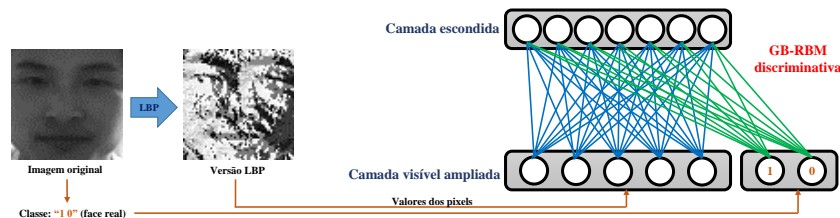


Figura 1: Treinamento da arquitetura proposta: os tons de cinza das imagens de treinamento (após pré-processadas pelo LBP) e os dois valores referentes às suas classes alimentam a GB-RBM discriminativa.

## Experimento e Resultados

A arquitetura proposta foi avaliada sobre a base de imagens NUAA (TAN et al., 2010) - exemplo de imagem facial da base na Figura 1. A GB-RBM discriminativa avaliada possuía 4.098 neurônios visíveis (4.096 para os pixels das imagens  $64 \times 64$  e 2 neurônios adicionais para identificar suas classes) e 2.000 neurônios escondidos. A rede foi treinada sobre 6.982 imagens faciais (3.491 imagens de treinamento originais da base acrescidas de suas versões equalizadas) por 10 épocas (iterações), *learning rate* de 0,001, *momentum* de 0,5 (e 0,9 nas 5 últimas épocas), bem como *weight decay* de 0,0002.

O método proposto obteve acurácia de **93,6%** na classificação das faces sobre as 9.123 imagens de teste, enquanto a técnica proposta pelos próprios autores da base NUAA, que se vale de descritores *handcrafted*, obteve acurácia de **92,0%**. Em complemento, as taxas de falsa aceitação (FAR - *False Acceptance Rate*) e falsa rejeição (FRR - *False Rejection Rate*) da abordagem proposta foram de apenas 7,24% e 4,97%, respectivamente.

## Conclusão

Com base nos resultados obtidos neste trabalho, pode-se perceber que as redes neurais podem aprender e extrair importantes características a partir de amostras conhecidas dos problemas com que lidam, neste caso, detecção de *spoofing* facial, propiciando um desempenho robusto mesmo em tarefas complexas como o teste sobre a base NUAA. A rede apresentada obteve acurácia na detecção de ataques superior à do método proposto pelos próprios autores da base de imagens analisada, que se vale apenas de descritores *handcrafted*.

## Referências

- JAIN, A.; ROSS, A.; NANDAKUMAR, K. **Introduction to Biometrics**. Estados Unidos: Springer, 2011.
- HINTON, G. E. Neural Computation. **Training products of experts by minimizing contrastive divergence**, v. 14, n. 8, p. 1711-1800, 2002.
- MONTAVON, G.; ORR, G. B.; MÜLLER, K. R. **Neural Networks: Tricks of the Trade**. Estados Unidos: Springer, 2012.
- OJALA, T.; PIETIKÄINEN, M.; HARWOOD, D. Pattern Recognition. **A comparative study of texture measures with classification based on feature distributions**, v. 29, n. 1, p. 51-59, 1996.
- TAN, X. et al. Face liveness detection from a single image with sparse low rank bilinear discriminative model. In: EUROPEAN CONFERENCE ON COMPUTER VISION. Grécia: [s.n.], 2010. p. 504-517.



## Determinação da intensidade do impulso em equações diferenciais impulsivas

*Patrícia Kyoie Fukushima*

*Universidade de São Paulo - Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto  
patricia.fukushima@usp.br*

*Vanessa Rolnik*

*Universidade de São Paulo - Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto  
vanessarolnik@ffclrp.usp.br*

**Resumo:** Este trabalho propõe o estudo de problemas inversos associados a equações diferenciais impulsivas (EDIs). Tais EDIs são responsáveis por modelar fenômenos com impulsos. Muitas vezes o interesse está em obter algum parâmetro do problema o qual não pode ser encontrado diretamente por meio de resolução convencional do problema. Uma alternativa é tratar esses problemas como inversos. Por exemplo, nas EDIs, o objetivo pode ser o de obter a intensidade do impulso ou dos impulsos que ocorrem em um determinado intervalo de tempo. Para resolver os problemas inversos, adotamos uma abordagem funcional na qual um funcional de erro confronta dois modelos, um numérico, implementado computacionalmente, que utiliza valores aproximados para a intensidade do impulso, e outro experimental. O trabalho consiste em explorar as curvas de erro, observando qualitativa e quantitativamente o decaimento em direção ao ponto de mínimo. Como aplicação, descrevemos uma situação na qual a intensidade corresponde à dosagem de um dado medicamento.

**Palavras-chave:** Problemas Inversos, Equações Diferenciais Impulsivas, Parâmetro a determinar, Determinação do impulso.

## Introdução

As equações diferenciais impulsivas (EDIs) são responsáveis por descrever os processos de evolução que estão sob influência de efeitos impulsivos, ou seja, em certos momentos os processos sofrem uma mudança abrupta de estado (LAKSHMIKANTHAM, 1989). Assim, por meio de equações diferenciais envolvendo efeitos impulsivos podemos analisar os fenômenos que nos cercam.

Um sistema de equações diferenciais impulsivo é descrito como:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x), & t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \dots \\ x(0) = \alpha \\ \Delta x = I_k(x), & t = t_k \end{cases} \quad (1)$$

onde  $f: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto aberto e  $\mathbb{R}_+$  é o conjunto dos números reais não negativos;  $I_k: \Omega \rightarrow \Omega$ ,  $k = 1, 2, \dots$  e  $\Delta x = x(t_k^+) - x(t_k^-)$ . Os momentos  $t_k$  são chamados de instantes ou momentos de efeito impulso,  $I_k$  representa o salto de estado de cada  $t_k$ , onde  $x(t_k^+)$  e  $x(t_k^-)$  representam o limite direito e o limite esquerdo, respectivamente, do estado de  $t = t_k$ . Esses momentos de impulso podem acontecer em tempos pré-definidos ou em tempos variáveis.

Muitas vezes o interesse está em obter algum parâmetro do problema o qual não pode ser encontrado diretamente por meio de resolução convencional. Uma abordagem é tratar esses problemas como inversos. Os problemas direto e inverso de um fenômeno estão, em geral, relacionados ao processo de causa e efeito. O problema direto busca determinar os efeitos desconhecidos a partir do conhecimento das causas, e o problema inverso, por sua vez, busca determinar as causas desconhecidas a partir do conhecimento dos efeitos (ALIFANOV, 1994).

No caso do sistema de EDIs, o problema direto corresponde à solução do sistema (1),  $x(t)$ , enquanto que um possível problema inverso pretende determinar as intensidades dos impulsos (saltos),  $I_k$ , a partir do conhecimento da EDO e dos momentos dos impulsos.

Para resolver os problemas inversos, adotamos uma abordagem funcional na qual confrontamos dois modelos, um numérico, implementado computacionalmente, com valores aproximados para os saltos, e outro experimental. Na posse dessas duas medidas, cria-se um funcional de erro que mede a discrepância entre as informações obtidas pelos dois modelos. De forma simplificada, o esquema mostrada na Figura 1, baseado em (MENIN; MARTINEZ; ROLNIK, 2016), supõe  $I_{prospectivo}$  um conjunto de valores aproximados para as intensidades dos impulsos. Com esses valores, resolve-se a EDI, obtendo a solução  $x_{num}$ . Esse valor é comparado com a solução exata da EDI, por meio de um funcional de erro. Um algoritmo de otimização é responsável por modificar o  $I_{prospectivo}$ .

A solução do problema inverso requer que o problema direto seja resolvido a cada iteração do processo, ou seja, a cada alteração que o algoritmo realizar no parâmetro. Esse processo é repetido até que haja uma boa aproximação entre os valores experimentais e os numéricos.

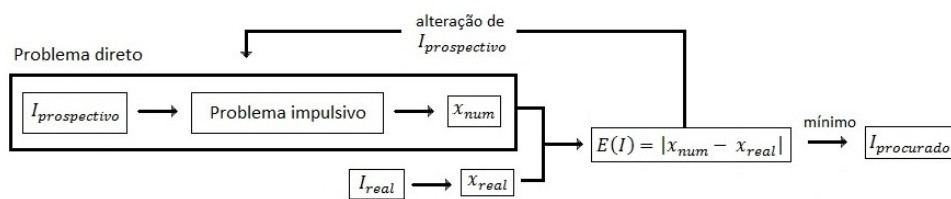


Figura 1: Esquema da resolução do problema inverso de EDIs pela abordagem funcional.

## Resultados

Considere o problema (LAKSHMIKANTHAM, 1989)

$$\begin{cases} x'(t) = 1 + x^2, & t \neq \frac{k\pi}{4}, & k = 1, 2, \dots \\ x(0) = 0 \\ \Delta x = -1, & t = \frac{k\pi}{4} \end{cases} \quad (2)$$

cuja solução é  $x(t) = tg(t - \frac{k\pi}{4})$ ,  $t \in [\frac{k\pi}{4}, \frac{(k+1)\pi}{4})$ , que é periódica com período  $\frac{\pi}{4}$ .

Esta solução pode representar de forma bastante simplificada e sem preocupação com a escala de medição, por exemplo, a elevação da taxa de glicose no organismo. Em tempos pré-definidos, o paciente faz uso de insulina (ação modelada pelo salto), abaixando a taxa de glicose. Em seguida, a taxa volta a subir e o processo se repete.

Apesar de possuir solução analítica, o problema direto precisa ser resolvido diversas vezes e por isso foi implementado computacionalmente no software Matlab usando o método de Runge-Kutta adaptado para EDIs (RANDELOVIC; STEFANOVIC; DANKOVIC, 2000).

O primeiro exemplo considerou o intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$  onde ocorre apenas um salto em  $t = \frac{\pi}{4}$  de intensidade  $I_{real} = -1$ . O problema inverso consiste em resolver a EDI (problema direto) diversas vezes variando  $I_{prospectivo}$  de -2 a 0, com passos 0.1, e calcular a diferença entre  $x_{num}$  e  $x(\frac{\pi}{2})$ . Plotando os pontos encontrados, em escala logarítmica, obtemos a curva de erro mostrada na Figura 2a).

O segundo exemplo considerou o intervalo  $[0, \frac{3\pi}{2}]$  onde ocorrem dois saltos de intensidade  $I_{real} = -1$ . Neste caso, a variável  $I_{prospectivo}$  possui duas coordenadas que variaram de -2 a -0.7, com passos 0.1. A diferença entre  $x_{num}$  e  $x(\frac{\pi}{2})$  gerou a superfície de erro mostrada na Figura 2b). O ponto de mínimo global

ocorre no ponto da malha (11,11), que corresponde aos 2 saltos de intensidade -1. Já o ponto de mínimo local em (6,13) informa que o primeiro salto com intensidade de -1.5 e o segundo de -0.8 levam  $x_{num}$  bem próxima à solução exata  $x(\frac{\pi}{2})$ .

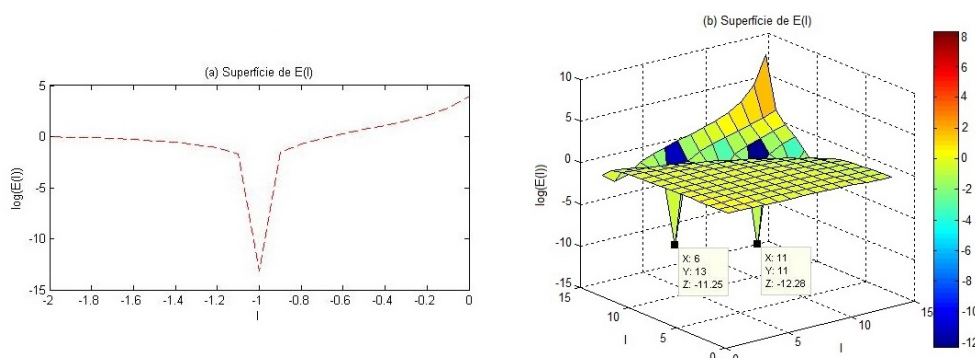


Figura 2: Gráfico dos funcionais de erro: a) do exemplo 1 e b) do exemplo 2.

## Conclusões

Em ambos exemplos, o ponto de mínimo global coincide com a solução exata do problema. No primeiro, o funcional de erro possui um único ponto de mínimo enquanto que no segundo há múltiplos mínimos locais. Além disso, observamos regiões praticamente planas e uma queda abrupta para o mínimo, sugerindo o uso de um método de otimização global.

De maneira geral, é possível estimar a intensidade do impulso tratando o problema como inverso e usando a abordagem funcional. É um trabalho inicial que ainda será bastante explorado. Está em estudo a determinação simultânea do momento e da intensidade do impulso.

## Agradecimentos

Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

## Referências

- ALIFANOV, O. M. **Inverse Heat Transfer Problems**. International series in heat and mass transfer, Springer-Verlag, 1994.25.
- LAKSHMIKANTHAM, V.; BAINOV, D. D.; SIMEONOV, P. S. **Theory of Impulsive Differential Equations**. Singapore: World Scientific, 1989.
- MENIN, O. H.; MARTINEZ, A. S.; ROLNIK, V. **Tomografia de impedância elétrica: métodos computacionais**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.
- RANDELOVIC, B. M.; STEFANOVIC, L. V.; DANKOVIC, B. M. **Numerical solution of impulsive differential equations**. Facta Univ. Ser Math. Inform, 15 (2000), 101-111.

## Estudo de problemas de dimensionamento de lotes com múltiplos itens

*Ana Laura Carvalho Bianco*

*Universidade Estadual Paulista; Faculdade de Engenharia  
analauracb.1996@gmail.com*

*Adriana Cristina Cherri Nicola*

*Universidade Estadual Paulista; Faculdade de Ciências  
[adriana@fc.unesp.br](mailto:adriana@fc.unesp.br)*

**Resumo:** Problemas de dimensionamento de lotes são amplamente estudados na literatura e fazem parte de uma classe de problemas que envolvem decisões de planejamento da produção industrial. Basicamente, esses problemas consistem em definir uma estratégia para a utilização da capacidade de determinada estrutura fabril. As decisões envolvem quais produtos serão produzidos, em quais quantidades e em qual período, de forma a atender a demanda com a melhor relação custo-benefício possível. Este problema apresenta diversas aplicações industriais e, desta forma, neste trabalho é realizado um estudo detalhado do problema de dimensionamento de lotes com múltiplos itens (é possível que haja a produção de um ou mais itens em um único período dentro do horizonte de planejamento), restrições de capacidade, custos de produção, preparação e estoque. Além do estudo teórico, para resolver este problema, a heurística relax-and-fix vem sendo implementada.

**Palavras-chave:** Dimensionamento de lotes. Heurística. Otimização. Planejamento de produção.

### Introdução

A progressiva integração dos mercados, aliada ao desenvolvimento cada vez mais rápido de novos produtos, faz com que um número crescente de empresas se preocupe com a qualidade e a adaptabilidade de seus processos produtivos. Muitas empresas, percebendo o benefício da pesquisa operacional, estão dando abertura para os profissionais da área trabalharem com determinados problemas, buscando com isso uma melhor otimização dos recursos. Os problemas de dimensionamento de lotes (PDL) se alinham a esta tendência de evolução do processo de decisão e são extensivamente estudados por pesquisadores, o que reflete não apenas a sua importância prática, mas também a dificuldade de obtenção de soluções ótimas.

Os PDL podem ser tratados como problemas discretos, em que a produção está inserida num horizonte de planejamento dividido em períodos, nos quais as demandas dos produtos são conhecidas e a produção excedente realizada em cada período pode ser estocada para os períodos posteriores. O objetivo é de cunho econômico, representado pelos custos de produção. Uma extensão para o PDL envolve a tomada de decisão para realizar a produção de vários itens num mesmo período de tempo. Neste problema, conhecido como PDL Multi-Itens, além de determinar a quantidade de cada item a ser produzida, deve-se levar em consideração que estes itens possuem um custo de produção, de preparação e de armazenamento em estoque. De acordo com Karimi et al. (2003), o PDL é um importante problema de decisão e planejamento de médio e, em alguns casos, de curto prazo. Esse é um problema clássico de pesquisa operacional que consiste em determinar a quantidade a ser produzida de cada produto e o momento em que a produção deve ocorrer, ou seja, o planejamento está relacionado a um horizonte de planejamento.

Os primeiros trabalhos que enfocam o PDL são de Manne (1958) e de Wagner e Whitin (1958) os quais abordam o problema com um único produto e sem restrições quanto a capacidade de produção para esse produto. Após esses estudos, vários autores direcionaram suas pesquisas a extensões e métodos de solução para os PDL. Uma extensão para esse problema envolve a tomada de decisão para realizar a produção de vários itens num mesmo período de tempo.

Além disso, pode-se considerar que há um tempo para que cada item seja produzido e para a preparação da linha de produção (máquina). Trigeiro et al. (1989) apresentaram o primeiro trabalho com um método para a resolução do PDL com tempos de preparação para produção.

Mercé e Fontan (2003) consideram o PDL monoestágio com múltiplos itens, restrições de capacidade e possibilidade de atraso na entrega dos itens. Também há inserção de restrições de quantidade mínima de peças

produzidas, tempos e custos de preparações não nulos. Em Rocha (2016) o PDL foi aplicado em uma indústria moveleira, caracterizada como multi-itens, multiestágio, de demanda determinística, com horizonte finito, capacitado, com custo de ajuste e de estoques e penalizações por atrasos dos pedidos.

Entre as várias técnicas empregadas para a resolução dos PDL e suas variações, encontra-se a heurística *relax-and-fix*. A principal motivação em adotar essa heurística é a facilidade como é implementado em muitos pacotes de otimização e a esperança de gerar bons limitantes superiores para o valor da solução ótima em um tempo relativamente baixo. De forma geral, essa heurística decompõe problemas grandes em vários problemas menores, particionando o conjunto de variáveis inteiras em  $n$  subconjuntos disjuntos.

## PDL com múltiplos itens, restrições de capacidade, custo e tempo para preparação

Em diversos contextos industriais, é muito comum a produção de vários itens em um mesmo período de tempo. Visando uma solução com custos totais mínimos, vários aspectos operacionais podem ser considerados. Um modelo clássico de dimensionamento é apresentado a seguir, proposto originalmente por Trigeiro (1989). O problema consiste em um PDL monoestágio, multi-itens, com restrição de capacidade, custos de produção, preparação e estoque. Para tornar a representação mais realista, são considerados tempos de preparação e de produção. Para a formulação do problema os seguintes dados são considerados:

*Índices:*

- ✓  $t = \{1, \dots, T\}$  períodos de tempo;
- ✓  $i = \{1, \dots, N\}$  itens.

*Parâmetros*

- ✓  $C_{it}$ : custo unitário de produção do item  $i$  no período  $t$ ;
- ✓  $S_{it}$ : custo de preparação para a produção do item  $i$  no período  $t$ ;
- ✓  $H_{it}$ : custo unitário de estocagem do item  $i$  no período  $t$ ;
- ✓  $b_{it}$ : tempo necessário para produzir uma unidade do item  $i$  no período  $t$ ;
- ✓  $s_{it}$ : tempo de preparação para a produção do item  $i$  no período  $t$ ;
- ✓  $CAP_t$ : limite de capacidade (em unidades de tempo) no período  $t$ ;
- ✓  $d_{it}$ : demanda do item  $i$  no período  $t$ ;
- ✓  $M$ : número grande.

*Variáveis de decisão são:*

- ✓  $X_{it}$ : quantidade do item  $i$  produzidas no período  $t$ ;
- ✓  $I_{it}$ : quantidade do item  $i$  estocadas no período  $t$ ;
- ✓  $Y_{it}$ : indica a produção ( $Y_{it} = 1$ ) ou não ( $Y_{it} = 0$ ) do item  $i$  no período  $t$ .

*Modelo Matemático:*

$$\text{Min } \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (H_{it}I_{it} + C_{it}X_{it} + S_{it}Y_{it}) \quad (1)$$

Sujeito a:

$$I_{i,t-1} + X_{it} - I_{it} = d_{it} \quad i = 1, \dots, N, t = 1, \dots, T \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^N b_{it}X_{it} + \sum_{i=1}^N s_{it}Y_{it} \leq CAP_t \quad t = 1, \dots, T \quad (3)$$

$$X_{it} \leq MY_{it} \quad i = 1, \dots, N, t = 1, \dots, T \quad (4)$$

$$X_{it} \geq 0; I_{it} \geq 0; Y_{it} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, N, t = 1, \dots, T \quad (5)$$

No modelo (1)-(5), a função objetivo (1) minimiza o custo total obtido pela soma dos custos de estoque, produção e preparação. O conjunto de restrições (2) é referente ao balanço de estoque. Para cada item e período, a quantidade disponível em estoque no final do período anterior adicionada a quantidade produzida menos a produção em excesso que ficará em estoque deve satisfazer a demanda. As restrições (3) referem-se à





limitação de capacidade para a produção dos itens em cada período. Esta restrição considera o tempo necessário para a produção dos vários itens e o tempo gasto com preparação da linha de produção. As restrições (4) garantem que há produção apenas quando a linha de produção está preparada e, por fim, as restrições (5) referem-se ao domínio das variáveis. Na implementação deste modelo, é necessário um estoque inicial, que será assumido como nulo. ( $I_{i0} = 0, i = 1, \dots, N$ ). Devido aos altos valores que as variáveis  $X_{it}$  e  $I_{it}$  assumem em problemas práticos, é comum a relaxação da condição de integralidade dessas variáveis. Para resolver o problema (1)-(5), a heurística relax-and-fix, que é uma abordagem de solução baseada em métodos exatos, vem sendo implementada.

## Considerações Finais

Este trabalho aborda o problema de dimensionamento de lotes com múltiplos itens, restrições de capacidade, custos de produção, preparação e estoque. Um modelo matemático clássico da literatura vem sendo implementado utilizando a heurística relax-and-fix. Testes computacionais serão realizados com exemplares gerados aleatoriamente.

## Agradecimentos

Agradeço à minha professora Adriana Cherri, que está doando seu tempo e disposição para meu crescimento e estudo na área de Pesquisa Operacional e à Faculdade de Ciências da Unesp, que contribui com eventos e disponibilidade de recursos para estudo.

## Referências

- KARIMI, B., FATEMI GHOMI, S. M. T. e WILSON, J. M. Omega. **The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms**, v. 31, p. 365-378, 2003.
- TRIGEIRO, W. W., THOMAS, J. e MCCLAIN, J. O. Management Science. **Capacitated lot sizing with setup times**, v. 35, p. 353-366, 1989.
- WAGNER, H. M. e WHITIN, T. M. Management Science. **Dynamic version of the economic lot size model**. vol. 5, p. 89-96, 1958.



## Estudos sobre o problema de corte de estoque unidimensional com aplicação na indústria de papel

*Vinicius Dias Vasconcelos*  
UNESP; Faculdade de Ciências  
vinicius.dias@fc.unesp.br

*Sônia Cristina Poltroniere*  
UNESP; Faculdade de Ciências  
soniacps@fc.unesp.br

**Resumo:** Neste trabalho de iniciação científica, abordamos o problema de corte de estoque unidimensional, as modelagens matemáticas propostas na literatura e métodos de solução. O problema de corte destaca-se no planejamento e programação da produção em indústrias, em que o estágio de corte de objetos maiores em itens menores é relevante. Além disso, pretende-se aplicar as modelagens estudadas e uma técnica de solução, proposta na literatura, para o problema de corte unidimensional que ocorre na indústria de papel.

**Palavras-chave:** Otimização. Problema de corte de estoque. Programação linear.

### Introdução

O problema de corte de estoque é essencial no processo de produção de várias indústrias tais como a indústria de papel, aço, concreto, entre outras. Tal problema fundamenta-se na otimização do processo de corte de unidades maiores (objetos) disponíveis, para a produção de unidades menores (itens), de forma que um critério de otimização seja satisfeito como, por exemplo, minimizar o número de objetos cortados para atendimento da demanda de itens. Uma característica importante do problema de corte de estoque é que muitos itens devem ser produzidos, porém, de poucos tipos, ou seja, é grande a repetição de itens. Para tanto, deve-se encontrar um conjunto de padrões de corte que serão repetidos um certo número de vezes. Um padrão de corte corresponde a uma maneira de cortar um objeto em itens, como exemplificado na Figura 1. Na indústria papeleira, após a produção de jumbos (bobinas grandes de papel), estes são cortados em bobinas menores de larguras especificadas (que podem ser cortadas na sequência em retângulos), para atendimento da demanda. O objetivo pode ser, por exemplo, minimizar o número de jumbos utilizados ou a perda de material durante o processo de corte. Nos últimos anos, pesquisadores têm trabalhado com a integração do problema de corte com outros problemas que surgem no planejamento da produção em indústrias de manufatura. Como exemplo, citamos Poltroniere (2006), Gramani et al. (2010), Santos et al. (2011) e Silva et al. (2014)

### O problema de corte de estoque unidimensional

O problema de corte é classificado de acordo com o número de dimensões do objeto, relevante para o processo corte, podendo ser unidimensional, bidimensional ou tridimensional. Dessa maneira, na definição dos padrões do corte a serem utilizados em cada caso, algumas regras são necessárias. Neste trabalho, abordamos o problema de corte de estoque unidimensional, que ocorre quando apenas uma dimensão é relevante durante o processo de corte. O caso unidimensional pode ser identificado na indústria papeleira, no corte dos jumbos em bobinas menores, para o atendimento da demanda dos clientes ou para posterior corte em retângulos.

Como exemplo ilustrativo, considere um jumbo de largura  $L = 100$  e três diferentes tipos de bobinas, com larguras  $l_1 = 30$ ,  $l_2 = 40$  e  $l_3 = 50$ , conforme representado na Figura 1. São apresentados dois possíveis padrões de corte unidimensionais para a produção das bobinas menores.

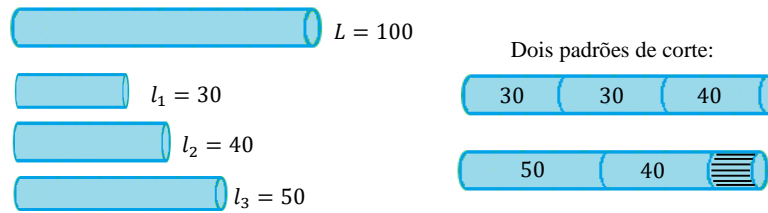


Figura 1: Objeto e tipos de itens a serem cortados.

O problema de corte de estoque pode ser tratado supondo um único tipo de objeto em estoque ou vários tipos, em quantidades limitadas ou não. Kantorovich (1960) propôs uma abordagem que considera apenas um tipo de objeto em estoque, com o objetivo de minimizar o número de objetos cortados para atender a uma demanda. A formulação apresenta um limitante superior para o número de objetos disponíveis. A seguir, apresentamos a modelagem matemática para o problema, supondo um único tipo de objeto, em quantidade ilimitada, proposta por Gilmore e Gomory (1961), que resolve o problema usando o método simplex com a técnica de geração de colunas. Nesta abordagem, a cada passo do método simplex, é resolvido um subproblema que consiste em gerar um novo padrão de corte, o mais atrativo, sem a necessidade de explicitar todos os possíveis.

Seja o objeto em estoque de largura  $L$  e os itens demandados de larguras  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , segundo uma demanda  $d_i$ . Em geral, muitos objetos em estoque deverão ser cortados para a produção dos diferentes itens demandados, utilizando-se alguns *padrões de corte*. Cada possível padrão de corte  $j$  pode ser representado por um vetor  $\mathbf{a}_j$ , no qual cada um de seus elementos  $a_{ij}$  representa a quantidade de itens do tipo  $i$  que serão cortados no padrão  $j$  a partir de um determinado objeto:

$$\mathbf{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}), \quad j = 1, \dots, n$$

Cada vetor  $\mathbf{a}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , representa um padrão de corte se, e somente se, a seguinte restrição for obedecida:

$$l_1 a_{1j} + l_2 a_{2j} + \dots + l_m a_{mj} \leq L \quad (1)$$

Uma vez definidos os padrões de corte, o problema resume-se em determinar a quantidade de objetos que devem ser cortados usando cada padrão, isto é, quantas vezes cada padrão de corte deve ser utilizado para o atendimento da demanda, segundo algum critério de otimização. Nesta modelagem, o objetivo será minimizar o número de objetos cortados. Seja  $x_j$  o número de objetos cortados segundo o padrão  $j$  e  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_m)$  o vetor de demanda de modo que  $d_i$  é a demanda do item  $i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . A modelagem matemática é dada por:

$$\text{Minimizar } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (2)$$

sujeito a:

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \dots + \mathbf{a}_n x_n \geq \mathbf{d} \quad (3)$$

$$x_j \geq 0 \text{ e inteiros, } j = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Muitas são as maneiras de cortar o objeto para se obter os itens demandados, ou seja, existe um número muito grande de padrões de corte, porém, apenas alguns são “atrativos” de modo a tornar o processo eficiente. Além disso, deve-se considerar a dificuldade de obter soluções inteiras para o problema. Para contornar essas dificuldades, Gilmore e Gomory (1961, 1963) propuseram o uso do método simplex com a técnica de geração de colunas para resolver o problema (2) – (4), com a restrição de integralidade das variáveis relaxada. A técnica de geração de colunas consiste em, a cada passo do método simplex, gerar uma coluna (padrão de corte) mais “atrativa”, a partir da solução de um subproblema conhecido como problema da mochila. Tal subproblema consiste em satisfazer a inequação (1), ou seja, a soma das larguras de todos os itens cortados não pode ser maior que a largura do objeto, maximizando o valor de utilidade (importância) dos itens. Tal subproblema pode ser resolvido usando o

método de enumeração implícita (*branch-and-bound*), o qual gera implicitamente padrões de corte para o problema, de forma que sejam descartados padrões “piores” que os obtidos anteriormente. Obtida a solução do problema relaxado, é possível obter a solução inteira por meio de técnicas de arredondamento, objeto de estudo deste projeto de iniciação científica.

## Aplicações

Neste projeto, pretende-se aplicar a modelagem proposta por Gilmore e Gomory (1961, 1963) para o problema de corte unidimensional em uma situação que ocorre na indústria de papel. No processo de produção e corte dos jumbos de papel, o problema de corte de estoque deve ser considerado. Após a produção dos jumbos, estes são cortados em bobinas menores de larguras especificadas (que podem ser cortadas na sequência em retângulos), para atender a demanda com o objetivo de minimizar, por exemplo, o número de jumbos utilizados ou a perda de material durante o processo de corte. O corte dos jumbos em bobinas menores (primeiro estágio de corte) pode ser modelado como um problema de corte unidimensional.

Está em andamento uma revisão bibliográfica sobre o problema unidimensional, com vários tipos de objetos em estoque, em quantidades limitadas. Os métodos de solução serão implementados utilizando-se o pacote de otimização AMPL/CPLEX. Testes computacionais serão realizados, considerando-se um conjunto de instâncias que se aproximam da realidade em uma indústria papeleira.

## Referências

- ARENALES, M. N.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R.; YANASSE, H. **Pesquisa Operacional**. 1.ed. Rio de Janeiro: Editora Elsevier, 2011.
- DANTZIG, G. B. **Linear programming and extensions**. 7.ed. New Jersey Princeton University Press, 1960.
- GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. **A linear programming approach to the cutting stock problem**. Operations Research, n. 9, p. 848-859, 1961.
- GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. **A linear programming approach to the cutting stock problem – part II**, Operations Research, n. 11, p. 863-888, 1963.
- GRAMANI, M.C.N.; FRANÇA, P.M.; ARENALES, M.N. **A linear optimization approach to the combined production planning model**. Journal of the Franklin Institute, n. 7, p. 1523-1536, 2010.
- KANTOROVICH, L. **Mathematical methods of organising and planning production** (traduzido a partir de um artigo russo, datado de 1939), Management Science, n. 6, p. 366-422, 1960.
- POLDI, K. C. **Algumas extensões do problema de corte de estoque**. 2003. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação e Matemática Computacional – ICMC, USP, São Carlos, 2003.
- POLTRONIERE, S. C. **Otimização do processo de corte integrado à produção de bobinas - modelo e métodos de solução**. 2006. Tese (Doutorado em Ciência da Computação e Matemática Computacional) – ICMC, USP, São Carlos, 2006.
- SANTOS, S.G.; ARAUJO, S.A.; RANGEL, S. **Integrated cutting machine programming and lot sizing in furniture industry**, Revista Eletrônica Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento, n. 3, p. 249-266, 2011.
- SILVA, E.; ALVELOS, F.; VALÉRIO DE CARVALHO, J.M. **Integrating two-dimensional cutting stock and lot-sizing problems**. Journal of Operational Research Society, n. 65, p. 108-123, 2014.



Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional  
De 2 a 5 de Maio de 2017  
Unesp, Faculdade de Ciências - Bauru/SP

## **Formação continuada de professores de matemática: uma produção de vídeos articulados com GeoGebra e os Cadernos do Professor/Aluno**

*Jucieli Catarina de Almeida*  
Unesp; Faculdade de Ciências, Bauru  
jucieli.almeida@hotmail.com

*Leandra dos Santos*  
Unesp; Faculdade de Ciências, Bauru  
leandrapereirasantos@hotmail.com

*Josyellen Ferreira Jordão*  
Unesp; Faculdade de Ciências, Bauru  
josy\_jordao@hotmail.com

*Sueli Liberatti Javaroni*  
Unesp; Faculdade de Ciências, Bauru  
suelilj@fc.unesp.br

**Resumo:** O propósito deste trabalho é apresentar uma pesquisa de Iniciação Científica, que tem por objetivo a produção de vídeos, voltados para professores, que orientem a construção de atividades Matemáticas com o software GeoGebra, contemplando possibilidades de exploração da atividade e do software em sala de aula. As construções foram baseadas no Caderno do Aluno e no Caderno do Professor do Ensino Fundamental II e Médio, material oficial do currículo das Escolas Estaduais de São Paulo.

**Palavras-chave:** Matemática; Tecnologias Digitais; Ensino; Formação de Professores.

### **Introdução**

A nossa sociedade vem passando por diversas transformações desde a chamada globalização. Dentre elas, sabemos que nosso modo de viver e nossas relações são influenciadas pelas tecnologias digitais, sobretudo, o computador. Nesse contexto, consideramos que, na formação de professores, o uso de tecnologias digitais (TD) deve ser abordado.

O projeto “Mapeamento do uso de tecnologias da informação nas aulas de Matemática no Estado de São Paulo”<sup>1</sup>, coordenado pela Profa. Dra. Sueli Liberatti Javaroni, tem propiciado o desenvolvimento de pesquisas de iniciação científica, mestrado e doutorado, com temas ligados à formação de professores e uso de TD nas aulas de Matemática. Inicialmente, preocupou-se com o levantamento das condições de infraestrutura dos laboratórios de informática das escolas públicas da rede estadual paulista, vinculados às Diretorias de Ensino de Bauru, Guaratinguetá, Limeira, Registro, São José do Rio Preto, Guaratinguetá e Presidente Prudente (JAVARONI; ZAMPIERI, 2015).

Em seguida, foram realizadas pesquisas acerca da formação docente para o uso de TD, nas quais foram propostos cursos de formação continuada com enfoque na articulação de atividades Matemáticas com o GeoGebra, que é um software livre, com interface amigável, e articula geometria e álgebra<sup>2</sup>, desenvolvidos em parceria com as Diretorias de Ensino (ANDRADE; ZAMPIERI; JAVARONI, 2016).

<sup>1</sup>Projeto de pesquisa denominado Mapeamento ao longo do texto. Aprovado sob nº 16429, Edital 049/2012/CAPES/INEP/OBEDUC. Disponível em: <<http://www.capes.gov.br/educacao-basica/observatorio-da-educacao>>. Acesso em: 25 março 2017.

<sup>2</sup>INSTITUTO GEOGEBRA. **Sobre o GeoGebra**. Instituto GeoGebra, Rio de Janeiro 2010. Disponível em: <<http://www.geogebra.im-uff.mat.br/>>. Acesso em: 25 março 2017.

Caderno de trabalhos completos e resumos do IV ERMAC – Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional - Unesp, Bauru/SP, 2017.

## Desenvolvimento

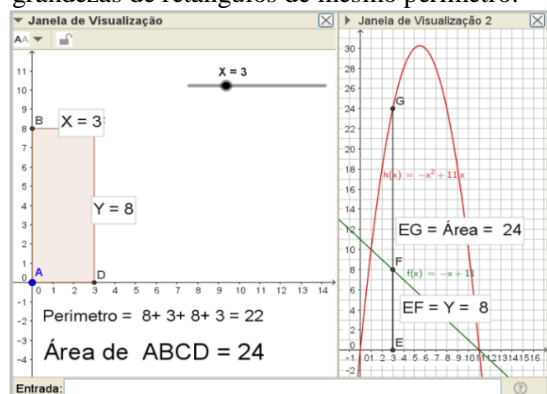
A fim de auxiliar os professores no uso do software GeoGebra, como subsídio aos cursos de formação continuada, foram produzidos vídeos educativos para construção e sugestões de abordagem de atividades presentes no Caderno do Professor e Caderno do Aluno, material pedagógico oficial do currículo da rede estadual paulista, para as séries finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio da Educação Básica<sup>3</sup> (SANTOS, L.; JORDÃO, J. F.; ALMEIDA, J. C., 2016). Tais vídeos foram desenvolvidos sob a orientação do doutorando Tiago Chinellato e supervisão da Coordenadora do Projeto Mapeamento, analisados e discutidos coletivamente em reuniões virtuais quinzenais.

Futuramente, após novas edições, posteriores às revisões de demais colaboradores do Mapeamento, o material produzido será divulgado em um canal no YouTube, no qual todos terão acesso, inclusive os professores da rede pública de ensino que participaram das ações do projeto, a fim de incentivar o uso das Tecnologias Digitais nas aulas de Matemática. Para o desenvolvimento das atividades foram consideradas as potencialidades oferecidas pelo GeoGebra, o que inclui recursos, ferramentas e possibilidades de investigação pelos alunos, após análise das propostas presentes no Caderno do Aluno e do Professor (SANTOS, L. et al., 2016).

## Resultados e Discussão

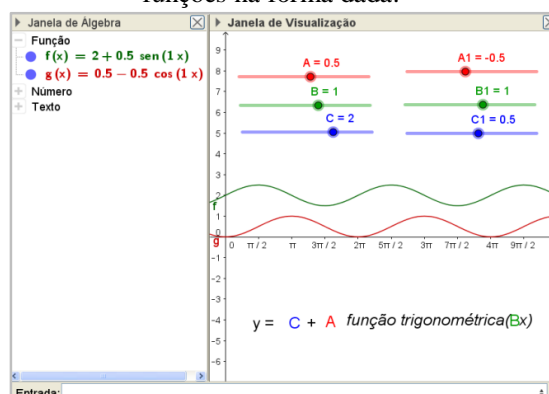
A seguir, apresentamos figuras, telas do GeoGebra, que representam algumas atividades desenvolvidas na pesquisa apresentada neste trabalho, cujas construções e possibilidades de exploração em sala, tanto pelo professor quanto pelos alunos, foram abordadas nos vídeos produzidos.

Figura 1: Construção de funções que representam grandezas de retângulos de mesmo perímetro.



Fonte: dados da pesquisa

Figura 2: Material de apoio para comparação de funções na forma dada.



Fonte: dados da pesquisa

Na Figura 1 pode-se observar, na Janela de Visualização 2, a construção das funções  $f(x) = -x + 11$  e  $h(x) = -x^2 + 11x$ , que representam, respectivamente, o lado Y dos retângulos em função do lado X e a área desses retângulos, que devem ser descobertas pelos alunos. Na Janela de Visualização, é possível representar todas as possibilidades de retângulos com perímetro de medida 22 por meio do Controle Deslizante, que corresponde ao lado X dos retângulos. Ao movimentar esse Controle, o aluno pode observar a variação nas grandezas descritas pelas funções, destacadas pelos segmentos EG e EF e, concomitantemente, o respectivo retângulo (JORDÃO, J. f. et al., 2016).

A Figura 2 representa o material de apoio desenvolvido em uma atividade para análise de amplitude, período e deslocamento de gráficos de funções trigonométricas na forma  $y = C + A f(Bx)$ , sendo A, B e C constantes e  $f(Bx)$  uma função trigonométrica.

<sup>3</sup> SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO. **Material pedagógico auxilia alunos na rede estadual no desenvolvimento de competências do Currículo Oficial.** Disponível em: <<http://www.educacao.sp.gov.br/caderno-aluno>>. Acesso em: 25 maio 2017.





## Considerações finais

Com o desenvolvimento da pesquisa de Iniciação Científica, apresentada neste trabalho, pôde-se produzir material didático digital que propicia ao professor subsídios para utilização das Tecnologias Digitais em aulas de Matemática. Além disso, para seu desenvolvimento, foi necessário o estudo do software GeoGebra, bem como de outros softwares de produção de vídeos e investigação e elaboração de atividades didáticas inspiradas no Caderno do Aluno e do Professor, material oficial do Estado de São Paulo. Essas atividades desenvolvidas pelas alunas de graduação em Licenciatura em Matemática contribuem para a formação inicial do futuro professor de Matemática com relação ao uso das Tecnologias Digitais e prática docente.

## Agradecimentos

O trabalho apresentado foi realizado com o apoio da CAPES, entidade do Governo Brasileiro voltado para a formação de recursos humanos.

## Referências

ANDRADE, P. F.; ZAMPIERI, M. T.; JAVARONI, S. L. **Cursos de Formação Continuada vinculados ao Projeto Mapeamento: percepções e expectativas.** Atas do IV Congresso Internacional TIC e Educação. Universidade de Lisboa, Lisboa, p. 194-204, 2016.

BRASIL. **Ministério da Educação: Observatório da Educação.** Disponível em: <<http://www.capes.gov.br/educacao-basica/observatorio-da-educacao>>. Acesso em: 25 março 2017.

INSTITUTO GEOGEBRA. **Sobre o GeoGebra.** Instituto GeoGebra, Rio de Janeiro 2010. Disponível em: <<http://www.geogebra.im-uff.mat.br/>>. Acesso em: 25 março 2017.

JAVARONI, S. L.; ZAMPIERI, M. T. **O Uso das TIC nas Práticas dos Professores de Matemática da Rede Básica de Ensino: o projeto Mapeamento e seus desdobramentos.** Bolema. Rio Claro/SP, v. 29, n. 53, p. 998-1022, 2015.

JORDÃO, J. F. et al. **Tecnologias Digitais nas aulas de Matemática: atividades com o software GeoGebra e o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica.** XXVIII Congresso de Iniciação Científica da UNESP. UNESP, Bauru/SP, 2016.

SANTOS, L.; JORDÃO, J. F.; ALMEIDA, J. C. **A Produção de Vídeos Educativos: uma articulação possível entre Tecnologias Digitais e os Cadernos do Professor/Aluno.** XIX Conferência GPIMEM: Pesquisa e Formação. UNESP, Rio Claro/SP, 2016.

SANTOS, L. et al. **Atividades Matemáticas com o Software GeoGebra e Produção de Vídeos Explicativos.** XXVIII Semana da Licenciatura em Matemática. UNESP, Bauru/SP, 2016.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO. **Material pedagógico auxilia alunos na rede estadual no desenvolvimento de competências do Currículo Oficial.** Disponível em: <<http://www.educacao.sp.gov.br/caderno-aluno>>. Acesso em: 25 de março de 2017.





## Impact of chemical control on mosquito population dynamics

*Claudia Pio Ferreira*

*Unesp; Departamento de Bioestatística, IBB  
pio@ibb.unesp.br*

### Abstract:

The observed adaptation behaviour of the *Anopheles* mosquito population after a long term and widespread use of insecticide-treated bed nets is modelled using an agent-based stochastic model that takes into account *ad hoc* functions for mosquito oviposition and mortality rates, and mosquito's plasticity. The impact of this for malaria control is discussed.

**Key-words:** Biomatematics. Adaptation. Control.

## Background

Evidences of changing in biting and resting behavior of the main malaria vectors have been mounting up in recent years as a result of selective pressure by the widespread and long term use of insecticide-treated bed nets (ITNs), and indoor residual spraying. The impact of this observed behavioural resistance on malaria intervention efficacy has important implications to the epidemiology and malaria control programmes. In this context, we present a theoretical framework to understand the mechanisms determining the evolution of feeding behavior under the pressure of ITNs use.

## Methods

An agent-based stochastic model simulates the impact of insecticide-treated bed net on mosquitoes's fitness by reducing the biting rates, as well as increasing mortality rates. The model also incorporates a heritability function that provides the necessary genetic plasticity upon which natural selection would act to maximize the fitness under the pressure of the control strategy.

## Results

The long term asymptotic equilibrium distribution of mosquito population as a function of biting time is shown for several daily use of ITNs. The expected disruptive selection on the mosquitoes biting time is observed in the simulations. The model also captures the relative fitness of strains that bite at much earlier time with respect to the wild strains, when a threshold of about 50% of ITNs use, above which the mutant strains overwhelm the wild strain. The top three model's parameters that play a dominant role on the mosquito fitness is the proportion of individuals using bednets, the impact of bed net use on mosquito oviposition, and the mosquito's plasticity.

## Conclusions

By taking evolutionary aspect into account, the model was able to demonstrate that the long-term use of ITNs, although representing an undisputed success in reducing malaria incidence and mortality in many affected areas, is not free of undesirable side effects. From the evolutionary point of view to the parasite virulence, it should be expected that plasmodium parasites would be pressed to reduce their virulence. This speculative hypothesis can eventually be demonstrated in the medium to long term of ITNs use.

## Acknowledgement

Grant 14/07615-3 São Paulo Research Foundation (FAPESP).



Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional  
De 2 a 5 de Maio de 2017  
Unesp, Faculdade de Ciências - Bauru/SP

## References

RUSSELL, T.L.; BEEBE, N.W.; COOPER, R.D.; LOBO, N.F.; BURKOT, T.R. *Malar J.* **Successful malaria elimination strategies require interventions that target changing vector behaviours**, v. 12, doi:10.1186/1475-2875-12-56, 2013.

GATTON, M.L.; CHITNIS, N.; CHURCHER, T.; DONNELLY, M.J.; GHANI, A.C.; GODFRAY, H.C.J.; GOULD, F.; HASTINGS, I.; MARSHALL, J.; RANSON, H.; ROWLAND, M.; SHAMAN, J.; LINDSAY, S.W. *Evolution.* **The importance of mosquito behavioural adaptations to malaria control in Africa**, V. 67, p. 1218-1230, 2013.



## Matemática aplicada no ensino de cálculo: o problema da maca

*Josué Gomes da Silva*  
*Universidade Estadual de Campinas*  
*josuegomes@uerr.edu.br*

**Resumo:** O propósito deste artigo é apresentar os softwares “Geogebra” e “Wolfram Mathematica” como ferramentas de suma importância no ensino de matemática. Utilizando os conceitos básicos do cálculo diferencial, esses programas são postos como instrumentos indispensáveis para encontrar a solução do “problema da maca”. Tal problema nada mais é do que a busca por uma maca de tamanho ideal que deverá ser utilizada nos corredores de um hospital. A ideia então é maximizar o comprimento da maca tendo sua largura já pré-determinada. A questão será explorada do ponto de vista algébrico, geométrico e computacional, com o auxílio dos softwares já destacados. Dessa forma a solução será interativa e motivadora, a ponto de originar outros problemas mais avançados de cálculo, auxiliando no ensino de matemática. Não entraremos em maiores detalhes quanto ao cálculo diferencial em si, ou sobre os comando dos Software utilizados, pois não é esse o objetivo e já pressupomos um prévio conhecimento de tal assunto por parte do leitor.

**Palavras-chave:** Matemática Aplicada. Ensino. Geometria. Cálculo Diferencial.

### Introdução

A matemática é uma parte da ciência que as vezes, pode-se dizer dificultosa para professores e alunos no dia a dia de uma sala de aula. Vários fatores influenciam para que esta ideia seja disseminada. Informações do site G1.globo, diz que apenas 10% dos jovens brasileiros têm um aprendizado adequado em matemática no ensino médio. Afirmam ainda que nenhuma unidade da federação atingiu a parcial da meta do “Todos pela Educação” que era de 20% em 2011. Segundo eles, o problema está em que há um contato menor transmitido, inclusive pela televisão a respeito. Afirmam que português faz bem mais parte do cotidiano do que a matemática e por isso a proficiência dos índices estão melhores nessa matéria. Comentam também sobre a questão das metodologias de ensino que poderiam ser adotadas para aumentar o percentual de aprendizagem.

E por falar em metodologias, é bom lembrar que desde que surgiu como “medida de terras” no Egito antigo, a geometria tem como sua principal metodologia a praticidade, pois a facilidade de contextualizar conteúdos por mais avançados que sejam facilita muito o ensino aprendizagem. Nesse contexto propomos o “problema da maca” que trata não apenas de medir objetos mas também de encontrar uma medida ótima de forma a oferecer o máximo de conforto e segurança ao usuário.

### O Problema da maca

Em um determinado hospital a direção pretende comprar novas macas, porém estas macas precisam atender a dois requisitos básicos: passar em todos os corredores do hospital e ter maior comprimento possível dado uma determinada largura. Para ilustrarmos a situação vamos considerar a Figura 1

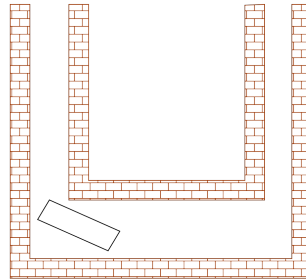


Figura 1: Maca passando pelo corredor.

## Uma possível solução algébrica

Para colocar o problema no mundo matemático vamos abstrair os elementos em questão, e para isso vamos nos situar no plano cartesiano, as paredes como sendo retas e a maca como um retângulo.

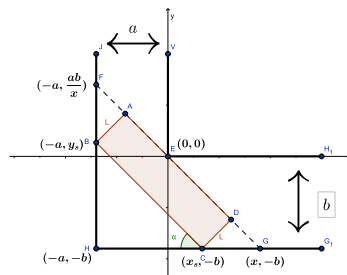


Figura 2: Maca no plano cartesiano.

Vamos Considerar a largura do corredor vertical  $a$ , a largura do corredor horizontal  $b$  com  $a \neq b$  e o ponto  $E$  como sendo a origem, dessa forma a maca é representada pelo retângulo  $ABCD$ . Veja que  $x$  e  $y$  admitem apenas valores positivos, visto que do contrário a maca teria tamanho infinito. Observe também que os ângulos  $\alpha$ ,  $FGE$ ,  $FEM$  e  $FBA$   $BCH$  são congruentes, veja ainda que  $\cos(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (\frac{ab}{x})^2}}$ ,  $x_s = x - \frac{L}{\sin \alpha}$  e  $y_s = \frac{ab}{x} - \frac{L}{\cos \alpha}$ , sendo  $L$  a distância entre os pontos  $A$  e  $B$ , ou seja a largura da maca. Veja também que a solução consiste em encontrar um extremo da função:

$$f(x) = d_{(B,C)} = \sqrt{\left(a + \left(x - \frac{L}{\sin \alpha}\right)\right)^2 + \left(\left(\frac{ab}{x} - \frac{L}{\cos \alpha}\right) + b\right)^2} \quad (1)$$

que é uma função inviável de se derivar manualmente e é nesse ponto que entra o auxílio computacional. Afinal, seria desnecessário resolver “na mão” a equação  $f'(x) = 0$  com tantos softwares disponíveis. Com isso, mesmo possível abandonamos a busca por uma equação.

## Solução computacional

Diante da dificuldade de encontrar uma equação que nos forneça a solução, vamos em busca apenas da solução numérica. Utilizando o Software Wolfram Mathematica ou o Geogebra solucionamos o problema de maneira simples, apenas calculando os valores de  $f'(x) = 0$ . Além da solução numérica é possível visualizar quando a maca se aproxima do tamanho ideal programando de maneira que ela mude de cor quando  $f'(x)$  se aproxima de 0

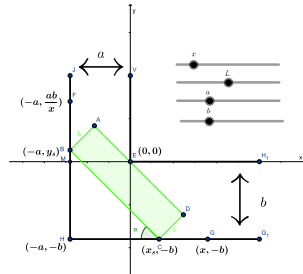


Figura 3: Maca ideal.

Fica a cargo do leitor a análise da diferenciabilidade e dos pontos críticos de  $f(x)$ , mas veja que se trata de uma curva suave e possui um ponto de mínimo no intervalo  $(0, +\infty)$

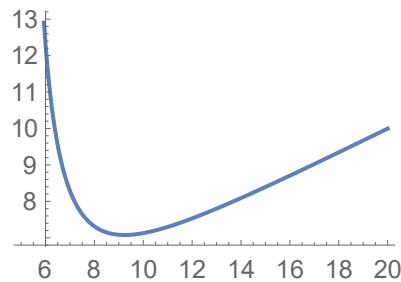


Figura 4: Gráfico da função  $f(x)$ .

## Conclusões

A utilização de Softwares nas aulas de matemática ajuda resolver um dos grandes problemas de ensinar esta matéria, que é o fato desta ser totalmente abstrata. De forma que quando o aluno “ver” o problema acontecendo, o desenvolvimento da aprendizagem vai muito além do que poderia ir com uma aula puramente teórica. O problema da maca é um bom exemplo de problemas que são inviáveis de se resolver empiricamente tampouco algebricamente com métodos tradicionais. Ensinar teoria matemática com o auxílio de tecnologias certamente é um caminho para a melhoria do ensino.

## Agradecimentos

Agradeço ao professor Dr. Márcio A. F. Rosa pelas orientações deste artigo e principalmente pela motivação.

## Referências

- STEWART, J.: **Cálculo Vol. 1:**, 6ª edição. Editora Pioneira Thomson Learning, 2009.  
Portal de Periódicos Científicos da UTFPR. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/>. Acesso em: 10 mar. 2017.  
Globo Comunicação e Participações S.A. Disponível em: <http://g1.globo.com/>. Acesso em: 10 mar. 2017.



## Matemática e Estatística no ENEM

*Marisa Veiga Capela*  
IQ - UNESP  
Araraquara - SP  
marisavc@iq.unesp.br

*Pollyanna Bettyni Fray*  
ETEC – “Profa. Anna de Oliveira Ferraz”  
Araraquara - SP  
pollyannafray@gmail.com

*Karen Eliana Baú Ortega-Gálvez*  
ETEC - Profa. “Anna de Oliveira Ferraz”  
Araraquara – SP  
bogkaren2@gmail.com

*Jorge Manuel Vieira Capela*  
IQ - UNESP  
Araraquara - SP  
capela@iq.unesp.br

**Resumo:** Apesar da importância para a formação do estudante, o ensino de Matemática e Estatística em qualquer um dos níveis de ensino vem apresentando problemas, especialmente quando se trata em aprender conteúdos de Matemática, interpretação de dados e medidas estatísticas. Este trabalho tem como objetivo desenvolver habilidades na resolução de problemas, capacidade de sintetizar informações, leitura e interpretação de textos e dados no enunciado e na resolução das questões do ENEM. Além disso, será divulgado informações e a resolução das questões detalhadas do ENEM de Matemática e Estatística em algumas escolas de Araraquara e região. Como resultado final, espera-se contribuir na formação do estudante, despertando o interesse pela investigação científica e ingresso na Universidade através do ENEM.

**Palavras-chave:** Matemática. Ensino. Estatística. ENEM.

### Introdução

A maioria dos alunos do ensino médio apresentam dificuldades em assimilar conceitos Matemáticos e Estatísticos e como consequência tem dificuldade nos exames de acesso à Universidade. O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é uma prova elaborada pelo Ministério da Educação para verificar o domínio de competências e habilidades dos estudantes que concluíram o ensino médio. O ENEM consiste em quatro provas e uma redação. Além das disciplinas em si, existe uma série de habilidades que são avaliadas. Ou seja, independentemente da disciplina que está sendo cobrada, o ENEM avalia cinco competências principais em todas as suas provas. Recentemente algumas mudanças foram realizadas para o ENEM 2017.

O objetivo deste trabalho é proporcionar ao aluno do ensino médio informações sobre as várias edições do ENEM, bem como a compreensão de conceitos de Matemática e Estatística envolvido nas questões mais cobrados no ENEM, permitindo assim o ingresso na Universidade.



## Metodologia

Este trabalho faz parte de projetos de Iniciação Científica Pibic Jr desenvolvidos desde 2014 na escola ETEC “Profa. Anna de Oliveira Ferraz” em conjunto com o projeto de extensão “Matemática acessível para todos” desenvolvido por docentes da área de Matemática e Estatística do IQ - UNESP de Araraquara.

As atividades foram desenvolvidas pelos alunos através de estudo dos conteúdos de Matemática e Estatística relacionados com as questões do ENEM.

Várias reuniões semanais entre os orientadores e os bolsistas foram realizadas para discutir os tópicos pertinentes e as questões de Estatística e Matemática do ENEM 2014, 2015 e 2016 no sentido de elucidar as possíveis dúvidas durante o estudo.

Alguns conceitos simples de Estatística e Matemática, que caem sempre nas provas do ENEM, costumam ser desconhecidos dos alunos. Dessa forma foi elaborado a resolução das questões detalhadas, promovendo o ensino de matemática e introduzindo o pensamento estatístico.

Foram realizadas palestras em algumas escolas de Araraquara e região para divulgar a resolução das questões do ENEM de forma interativa, dinâmica e divertida, bem como informações sobre o Exame Nacional do Ensino Médio muitas vezes desconhecido de alguns alunos.

## Resultados e Discussão

Os projetos de Iniciação científica para o ensino médio começaram em 2014 quando foram aprovadas duas bolsas financiadas pelo CNPq/Pibic Jr para alunos do ETEC Profa. “Anna de Oliveira Ferraz” na área de Matemática e Estatística. Em continuidade, outros alunos foram contemplados com a bolsa CNPq/Pibic Jr em 2015, 2016 e 2017.

Como resultado do trabalho dos bolsistas no projeto PIBIC Jr observamos a aprendizagem de técnicas e novas metodologias na compreensão de conceitos e conteúdo, com espírito crítico, aprimorando o pensamento Matemático e Estatístico e contribuindo assim para uma formação sólida.

Outros resultados desse trabalho foram divulgados nas Palestras intituladas: “Matemática e Estatística no ENEM” e “As meias verdades em estatística ou quando os números enganam. Será que as estatísticas não mentem jamais?” proferidas para os alunos do ensino médio nas escolas, ETEC Profa. “Anna de Oliveira Ferraz” e Escola Estadual “João Batista de Oliveira” em Araraquara e na Escola Municipal “Adelino Bordignon” em Matão. Essas palestras foram apresentadas de forma interativa, dinâmica e atual motivando os alunos e despertando o interesse de ingresso nas Universidades através do ENEM. As palestras foram realizadas com projetor multimídia, lousa e giz e em forma de diálogo com os alunos utilizando temas atuais e do cotidiano que envolviam aplicações, jogos e curiosidades práticas de Estatística e Matemática. Uma aposta foi realizada trabalhando o conceito de probabilidade e alertando a respeito do uso indevido da informação estatística no contexto da análise e interpretação de dados. As palestras fazem parte de um projeto maior de extensão universitária aprovado pela PROEX em 2014 intitulado “Matemática acessível para todos”.

Como exemplo, a questão 150 do ENEM 2014 trabalhada nas palestras com os alunos:

“Ao final de uma competição de ciências em uma escola, restaram apenas três candidatos. De acordo com as regras, o vencedor será o candidato que obtiver a maior média ponderada entre as notas das provas finais nas disciplinas química e física, considerando, respectivamente, os pesos 4 e 6 para elas. As notas são sempre números inteiros. Por questões médicas, o candidato II ainda não fez a prova final de química. No dia em que a sua avaliação for aplicada, as notas dos outros dois candidatos, em ambas as disciplinas, já terão sido divulgadas. A tabela 1 apresenta as notas obtidas pelos finalistas nas provas finais. A menor nota que o candidato II deverá obter na prova final de química para vencer a competição é: a)18 b)19 c)22 d)25 e)26 ”

Tabela 1: Nota dos candidatos

Candidato	Química	Física
I	20	23
II	X	25
III	21	18

Antes da resolução da questão introduzíamos os conceitos de média, mediana, moda e média ponderada, um dos assuntos que mais são cobrados no ENEM na área de Estatística. Na resolução projetávamos o exercício em planilhas de cálculo (Excel) explicando passo a passo a tabela 2 e a equação 1 chegando na resposta a)18.

Tabela 2: Média ponderada dos candidatos

Química	Física	Media Ponderada
20	23	21,8
X	25	17,5
21	18	19,2

$$MP = \frac{4X + 6(25)}{10} = 22 \Rightarrow X = 17,5 \quad (1)$$

Através dos projetos desenvolveu-se uma importante parceria entre a Universidade e algumas escolas públicas de Araraquara e região divulgando conteúdos de Matemática e Estatística nas questões do ENEM. Bons resultados já foram obtidos com o ingresso de alguns alunos em Universidades públicas e particulares através do ENEM, e em especial no curso de Engenharia Química e Engenharia de Bioprocessos e Biotecnologia da UNESP de Araraquara.

## Conclusões

Como resultado final, as palestras apresentadas de forma dinâmica e atual em conjunto com os projetos de Iniciação Científica CNPq/PIBIC Jr desenvolvidos contribuíram para a formação dos alunos, despertando o interesse pela investigação científica e ingresso na Universidade através do ENEM.

## Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq/PIBIC Jr pela bolsa concedida as alunas do ensino médio do ETEC “Profa. Anna de Oliveira Ferraz”.

## Referências

CAMPOS, R. C.; WODEWOTZKI, M. L. L.; JACOBINI, O. R. **Educação Estatística**. 1.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

IEZZE, G. **Coleção de Fundamentos de Matemática Elementar**. 7.ed. v.1,2,...,10. São Paulo: Atual, 2008.

MINISTERIO DA EDUCAÇÃO. Mudanças no ENEM. 2017. Disponível em: <http://www.mec.gov.br>. Acesso em: 13 março. 2017.

MORETTIN, L.G. **Estatística Básica: Probabilidade e Inferência**. 2.ed. São Paulo: Pearson, 2010.

## Minimização da energia das linhas de fluxo magnético em um sistema supercondutor com centros de aprisionamento

*Daví Filenga*

UNESP; Faculdade de Ciências

davifilenga2014@gmail.com

**Resumo:** O propósito do presente trabalho foi utilizar o algoritmo de otimização conhecido como *GSA* (*Generalized Simulated Annealing*) para calcular as posições de menor energia das linhas de fluxo magnético (vórtices magnéticos) em um filme supercondutor, na presença de centros de aprisionamento. Através de simulações numéricas, foi possível simular o comportamento do sistema para diferentes quantidades de linhas de fluxo e centros de aprisionamento, com diferentes potenciais de interação, sendo um deles até então não encontrado na literatura. Os resultados obtidos foram consistentes com o que há disponível na literatura e com o que seria teoricamente esperado.

**Palavras-chave:** Otimização. Matemática Aplicada à Física. Métodos Estocásticos e Estatísticos. Supercondutividade.

### Introdução

Um dos grandes desafios encontrados em diversas áreas de conhecimento tais como Física, Matemática, Engenharia, Biologia, entre muitas outras, é a minimização de uma função apropriada de energia/custo. Para funções com alto grau de complexidade, com muitas variáveis e mínimos locais, a solução requer métodos sofisticados para se chegar a um mínimo global com um tempo de simulação computacional eficiente. Dentro desse contexto, métodos estocásticos como o *GSA* (*Generalized Simulated Annealing*) podem ser uma eficaz alternativa (DALL'IGNA JÚNIOR, A. 2004).

Problemas de otimização são muito comuns em diversas áreas da Física. Em particular, para sistemas supercondutores, a obtenção das configurações de menor energia de vórtices é uma das tarefas mais importantes para o cálculo das temperaturas e correntes críticas, visto que tais grandezas permitem dizer quais são os valores de temperatura e corrente elétrica, respectivamente, que um material supercondutor consegue suportar. Por outro lado, a obtenção das configurações de menor energia desses sistemas não é uma tarefa fácil, visto que há uma grande quantidade de elementos e de interações envolvidas, podendo os vórtices ocuparem inúmeras configurações (FILENGA, D. 2016).

### Modelagem do sistema

O algoritmo do *GSA* parte de um conjunto inicial de parâmetros, a partir do qual uma perturbação no sistema é gerada através de uma *função de visitação*  $g_{qv}$ , e um novo valor da função é então calculado. Caso esse novo valor seja menor que o anterior, passa a ser aceito. Do contrário, este ainda pode ser aceito dependendo da *função de probabilidade de aceitação*  $P_{qA}$ . Em seguida, a temperatura é diminuída seguindo a *função de decaimento de temperatura*  $T_{qv}$ . Repete-se então o processo diversas vezes até que uma condição seja satisfeita. Tais funções são expressas da seguinte maneira (TSALLIS, C.; STARIOLO, D. A. 1996):

$$P_{qA}(\Delta E(x)) = 1 / \left\{ 1 + \left[ 1 + (q_A - 1) (E(x_{t+1}) - E(x_t)) / T_{qA}(t) \right] \right\} \quad (1)$$

$$g_{qv}(x) = \left( \frac{q_V - 1}{\pi} \right)^{\frac{D}{2}} \times \Gamma \left( \frac{1}{q_V - 1} + \frac{D-1}{2} \right) / \Gamma \left( \frac{1}{q_V - 1} - \frac{1}{2} \right) \times T_{qv}^{\frac{D}{q_V - 3}} / \left\{ \left[ 1 + (q_V - 1) x^2 / T_{qv}^{2/(q_V - 3)} \right]^{\frac{1}{q_V - 1} + \frac{D-1}{2}} \right\} \quad (2)$$

$$T_{q_v}(t) = T_{q_v}(t) \frac{2^{q_v-1} - 1}{(1+t)^{q_v-1} - 1} \quad (3)$$

Onde  $q_A$  e  $q_V$  são parâmetros que variam de 1 a 3,  $E(x)$  é a função a ser otimizada e  $D$  o número de variáveis dessa função.

Neste trabalho foram simulados, ao todo, 12 diferentes sistemas, com 36 centros de aprisionamento com arranjos quadrados e aleatórios. Para cada arranjo, foram simulados 3 diferentes tipos de potenciais: cônico, degrau e degrau cônico. Também foram consideradas duas diferentes quantidades de linhas de fluxo: 9 e 18 vórtices. A energia potencial  $U_v$  em função da distância  $r_{vv}$  para a interação entre os vórtices pôde ser descrita através da função de Bessel modificada de segunda ordem (REICHHARDT, C.; OLSON REICHHARDT, C. J. 2009):

$$U_v(r_{vv}) = K_0(r_{vv}) \quad (4)$$

Já a energia potencial atrativa devido à interação dos vórtices com os centros de aprisionamento, pôde ser modelada utilizando três diferentes equações, sendo a Eq. (7) ainda não reportada pela literatura para tais sistemas:

$$U_p(r_{vp}) = (I_{p_2} / R_{p_2}) r_{vp} + I_{p_2}, \quad \text{se } 0 \leq r_{vp} \leq R_{p_2} \quad (5)$$

$$U_p(r_{vp}) = I_{p_2}, \quad \text{se } 0 \leq r_{vp} \leq R_{p_1} \quad (6)$$

$$U_p(r_{vp}) = I_{p_1} \left( \text{se } R_{p_1} < r_{vp} \leq R_{p_2} \right) \quad \text{ou} \quad U_p(r_{vp}) = (I_{p_2} / R_{p_2}) r_{vp} + I_{p_2} \left( \text{se } 0 \leq r_{vp} \leq R_{p_1} \right) \quad (7)$$

Onde  $U_p$  é a energia potencial de interação entre os vórtices e os centros de aprisionamento e  $r_{vp}$  a distância entre os mesmos.  $I_p$  e  $R_p$  são, respectivamente, as intensidades máximas da energia e o raio de alcance dos centros de aprisionamento, cujos valores utilizados foram:  $I_{p_2} = -0,2C_v$ ,  $R_{p_2} = 2,8 \cdot 10^{-2} \lambda$ ,  $I_{p_1} = -0,1C_v$  e  $R_{p_1} = 1,4 \cdot 10^{-2} \lambda$ . Para todos os casos, as escalas de energia são expressas por  $C_v = \phi_0 / (4\pi\lambda)$ , as escalas de tempo por  $t_0 = 16\eta\zeta^2 / C_v$  e as escalas de distância por  $\lambda$ . Aqui,  $\phi_0 = 2,07 \cdot 10^{-7} \text{ Gcm}^2$  é o valor do quantum de fluxo magnético de um vórtice, e  $\lambda$  e  $\zeta$  a profundidade de penetração e o comprimento de coerência do vórtice, respectivamente. Tais equações são válidas para qualquer supercondutor cuja relação  $\lambda = 100\zeta$  seja satisfeita. Vale ressaltar que para a interação entre os vórtices, foram consideradas caixas imagens ao redor da caixa de simulação principal com condições de contorno periódicas (FILENGA, D. 2016).

As funções utilizadas no GSA para este problema foram  $E_1 = \text{Eq. (4)} + \text{Eq. (5)}$  para o potencial cônico,  $E_2 = \text{Eq. (4)} + \text{Eq. (6)}$  para o potencial degrau e  $E_3 = \text{Eq. (4)} + \text{Eq. (7)}$  para o potencial degrau cônico. Considerando que cada vórtice possui dois valores ( $x$  e  $y$ ) que caracterizam sua posição, tem-se que  $D = 18$  para 9 vórtices e  $D = 36$  para 18 vórtices. Para todos os casos, todos os valores de  $q_A$  e  $q_V$  entre 1 e 3, com variação de 0,1, foram utilizados. Dessa forma, tem-se um conjunto de três equações de energia em função da posição para serem otimizadas. O objetivo então foi encontrar as posições dos vórtices que tornam mínimo o valor dessas funções.

## Resultados

As posições de menor energia obtidas para 18 vórtices são mostradas na Figura 1. A partir das imagens, é possível observar que, para o potencial cônico e degrau cônico, as posições dos vórtices coincidem com a região central dos centros de aprisionamento (exceto nas regiões sobrepostas), que possuem menor energia. Já para o potencial degrau, as posições coincidem com uma região qualquer dentro dos centros de aprisionamento, visto que toda a região já corresponde ao valor de menor energia. Tais resultados são consistentes com o que seria teoricamente esperado.

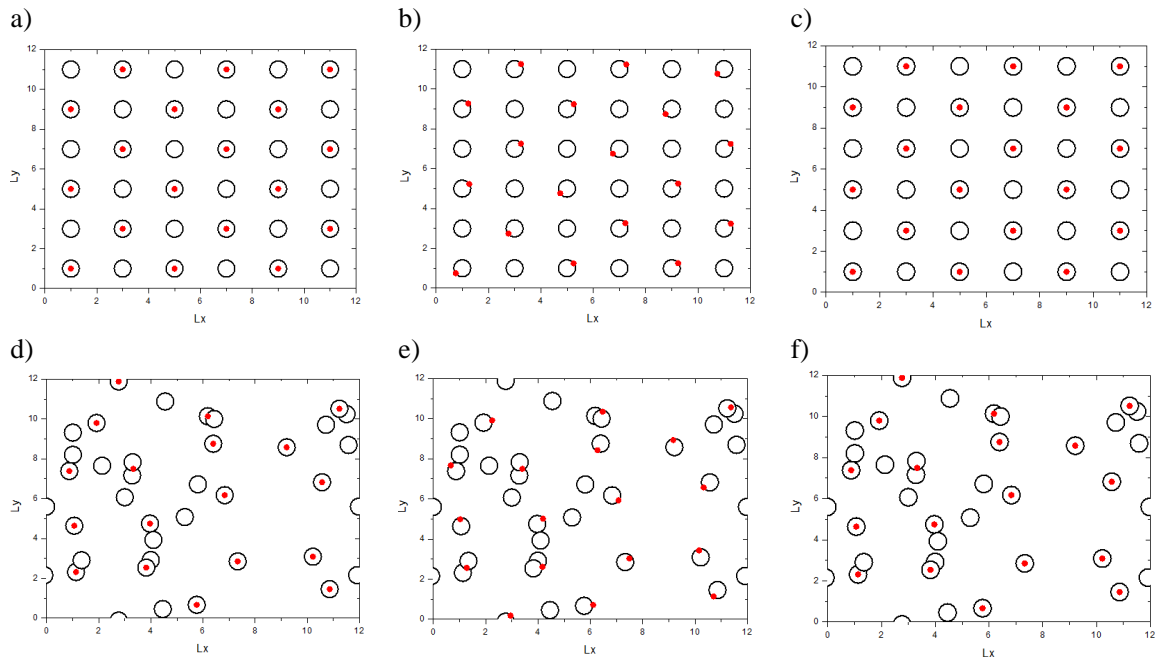


Figura 1: Posições de menor energia encontradas para arranjos de centros de aprisionamento (círculos abertos) quadrados - em a), b) e c) - e aleatórios - em d), e) e f), com 18 vórtices (pontos vermelhos). Em a) e d) foram utilizados potenciais cônicos, em b) e e) potenciais degrau, e em c) e f) potenciais degrau cônico para os centros de aprisionamento.

## Conclusões

Através da utilização do GSA, foi possível obter as posições de menor energia dos vórtices para diferentes sistemas com diferentes arranjos de centros de aprisionamento e quantidade de vórtices, bem como com diferentes potenciais atrativos. Os resultados estão em acordo com o teoricamente esperado, sendo que o potencial degrau cônico até o momento não havia sido reportado pela literatura. Para o potencial cônico, os resultados estão em acordo com o encontrado na literatura (REICHHARDT, C.; OLSON REICHHARDT, C. J. 2009).

## Referências

DALL'IGNA JÚNIOR, A. et al. Genetics and Molecular Biology, **Performance and parameterization of the algorithm Simplified Generalized Simulated Annealing**. v. 27, n. 4, p. 616–622, 2004.

FILENGA, D. **Correntes críticas e comportamento dinâmico dos vórtices em fitas supercondutoras do tipo II com arranjos conformes de centros de aprisionamento**. 2016. Dissertação (Mestrado em Ciência e Tecnologia de Materiais) – Unesp, Bauru, 2016.

TSALLIS, C.; STARIOLO, D. A. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, **Generalized simulated annealing**. v. 233, n. 1-2, p. 395-406, 1996.

REICHHARDT, C.; OLSON REICHHARDT, C. J. Physical Review B, **Transport anisotropy as a probe of the interstitial vortex state in superconductors with artificial pinning arrays**. v. 79, n. 13, p. 134501, 1 abr. 2009.





## Modelagem Fracionária - Oscilador Harmônico

*Giovana Pereira Vizotto*

*UNESP; Faculdade de Ciências  
giovanavizotto@gmail.com*

*Rubens de Figueiredo Camargo*

*UNESP; Faculdade de Ciências  
rubens@fc.unesp.br*

**Resumo:** Neste trabalho apresentamos a modelagem fracionária para o problema do oscilador harmônico. Verificou-se que a solução do oscilador harmônico simples, em sua versão fracionária, recupera qualitativamente o oscilador harmônico amortecido, porém com algumas vantagens.

**Palavras-chave:** Oscilador harmônico. Equações Diferenciais. Transformada de Laplace. Cálculo Fracionário.

### Introdução

Uma das principais formas de se modelar um problema é através de equações que relacionam uma determinada função com as suas taxas de variação (derivada), isto é, através de uma Equação Diferencial (ED) e buscar soluções para os problemas é algo totalmente relevante ao homem.

A principal vantagem das derivadas fracionais quando comparadas com os modelos de integração habituais clássicos é que as derivadas fracionais fornecem um ótimo instrumento para as descrições de características hereditárias e de memória de diversos materiais e procedimentos (CAMARGO, 2015).

Uma maneira mais comum de utilização do cálculo fracionário é substituir a derivada de ordem inteira da equação diferencial ordinária ou parcial, que descreve um determinado sistema, por uma de ordem não-inteira. Este método nos leva a equações diferenciais não-inteiras e a necessidade de buscar soluções para elas. Em muitos casos a ordem da derivada que torna a solução da equação mais próxima da realidade não é inteira (VAZ JR, 2016).

Nesse sentido, estudamos a modelagem do oscilador harmônico simples por meio das equações diferenciais e por meio da modelagem fracionária, obtendo uma solução semelhante nas duas situações. A modelagem fracionária com diversos valores para a derivada fracionária aprimora a solução do oscilador harmônico amortecido, ou seja, com a diminuição da ordem da derivada, conseguimos recuperar qualitativamente o efeito de todos os atritos presentes no sistema.

Outras características do oscilador harmônico fracionário podem ser vistas em ACHAR, 2001.

### Conceitos Preliminares

**Definição 1:** A Transformada de Laplace é uma transformada integral, representada por  $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$  é definida por uma integral imprópria. Seja  $f$  uma função definida para  $t \geq 0$ . A integral

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt, \quad (1)$$

será chamada **transformada de Laplace** de  $f$ , desde que a integral convirja.



**Definição 2:** Seja  $f(t)$  uma função integrável. A **integral de Riemann-Liouville** de ordem  $\alpha$  de  $f(t)$ , denotada por  $I_\alpha f(t)$ , é definida como

$$I^\alpha f(t) = \phi_\alpha * f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau. \quad (2)$$

**Definição 3:** Sejam  $f(t)$  uma função diferenciável,  $m \in \mathbb{N}$  e  $\alpha \notin \mathbb{N}$  tais que  $m-1 < \text{Re}(\alpha) < m$ . A derivada de ordem  $\alpha$  no sentido de Caputo é definida como sendo a integral fracionária de uma derivada de ordem inteira, de forma que a lei dos expoentes faça sentido, isto é<sup>1</sup>

$$D^\alpha f(t) = I^{m-\alpha} D^m f(t) = \phi_{m-\alpha} * D^m f(t). \quad (3)$$

**Definição 4:** A Função de Mittag-Leffler é uma função complexa, conforme introduzida por Mittag-Leffler, que depende do parâmetro complexo  $\alpha$  com  $\text{Re}(\alpha) > 0$ , na forma de uma série

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + 1)}. \quad (4)$$

## Oscilador Harmônico

A equação diferencial associada a um Oscilador Harmônico, no caso de um sistema massa-mola, é dada a partir da Segunda Lei de Newton por

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + c \frac{d}{dt} x(t) + kx(t) = g(t). \quad (5)$$

na qual, temos um corpo de massa  $m$ , no tempo  $t$ , a partir da posição de equilíbrio, sujeito a uma força elástica, do tipo Hooke,  $kx(t)$ , uma força de amortecimento  $c \frac{d}{dt} x(t)$  e a uma força externa  $g(t)$ , onde  $c$  e  $k$  são constantes positivas. Consideramos que não há nenhuma força externa agindo sobre o sistema ( $g(t) = 0$ ) e que não temos atrito,  $\omega_0^2 = \sqrt{k/m}$  e com as condições iniciais  $x(0) = 0$  e  $x'(0) = v_0$ .

Aplicando a Transformada de Laplace e em seguida aplicando a Transformada Inversa de Laplace, obtemos:

$$F(s) = x_0 \frac{s}{s^2 + \omega^2}. \quad (6)$$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t). \quad (7)$$

Quando a modelagem fracionária é aplicada em alguma equação diferencial, como a do oscilador harmônico, espera-se que ao diminuir a ordem da derivada, tenha um efeito similar ao de considerar diferentes tipos de atrito na equação. Ao invés disso, substituímos a derivada de ordem 2, presente na equação do oscilador harmônico simples por uma derivada no sentido de Caputo de ordem  $\alpha$ , com  $1 < \alpha \leq 2$ . Esse resultado pode ser visto em CAMARGO, 2009.

## Oscilador harmônico fracionário

Como a derivada fracionária é definida por uma integral fracionária, para chegarmos à solução, precisamos integrar a Equação (5), ficando desta forma:

$$x(t) = x(0) + tx'(0) - \omega_0^2 I^2[x(t)]. \quad (8)$$

<sup>1</sup>Segue, como consequência da definição, que  $D^\alpha t^\beta = t^{\beta-\alpha} \Gamma(\beta+1) / \Gamma(\beta-\alpha+1)$ , que recupera o resultado clássico quando  $\alpha = n$  e  $\beta = m$ , com  $n, m \in \mathbb{N}$ .

Convertemos a ordem da derivada para trabalhar com o conceito da Integral Fracionária. Fazendo a substituição, temos:

$$x(t) = x_0 + tv_0 - \omega_0^\alpha I^\alpha[x(t)]. \quad (9)$$

Desta forma, lembrando das definições preliminares, aplicamos a transformada de Laplace, utilizando o teorema da convolução e calculando a respectiva transformada inversa, com  $v_0 = 0$ , obtemos:

$$x(t) = x_0 E_\alpha(-(\omega_0 t)^\alpha). \quad (10)$$

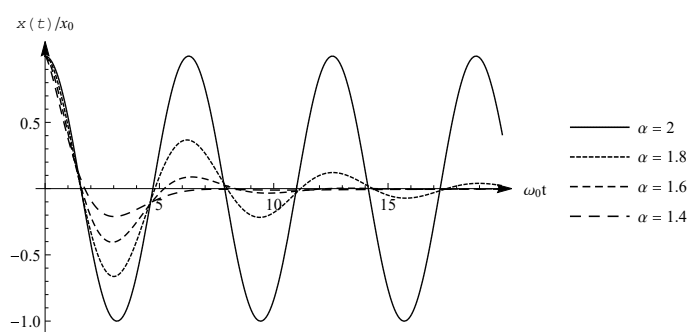


Figura 1: Gráfico do oscilador harmônico fracionário.

## Conclusões

Neste caso, a modelagem fracionária conseguiu recuperar qualitativamente os diferentes tipos de atritos sem colocá-los na equação, somente mudando a ordem da derivada. De fato o modelo é mais realista que o de ordem inteira, pois prevê uma diminuição na amplitude e também na frequência.

## Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPESP (Processo - 2016/07703-5) por terem financiado esta pesquisa.

## Referências

- ACHAR, BN Narahari et al. **Dynamics of the fractional oscillator**. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, v. 297, n. 3, p. 361-367, 2001.
- CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C. **Cálculo Fracionário**. 1.ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.
- OLIVEIRA, D. S. **Derivada Fracionária e as Funções de Mittag Leffler**. 2014. Tese de Mestrado, – Unicamp, Campinas, 2014.
- OLIVEIRA, E. C. **Funções Especiais com Aplicações**, 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2005.
- VAZ JR, J.; OLIVEIRA, E. C. **Métodos Matemáticos**, v. 1, Campinas: Editora da Unicamp, 2016.



## Modelo Matemático Aplicado à Transmissão de *Acinetobacter baumannii* em UTIs

*Aquino, A. A.*

*Departamento de Bioestatística; Instituto de Biociências, UNESP - Campus Botucatu  
aurelio.aquino@ibb.unesp.br*

*Cantane, D. R.*

*Departamento de Bioestatística; Instituto de Biociências, UNESP - Campus Botucatu  
dcantane@ibb.unesp.br*

**Resumo:** Os casos de Infecção Hospitalar (IH) podem ocorrer dentro ou fora do hospital, no qual, são definidos como Infecções relacionadas à Assistência à Saúde (IrAS). Procedimentos realizados no hospital (qualquer tipo de cirurgia) e pacientes com fraturas expostas são os casos relatados de maior frequência de transmissão da bactéria que ocasiona a infecção hospitalar. O prazo para essa ocorrência é de 48 a 72 horas, determinado pelo *Center for Disease Control and Prevention*. Neste trabalho, é proposto um modelo matemático para analisar o comportamento da infecção hospitalar causada pela bactéria *Acinetobacter baumannii*.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática e Aplicações, Equações Diferenciais, Infecção Hospitalar.

### Introdução

Neste trabalho, propõe-se um modelo matemático aplicado à infecção causada pela bactéria *Acinetobacter baumannii*, em que, o maior número de casos ocorrem nas UTIs (JAMIELNIAK, 2014; VIEIRA et al., 2015). Estudos realizados nos Estados Unidos relatam que 5 a 10% das infecções pela bactéria *A. baumannii* ocorreram em pacientes diagnosticados com pneumonias associadas a mecanismos de ventilação em UTIs, acarretando mortalidade a certos pacientes (COSTA, 2010). A causa de mortalidade pela infecção varia de 7,8 a 23% em pacientes hospitalizados e 10 a 43% em pacientes internados em UTIs. Ressalta-se que a permanência média da bactéria no organismo é de 3 dias a 5 meses (COSTA, 2010), gerando um gasto muito alto para o governo dos pacientes hospitalizados.

Especificamente na área da saúde, voltada para infecção hospitalar, não existe nenhuma vacina para tal infecção. Assim, o mais importante é conseguir o seu controle. Tem-se poucos exemplos de modelos matemáticos na literatura os quais podem ajudar a encontrar tal controle da infecção (JAMIELNIAK, 2014; SILVA, 2002; COSTA, 2010).

### Modelo Matemático

Neste modelo, usamos três compartimentos destinados aos pacientes em leitos da UTI referentes ao estado do paciente e dois compartimentos destinados às equipes de trabalho que tem contatos com os pacientes. Estes compartimentos estão apresentados na Figura 1, em que,  $S(t)$  é o número de leitos da UTI ocupados por pacientes suscetíveis no tempo  $t$ ,  $C(t)$  é o número de leitos da UTI ocupados por pacientes colonizados no tempo  $t$ ,  $I(t)$  é o número de leitos da UTI ocupados por pacientes isolados no tempo  $t$ ,  $E(t)$  é o número de trabalhadores da equipe de trabalho não colonizada no tempo  $t$ ,  $H(t)$  é o número de trabalhadores da equipe de trabalho colonizado no tempo  $t$ .

Considere os seguintes parâmetros  $\gamma_1$ : taxa de alta de um paciente suscetível  $\gamma_2$ : taxa de alta de um paciente colonizado,  $\gamma_3$ : taxa de alta de um paciente isolado,  $\phi$ : probabilidade de colonização de pacientes recrutados,  $\sigma$ : taxa de colonização de pacientes suscetíveis pelo ambiente,  $\lambda$ : taxa de recrutamento de

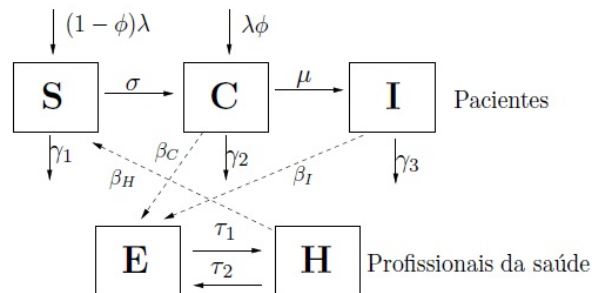


Figura 1: Modelo epidemiológico compartimental de Infecção Hospitalar em UTIs (Jamielniak, 2014).

pacientes,  $\mu$ : taxa de isolamento de pacientes colonizados,  $\tau_1$ : taxa de colonização da equipe de trabalho pelo ambiente,  $\tau_2$ : taxa de sucesso da medida de higiene da equipe de trabalho.

O número de leitos das UTIs destinado a pacientes é dado por  $N_L = S(t) + C(t) + I(t) + V(t)$ , em que  $V(t)$  é o número de leitos vazios. A equipe de trabalho é denotada por  $N_E = E(t) + H(t)$ .

Considera-se o indivíduo suscetível com  $\beta_H$  contatos com a equipe de trabalho, a fração  $\phi_H = \beta_H \frac{H(t)}{N_E}$  representa o número de contatos com trabalhadores colonizados. Analogamente, considere que a equipe de trabalho tem, em média,  $\beta_C$  e  $\beta_I$  contatos com pacientes, a fração  $\phi_P = \frac{\beta_C C(t) + \beta_I I(t)}{N_L}$  representa o número de contatos com pacientes colonizados e isolados (JAMIELNIAK, 2014).

De acordo com as hipóteses, é proposto o modelo matemático:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = (1 - \phi)\lambda - \sigma S(t) - \gamma_1 S(t) - \left( \beta_H \frac{H(t)}{N_E} \right) S(t) \\ \frac{dC(t)}{dt} = \left( \beta_H \frac{H(t)}{N_E} \right) S(t) + \sigma S(t) + \phi\lambda - \mu C(t) - \gamma_2 C(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \mu C(t) - \gamma_3 I(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} = - \left( \frac{\beta_C C(t) + \beta_I I(t)}{N_L} \right) E(t) + \tau_2 H(t) - \tau_1 E(t) \\ \frac{dH(t)}{dt} = \tau_1 E(t) - \tau_2 H(t) + \left( \frac{\beta_C C(t) + \beta_I I(t)}{N_L} \right) E(t) \end{array} \right. \quad (1)$$

## Simulação

Para analisar o comportamento do modelo (1) proposto, foi implementado na linguagem C o método de Runge Kutta de quarta ordem utilizando o software Cod::Blocks, em um computador AMD E-300 AUP de memória RAM 4GB e sistema operacional de 64 Bits.

As condições iniciais do Modelo (1) são dadas por:  $S(0)=10.08$ ,  $C(0)=0.21$ ,  $I(0)=1.06$ ,  $E(0)=10$ ,  $H(0)=0.97$ .

A Figura 2 apresenta, respectivamente, evolução temporal do número de indivíduos suscetíveis, colonizados e isolados. A Figura 3 apresenta, respectivamente, a evolução temporal do número de indivíduos da equipe de trabalho suscetível e equipe de trabalho colonizada. Além disso, pode-se verificar que há um controle da infecção para pacientes e equipe de trabalho antes de 50 dias.

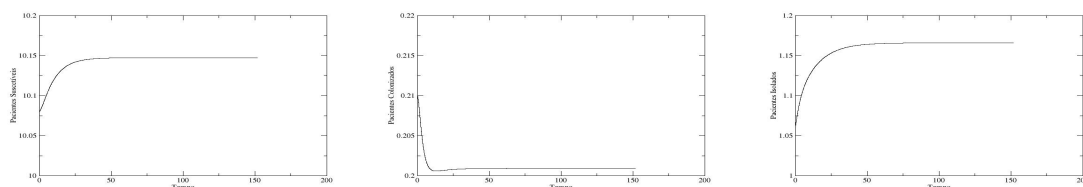


Figura 2: Comportamento dos pacientes suscetíveis, colonizados e isolados, respectivamente.

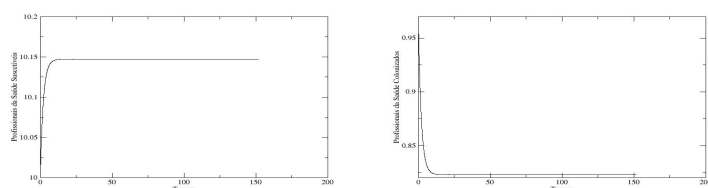


Figura 3: Comportamento dos profissionais da saúde suscetíveis e colonizados, respectivamente.

## Conclusões

Neste trabalho, foi proposto um modelo matemático aplicado à transmissão de IH em UTIs. Verifica-se que há um controle antes de 50 dias para os pacientes isolados. No entanto, este controle encontra-se a um nível alto. Com o objetivo de minimizar a quantidade de pacientes isolados, os próximos passos serão desenvolver um modelo de otimização utilizando o modelo (1) proposto neste trabalho e analisar os parâmetros de controle  $\tau_1$  e  $\tau_2$ .

## Agradecimentos

Ao programa de pós-graduação em Biometria e a Capes pela bolsa de mestrado. A professora Claudia Pio pela contribuição no trabalho.

## Referências

- VIEIRA, P. ; PICOLI, S. U. Revista Brasileira de Ciências da Saúde. **Acinetobacter baumannii Multirresistente: Aspectos Clínicos e Epidemiológicos**,2015.
- SILVA, C. **Problemas de Otimização Linear Canalizados e Espersos**(Dissertação de Mestrado) –ICMC-USP, São Carlos, 2002.
- COSTA, K. G. **Transmissão de Acinetobacter baumannii Resistente em uma Unidade de Terapia Intensiva: abordagem no ambiente e da higiene das mãos através de um modelo matemático determinístico**(Dissertação Mestrado em Ciências) –FIOCRUZ, Rio de Janeiro-RJ, 2010.
- JAMIELNIAK,J. A. **Modelo Epidemiológico Discreto para a Transmissão de Acinetobacter baumannii em UTIs Brasileira**.(Dissertação Mestrado em Biometria) –UNESP/IB. Botucatu-SP, 2014.

## Modelo Matemático de Otimização Aplicado ao Planejamento de Tratamento por Radiação

*LEONEL, P. Z.*

*Depto. de Bioestatística, Instituto de Biociências de Botucatu, Unesp  
paulo.z.l@aluno.ibb.unesp.br*

*CANTANE, D. R.*

*Depto. de Bioestatística, Instituto de Biociências de Botucatu, Unesp  
dcantane@ibb.unesp.br*

**Resumo:** A radioterapia é uma das técnicas mais importantes atualmente para o tratamento de câncer e seu objetivo é eliminar as células tumorais através de radiação ao mesmo tempo em que procura evitar a destruição de células saudáveis também afetadas pela radiação. O objetivo desse trabalho consiste no estudo de um modelo matemático de otimização aplicado ao planejamento de tratamento por radiação, cuja solução foi obtida pelo Método Simplex utilizando dois *softwares*, o GLPK e o Matlab, para gerar resultados a fim de emitir uma alta dose no tumor, suficiente para sua eliminação e minimizar a radiação nas regiões vizinhas compostas de tecido saudável.

**Palavras-chave:** Otimização. Modelo Matemático. Radioterapia.

### Introdução

A radioterapia é uma especialidade médica que faz uso de radiação ionizante voltada para pacientes diagnosticados com câncer. Nos tratamentos são geralmente utilizados feixes de radiação de alta energia para matar as células tumorais, mas é muito difícil direcionar estes feixes para apenas as células doentes. Dessa forma, uma simulação do planejamento para tratamento de um tumor com o uso de radiação envolve etapas que incluem o diagnóstico, a localização, o volume e a geometria da área de tratamento. Logo, com a Tomografia Computadorizada, tornou-se possível demarcar a região do tumor. Com ferramentas e *softwares* específicos fica viável obter um planejamento computadorizado que calcule a dose de radiação, além de gerar uma melhor distribuição da mesma (MICHELON; COLENCI; PAULA, 2012).

### Modelo Matemático para Planejamento de Tratamento por Radiação

O planejamento é feito para minimizar a dose emitida para as áreas que estão ao redor da parte tumoral, onde esta radiação pode ser de efeito danoso. Uma das preocupações em se atingir células saudáveis é devido a sua taxa de regeneração que é em longo prazo e, conseqüentemente, o corpo humano é dificultado para a eliminação do volume extra de tecido morto produzido por altas doses de radiação (CID, 2003). Dessa forma, o modelo matemático aplicado ao planejamento para radioterapia, na forma padrão, contendo apenas restrições de igualdade, proposto por Holder (2003) é dado por:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = w \frac{1}{m_T} e^T t + \frac{1}{m_C} e^T c + \frac{1}{m_G} e^T g \\
 \text{s.a.} \quad & a + s_u = u_t \\
 & a + l - s_l = l_t \\
 & A_T x - a = 0 \\
 & A_C x + s_c - c = 0 \\
 & A_G x - g + s_g = u_g \\
 & t + s_t = l_t \\
 & (t, c, g, x, a, s_u, s_l, s_c, s_g, s_t) \geq 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

Em que, a função objetivo é representada pela soma de três metas:  $\frac{1}{m_T} e^T t$ , mede o quanto falta para que consiga aplicar a dose mínima na região do tumor;  $\frac{1}{m_C} e^T c$  mede a quantidade de radiação acima



da prescrita recebida pela região crítica;  $\frac{1}{m_G} e^T g$  mede a quantidade de radiação acima da prescrita nos demais tecidos saudáveis;  $w$  é uma ponderação para se obter a dose mínima necessária no tumor;  $x$  é a dose do sub-raio que entra na imagem para alcançar o pixel  $p$  da imagem;  $u_t$  e  $u_g$  representam os vetores de limite superior para a radiação no tumor e no restante de tecido saudável, respectivamente;  $l_t$  representa o vetor de limite inferior para radiação na estrutura crítica que é composta por tecidos sensíveis a radiação. Esses vetores de limites, superior e inferior, podem variar de acordo com os vetores  $t, c$  e  $g$  de deposição de dose de radiação em cada tipo de tecido;  $s_u, s_l, s_c, s_g, s_t$  são as variáveis de folga;  $A_T$  (tumor),  $A_C$  (região crítica) e  $A_G$  (tecido saudável) são sub-matrizes de deposição de dose de  $A$  que é definida como  $A^t = [ A_T \ A_C \ A_G ]$ . E sendo o parâmetro  $a$  definido como  $a = A_T x$ .

## Resultados Computacionais

Dois *softwares* foram utilizados para encontrar a solução do modelo matemático (1) de otimização aplicado ao planejamento de tratamento por radiação, o GLPK v4.60 e o Matlab R2012a. Em ambos os casos o Método Simplex foi utilizado.

**GLPK:** Foi utilizado um problema teste, sem vínculo com um problema real, com um número de pixels da imagem para as regiões tumoral, crítica e saudável menor, que possibilita melhor visualização do procedimento. Foram considerados 4 pixels para a região tumoral, 12 para a crítica e 20 para a saudável. O estudo foi realizado com uma dose tumoral ( $t_g$ ) de 80Gy, em que Gy é a unidade de medida de dose de radiação (1Gy = 1J/Kg), em que foi imposta uma variação de 2% verificando-se os limites superior ( $u_t$ ) de 81,56Gy e inferior ( $l_t$ ) de 78,42Gy. Os valores de 40Gy e 60Gy são para os limites superiores ( $u_c$ ) para a região crítica e ( $u_g$ ) para a região saudável, respectivamente. Foi considerado duas ponderações para  $w$  (1 e 40). A Tabela 1 apresenta os resultados obtidos para a função objetivo  $z$ .

Tabela 1: Resultados referentes ao Modelo (1) em relação a dose de 80Gy no GLPK

	Dose 80Gy com $w = 1$	Dose 80Gy com $w = 40$
Função Objetivo ( $z$ )	78,420	3136,8
Tempo (s)	0,2220	0,2160

Em relação a função objetivo ( $z$ ) observa-se que para a dose de 80Gy e ponderação de  $w = 1$ , o objetivo foi atingido, houve a minimização do dose. Já em relação a ponderação de  $w = 40$ , não houve minimização da dose. Dessa forma, percebe-se que o peso de  $w$  decide a importância da uniformidade de dose no tumor, uma vez que os fatores  $\frac{1}{m_C} e^T c$  e  $\frac{1}{m_G} e^T g$  são nulos.

**Matlab:** Neste caso, para a resolução do Modelo (1) considerou-se a análise média e a análise absoluta (HOLDER, 2003). Foi utilizado um problema com 66 pixels para a região tumoral, 78 para a crítica e 3952 para a saudável, simulando um problema real de tumor de próstata. Fez-se uso de uma grade para imagem de pixel de  $64 \times 64$  que permite ângulos ( $a$ ) igualmente espaçados a cada 15, 5 ou 1 grau para que, respectivamente, cada sub-raio ( $i$ ) fique compreendido de 10, 32 e 32 feixes. Dessa maneira, haverá resultados para três casos distintos para cada tipo de análise (média e absoluta). Logo, os três casos são para  $15 \times 64 \times 10$ ,  $5 \times 64 \times 32$  e  $1 \times 64 \times 32$ .

Foi considerada uma dose ( $t_g$ ) tumoral de 80Gy em que foi imposta uma variação de 2%, verificando-se os limites superior ( $u_t$ ) e inferior ( $l_t$ ) para o modelo, que são 81,57Gy e 78,42Gy, respectivamente. São apresentados, na Tabela 2, os valores da função objetivo  $z$  para cada um dos três casos analisados e, observando os valores, pode-se notar que a função objetivo, para as duas análises, foi minimizada em relação a dose empregada. Na Tabela 2 há uma interpretação completa sobre as doses para cada caso, mostrando a presença de pixels quentes, que são aqueles em que houve alta deposição de dose.

Tabela 2: Função objetivo  $z$  e interpretação dos resultados para as análises média e absoluta no Matlab

Casos	Análise Média			Análise Absoluta		
	$15 \times 64 \times 10$	$5 \times 64 \times 32$	$1 \times 64 \times 32$	$15 \times 64 \times 10$	$5 \times 64 \times 32$	$1 \times 64 \times 32$
Fç. obj. ( $z$ )	$-1,9059 \times 10^3$	$-1,8872 \times 10^3$	-820,56	-10,857	-10,457	55,200
Pixels quentes	Não	Sim	Sim	Não	Não	Não
Dose no tumor	Dentro da prescrita (79,65Gy)	Dentro da prescrita (79,55Gy)	Dentro da prescrita (79,40Gy)	Dentro da prescrita	Dentro da prescrita	Dentro da prescrita
Excesso de dose na área crítica	Abaixo da prescrita	Abaixo da prescrita	Abaixo da prescrita	10,86Gy sobre a prescrita	10,46Gy sobre a prescrita	Excesso de 55,20Gy
Excesso de dose no área saudável	Abaixo da prescrita	Abaixo da prescrita	Abaixo da prescrita	Garantido, abaixo da prescrita	Garantido, abaixo da prescrita	Garantido, abaixo da prescrita

## Conclusões

O modelo de programação linear proposto por Holder (2003), mostrou-se eficiente para auxiliar o planejamento ótimo, visto que, tanto para um caso teste quanto para um mais complicado, permitiu-se elaborar um plano de distribuição de dose em que todas as células tumorais recebem a radiação mínima necessária para sua eliminação. Uma característica evidente nos resultados apresentados é a conformação da dose total na região tumoral. Dessa forma, o planejamento otimizado obteve sucesso tanto na deposição total da dose nas regiões alvo quanto na deposição de dose dentro do limite prescrito para tecidos críticos e saudáveis. Portanto, o planejamento do tratamento por radiação é uma área de pesquisa em que físicos médicos e especialistas em otimização devem estar em constante sintonia, para que dessa maneira possa contribuir positivamente em muitas vidas.

## Agradecimentos

A Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP, pela bolsa de Iniciação Científica. Número de processo: 2015/18921-0.

## Referências

- MICHELON, E., COLENCI, B., PAULA, V. **Diferenças entre os exames de Tomografia Computadorizada realizados para fins diagnósticos e para planejamento radioterápico**. Santa Maria: UFSM, 2012.
- HOLDER, A. Health Care Management Science. **Designing radiotherapy plans with elastic constraints and interior point methods**. San Antonio, USA, v.6, p.5–16, 2003.
- CID, C. B. B. **Planejamento do Tratamento por Radioterapia Através de Métodos de Pontos Interiores**. 2003. 63f. Dissertação de Mestrado - ICMC/USP, São Carlos, 2003.



## Modelos de otimização energética em sistemas de abastecimento

*Rayne Herrera Sanches*

*Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho; Faculdade de Engenharia  
rayne.sanches@yahoo.com.br*

*Edilaine Martins Soler*

*Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"; Faculdade de Ciências  
edilaine@fc.unesp.br*

**Resumo:** Os sistemas de abastecimento têm a função de fornecer água limpa e tratada para a população. A água é captada, tratada, e distribuída para os reservatórios distribuídos pelas cidades, de onde a população é abastecida. Em um sistema de abastecimento a água é transferida por meio de tubulações e bombas hidráulicas. As bombas hidráulicas são responsáveis pelos altos custos com energia elétrica nos sistemas de abastecimento. Este trabalho analisa dois modelos para otimização energética em sistemas de abastecimento.

**Palavras-chave:** Otimização. Sistemas de abastecimento. Energia Elétrica. Bombas Hidráulicas.

### Introdução

A minimização do custo com energia elétrica em sistemas de distribuição de água tem sido bastante abordada por diversos autores pois segundo De La Vega e Alem (2015), a energia elétrica consumida nas operações de bombeamento representa mais de 90% do custo operacional total de uma rede de abastecimento urbana. E, não somente no Brasil, mas como cita Toledo (2008), de uma maneira geral, em outros países em desenvolvimento, oportunidades extremamente interessantes se abrem nesta área em função do cenário mundial de contingenciamento energético e de barateamento de tecnologias e equipamentos.

A necessidade de um sistema de abastecimento de água eficaz se apresenta cada vez mais intensa uma vez que este tem como finalidade distribuir água em quantidade e qualidade adequadas de acordo com a demanda da população, a qual vem aumentando demasiadamente. Ainda, o interesse pela racionalização energética surge em função de políticas praticadas pelas distribuidoras de energia no sentido de tarifar diferentemente o consumo ocorrido em diferentes períodos do dia, como no caso do período de ponta em que há mais consumo de energia elétrica e, portanto, o custo da energia elétrica neste período é maior.

Assim, é necessário um planejamento do horário de funcionamento das bombas hidráulicas em sistemas de abastecimento, a fim de evitar que estas estejam ligadas nos períodos de ponta de modo que a demanda seja atendida.

### O problema de planejamento de operação de bombas hidráulicas

Como operar um sistema de abastecimento é uma tarefa complexa, alguns trabalhos da literatura propuseram modelos de otimização para auxiliar esta tarefa. Dentre os trabalhos da literatura destacamos os modelos propostos em Toledo et al (2008) e em Bagirov et al (2013), que visam otimizar o custo e consumo de energia elétrica nestes sistemas.

Toledo et al (2008) propuseram um modelo de programação inteira mista para o problema de planejamento de estoque de água em reservatórios que consiste em decidir quando as bombas devem

permanecer ligadas e quando deve haver transferência de água entre os reservatórios para que a demanda de cada reservatório seja atendida, minimizando os custos com energia elétrica. Neste modelo são consideradas restrições referentes aos volumes máximos e mínimos permitidos em cada reservatório, balanço de estoque de água em cada período e em cada reservatório, descontadas as perdas de água.

Bagirov et al (2013) propuseram uma modelagem de programação explícita de bombas para minimizar o consumo de energia, que usa o liga/desliga da bomba como variáveis contínuas e variáveis inteiras binárias para descrever o estado da bomba no início do período de programação. O problema é formulado como um problema de programação não-linear inteira mista e são considerados limites mínimos e máximos nos níveis de armazenamento e requisitos de pressão mínima e máxima nos nós de demanda e não é exigido que os níveis de água de armazenamento sejam totalmente recuperados até o final do período de programação.

### Testes Numéricos e Resultados Preliminares

Os modelos propostos por Toledo et al (2008) e Bagirov et al (2013) foram implementados no software Gams 24.7.1. Para a resolução do primeiro modelo citado foi utilizado o *solver* CPLEX, e para a resolução do segundo modelo citado utilizou-se o *solver* Bonmin.

Testes numéricos com dados fornecidos pelo departamento de água e esgoto da cidade de São Carlos foram realizados a fim de analisar o potencial de cada modelo.

Os resultados obtidos mostraram que ambos os modelos fornecem soluções de boa qualidade em tempo computacional aceitável.

### Considerações Finais

Este trabalho busca uma contribuição no sentido analisar dois diferentes modelos matemáticos desenvolvidos para minimizar o custo de energia elétrica na captação, armazenamento e distribuição de água. Os modelos foram investigados detalhadamente e analisados, verificando-se bastante semelhança entre as propostas para a formulação do modelo e objetivos, distanciando-se apenas pelo tipo de modelo: um trata o problema com somente funções lineares e variáveis inteiras mistas, enquanto o outro trata o problema utilizando funções não lineares e também variáveis inteiras mistas.

De forma geral, os problemas não lineares apresentam maior dificuldade em sua formulação e resolução. Além disso, verifica-se que estes são de grande dificuldade de implantação uma vez que, segundo Castelletti et al (2008), a complexidade intrínseca do sistema físico, que é altamente não-linear e afetado por uma forte incerteza, se mistura com o contexto sócio-econômico carregado de valor em que as decisões sobre os sistemas têm de ser tomadas. Por outro lado, muito autores tem conseguido boas aproximações para o problema real por meio de modelos lineares ou linearizados.

### Referências

BAGIROV, A.M.; BARTON A. F.; MALA-JETMAROVA, H.; AL NUAIMAT, A.; AHMED, S. T.; SULTANOVA, N.; YEARWOOD, J. Mathematical and Computer Modelling. **An algorithm for minimization of pumping costs in water distribution systems using a novel approach to pump scheduling**, v. 57, n. 3, p. 873-886, 2013



Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional  
De 2 a 5 de Maio de 2017  
Unesp, Faculdade de Ciências - Bauru/SP

CASTELLETTI, A.; PIANOSI, F.; SONCINI-SESSA, R. Applied Mathematics and Computation. **Integration, participation and optimal control in water resources planning and management**, v. 206, n. 1, p. 21-33, 2008.

DE LA VEGA, J. ALEM, D. IEEE Latin America Transactions. **Energy Rationalization in Water Supply Networks via Stochastic Programming**. v.13, n.8, p. 2742-2756, 2015.

TOLEDO, Franklina et al. Logística de distribuição de água em redes urbanas: racionalização energética. **Pesquisa Operacional**, v. 28, n. 1, p. 75-91, 2008..

## O sistema TLR e a semântica de matrizes da Lógica RM3

*Luis Felipe Salvador Boato*

*Universidade Estadual Paulista - Unesp; Faculdade de Ciências  
pesalvador50@gmail.com*

*Luiz Henrique da Cruz Silvestrini*

*Universidade Estadual Paulista - Unesp; Faculdade de Ciências  
silvestrini@fc.unesp.br*

**Resumo:** Neste trabalho, apresentamos um esboço de como garantir que todas as deduções feitas no sistema de tableaux TLR também tenham uma correspondente dedução feita a partir da semântica de matrizes da lógica RM3, a qual é uma lógica não-clássica paraconsistente e trivalente, que foi introduzida por Anderson e Belnap em 1975. Desse modo, explicitamos um caminho possível para que aquilo que é deduzido via tableaux TLR pode também ser deduzido semanticamente pelo sistema RM3. A semântica aqui apresentada foi explorada por Brady em 1982.

**Palavras-chave:** Matemática Discreta. Método de Prova. Tableaux. Lógica RM3.

### Introdução

Anderson e Belnap (1975) deram início aos estudos que culminaram no surgimento da escola das lógicas da relevância. Esta se consolidou como uma das mais conhecidas escolas paraconsistentes da literatura.

A proposta de Anderson e Belnap foi de sugerir uma lógica baseada na ideia de que o antecedente de uma implicação lógica deve ser relevante para o seu consequente. Segundo os autores, deveríamos fazer construções de modo que haja uma relevância entre as proposições envolvidas na implicação, a fim de se evitar a validação lógica de sentenças como “Se a lua é feita de queijo cheddar, então 2 é um número ímpar”. Esta sentença adotaria uma valoração verdadeira na lógica clássica, através da não verdade do antecedente lógico, entretanto qual é a relação entre a lua ser feita de queijo cheddar e a paridade do número 2? É para evitar tais desconfortos intuitivos, que foram sugeridas algumas lógicas da relevância.

Um sistema lógico  $L$  pode ser definido como um par  $(For, \vdash_L)$  constituído por um conjunto  $For$  de fórmulas munido de uma relação de consequência  $\vdash_L$ . Uma teoria, ou seja,  $\Delta \subseteq For$  tal que  $\lambda \in \Delta$  se, e somente se,  $\Delta \vdash \lambda$ , é dita *consistente* se ela não contém  $\lambda$  e  $\neg\lambda$ , para cada fórmula  $\lambda$ , caso contrário, a teoria  $\Delta$  é dita *inconsistente*. Além disso, um sistema lógico é *paraconsistente* quando nos permite distinguir entre teorias *contraditórias*  $\Gamma$ , no sentido em que  $\Gamma \vdash_L \lambda$  e  $\Gamma \vdash_L \neg\lambda$ , para alguma fórmula  $\lambda$ , e teorias *triviais*  $\Delta$ , no sentido em que  $\Delta \vdash_L \delta$ , para toda fórmula  $\delta$ . Da mesma forma, podemos dizer que um sistema lógico é considerado paraconsistente se, e somente se, ele é *não-explosivo*, i.e., um sistema no qual o *princípio de explosão*  $(\lambda, \neg\lambda \vdash_L \delta)$  não é válido. Este princípio também é chamado de *ex falso quodlibet*. Assim, as lógicas paraconsistentes são aquelas nas quais uma teoria inconsistente pode ser não trivial.

### A Lógica da Relevância RM3

A lógica da relevância que utilizaremos nesta apresentação será a **RM3** (Lógica Trivalente da Conexão Relevante) de Anderson e Belnap (1975). Uma semântica para **RM3** foi apresentada por Brady (1982).



A relação de consequência (semântica) lógica da RM3 está baseada na ideia que uma valoração  $v$  satisfaz uma fórmula A se  $v(A) \in \{1, 1/2\}$ . Temos que  $\Gamma \models_{RM3} A$  se, e somente se, para cada valoração  $v$ , ou  $v(A') = 0$  para algum  $A' \in \Gamma$ ; ou  $v(A) = 1$ ; ou  $v(A') = 1/2$  para cada  $A' \in \Gamma$  e  $v(A)=1/2$ . Desse modo, explicitamos que os elementos distinguidos (ou designados) pertencem ao conjunto  $D=\{1, 1/2\}$ .

Esta semântica de valorações pode ser apresentada a partir das matrizes de RM3.

A	$\neg A$
1	0
1/2	1/2
0	1

$\rightarrow$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	1	1/2	0
0	1	1	1

$\wedge$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	0	0	0

$\vee$	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1/2	0

### O sistema TLR

O sistema TLR é um sistema de tableaux em que buscamos demonstrar sua equivalência dedutiva com a lógica RM3, ou seja, apresentar um sistema dedutivo alternativo ao axiomático, como foi originalmente apresentada a RM3.

**Definição.** Um ramo no sistema TLR é *fechado* quando uma mesma fórmula  $\lambda$  possui valores distintos neste mesmo ramo, ou seja, quando uma das três situações ocorrer:

- i)  $1 \lambda$  e  $1/2 \lambda$ ;
- ii)  $1 \lambda$  e  $0 \lambda$ ;
- iii)  $1/2 \lambda$  e  $0 \lambda$ .

As regras de expansão são de 3 tipos distintos, a saber:  $\alpha$  (não bifurcam),  $\beta$  (bifurcam) ou  $\gamma$  (trifurcam). Tais regras são apresentadas abaixo:

$\frac{1 \neg A}{0 A}$	$\frac{1/2 \neg A}{1/2 A}$	$\frac{0 \neg A}{1 A}$	$\frac{1 A \wedge B}{1 A \quad 1 B}$	$\frac{0 A \vee B}{0 A \quad 0 B}$	$\frac{1/2 A \rightarrow B}{1/2 A \quad 1/2 B}$
------------------------	----------------------------	------------------------	--------------------------------------	------------------------------------	---

$\frac{0 A \wedge B}{0 A \quad 0 B}$	$\frac{1 A \vee B}{1 A \quad 1 B}$	$\frac{1 A \rightarrow B}{0 A \quad 1 B}$
--------------------------------------	------------------------------------	---

$\frac{1/2 A \wedge B}{1 A \quad 1/2 A \quad 1/2 A \quad 1/2 B \quad 1 B \quad 1/2 B}$	$\frac{1/2 A \vee B}{0 A \quad 1/2 A \quad 1/2 A \quad 1/2 B \quad 0 B \quad 1/2 B}$	$\frac{0 A \rightarrow B}{1 A \quad 1 A \quad 1/2 A \quad 1/2 B \quad 0 B \quad 0 B}$
--	--	---

## Conclusões

Podemos estabelecer uma relação entre o sistema de Tableaux TLR e a semântica da lógica RM3 e mostramos neste trabalho que se há um tableaux fechado para a dedução da fórmula  $\varphi$  em TLR, então há uma dedução correspondente (semântica), para a fórmula  $\varphi$ , em RM3, ou seja,  $\Delta \Vdash \varphi \Rightarrow \Delta \models \varphi$ . Para isso, precisamos estender a noção de valoração para fórmulas marcadas da seguinte maneira:  $v(TA) = 1$  sse  $v(A) = 1$ ,  $v(bA) = 1$  sse  $v(A) = \frac{1}{2}$ ,  $v(FA) = 1$  sse  $v(A) = 0$ . Temos que  $\Delta \models \varphi$  se, e somente se, para  $\delta \in \Delta$ ,  $v(\delta) \in D$ , então  $v(\varphi) \in D$ . Assim, um conjunto de fórmulas  $\Delta$  é *satisfazível* se existir uma  $v$  tal que  $v(\Delta) \in D$ .

**Lema 1.** Seja  $\Delta$  um conjunto de fórmulas marcadas e satisfazível. Então:

(a) Se  $\alpha \in \Delta$ , então  $\Delta \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$  é satisfazível também.

(b) Se  $\beta \in \Delta$ , então  $\Delta \cup \{\beta_1\}$  é satisfazível ou  $\Delta \cup \{\beta_2\}$  é satisfazível.

(c) Se  $\gamma \in \Delta$ , então  $\Delta \cup \{\gamma_1, \gamma_2\}$  é satisfazível ou  $\Delta \cup \{\gamma_3, \gamma_4\}$  é satisfazível ou  $\Delta \cup \{\gamma_5, \gamma_6\}$  é satisfazível.

**Demonstração:**

Nesse trabalho, daremos a demonstração do item (a). Suponha que  $\alpha \in \Delta$  é da forma FAVB. Como  $\Delta$  é satisfazível, existe  $v$  tal que  $v(\Delta) \in D$ . Em particular,  $v(\alpha) = 1$  e, portanto,  $v(A) = v(B) = 0$ , logo  $v(\Delta \cup \{FA, FB\}) = 1$ . A demonstração é análoga para os outros casos de  $\alpha$ .

Este lema será usado para demonstrar o seguinte resultado:

**Teorema.** Se  $\Delta \Vdash \varphi$ , então  $\Delta \models \varphi$ .

**Demonstração:** Trata-se de um trabalho em andamento, e por isso apresentamos apenas um esboço para esta demonstração. Provamos por contrapositiva, ou seja, vamos assumir que  $\Delta$  não deduz semanticamente  $\varphi$  e provamos que  $\Delta$  não gera um tableaux fechado para  $\varphi$ . A ideia central será que sempre haverá um ramo satisfeito que, após todas as expansões, será um conjunto *descendentemente saturado* (i.e. não há mais regra aplicável e não há fórmula apresentando valores distintos no ramo) e não poderá fechar. Portanto,  $\Delta$  não gera um tableaux fechado para  $\varphi$ .

## Agradecimentos

Agradecemos à FAPESP pelo fomento de nossa pesquisa (Bolsa de iniciação científica. Processo FAPESP nº 2016/07446-2).

## Referências

ANDERSON, A. R.; BELNAP, N. D. JR. **Entailment Vol. 1: the Logic of Relevance and Necessity**. Princeton University Press, Princeton NJ, 1975.

BRADY, R. T. Logique et Analyse. **Completeness proofs for the systems RM3 and BN4**, 25, 9-32, 1982

SILVA, F. S. C.; FINGER, M.; MELO, A. C. V. **Lógica para Computação**, Thomson Pioneira, 2006.

## Otimização da operação de bombas hidráulicas em sistemas de abastecimento

*Isabela Garcia Parras*

*Unesp; Faculdade de ciências  
isabelaparras@hotmail.com*

*Ana Raquel Faccioli*

*Unesp; Faculdade de ciências  
raquel\_faccioli@hotmail.com*

*Kathleen Janaina Macedo Silva*

*Unesp; Faculdade de ciências  
kathleen\_macedoo@hotmail.com*

*Edilaine Martins Soler*

*Unesp; Faculdade de ciências  
edilaine@fc.unesp.br*

**Resumo:** Este trabalho tem como objetivo investigar um modelo matemático de otimização para minimização do custo de energia elétrica na operação de bombas hidráulicas em sistemas de abastecimento de água. Testes numéricos com um sistema de abastecimento de pequeno porte foram realizados, sob diferentes condições de infraestrutura.

**Palavras-chave:** Otimização. Otimização inteira-mista. Rede de distribuição de água. Sistemas de Abastecimento. Bombas hidráulicas.

### Introdução

Os sistemas de abastecimento de água envolvem a captação, tratamento e distribuição de água, como ilustrado na Figura 1. Estes sistemas têm a função de levar água em quantidade e qualidade adequadas à população para que suas necessidades sejam atendidas, porém isso envolve o dispêndio de quantidades muito significativas de energia elétrica, sendo cerca de 95% do consumo atribuível aos sistemas de bombeamento. Assim, é muito relevante que as empresas de saneamento possam diminuir seus gastos com energia elétrica, sem prejuízo no abastecimento. Como o custo de energia elétrica é diferenciado ao longo das horas do dia, faz-se necessário um planejamento do liga/desliga das bombas hidráulicas (e conseqüentemente do volume de água nos reservatórios) para evitar que estas operem nos horários em que a energia elétrica é mais cara (horários de ponta).

### Descrição do problema

O custo de energia elétrica é variável ao longo das horas do dia, sendo mais custoso nos horários de ponta, portanto é necessário um planejamento do horário de funcionamento das bombas hidráulicas em um sistema de abastecimento para que, se possível, estas não sejam ligadas em períodos de alto custo de energia elétrica, sem que ocorra prejuízo no abastecimento. Sendo assim, deve-se planejar o volume dos reservatórios, ou seja, determinar o estoque de água ao longo dos períodos, a fim de atender a demanda com o mínimo custo de energia.

Os sistemas de abastecimento são sistemas complexos, pois envolvem muitas tubulações, bombas e conexões entre os reservatórios, portanto, planejar o liga/desliga das bombas hidráulicas em sistemas de abastecimento é uma tarefa difícil. Assim, Toledo et al. (2008) propuseram um modelo

matemático de otimização para o problema de planejamento de estoque de água em reservatórios cujo objetivo é minimizar o custo de energia elétrica necessária para o funcionamento das bombas hidráulicas utilizadas para captação e distribuição de água em redes urbanas. As bombas hidráulicas são utilizadas para levar água de poços artesianos a reservatórios distribuídos pelos bairros de uma cidade, onde a população é atendida por força gravitacional. O volume de água disponível em um reservatório, mais o que pode ser recebido dos poços, Estação de Tratamento de Água, e de outros reservatórios vizinhos no período deve ser o suficiente para atender a demanda de água no mesmo período.

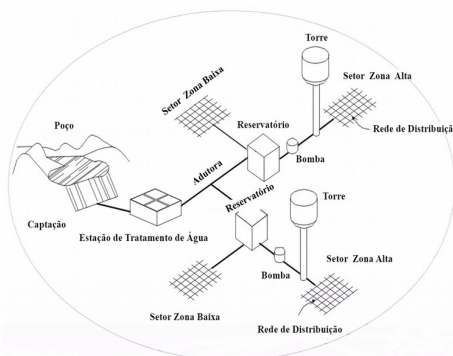


Figura 1: Representação de Sistema de Abastecimento de Água. (Fonte: SABESP (2017)).

### Testes numéricos

Testes numéricos com o modelo matemático proposto em Toledo et al. (2008) aplicado à um sistema de abastecimento de pequeno porte foram realizados. Em todos os testes considerou-se um sistema de abastecimento com três reservatórios, cujo volume mínimo para cada um deles é igual a 270 m<sup>3</sup> e o limite máximo para o primeiro e terceiro reservatório é igual a 1000 m<sup>3</sup> e para o segundo reservatório é igual a 2000 m<sup>3</sup>. Cada um dos reservatórios é responsável por atender a demanda de um bairro e foram considerados três poços, cada um deles associado a uma bomba de captação e a um reservatório. Foi considerado um horizonte de planejamento de um dia (24 horas), o qual foi subdividido em 8 períodos, cada um deles correspondente a três horas desse dia. O 7º período é o período crítico, em que o custo da energia elétrica é mais cara. Foi considerado que os reservatórios podem transferir água entre si: do 1 para 2, 2 para 1, 2 para 3 e 3 para 2, com custo de transferência igual a 1 unidade monetária. Na Tabela 1 é apresentada a demandas de água em cada um dos períodos utilizadas nos testes. Todos os dados considerados nos testes foram baseados em Toledo et al. (2008).

Tabela 1: Demandas de água em cada período.

Períodos	1	2	3	4	5	6	7	8
Demandas Reservatório 1	20	25	116	173	208	255	260	20
Demandas Reservatório 2	18	31	120	190	220	263	300	26
Demandas Reservatório 3	22	19	112	156	206	210	222	30

Os testes foram realizados adotando diferentes condições de infraestrutura do sistema de abastecimento considerado. Todos os testes foram realizados com utilizando o *solver* CPLEX em interface com o *software* GAMS.

Os testes foram divididos em duas etapas. Em cada etapa considerou-se que as bombas hidráulicas têm consumo de energia elétrica diferenciados, e consequentemente custos com energia elétrica diferenciados. Na etapa 1 considerou-se o custo de manter a cada bomba ligada em cada um dos períodos igual a 30 unidades monetárias, exceto no período crítico, em que o custo é de 90 unidades monetárias; na etapa 2 os valores adotados foram 15 e 45 unidades monetárias,

respectivamente. Em cada uma das etapas foram realizados testes considerando diferentes valores para as perdas de água no sistema: 0%, 5%, 10% e 20%.

As Figuras 1 e 2 ilustram os níveis dos reservatórios e a fração do período em que as bombas de captação permaneceram ligadas, na primeira etapa de testes, considerando um sistema de abastecimento ideal, sem perdas de água. Nota-se que é possível não ligar as bombas hidráulicas durante o período crítico. Nos testes em que foram consideradas perdas de água observou-se que não é possível atender a demanda sem acionar as bombas hidráulicas no período crítico, no entanto, com um planejamento da operação destas bombas é possível mantê-las ligadas somente em parte do período crítico. Além disso notou-se uma grande diferença nos valores da função objetivo nos testes realizados na etapa 1 e na etapa 2. Foram obtidos valores muito menores para a função objetivo na etapa 2, em que se tem bombas com menor consumo de energia elétrica. Com relação às perdas de água, notou-se que a medida em que as perdas de água aumentam, os valores da função objetivo são significativamente maiores.

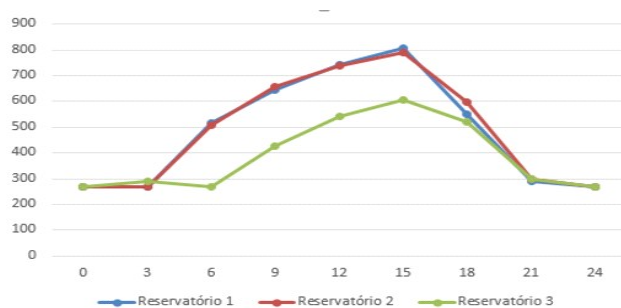


Figura 2: Nível de água nos reservatórios – Etapa 1 – Sem perdas de água.

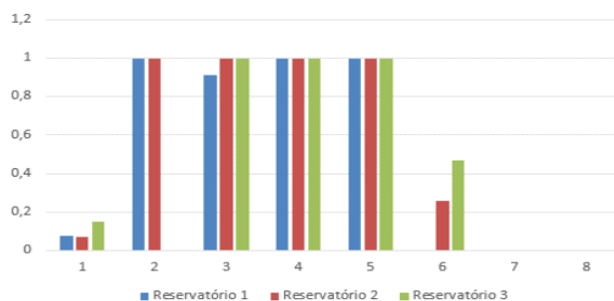


Figura 3: Operação bombas hidráulicas - Etapa 1 – Sem perdas de água

## Considerações Finais

Um planejamento da operação das bombas hidráulicas em sistemas de abastecimento, bem como investimentos em bombas hidráulicas mais eficientes, e em instalações a fim de se diminuir as perdas de água no sistema asseguram uma grande economia em relação aos custos com energia elétrica nestas empresas.

### 1. Referências

TOLEDO, F. M. B. et al (2008). **Logística de distribuição de água em redes urbanas – racionalização energética**. Pesquisa Operacional, 28, 75-91.

SABESP. **Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo**. 2017. Disponível em: <<http://site.sabesp.com.br/site/interna/Default.aspx?secaoId=35>>. Acesso em: 19 mar. 2017.

## Otimização da produção de biogás em biodigestores rurais

*Leandro Willian Marcucci*

*Instituto de Biociências, UNESP - Botucatu/SP  
marcucci@ibb.unesp.br*

*Helenice de Oliveira Florentino*

*Instituto de Biociências, UNESP - Botucatu/SP  
helenice@ibb.unesp.br*

**Resumo:** Neste trabalho é proposto um modelo matemático para otimização da produção de biogás em biodigestores, do tipo batelada, afim de maximizar a produção de biogás. O modelo proposto tem como restrições as equações que descrevem a cinética de fermentação ao longo do tempo, analisando o consumo do substrato com o qual é alimentado e a evolução das bactérias presentes. Esta trabalho busca contribuir com o desenvolvimento de biodigestores de maior eficiência e rentabilidade, favorecendo a utilização do biogás que é uma importante fonte de energia renovável.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática, Otimização, Material Orgânico, Biodigestor.

### Introdução

Biodigestor é um equipamento composto por uma câmara fechada onde é colocado o material orgânico em solução aquosa, chamado substrato, e uma segunda câmara na parte superior, chamado gasômetro, no qual é acumulado o biogás proveniente da decomposição do substrato, Deganutti (2002). O biogás começa a ser produzido depois de vinte dias que os dejetos são colocados na câmara, podendo chegar ao máximo na terceira semana após o início da produção e posteriormente diminui durante o período de fermentação, Coelho (2004). Além da produção de biogás, o biodigestor fornece o biofertilizante, material remanescente do processo de digestão anaeróbica.

A conversão do material orgânico em biogás ocorre em várias etapas, mas, para a facilidade de modelagem matemática, estas podem ser divididas nos seguintes estágios:

- Estágio 1: hidrólise e acidogênese;

Neste estágio ocorre a ação de bactérias denominadas hidrolíticas que transformam proteínas em peptídeos e aminoácidos, polissacarídeos em monossacarídeos e gorduras em ácidos graxos pela ação de enzimas. No processo de acidogênese, os compostos originados da hidrólise são absorvidos nas células das bactérias fermentativas e após o processo de acidogênese são excretadas como ácidos e álcoois, Netto (2004).

- Estágio 2: acetogênese;

Nesta etapa os produtos da acidogênese são transformados em ácidos acéticos pela ação das bactérias acetogênicas. A acetogênese fornece os substratos para a produção do gás metano do acetato, hidrogênio e dióxido de carbono, Carballa (2004).

- Estágio 3: metanogênese.

Neste último estágio, as bactérias metanogênicas transformam o hidrogênio e o ácido acético obtidos no estágio anterior em um gás rico em metano e dióxido de carbono.



Essas etapas levam um tempo para ocorrer, denominado tempo de retenção hidráulica (TRH), que é o tempo em que o biodigestor permanece fechado até que ocorra toda a conversão do substrato em biogás, podendo variar de acordo com as dimensões do biodigestor e do volume de substrato em que é alimentado. A eficiência desta conversão está intimamente ligado ao TRH e a outros fatores que favorecem este.

O biogás é um produto versátil, podendo ser utilizado por meio de combustão para gerar energia elétrica, térmica ou mecânica em propriedades rurais. Sua composição pode diferenciar de acordo com matéria orgânica usada no processo de biodigestão.

## Modelo Matemático

O objetivo deste trabalho é propor técnicas matemáticas de otimização visando determinar parâmetros otimizados que proporcione o menor tempo de retenção do resíduo no biodigestor, mas ao mesmo tempo ocorra a conversão total de orgânicos em biogás, realizando todo o processo com a máxima eficiência possível.

O modelo proposto neste trabalho descreve a cinética de fermentação considerando dois estágios, acidogênese e metanogênese, Khan (2013). Esta dinâmica é composta por quatro equações diferenciais não lineares de primeira ordem, onde os principais parâmetros são as concentrações iniciais dos substratos,  $S_{svb0}$ ,  $S_{agv0}$ , as concentrações iniciais das bactérias respectivamente nos estágios de acidogênese e metanogênese.

Considerando as variáveis  $t$  (tempo em dias),  $\theta$  (TRH) e  $T$  (temperatura), propomos o seguinte modelo;

$$Max(V_{CH_4} = \int_0^{\theta} \gamma CH_4 dt) \quad (1)$$

$$Min(\theta) \quad (2)$$

sujeito a

$$\gamma CH_4 = 0.5 \mu_m X_m \frac{(1 - Y_m)}{Y_m} \quad (3)$$

$$\frac{dS_{svb}}{dt} = \frac{S_{svb0} - S_{svb}}{\theta} - \frac{\mu_a X_a}{Y_a} \quad (4)$$

$$\frac{dS_{agv}}{dt} = \frac{S_{agv0} - S_{agv}}{\theta} - \frac{\mu_m X_m}{Y_m} + \frac{\mu_a X_a (1 - Y_a)}{Y_a} \quad (5)$$

$$\frac{dX_a}{dt} = \left( \mu_a - k_a - \frac{1}{\theta} \right) X_a \quad (6)$$

$$\frac{dX_m}{dt} = \left( \mu_m - k_m - \frac{1}{\theta} \right) X_m \quad (7)$$

$$\mu_{max} = 0.0103T - 0.2077 \quad (8)$$

$$\mu_a = \frac{\mu_{amax}}{1 + k_{svb}/S_{svb} + S_{agv}/k_{ia}} \quad (9)$$

$$\mu_m = \frac{\mu_{mmax}}{1 + k_{agv}/S_{agv} + S_{agv}/k_{im}} \quad (10)$$

$$T \geq 0, \theta \geq 0, t \in [0, \theta] \quad (11)$$

Em que;

Variáveis de Estado	Descrição
$\mu_{amax}$ e $\mu_{mmax}$	Taxa de crescimento máximo de bactérias acidogênicas e metanogênicas respectivamente
$S_{svb}$	Concentração de sólidos voláteis biodegradáveis no digestor
$S_{svb0}$	Concentração inicial de sólidos voláteis biodegradáveis no digestor
$S_{agv}$	Concentração de ácidos graxos voláteis no digestor
$S_{agv0}$	Concentração inicial de ácidos graxos voláteis no digestor
$X_a$	Concentração de bactérias acidogênicas no digestor
$X_{a0}$	Concentração inicial de bactérias acidogênicas no digestor
$X_m$	Concentração de bactérias metanogênicas no digestor
$X_{m0}$	Concentração inicial de bactérias metanogênicas no digestor
$k_a$	Taxa de mortalidade das bactérias acidogênicas
$k_m$	Taxa de mortalidade das bactérias metanogênicas
$Y_a$	Coefficiente de rendimento das bactérias acidogênicas
$Y_m$	Coefficiente de rendimento das bactérias metanogênicas

As equações (1) e (2) descrevem os objetivos do trabalho que são respectivamente: maximizar o volume de metano produzido e minimizar o TRH. A equação (3) define a taxa de metano. As restrições (4-7) descrevem as taxas de variação dos sólidos voláteis biodegradáveis, dos ácidos graxos voláteis, das bactérias acidogênicas e metanogênicas respectivamente. A equação (8) define a taxa de crescimento máximo das bactérias em função da temperatura. As equações (9) e (10) descrevem as taxas de crescimento das bactérias acidogênicas e metanogênicas respectivamente.

## Resultados Computacionais

Os resultados computacionais estão em fase final de implementação e serão apresentados no Encontro.

## Agradecimentos

Os autores agradecem as fundações CAPES, CNPq (302454/2016-0), PROPE e PROPG (Pró-Reitorias da UNESP), FUNDUNESP e FAPESP (2014 / 01604-0 e 2014/04353 -8) pelo apoio financeiro.

## Referências

- CARBALLA, M. et al. Improvement of anaerobic digestion and digested sludge characteristics using a chemical and a thermal pretreatment. In: 10TH WORLD, 2004.
- COELHO, S. T. et al. Relatório de Acompanhamento - Relatório de Atividades de Projeto Programa de Uso Racional de Energias e Fontes Alternativas (PUREFA). In: CENTRO NACIONAL DE REFERÊNCIA EM BIOMASSA, 2004, São Paulo.
- DEGANUTI, R. **Biodigestores Rurais: modelo indiano, chinês e batelada**, 2002.
- KHAN, A. A. et al. **Optimization of Methane Output for an Anaerobic Waste Digester**, 2013.
- NETTO, J. C. Gás Natural Liberalização do Sector na União Europeia e em Portugal. Rio de Janeiro. ERSE - Entidade Reguladora dos Serviços Energéticos, 2004.



## Otimização do problema de dimensionamento de lotes integrado ao problema de corte de estoque bidimensional em uma indústria de papel.

*Betania S. C. Campello*

*Unicamp, Faculdade de Ciências Aplicadas  
betania.campello@fca.unicamp.br*

*Washington A. de Oliveira*

*Unicamp, Faculdade de Ciências Aplicadas  
washington.oliveira@fca.unicamp.br*

*Carla T. L. S. Ghidini*

*Unicamp, Faculdade de Ciências Aplicadas  
carla.ghidini@fca.unicamp.br*

*Amanda O. C. Ayres*

*Unicamp, Faculdade de Ciências Aplicadas  
amanda.ayres@fca.unicamp.br*

**Resumo:** Uma parte do processo produtivo nas indústrias de papel envolve dois problemas clássicos, o problema de dimensionamento de lotes (PDL) e o problema de corte de estoque (PCE). O primeiro refere-se à produção de bobinas grandes de papel e o segundo ao corte destas bobinas em tamanhos menores. A abordagem que otimiza esses dois problemas de forma integrada mostra uma diminuição dos custos globais quando comparada a abordagem que otimiza cada problema de forma isolada. Apresentamos um novo modelo matemático para o PDL integrado ao PCE em uma indústria de papel, no qual o padrão de corte é bidimensional e depende de requisitos específicos sobre a largura e comprimento de cada item produzido. Além disso, testes numéricos estão sendo conduzidos para validar a nossa proposta.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática e Aplicações. Problemas Integrados. Problema de Corte de Estoque. Problema de Dimensionamento de Lotes.

### Introdução

A pesquisa operacional pode ser aplicada na otimização de diversas etapas do processo de manufatura nas indústrias de papel, móveis, alumínio, entre outras. Neste trabalho, nós otimizamos de forma integrada duas etapas sucessivas da produção na indústria de papel, a produção de bobinas grandes de papel (*objetos*) e o corte desses objetos em tamanhos menores (*itens*). A otimização da primeira etapa é conhecida como problema de dimensionamento de lotes (PDL), Drexl and Kimms [1997] fazem uma revisão de trabalhos para o PDL. A otimização da segunda etapa é conhecida como problema de corte de estoque (PCE), em De Carvalho [2002] encontramos uma revisão de trabalhos para este problema.

No PDL determina-se quantos objetos são produzidos em cada período dentro do horizonte de planejamento, o objetivo consiste em minimizar os custos relativos a esta produção atendendo à demanda de objetos. Cada objeto é utilizado como matéria prima na etapa seguinte, na qual ele é cortado em comprimentos menores. A configuração na qual os comprimentos dos itens são dispostos no objeto é denominada *padrão de corte*, o qual pode produzir perda de papel depois do seu corte. No PCE determina-se quantas vezes utilizar cada padrão de corte de forma a minimizar a perda de papel atendendo à demanda dos itens. Apesar de serem etapas consecutivas e dependentes uma da outra, é comum encontrar empresas que fazem o planejamento da produção de objetos separado do planejamento do corte.

Alguns autores propuseram otimizar simultaneamente os dois problemas, de modo que o objetivo consiste em minimizar os custos relativos à produção dos objetos no PDL integrado aos custos relativos no processo de corte no PCE. Para empresas de papel, Respicio and Captivo [2002] e Poltroniere et al. [2008] propuseram um modelo integrado para o PDL e PCE onde o corte dos itens é unidimensional, e obtiveram custos globais melhores quando comparado com a otimização dos dois problemas de forma separada. Correia et al. [2004] também trabalham com o problema integrado onde a otimização é feita desde a produção de objetos, passando pelo corte dos objetos em itens, até o corte bidimensional para obter os formatos (folhas de papel). Kim et al. [2014] estudam o problema de corte de estoque bidimensional dois estágios, o primeiro estágio de corte (corte de objetos em itens) é do tipo unidimensional e o segundo estágio (corte de itens em formatos) é do tipo bidimensional.

Diferentemente dos trabalhos mencionados, propomos uma abordagem integrada do PDL com o PCE para uma indústria de papel em que o corte de itens é bidimensional e tem características específicas em relação ao comprimento e à largura dos itens demandados. O objetivo é otimizar o problema para empresas de papel que atendem demandas de itens, em que duas dimensões no corte são relevantes e um dos cortes é guilhotinado. Estudamos se o PDL integrado ao PCE com corte bidimensional pode gerar melhores soluções que os estudos separados dos dois problemas. Neste trabalho, além de apresentar um novo modelo matemático para o problema integrado, testes computacionais estão sendo realizados.

## Descrição do problema integrado na indústria de papel

No processo de produção do papel extrai-se, a partir da madeira, fibras de celulose que são misturadas com substâncias químicas, de onde obtém-se uma pasta de celulose. Esta pasta é transformada em uma folha lisa e contínua que será enrolada nas máquinas para produzir os objetos. Cada máquina  $m$  tem um desempenho próprio com respeito à capacidade máxima  $C_m$  de produção e ela fabrica objetos de comprimento  $L_m$ . Esses objetos não são estocados e após serem produzidos eles são enviados para o processo de corte. O corte é bidimensional, então o comprimento e a largura do objeto são importantes na produção dos itens. Cada item tem comprimento  $c_i$  e largura  $\ell_i$ . Estes itens poderão ser estocados, enviados ao cliente ou utilizados em outras etapas da indústria (corte de formatos). Este processo está ilustrado de forma simplificada na Figura 1. Nela, consideramos duas máquinas que produzem dois objetos de larguras diferentes,  $L_1$  e  $L_2$ . Note que o papel do objeto é desenrolado enquanto é feito os cortes longitudinais. Simultaneamente, o papel dos itens formados a partir dos cortes longitudinais são novamente enrolados até que um corte transversal seja feito.

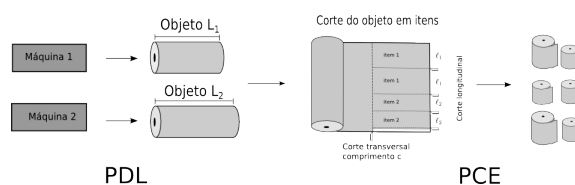


Figura 1: Exemplificação do processo de produção

O corte transversal é guilhotinado, isto é, um corte único na transversal de acordo com o padrão de corte escolhido. Esta última característica do corte pode gerar uma perda muito grande, quando temos dois itens com comprimentos muito diferentes no mesmo padrão de corte. O comprimento dos itens pode ser da ordem de centenas de metros, sendo muito maior que a largura. Assim, uma perda com relação ao comprimento é bastante relevante.

Apesar do comprimento do item ser muito maior que sua largura, a Figura 2 exemplifica um caso com redução da perda de material. Suponha um objeto de largura 4,60 m e uma demanda que consiste

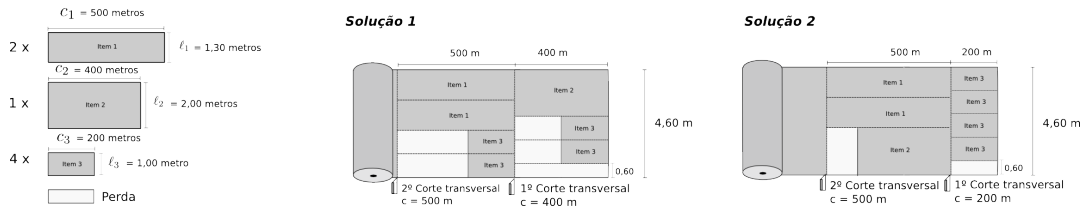


Figura 2: Exemplo perda no corte bidimensional

em  $2 \times$  item 1,  $1 \times$  item 2 e  $4 \times$  item 3. O comprimento e a largura de cada item são ilustrados na Figura 2. Se considerarmos o padrão de corte apenas com relação à largura do objeto, então a **Solução 1** e a **Solução 2** seriam indiferentes com relação à perda de material, ou seja, perda de material igual a 0,60 m.

Considere agora o comprimento do objeto, a **Solução 1** tem comprimento de 400 m até o primeiro corte transversal e 500 m até o segundo, totalizando 900 m de comprimento. A **Solução 2** tem comprimento de 200 m até o primeiro corte transversal e 500 m até o segundo, totalizando 700 m de comprimento. Então, a **Solução 1** utiliza  $900 \text{ m} \times 4,60 \text{ m} = 4.140 \text{ m}^2$  de material, enquanto a **Solução 2** utiliza  $700 \text{ m} \times 4,60 \text{ m} = 3.220 \text{ m}^2$  de material. A **Solução 2** utiliza 22% menos material que o **Solução 1**. Assim, a Figura 2 ilustra a vantagem de estudar o corte bidimensional em empresas de papel para a redução de custos.

Em alguns casos, o tomador de decisão da indústria planeja a produção de objetos baseado no conhecimento empírico e a decisão não leva em consideração a etapa de corte. Porém, obter menores perdas durante o corte depende do tamanho e da quantidade disponível dos objetos. Assim, se o dimensionamento de lotes não levar em consideração o processo de corte, a produção ótima obtida no PDL poderá gerar maiores perdas de material no PCE. Nosso modelo matemático minimiza simultaneamente os custos do PDL e do PCE. Ele minimiza simultaneamente os custos de produção dos tipos de objeto no PDL, os custos de perda de material no corte bidimensional e os custos de estoque de itens no PCE. As restrições são de não violar a capacidade máxima de produção das máquinas e de que as demandas de itens e objetos devem ser atendidas.

## Referências

- A. Drexl and A. Kimms. Lot sizing and scheduling – survey and extensions. *European Journal of Operational Research*, 99(2):221–235, 1997.
- J. M. V. De Carvalho. Lp models for bin packing and cutting stock problems. *European Journal of Operational Research*, 141(2):253–273, 2002.
- A. Respicio and M. E. Captivo. Um DSS para o problema de planejamento e sequenciamento da produção em indústrias de papel. In *DSI age-2002, international conference on decision making and decision support in the Internet age*, pages 298–308, 2002.
- S. C. Poltroniere, K. C. Poldi, F. M. B. Toledo, and M. N. Arenales. A coupling cutting stock-lot sizing problem in the paper industry. *Annals of Operations Research*, 157(1):91–104, 2008.
- M. H. Correia, J. F. Oliveira, and J. S. Ferreira. Reel and sheet cutting at a paper mill. *Computers & Operations Research*, 31(8):1223–1243, 2004.
- K. Kim, B. Kim, and H. Cho. Multiple-choice knapsack-based heuristic algorithm for the two-stage two-dimensional cutting stock problem in the paper industry. *International Journal of Production Research*, 52(19):5675–5689, 2014.



## Planejamento de trajetória para a manipulação de partículas em microfluídica

*Luca Meacci*

*Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC/USP  
luca.meacci@usp.br*

*Franciane Fracalossi Rocha*

*Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC/USP  
fr.franciane@usp.br*

*Arianne Alves Silva*

*Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC/USP  
arianne@usp.br*

*Petterson Vinicius Pramiu*

*Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC/USP  
ppramiu@usp.br*

*Gustavo Carlos Buscaglia*

*Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC/USP  
gustavo.buscaglia@icmc.usp.br*

**Resumo:** Partículas imersas em fluidos são transportadas através de campos de velocidade. É de interesse de problemas com importantes aplicações em microfluídica ter-se um controle sobre como as partículas imersas transportam-se no fluido. Uma forma de controlar-se a trajetória das partículas é o uso de atuadores de sistema para induzir campos de velocidades adequados ao trajeto desejado. Nesse trabalho propõe-se o planejamento de trajetória ótima para o transporte de uma partícula de um ponto a outro em um domínio com presença de obstáculos e atuadores do tipo imposição de pressão ou imposição de voltagem através de eletrodos.

**Palavras-chave:** Mecânica dos Fluidos e Aplicações. Planejamento ótimo de trajetória. Manipulação de partículas. Princípio de Bellman. Equação de Hamilton-Jacobi.

## Introdução

O presente trabalho tem como objetivo manipular o transporte, de um ponto a outro, de partículas imersas em um fluido e é inspirado nos trabalhos de ARMANI et al. (2005) e TUVAL et al. (2005). Considera-se como configuração física o espaço limitado entre duas paredes paralelas, onde um fluxo é induzido por atuadores de maneira controlada. Os atuadores considerados são pressão ou voltagem, que são ativados de maneira a conduzir o fluxo e, conseqüentemente, as partículas que fluem imersas no fluido. O estudo é dirigido de maneira a determinar-se a trajetória ótima, em termos de tempo, para as partículas que serão transportadas.

## O problema

O domínio considerado é o quadrado  $(0, L)^2 = \Omega$ , para o escoamento de um fluido sem inércia com a presença de obstáculos e também de atuadores  $X^N, X^S, X^E$  e  $X^W$  em cada lado do domínio, que podem ser pressão ou tensão.

Os valores  $\underline{X}$  impostos nos atuadores pertencem a um conjunto admissível de controles  $\mathcal{A}$  e geram um campo de velocidades  $\vec{v}(\vec{x}, \underline{X})$  em cada ponto que pertence a um conjunto admissível de velocidades



$V(\vec{x})$  (CHAUDHARY and SHAPIRO, 2006). Se  $P$  é uma partícula cuja posição inicial é  $\vec{x}^0$ . Cada função de controle  $\underline{X}(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathcal{A}$  movimenta  $P$  ao longo de uma trajetória  $\vec{r}(t)$  que é a solução de

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(\vec{r}(t), \underline{X}(t)) \\ \vec{r}(0) = \vec{x}_0 . \end{cases} \quad (1)$$

Para um ponto  $\vec{x} \in \Omega$  podemos considerar a função  $T(\vec{x})$  definida como o *mínimo tempo necessário para levar  $P$  de  $\vec{x}$  a  $Z$* . Associada a  $T(\vec{x})$  existe uma trajetória ótima, que leva  $P$  a  $Z$  no tempo mínimo.

O **princípio de Bellman** estabelece que, se um ponto  $\vec{y}$  está na trajetória ótima  $\Gamma$  de  $\vec{x}$ , então a trajetória ótima de  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$  é o arco de  $\Gamma$  que une esses pontos, e a trajetória ótima de  $\vec{y}$  ao alvo  $Z$  é o arco final de  $\Gamma$ . Com esse princípio é possível chegar à equação de Hamilton-Jacobi-Bellman para  $T$ :

$$V(\vec{x}, \check{v}(\vec{x})) \check{v}(\vec{x}) \cdot \nabla T + 1 = 0 , \quad (2)$$

onde  $\check{v}(\vec{x})$  é dado por  $\check{v}(\vec{x}) = \arg \min_{\|\check{d}\|=1} V(\vec{x}, \check{d}) \check{d} \cdot \nabla T(\vec{x})$  e  $\check{d}$  é a direção do deslocamento.

A propriedade fundamental que usaremos no tratamento numérico dessa equação, veja em CRISTIANI (2013), é a seguinte:

**Proposição** *Seja  $\vec{x} \in \Omega$ , e seja  $\gamma$  uma curva (superfície em 3D) fechada tal que  $\vec{x}$  é interior a  $\gamma$ , e o alvo  $Z$  é exterior a  $\gamma$ . Para cada  $\vec{y} \in \gamma$ , seja  $\zeta(\vec{y})$  o tempo mínimo requerido para levar uma partícula de  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$ . Então,  $T(\vec{x}) = \min_{\vec{y} \in \gamma} \{T(\vec{y}) + \zeta(\vec{y})\}$ .*

Se a curva  $\gamma$  é suficientemente pequena podemos considerar as trajetórias retas entre  $\vec{x}$  e  $\gamma$ , donde

$$T(\vec{x}) = \min_{\vec{y} \in \gamma} \left\{ T(\vec{y}) + \frac{\|\vec{y} - \vec{x}\|}{V\left(\vec{x}, \frac{\vec{y} - \vec{x}}{\|\vec{y} - \vec{x}\|}\right)} \right\} \quad (3)$$

e a trajetória ótima, localmente, é o segmento  $\overline{\vec{x}\vec{y}}$ .

## Cálculo de $V(\vec{x})$

Considerando-se o caso em que o campo de velocidades é gerado por fontes de pressão, tem-se que a equação governante para o fluxo fluídico é a equação de Stokes

$$-\mu \nabla^2 \mathbf{v} + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ em } \Omega. \quad (4)$$

com condições de contorno de Dirichlet nos atuadores (pressão) e obstáculos e paredes (velocidade nula).

Para os atuadores do tipo eletrodos gera-se um campo elétrico, que é governado pela equação de Poisson homogênea para o potencial elétrico  $\nabla^2 \Phi = 0$ , que relaciona-se com o campo elétrico  $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ . Por sua vez, o campo elétrico induz um campo de velocidade de acordo com a relação  $\mathbf{v} = m_{eo} \mathbf{E}$ , onde  $m_{eo}$  é a constante de eletrosmótica relativa à interação entre o fluido e a parede. As condições de contorno são de Dirichlet para os atuadores (voltagem imposta) e de Neumann homogêneas para as paredes e obstáculos (BUSCAGLIA, 2016).

## Resultados

O modelo desenvolvido, embora seja uma primeira abordagem para o problema, mostrou que a ocorrência das trajetórias ótimas podem ser não intuitivas. Na Figura 1 consideram-se o ponto de chegada em azul e dois possíveis pontos de partida em vermelho. Para o ponto vermelho à esquerda o modelo propõe uma trajetória ótima reta. Quando avalia-se o tempo de percurso para uma reta ligando tal ponto

ao ponto objetivo obtém-se o mesmo tempo proposto pela resolução de Hamilton-Jacobi. Isso confirma que o modelo proposto está bem definido. No caso do outro ponto vermelho, a trajetória ótima proposta pelo modelo não é reta. A mesma assume uma forma que não é intuitiva. Todavia o caminho proposto, apesar de ser mais longo do que o trajeto reto, resulta em um tempo menor do que quando percorre-se a trajetória reta. Esse deslocamento se dá devido à ação dos atuadores e a configuração do domínio. O resultado considerado é gerado para atuadores do tipo pressão com limite mínimo -1 e máximo 1.

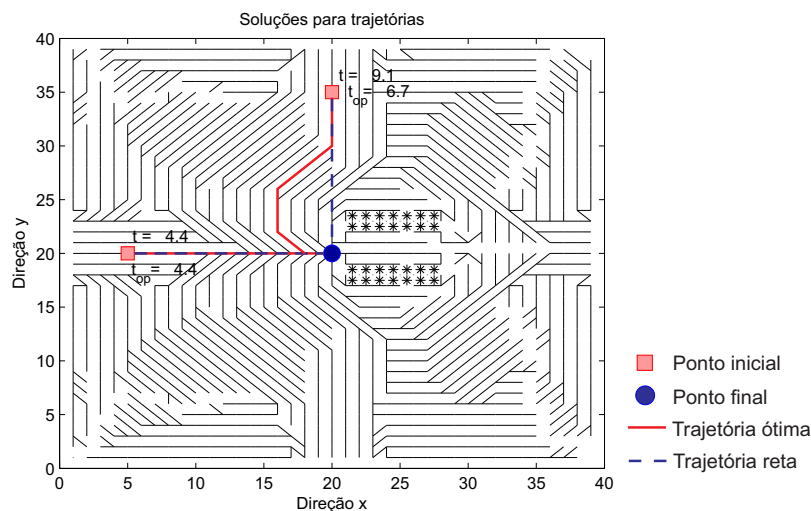


Figura 1: Trajetória de Hamilton-Jacobi-Bellman (ótima) comparada com a trajetória reta para atuadores do tipo pressão. No caso mostrado seguir o caminho reto leva mais tempo ( $t = 9.1$ ) em comparação com a trajetória ótima que é não intuitiva e mais longa ( $t_{op} = 6.7$ ).

## Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio financeiro das agências de fomento CAPES e CNPq.

## Referências

- ARMANI, M., CHAUDHARY S., PROBST R., WALKER S., SHAPIRO B. International Journal of Robust and Nonlinear Control, United States of America. **Control of microfluidic systems: Two examples, results, and challenges**, v.15, p. 785 – 803, 2005.
- BUSCAGLIA, G. C. **Introduction to Computational Fluid Dynamics**. 08 aug. 2016, 09 dez. 2016. 148 p. Notas de Aula - ICMC/USP, São Carlos, 2016.
- CHAUDHARY S., SHAPIRO B. IEEE Transactions on Control Systems Technology. **Arbitrary Steering of Multiple Particles Independently in an Electro-Osmotically Driven Microfluidic System**, v. 14, n. 4, p.669 – 680, 2006.
- CRISTIANI E. **Numerical Methods for Optimal Control Problems. Part II: Local Single-Pass Methods for Stationary HJ Equations**. mar.2013. 21 p. Notas de Aula - IAC-CNR, Roma, 2013.
- TUVAL, I., MEZIC, I., BOTTAUSCI, F., ZHANG, Y., MACDONAKD, N., PIRO O. Physical Review Letters, Espanha. **Control of Particles in Microelectrode Devices**, v. 95, 4 p., 2005.



## Problema de corte com sobras aproveitáveis e demandas incertas

*Adriana Cristina Cherri*

*Universidade Estadual Paulista; Faculdade de Ciências  
adriana@fc.unesp.br*

*Luiz Henrique Cherri*

*Universidade de São Paulo; Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação  
lhcherri@icmc.usp.br*

*José Fernando Oliveira*

*Universidade do Porto; Faculdade de Engenharia  
jfo@fe.up.pt*

*Maria Antónia Carravilla*

*Universidade do Porto; Faculdade de Engenharia  
mac@fe.up.pt*

*Douglas Alem*

*Universidade Federal de São Carlos; Centro de Ciências em Gestão e Tecnologia  
douglas@ufscar.br*

**Resumo:** Neste trabalho apresenta-se um estudo envolvendo o problema de corte de estoque com sobras aproveitáveis do ponto de vista da programação estocástica, considerando incertezas nas demandas dos itens, situação que tipicamente pode ocorrer nas empresas. Durante o processo de corte, uma possibilidade para auxiliar na redução das perdas é permitir que sobras com comprimentos pré-estabelecidos sejam geradas. Essas sobras retornam ao estoque de objetos para serem utilizadas no futuro no atendimento de novas demandas. Entretanto, definir o tamanho conveniente das possíveis sobras é uma tarefa difícil, pois, espera-se que essas sejam bem utilizadas no futuro, gerando perdas mínimas após o corte. Como a proposta desse trabalho considera incertezas nas demandas dos itens, as sobras poderão ser geradas considerando a probabilidade de demandas futuras, resultando em uma melhor estimativa dos possíveis comprimentos. Um modelo de programação inteira mista foi proposto para representar este problema e um algoritmo de geração de colunas foi desenvolvido para resolvê-lo. Testes computacionais preliminares estão sendo realizados com instâncias geradas aleatoriamente.

**Palavras-chave:** Otimização. Problema de Corte de Estoque. Programação Estocástica.

## Introdução

Os problemas de corte de estoque (PCE) são clássicos na literatura e possuem várias aplicações na indústria. Devido a sua importância econômica, dificuldade de resolução e complexidade computacional estes problemas tornaram-se muito importantes na otimização combinatória e constantemente motiva a comunidade de pesquisa operacional na busca de métodos eficientes para obtenção de soluções.

Devido as diversas situações práticas em que esses problemas surgem, a aplicação de modelos e algoritmos existentes de uma forma direta torna-se impraticável. Uma variação do PCE surge quando existe a possibilidade de sobras (retalhos) com comprimento mínimo podem ser geradas durante o processo de corte e estocadas para serem utilizadas no atendimento de demandas futuras. Na literatura, esse problema é conhecido como problema de corte de estoque com sobras aproveitáveis (PCESA). Na prática, este problema já foi observado no corte de tubos

estruturais para a produção de aeronaves agrícolas, no corte de esquadrias metálicas, na indústria moveleira, entre outros.

No PCESA um conjunto de itens demandados deve ser cortado a partir de objetos padronizados (objetos comprados de fornecedores) ou retalhos (sobras de cortes anteriores). São conhecidas as demandas dos itens e o estoque de objetos. O problema consiste em atender a demanda dos itens, cortando os objetos disponíveis de modo a minimizar o desperdício. Retalhos em quantidades limitadas podem ser gerados para estoque e não são computados como perdas.

Para resolver o PCESA Scheithauer (1991) modificou o problema proposto por Gilmore e Gomore (1963) incluindo alguns itens extras aos demandados (possíveis retalhos) e sem haver demandas para serem atendidas. O problema possui um único tipo de objeto em estoque e vários retalhos pré-definidos podem ser gerados. Gradisar et al. (1997) apresentaram um procedimento heurístico (denominado COLA) para otimizar o corte de rolos em uma indústria de tecidos e também permitindo a possibilidade de gerar retalhos.

Abuabara e Morabito (2009) reescreveram o modelo matemático proposto por Gradisar et al. (1997) e resolveram o PCESA em uma indústria que fabrica aviões agrícolas. Em Cherri et al. (2009) heurísticas da literatura foram modificadas, de modo que as sobras geradas em cada padrão de corte deveriam ser pequenas para serem descartadas como perdas ou suficientemente grandes para serem estocadas como retalhos, os quais seriam utilizados no atendimento de futuras demandas.

Cherri et al. (2014) escreveram um *survey* referente ao PCESA no caso unidimensional. Nele os autores apresentam as aplicações do PCESA, o modelo matemático (quando proposto), comentários dos resultados obtidos em cada trabalho e propostas para a continuidade de estudos relacionados ao PCESA. Arenales et al. (2015) propuseram um modelo matemático para resolver o PCESA. Neste trabalho, os retalhos gerados possuem comprimento e quantidades máximas definidos previamente. Os testes computacionais realizados mostraram bom desempenho do modelo proposto e a forte relação que existe entre quantidade de retalhos gerados e redução da perda.

Na literatura existente para resolver os PCESA, dois fatores de importância são a quantidade de retalhos em estoque e o comprimento que estes devem apresentar. Além disso, os modelos matemáticos e métodos de solução são desenvolvidos considerando a demanda dos itens determinística. Entretanto, as demandas futuras para muitos problemas podem estar sujeitas à incertezas, ou ainda, podem existir casos em que as demandas dos itens em períodos subsequentes são desconhecidas, mas suas distribuições de probabilidade são conhecidas.

Beraldi et al. (2009) utilizaram uma abordagem baseada em cenários e desenvolveram uma formulação estocástica 2-estágios para resolver o PCE. Os autores propuseram um algoritmo baseado em duas fases, sendo que a primeira consiste em explorar a estrutura do problema fazendo uma decomposição em subproblemas menores e a segunda impõe uma coordenação entre as soluções dos diferentes subproblemas. Alem et al. (2010) apresentaram um estudo envolvendo o PCE quando a demanda é uma variável aleatória. O problema foi modelado como um problema não-linear. Um método baseado no método simplex com geração de colunas foi proposto para resolver a relaxação linear do problema.

Dentro deste contexto, este trabalho desenvolve um estudo para o PCESA considerando incertezas na demanda dos itens, que será produzida cortando objetos padronizados e retalhos disponíveis em estoque. Novos retalhos para estoque serão gerados considerando diferentes cenários, resultando em uma melhor estimativa para seus comprimentos. Um modelo de programação estocástica de dois estágios com recurso foi proposto para representar esse problema e um algoritmo de geração de colunas foi desenvolvido para resolvê-lo. Testes computacionais estão sendo realizados com instâncias geradas aleatoriamente.

## Definição do Problema e Método de Solução

Em situações reais, durante o processo de corte, é comum demandas de itens não existirem no momento em que certas decisões devem ser executadas, fazendo com que seja necessário utilizar valores aproximados por métodos de previsão, que dependem da existência de séries históricas, nem sempre disponíveis e precisas.

O PCESA sob incertezas surge para suprir essa carência. Nesse problema um conjunto de objetos padronizados e retalhos devem ser cortados em itens cuja demanda é desconhecida. Durante o processo de corte, retalhos podem ser gerados para estoque desde que a perda de material seja reduzida.

Para melhor dimensionar os retalhos para o uso posterior, a informação sobre as possíveis demandas é de extrema importância, uma vez que espera-se que a perda ao cortar um retalho no futuro também seja mínima. De modo geral, as estimativas para os retalhos são feitas com base na demanda atual Cherri et al. (2013) e na expectativa que, nos períodos subsequentes, eles sejam bem aproveitados.



Neste contexto, um modelo matemático baseado em Arenales et al. (2015) foi proposto para resolver o PCESA sob incertezas (devido a sua extensão, o modelo é omitido nesse texto). Neste modelo, a demanda é tratada como uma variável aleatória e, com base em uma previsão de demanda, será possível alterar os tamanhos e quantidades dos retalhos que retornarão ao estoque para serem utilizados no futuro com um melhor aproveitamento.

Devido ao número exponencial de variáveis e as condições de integralidade do modelo, torna-se muito difícil resolvê-lo na otimalidade. Desta forma, as condições de integralidade são relaxadas e a técnica de geração de coluna (Gilmore e Gomory (1963)) é utilizada para resolver o problema. Para a obtenção de soluções inteiras, um procedimento heurístico ainda será proposto.

Como o problema envolve otimização sob incertezas, a programação estocástica também é utilizada. Nela, assume-se que a distribuição de probabilidade dos parâmetros incertos (estocásticos) é conhecida ou pode ser estimada.

## Considerações Finais

Este trabalho aborda o problema de corte de estoque com sobras aproveitáveis quando a demanda dos itens é tratada como uma variável aleatória. Um modelo matemático para representar o problema foi proposto e um método de solução foi desenvolvido para resolvê-lo.

As implementações para o método de solução proposto estão sendo desenvolvidas e testes computacionais serão realizados com exemplares gerados aleatoriamente.

## Agradecimentos

Os autores agradecem a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP - Proc. n. 2015/03066-8) pelo suporte financeiro.

## Referências

- ABUABARA, A.; MORABITO, R. Annals of Operations Research. **Cutting optimization of structural tubes to build agricultural light aircrafts**, n. 149, p. 149-165, 2009.
- ALEM, D. J.; MUNARI, P. A.; ARENALES, M. N.; FERREIRA, P. A. V. Annals of Operations Research. **On the cutting stock problem under stochastic demand**, n. 179, p. 169-186, 2010.
- ARENALES, M. N.; CHERRI, A. C.; NASCIMENTO D. N.; VIANNA, A. C. G. Pesquisa Operacional. **A new mathematical model for the cutting stock/leftover problem**, n. 35, p. 1-14, 2015.
- BERALDI, P.; BRUNI, M.E.; CONFORTI, D. European Journal of Operational Research. **The stochastic trim-loss problem**, n. 197, p. 42-49, 2009.
- CHERRI, A. C.; ARENALES, M. N., YANASSE, H. H. European Journal of Operational Research. **The one dimensional cutting stock problems with usable leftover: A heuristic approach**, n. 196, p. 897-908, 2009.
- CHERRI, A. C., ARENALES, M. N., YANASSE, H. H. International Transactions in Operational Research. **The usable leftover one-dimensional cutting stock problem - a priority-in-use heuristic**, n. 20, p. 189-199, 2013.
- CHERRI, A. C.; ARENALES, M. N.; YANASSE, H. H.; POLDI, K. C.; VIANNA, A. C. G. European Journal of Operational Research. **The one-dimensional cutting stock problem with usable leftovers - A survey**, n. 236, p. 395-402, 2014.
- GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. Operations Research. **A linear programming approach to the cutting stock problem - Part II**, n. 11, p. 863-888, 1963.
- GRADISAR, M.; JESENKO, J.; RESINOVIC, C. Computers and Operational Research. **Optimization of roll cutting in clothing industry**, n. 10, p. 945-953, 1997.
- SCHEITHAUER, G. Optimization. **A note on handling residual length**, n. 22, p. 461-466, 1991.





## Problemas de Otimização: uma proposta de ensino utilizando o software Mathematica

*Cristiane Santana da Silva*

*UNICAMP; Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
chrisfp2011@gmail.com*

*Franciele Nates dos Santos*

*UNICAMP; Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
franciele\_nates@hotmail.com*

**Resumo:** O propósito deste trabalho é apresentar uma proposta de ensino na qual o software Mathematica é inserido nas aulas de Matemática para explorar problemas de otimização. Na tentativa de criar possibilidades para que os alunos conseguissem conectar conceitos que ficam um tanto abstratos o software foi usado na disciplina de Análise Geométrica de Funções de Várias Variáveis, do curso de Mestrado Profissional em Matemática Aplicada e Computacional, possibilitando, dentre os vários recursos do software, a interpretação de um problema de otimização cujo objetivo era encontrar o máximo e mínimo de uma função sujeito a uma restrição, sendo a solução encontrada através do Método de Multiplicadores de Lagrange.

**Palavras-chave:** Ensino. Problemas de otimização. Lagrange.

### Introdução

No universo das salas de aulas, a falta de motivação é uma das principais causas do desinteresse dos alunos pela Matemática. Diante de tanta tecnologia, acessível à maioria da população, muitas vezes um quadro negro, não consegue atrair a atenção dos estudantes. Sendo assim é necessário diversificarmos nossas metodologias de ensino visando resgatar o interesse e o gosto desses alunos pelo aprender.

Na tentativa de compreender sobre tendências e ferramentas auxiliares no processo ensino recorreremos a autores como Flemming e Mello (2005), Farias (2010) e Silveira (1998) e optamos por trabalhar com o software Mathematica.

De acordo com Silveira (1998) “O Mathematica é um sistema computacional que combina manipulação simbólica, cálculo numérico, cálculo gráfico e uma sofisticada linguagem de programação”, sendo assim, o software se constitui como uma ferramenta interessante para a educação, visto que, proporciona uma nova maneira de estudar a Matemática. Vale ainda destacar que a flexibilidade do software para se estudar vários conteúdos da matemática e de áreas afins, a agilidade em resolver cálculos numéricos e algébricos e a possibilidade de uma melhor visualização do comportamento de várias funções, pode motivar aqueles alunos que demonstram cansaço perante a constante mecanização da disciplina.

Diante do exposto, o objetivo deste trabalho é mostrar uma possibilidade para que o aluno tenha condições de desenvolver o seu próprio conhecimento, atribuindo significados a conceitos matemáticos usando recursos como o software Mathematica .

### Explorando o software Mathematica

Encontre o máximo e o mínimo da função  $f(x,y) = -x^2 - 2y^2$  restrito à  $u(x,y) = x^2 + y^2 = 4$ . No software Mathematica utilizamos os seguinte comandos:

- 1) Definindo a função de duas variáveis:  $f[x_,y_] = -x^2 - 2y^2$
- 2) Plotar o gráfico utilizamos o comando: `Plot3D[f[x,y], {x,-4,4}, {y,-4,4}, PlotStyle -> Red]`



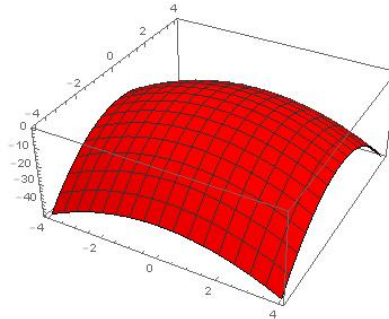


Figura 1: Gráfico da função de duas variáveis  $f(x,y) = -x^2 - 2y^2$ .

Note que, neste caso, o software apresentou uma superfície no plano com  $-4 \leq x \leq 4$  e  $-4 \leq y \leq 4$  o gráfico é apresentado na cor vermelha devido o complemento `PlotStyle → Red`.

3) Curvas de nível da função  $f$ : destacamos as curvas de nível  $f(x,y) = -8$  e  $f(x,y) = -1$ , para isso incluímos ao comando `f1 = ContourPlot[f[x,y], {x,-4,4}, {y,-4,4}, ContourShading → False, ContourLabels → True, Contours → 25]` um comando complementar `Contours{-1,-8}`

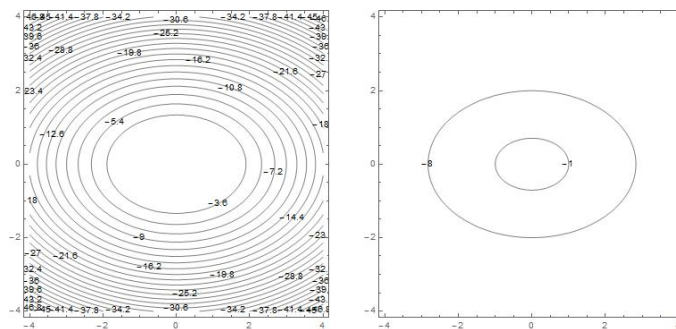


Figura 2: Curvas de nível da função de duas variáveis  $f(x,y) = -x^2 - 2y^2$ .

O comando `ContourPlot` traçou a família de curvas de nível da função dada, considerando uma região do seu domínio (subregião do quadrado  $[-4,4] \times [-4,4]$ , isto é,  $-4 \leq x \leq 4$  e  $-4 \leq y \leq 4$ ). Complementamos com mais três comandos, o `ContourShading → False` que retira a cor padrão dada pelo software, isto evita colorir o domínio realçando profundidade, o `ContourLabels → True` que apresenta os rótulos, mostrando valores que a função assume nas curvas de nível e o `Contours → 25` que adiciona quantidade de curvas de nível.

4) Definindo a restrição:  $u[x,y] = 4x^2 + y^2$

5) Plotando a curva de nível que corresponde a restrição: `r1 = ContourPlot[u[x,y] == 4, {x,-4,4}, {y,-4,4}]`

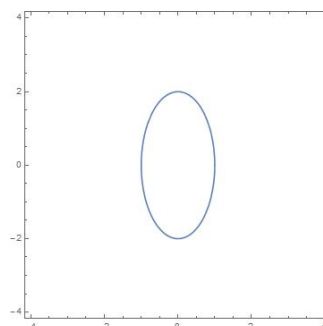


Figura 3: Restrição  $u[x,y] = 4x^2 + y^2 = 4$

Quando superpomos os resultados obtidos na Figura 2 e Figura 3 podemos observar os possíveis pontos da restrição dentro do domínio da função dada, no qual a função atinge o seu máximo e mínimo, neste caso, temos o comando: `Show[f1,r1]`

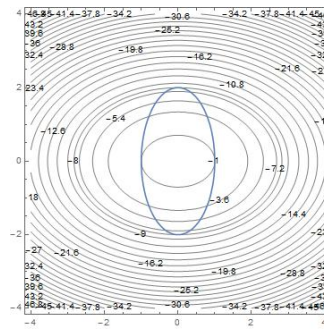


Figura 4: Curvas de nível da função  $f(x,y) = -x^2 - 2y^2$  e Restrição  $u[x,y] = 4x^2 + y^2 = 4$ .

No comando da Figura 4 não foi necessário apresentar os comandos da curvas de nível da função  $f(x,y) = -x^2 - 2y^2$  e da restrição  $u[x,y] = 4x^2 + y^2 = 4$ , pois havia sido definido inicialmente como `f1` e `r1`. Note que  $f$  é uma função contínua e estamos restringindo  $f$  a pontos da elipse que é um conjunto fechado e limitado do plano, necessariamente, os valores máximo e mínimo de  $f$  são atingidos em algum ponto da elipse. Para encontrar os pontos candidatos a máximos e mínimos utilizaremos o Método dos Multiplicadores de Lagrange:  $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla u(x,y)$  e  $u(x,y) = k$ . O método de Lagrange também ser resolvido pelo software através do seguinte comando: `Solve[grad[f[x,y],{x,y}] == λ grad[u[x,y],{x,y}] && u[x,y] == 4, {x,y,λ}]`.

Após a execução do comando, temos os pontos:  $(0, -2)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(-1, 0)$  e  $(1, 0)$ . Aplicando a função  $f$  nos pontos encontrados temos:  $f(0, -2) = -8$ ,  $f(0, 2) = -8$ ,  $f(-1, 0) = -1$  e  $f(1, 0) = -1$ .

Portanto, os pontos onde  $f$  assume máximo são  $(-1, 0)$  e  $(1, 0)$  e os pontos onde  $f$  assume mínimo são  $(0, -2)$  e  $(0, 2)$ .

## Conclusões

Quando utilizamos os softwares para explorar atividades e relacionar conceitos matemáticos podemos proporcionar aos estudantes uma justificativa matemática e uma interação entre a exploração indutiva e o desenvolvimento do raciocínio dedutivo, além disso, evidenciamos o fato de que é possível utilizar diferentes estratégias em complemento ao uso do lápis e papel.

## Agradecimentos

Agradecemos ao professor Márcio A. F. Rosa pelo apoio para a realização deste trabalho, e principalmente, por nos mostrar durante suas aulas a relevância do uso de softwares no ensino da Matemática.

## Referências

FLEMMING, D.M.; LUZ, E. F.; MELLO, A. C. Tendências e Educação Matemática. 2° ed. - Palhoça : Unisul Virtual, 2005.

SILVEIRA, F. A. R. Utilização do Mathematica como ferramenta de apoio ao ensino de matemática. 1998. 129 f. Dissertação (Mestrado em Informática) - PUCRS, Porto Alegre, 1998.

FARIAS, A. R. Softwares matemáticos: ferramentas auxiliares no processo Ensino-aprendizagem da matemática. 2010. 105f. Pós graduação (Educação Matemática) - UNISUL, Araranguá, 2010.

## Problemas de roteirização de veículos com janelas de tempo: um estudo em uma empresa de transporte coletivo

*Rafael Bortolon Paulovic*

UNESP, Bauru; Faculdade de Ciências  
rafael.paulovic@gmail.com

*Andréa Carla Gonçalves Vianna*

UNESP, Bauru; Faculdade de Ciências  
vianna@fc.unesp.br

**Resumo:** O propósito deste estudo é abordar um problema que ocorre frequentemente nos ônibus públicos, chamados comboios, que geram ineficiência na condução de pessoas para linhas que se interceptam em um mesmo conjunto de pontos de parada. Focando-se especificamente nas rotas de transporte público de Bauru, que possuem como destino o campus da Unesp, através de modelagens matemáticas e softwares de otimização, maximizar-se-á a distância entre os veículos dessas linhas. Nos pontos em que os ônibus se interceptam, diferentes hipóteses de alterações nos tempos de partida serão adotados, a fim de melhorar o fluxo dos mesmos nos respectivos horários.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática e Aplicações. Otimização. Estudo de Caso.

### Introdução

O transporte público no Brasil é um meio de locomoção essencial no Brasil e no mundo. Neste estudo o mesmo problema abordado, denominado comboio, ocorre quando duas ou mais linhas de ônibus que vão para uma mesma direção passam por um mesmo ponto com uma janela de tempo muito pequena, o efeito causado acaba por ser que o primeiro veículo fica cheio, enquanto os outros em seguida ficam com uma parcela menor da que poderia ser atendida.

### Rotas estudadas

O número de rotas estudadas são 4, todas possuem um determinado ponto de intersecção entre si e terminam na região do campus da Unesp. As Figuras 1 e 2 ilustram o caminho realizado e a intersecção, respectivamente:

Figura 1: Rotas estudadas – My Maps - Google

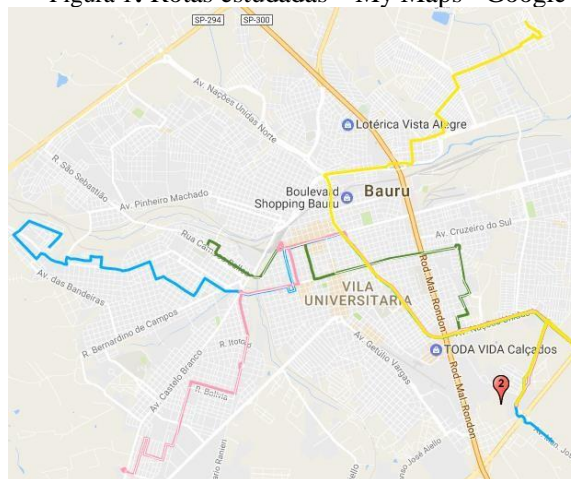
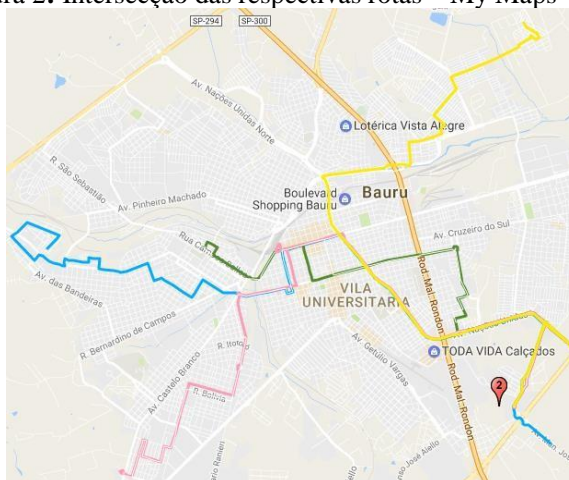


Figura 2: Intersecção das respectivas rotas – My Maps - Google



## Modelo Matemático

Conforme Arenales et al. (2006), a modelagem matemática é uma tentativa de representar simplificada a situação de um problema real. O Modelo 1 utiliza o método dos mínimos quadrados (RUGGIERO; LOPES, 1997, p. 272) para determinar um novo roteiro para as rotas de forma que a mudança de horários seja mínima e o espaço de tempo entre um ônibus e outro possua um intervalo de tempo determinado. O modelo é dado por:

$$\text{Minimizar } \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2$$

$$\text{Sujeito a: } |z_j - z_k| > \Delta x, j = 1, \dots, N \text{ e } k = 1, \dots, N, j \neq k$$

sendo  $N = 4$  representando a quantidade de rotas,  $x_i$  o horário de partida da  $i$ -ésima rota,  $y_i$  o novo horário de partida da  $i$ -ésima rota,  $|z_j - z_k|$  o módulo das diferenças dos tempos entre o primeiro ponto que ocorre a intersecção entre as  $N$  linhas e  $\Delta x$  uma distância atribuída ao problema representando a janela de tempo que deve ser respeitada entre os ônibus.

## Conclusões

O problema em estudo é relevante e requer estudos. Novas rotas poderão ser determinadas com horários de partida ótimos capazes de reduzir a ocorrência dos chamados comboios e assim, obter uma melhoria na eficiência do transporte público de Bauru.

## Referências

ARENALES, M. et al. **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. D. R.. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. Makron Books do Brasil, 1997.



## Redes complexas: conceitos e aplicações

*Eduardo Ribeiro Pinto*

*Instituto de Biociências, UNESP - Botucatu/SP  
eduribeiro2@ibb.unesp.br*

*Orientadora: Andriana S. L. O. Campanharo  
Instituto de Biociências, UNESP - Botucatu/SP  
andriana@ibb.unesp.br*

### Resumo:

O propósito deste trabalho é apresentar alguns modelos de redes complexas amplamente utilizados na literatura para modelagem de diversos sistemas complexos, tal como a modelagem de epidemias (ALMEIDA, 2011; NEPOMUCENO, 2005). Mais especificamente, serão apresentados três modelos de redes complexas, a saber, o modelo aleatório de Erdős & Rényi (ERDOS & RÉNYI, 1959); o modelo “mundo pequeno” de Watts & Strogatz (WATTS & STROGATZ, 1998) e, por fim, o modelo modular de Newman (NEWMAN, 2002). Em cada modelo, serão analisadas as propriedades topológicas usuais utilizadas para a caracterização de redes complexas, tais como, o grau de conectividade médio, o comprimento médio do menor caminho, o coeficiente de agrupamento médio e a modularidade.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática e Aplicações, Computação Científica, Redes Complexas, Modelagem de Epidemias.

## Introdução

Uma rede complexa é descrita por um conjunto de vértices (nós) e arestas (conexões, ligações ou links) e algum tipo de interação entre os mesmos. A teoria das redes complexas se apoia, basicamente, em conceitos provenientes da teoria de grafos, sendo que essa foi introduzida pelo matemático Leonhard Euler em 1736 quando o mesmo solucionou o famoso problema das *sete pontes de Königsberg* (RODRIGUES, 2007). Nessa região havia quatro porções de terra ligadas por sete pontes. O problema colocava em questão a possibilidade de alguém atravessar todas as pontes uma só vez sem repetir nenhuma. Euler modelou o problema como um grafo, transformando as porções de terra em vértices e as pontes em arestas, criando assim possivelmente o primeiro grafo da história (RODRIGUES, 2007).

A teoria de redes complexas pode ser utilizada na modelagem dos mais diferentes tipos de sistemas complexos. Para isso, considera-se a seguinte classificação (CAMPANHARO, 2011):

- Redes sociais, onde cada indivíduo pode ser representado por um vértice e a sua interação com os demais representada por arestas;
- Redes de informação, onde os vértices representam algum tipo de informação (conhecimento) e as arestas representam relações entre essas informações;
- Redes tecnológicas, onde os vértices podem representar, por exemplo, roteadores e as arestas representam as fibras ópticas que os conectam;
- Redes biológicas, onde os vértices podem representar, por exemplo, proteínas e as interações entre as mesmas constituem suas arestas.





Neste trabalho propõe-se a implementação computacional de diversos modelos de redes complexas bem como a visualização das redes obtidas. Mais especificamente, modelos que produzem redes com propriedades aleatórias, de mundo pequeno e modulares.

## Modelos de redes complexas

As primeiras análises da estrutura de redes sociais foram introduzidas por dois matemáticos húngaros, Erdős e Rényi (ERDOS & RÉNYI, 1959), quando os mesmos propuseram um modelo baseado em ligações aleatórias, conhecido como *grafos aleatórios de Erdős e Rényi*. Contudo, Erdős e Rényi estavam interessados apenas na riqueza matemática dos grafos puramente aleatórios gerados e não em aplicações práticas envolvendo os mesmos (COSTA, 2007).

Posteriormente, Watts e Strogatz (WATTS & STROGATZ, 1998) observaram que diversas redes reais não eram completamente aleatórias e nem completamente regulares, e propuseram um modelo alternativo, conhecido como modelo de rede “mundo pequeno”. Nesse modelo, as redes produzidas são altamente agrupadas, mas com características de pequeno caminho entre seus os vértices (RODRIGUES, 2007).

Uma grande parte das redes reais, incluindo redes sociais, biológicas e tecnológicas, possui uma estrutura modular, ou seja, arestas densamente distribuídas entre vértices pertencentes a um mesmo grupo e esparsamente distribuídas entre vértices pertencentes a grupos distintos (CAMPANHARO, 2011). Um exemplo típico de uma rede modular consiste em uma rede de contato entre as pessoas de uma pequena cidade, onde indivíduos de uma mesma família apresentam-se altamente conectados entre si quando comparados com indivíduos de famílias distintas (ALMEIDA, 2011). Nesse sentido, Newman propôs um modelo capaz de produzir redes modulares com tais características (NEWMAN, 2002).

## Metodologia

A implementação computacional dos modelos utilizados nesse trabalho bem como de seus caracterizadores topológicos foi feita em linguagem C. A visualização das redes geradas foi obtida com software livre Pajek, disponível gratuitamente para download em <http://mrvar.fdv.uni-lj.si/pajek>.

## Conclusão

Redes Complexas são estruturas topológicas eficazes na modelagem e compreensão de diversos sistemas biológicos, sociais e tecnológicos. Na modelagem de uma doença infecciosa, cada um de seus vértices constitui um indivíduo e suas arestas representam os contatos entre os mesmos. O processo epidêmico desenvolve-se conforme as características biológicas da enfermidade, as quais determinam as regras de transmissão usadas na modelagem. A modelagem de uma doença infecciosa por meio de redes complexas com características modulares e de pequeno mundo será o tema futuro de investigação desse trabalho.

## Agradecimentos

Os autores agradecem a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro concedido.





## Referências

- ERDOS, P.; RÉNYI, A. **On random graphs**. Publicationes Mathematicae, v.6, 1959.
- NEWMAN, M. E. J. **The spread of epidemic disease on networks**. Physical Review Letters, v.66, p.016128, 2002.
- WATSS, D. J.; STROGATZ, S. H. **Collective Dynamics of “Small World? Networks**. Letters to Nature, v.393, 1998.
- COSTA, L. F.; RODRIGUES, F. A.; TRAVIESO, G.; VILLAS BOAS, P. R. **Characterization of complex networks: A survey of measurements**. Advances in Physics, 56(1):167 - 242, 2007.
- ALMEIDA, A. C. L. **Modelos Matemáticos de Propagação de Epidemias Baseados em Redes Sociais e Detecção de Clusters de Doenças**. Belo Horizonte, 2011. 100p. Tese (Doutorado) – - Universidade Federal de Minas Gerais.
- CAMPANHARO, A. S. L. O. **Dualidade entre a análise de Séries Temporais e de Redes Complexas**. São José dos Campos, 2011. 74p. Tese (Doutorado) – - INPE.
- NEPOMUCENO, E. G. **Dinâmica, Modelagem e Controle de Epidemias**. Belo Horizonte, 2005. 139p. Tese (Doutorado)– - Universidade Federal de Minas Gerais.
- RODRIGUES, F. A. **Caracterização, classificação e análise de redes complexas**. São Carlos, 2007. 175p. Tese (Doutorado)– - Universidade de São Paulo, Instituto de Física de São Carlos.



## Resolução do Problema do Caixeiro Viajante utilizando Meta-heurísticas

*Mateus Gomes Cabana*  
Unesp; Faculdade de Ciências  
[mateusgomes@fc.unesp.br](mailto:mateusgomes@fc.unesp.br)

*Andréa Carla Gonçalves Vianna*  
Unesp; Faculdade de Ciências  
[vianna@fc.unesp.br](mailto:vianna@fc.unesp.br)

**Resumo:** Este trabalho propõe a resolução do Problema do Caixeiro Viajante clássico, utilizando diferentes técnicas de meta-heurísticas, entre elas Algoritmos Genéticos, Colônia de Formigas, Busca Tabu e Busca por Vizinhança. Foram realizados testes computacionais para mostrar a eficiência de cada método.

**Palavras-chave:** Otimização. Caixeiro Viajante. Meta-heurísticas

### Introdução

Problemas que envolvem a roteirização de veículos aparecem frequentemente na área de logística. Um problema clássico é o Problema do Caixeiro Viajante (PCV) que determina a melhor rota para percorrer uma sequência de cidades, visitando todas elas uma vez, e retornando à cidade inicial. Esse problema é NP-completo e, é um desafio devido a sua complexidade.

Há diversas aplicações práticas para o PCV, entre elas a determinação da rota de um carteiro, diminuindo assim o trajeto final, implicando em economia de tempo e de pessoal, a identificação de itinerários de cobertura de regiões, e ainda o processo de furação de placas para circuito impresso, entre outras aplicações.

Devido ao fato de se tratar de um problema de otimização combinatória, conforme Laporte (1992), esse trabalho propõe estratégias de solução denominadas meta-heurísticas. Dessa forma, diferentes técnicas foram estudadas e implementadas, entre elas: Algoritmos Genéticos, Colônia de Formigas, Busca Tabu e Busca por Vizinhança.

### Algoritmos Genéticos

Os Algoritmos Genéticos (AGs), de acordo com Goldberg (1989), formam a parte da área dos Sistemas Inspirados na Natureza. São métodos generalizados de busca e otimização que simulam os processos naturais de evolução, aplicando a idéia darwiniana de seleção natural. Segundo a teoria evolutiva de Charles Darwin, os indivíduos que apresentar características mais aptas para o ambiente tem mais chance de sobreviver e deixar seus herdeiros. Assim, pelo decorrer das gerações, a população de uma espécie evolui para melhor adaptar ao ambiente onde reside.

Para compreender o funcionamento dos AGs para o problema do caixeiro viajante faz-se necessário realizar uma analogia à explicação sobre a evolução das espécies. Inicialmente é gerada uma população formada por um conjunto aleatório de indivíduos (possíveis rotas), que podem ser vistos como possíveis soluções do problema. Durante o processo evolutivo, esta população pode sofrer modificações em suas características fundamentais por meio de cruzamentos (crossover), mutações, gerando descendentes, sendo que para cada indivíduo (rota) é atribuída uma nota (distância total do percurso), ou índice, que reflete sua habilidade de adaptação a determinado ambiente. Como o objetivo é minimização as maiores rotas tendem sempre a sair da população final. Este processo é repetido até que se encontre uma solução satisfatória ou atinja um número máximo de iterações.

## Colônia de Formigas

O algoritmo da otimização da colônia de formigas é uma heurística baseada em probabilidade. O mesmo foi inspirado na observação do comportamento das formigas, como apresentado por Dorigo (1996).

Formigas são capazes de encontrar seu caminho (do ninho para uma fonte de comida e o caminho de volta ou vencendo um obstáculo) com relativa facilidade, apesar do fato de serem “quase-cegas”. Só é possível a realização de tal fenômeno, graças a uma comunicação química entre formigas (através de uma substância chamada feromônio), que é um fenômeno causado pela presença de muitas formigas. Ao passar por um local uma formiga deixa uma certa quantidade de feromônio no chão formando assim trilhas. Outras formigas podem detectar tais trilhas com feromônio, e tendem a escolher seu caminho por trilhas com mais feromônio. Quanto mais formigas passarem por uma trilha, mais feromônio esta terá, formando assim uma realimentação esse comportamento faz encontrar trilhas mais curtas entre dois pontos. O feromônio também evapora com o tempo, dessa forma, os caminhos menos visitados perdem feromônio, levando as formigas aos caminhos escolhidos pelas demais.

## Busca em Vizinhança Variável

O algoritmo de Busca em Vizinhança Variável, conhecido também por VNS (*Variable Neighbourhood Search*), de acordo com Mladenovic e Hansen (1997) é um método de busca local que consiste em explorar o espaço de soluções através de trocas sistemáticas de estruturas de vizinhança.

Assim, pode-se afirmar que o algoritmo VNS realiza um conjunto de transições no espaço de busca de um problema. Se o processo encontra um ótimo local então o algoritmo VNS muda de vizinhança, para sair desse ótimo local e passar para a nova ótima.

Contrariamente a outras meta-heurísticas baseadas em métodos de busca local, o método VNS não segue uma trajetória, mas sim explora vizinhanças gradativamente mais “distantes” da solução corrente e focaliza a busca em torno de uma nova solução se e somente se um movimento de melhora é realizado, por isso nesse trabalho este método foi implementado um algoritmo de força bruta, que consiste em enumerar todos os possíveis candidatos da solução e checar cada candidato para saber se ele satisfaz o enunciado do problema.

## Busca Tabu

A Busca Tabu é uma meta-heurística que tem por finalidade encontrar um melhor resultado através de uma busca heurística local. Por isso possui o intuito semelhante ao busca por vizinhança. A grande diferença é que o método guarda informações sobre soluções já visitadas, buscando sempre fugir de mínimos locais. Além disso, essa memória (lista) adaptativa, vai gerar uma estratégia de buscas. A memória adaptativa armazena os melhores elementos encontrados na busca, podendo ser memória de curta ou longa duração.

A memória de curta duração é o tipo de memória que armazena as melhores soluções por um tempo pequeno. Assim que, novas soluções surgem e são melhores que as armazenadas anteriormente, a solução armazenada é retirada da memória e armazenada a nova solução.

A memória de longa duração, por ser mais longa, armazena um número de soluções maiores que de curta duração. Por isso, as soluções ficam um tempo maior alocadas na lista. Além disso, a lista

tabu evita que o programa realize movimentos proibidos, já que o mesmo cria uma lista com os movimentos possíveis. Por outro lado, pode proibir movimentos para soluções que ainda não foram visitadas, evitando riscos de ciclagem onde a solução fica presa em um ótimo local.

As estratégias de busca baseadas em memória visam explorar as boas soluções e as regiões promissoras. Em cada iteração do algoritmo é gerada uma vizinhança de tamanho  $N$ , que podem conter qualquer solução válida, menos as soluções que estão presentes na lista tabu. Desta vizinhança é escolhida a melhor solução. Desse modo escolhe-se sempre as melhores soluções para serem armazenadas, enquanto as outras podem ser descartadas, evitando assim que futuramente o programa escolha soluções de baixa (Glover, 1996).

## Resultados Computacionais

Os métodos apresentados foram todos implementados em linguagem C++ e, testados computacionalmente.

A Tabela 1 apresenta as soluções obtidas para o teste com 48 cidades.

Teste	Teste	Número de cidades	Resultado Ótimo	Resultado obtido	tempo
Algoritmo Genético	Att48	48	10628	10642	8.7s
Colônia de formigas	Att48	48	10628	10640	0.98s
Busca Tabu	Att48	48	10628	10628	1.6s
Busca por vizinhança	Att48	48	10628	10630	1.85s

Observa-se que o método Busca Tabu apresentou melhores resultados em ambos os testes.

## Conclusões

Este trabalho propôs a resolução do Problema do Caixeiro Viajante utilizando diferentes técnicas de meta-heurísticas. Observou-se que estes algoritmos são de fácil implementação computacional, apesar de complexos e muito eficiente para busca de soluções ótimas, ou aproximadamente ótimas, pois utilizam mecanismos de busca adaptativo poderosos e robustos.

## Referências

- Glover. F. (1996) **Tabu search and adaptive memory programming – Advances, applications and challenges**. In R.S. Barr, R.V. Helgason, and J.L. Kennington, editors, **Interfaces in Computer Science and Operations Research**, pages 1–75. Kluwer.
- Goldberg, D. E. (1989) **Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning**. Addison Wesley, Reading, MA.
- Laporte, G.; M. Gendreau; J.Y. Potvin e F. Semet (2000) **Classical and modern heuristics for the vehicle routing problem**, **International Transactions in Operational Research**, v.7, n4/5, p.285-300.
- Lourenço H.R.; Martin O.C. and T. Stützle. (2002) **Iterated Local Search**. In F. Glover and G. Kochenberger, editors, **Handbook of Metaheuristics**, pages 321–353. Kluwer, Boston.
- Mladenovic N. and Hansen. P. (1997) **Variable neighborhood search**. **Computers & Operations Research**, 24:1097–1100.
- Dorigo, M.; Stutzle, T.(1996) **ACO Algorithms for the Travelling Salesman Problem**



## Reticulados via polinômios de grau 2 e 3

*William Lima da Silva Pinto*

*Universidade Estadual Paulista; IGCE-Matemática  
william26535@hotmail.com*

*Carina Alves*

*Universidade Estadual Paulista; IGCE-Departamento de Matemática  
carina@rc.unesp.br*

*Cintya Wink de O. Benedito*

*Universidade Estadual Paulista; São João da Boa Vista  
cintya.benedito@sjbv.unesp.br*

**Resumo:** Neste trabalho apresentamos construções de reticulados nas dimensões 2 e 3 a partir de polinômios  $f(x)$  de grau 2 e  $g(x)$  de grau 3, respectivamente. Consideramos o caso em que  $f(x)$  e  $g(x)$  possuem raízes reais e  $f(x)$  possui raízes complexas.

**Palavras-chave:** Matemática Discreta. Reticulados. Polinômios.

### Introdução

A teoria de reticulados algébricos têm ganhado destaque nos últimos anos devido às aplicações na Teoria da Informação, mais especificamente, como representantes de constelações de sinais que são eficientes para os canais Gaussiano e com desvanecimento do tipo Rayleigh.

O problema de encontrar boas constelações de sinais para um canal gaussiano está associado à procura por reticulados com alta densidade de empacotamento. Assim, neste trabalho propomos a construção de reticulados que tem a melhor densidade de empacotamento nas dimensões 2 e 3. Para isso, fazemos o uso de polinômios de grau 2 e 3 sobre  $\mathbb{Q}$ .

### Reticulados via polinômios

Intuitivamente, um reticulado em  $\mathbb{R}^n$  é um conjunto infinito e discreto de pontos do  $\mathbb{R}^n$  dispostos de forma regular. Formalmente, seja  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$  um conjunto de vetores linearmente independentes em  $\mathbb{R}^n$  (tal que  $m \leq n$ ). O conjunto de pontos

$$\Lambda = \left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{v}_i, \lambda_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

é chamado um reticulado de posto  $m$ , e o conjunto  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$  é chamado uma base do reticulado.

**Exemplo 1**  $\Lambda = A^2$  é um reticulado gerado pelos vetores  $e_1 = (1, 0)$  e  $e_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  é chamado de reticulado hexagonal. Este reticulado pode ser representado graficamente na Figura 1.

Um dos principais ingredientes para a geração de reticulados no  $\mathbb{R}^n$  é o mergulho canônico, que quando aplicado ao anel dos inteiros de um corpo de números ou a um ideal no anel dos inteiros, produz

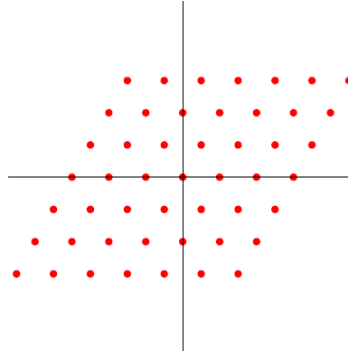


Figura 1: Representação geométrica do reticulado  $\Lambda = A_2$ .

um reticulado no  $\mathbb{R}^n$ . Neste trabalho apresentamos um outro método para a geração de reticulados no  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ .

Seja  $\rho$  o raio de empacotamento de um reticulado  $\Lambda$  e  $M$  uma matriz geradora de  $\Lambda$ . A fórmula da densidade de centro de um reticulado, que pode ser encontrada em Conway (1999) é dada por

$$\delta(\Lambda) = \frac{\rho^n}{|\det(M)|}. \quad (1)$$

Assim, para calcularmos a densidade de centro de  $\Lambda$  precisamos encontrar expressões para o cálculo de  $\rho$  e de  $\det(M)$ . Dessa forma, um dos nossos objetivos, neste trabalho, é considerar polinômios  $f(x) = x^2 + ax + b$  e  $g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  com  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  e estabelecer fórmulas para o cálculo destes parâmetros. Além disso, obter via estes polinômios, os reticulados  $A_2$  e  $D_3$ , que são os reticulados de maior densidade de empacotamento nas dimensões 2 e 3, respectivamente.

## Conclusões

Acreditamos que, da mesma forma como foram obtidos reticulados nas dimensões 2 e 3, pode-se obter reticulados com densidade de centro ótima para dimensões maiores.

## Agradecimentos

Agradeço à Fundação VUNESP, bolsa de estudos - Convênio UNESP/VUNESP/SEE-SP e a minha orientadora, Profa. Dra. Carina Alves, pela ajuda e incentivo.

## Referências

BOUTROS, J. et al. IEEE Transactions Information Theory. **Good lattice constellations for both Rayleigh fading and Gaussian channels**, v. 42, n. 2, p. 502-517, 1996.

CONWAY, J.H.; SLOANE, N.J.A. **Sphere Packings, Lattices and Groups**. New York:Springer-Verlag, 1999.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. São Paulo: Editora Atual, 1982.

SAMUEL, P. **Algebraic Theory of Numbers**. Hermana, Paris, 1967.





Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional  
De 2 a 5 de Maio de 2017  
Unesp, Faculdade de Ciências - Bauru/SP

SOUZA, T. M. **Reticulados algébricos em corpos de números abelianos**. 2004. 85f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2004.

STEWART, I.; TALL, D. **Algebraic Number Theory**. New York: Chapman & Hall, 1987.

## Soluções periódicas dos modelos de moscas-varejeiras de Nicholson com retardo

*Carolinne Stefane de Souza*

*UNESP, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - São José do Rio Preto/SP.  
ssouza.carolinne@gmail.com*

*Suzete Maria Silva Afonso*

*UNESP, Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Rio Claro/SP.  
smafonso@rc.unesp.br*

**Resumo:** Neste trabalho, estudamos as equações diferenciais funcionais com retardo usadas no modelo de moscas-varejeiras de Nicholson - onde o retardo é constante. Devido às mudanças no ambiente, torna-se irreal supormos que o retardo é constante, por este motivo também analisaremos o modelo de moscas-varejeiras modificado de Nicholson - onde o retardo não é necessariamente constante. Dentre os dois modelos, o modelo modificado é considerado o mais próximo do mundo real.

Usando o Teorema da Continuação de Mawhin e a Teoria do Grau Coincidente, obteremos condições suficientes para garantir a existência de soluções periódicas positivas para o modelo de moscas-varejeiras de Nicholson modificado. Ao considerar o retardo constante, vemos que o primeiro modelo citado é um caso particular do modelo modificado, o que possibilita a obtenção de condições suficientes para a existência de soluções periódicas positivas para o primeiro modelo.

**Palavras-chave:** Análise Aplicada. Solução Periódica. Modelo de Moscas-Varejeiras de Nicholson. Teorema de Continuação de Mawhin.

## Introdução

Modelos mais realistas e interessantes de crescimento de uma única ou múltiplas espécies devem levar em conta o ambiente e os efeitos do tempo com retardo. A equação

$$M'(t) = -\delta(t)M(t) + R(t)M(t - m\omega) \exp[-a(t)M(t - m\omega)] \quad (1)$$

foi introduzida por Nicholson para modelar uma população de moscas de laboratório, na qual é assumido que os parâmetros biológicos e ambientais são periódicos com um período comum.

Na equação (1),  $a(t)$  é uma função constante positiva,  $m$  é um inteiro positivo,  $\delta(t)$  e  $R(t)$  são funções periódicas positivas de período  $\omega$ . As funções  $\delta$  e  $R$  denotam o máximo per capita de produção diária de ovos e o máximo per capita da taxa de mortalidade diária adulta, respectivamente. Saker e Agarwal (2002, p. 721) provam que a equação (1) possui solução  $\omega$ -periódica se

$$\min_{t \in [0, \omega]} R(t) > \max_{t \in [0, \omega]} \delta(t). \quad (2)$$

Com as constantes mudanças no ambiente, torna-se irreal assumir que o retardo é uma constante e muito menos um múltiplo do período. Além disso, uma vez que há mudanças aleatórias,  $\delta$  não necessariamente é positivo. Portanto, consideraremos o seguinte modelo de moscas-varejeiras modificado de Nicholson

$$M'(t) = -\delta(t)M(t) + R(t)M(t - \sigma(t)) \exp[-a(t)M(t - \tau(t))], \quad (3)$$

em que  $\delta \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $R, \sigma, \tau \in C(\mathbb{R}, [0, \infty))$  e  $a \in C(\mathbb{R}, (0, \infty))$  são funções  $\omega$ -periódicas com  $\int_0^\omega \delta(t) dt > 0$ .

O nosso propósito é obter algumas condições suficientes para garantir a existência de soluções periódicas positivas da equação (3) através do Teorema de Continuação de Mawhin e da Teoria do Grau Coincidente.

## 1 Existência de Soluções Periódicas

Dizemos que  $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  é solução da equação (3) quando  $x$  satisfaz (3). Além disso, se  $x(t + \omega) = x(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , então  $x$  será dita uma solução  $\omega$ -periódica de (3). Vamos assumir que

$$(H_1) \quad \bar{R} > \bar{\delta} \exp[(|\bar{\delta}| + \bar{\delta})\omega] \text{ para } \sigma(t) \neq m\omega, \text{ para todo } m \in \mathbb{N},$$

$$(H_2) \quad \bar{R} > \bar{\delta} \text{ para } \sigma = m\omega, \text{ para algum } m \in \mathbb{N},$$

em que  $\bar{R} = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega R(t) dt$  e  $\bar{\delta} = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \delta(t) dt$ .

O resultado central deste trabalho é o seguinte teorema.

**Teorema 1** *Se a condição  $(H_1)$  ou  $(H_2)$  está satisfeita, então a equação (3) tem pelo menos uma solução  $\omega$ -periódica em  $\mathbb{R}$ .*

No que segue, apresentaremos conceitos e resultados importantes para a demonstração do Teorema 1.

Sejam  $X$  e  $Z$  espaços de Banach. Um operador linear  $L : \text{dom} L \subset X \rightarrow Z$  é dito *operador de Fredholm* se  $\text{Ker} L$  possui dimensão finita,  $\text{Im} L$  possui codimensão finita e  $\text{Im} L$  é um conjunto fechado. Quando  $\dim \text{Ker} L = \text{codim} \text{Im} L$ ,  $L$  é dito um *operador de Fredholm de índice zero*.

Prova-se que, se  $L$  for um operador de Fredholm de índice zero, então existirão operadores lineares contínuos e idempotentes  $P : X \rightarrow X$  e  $Q : Z \rightarrow Z$  tais que  $\text{Ker} L = \text{Im} P$  e  $\text{Im} L = \text{Ker} Q$ . Consequentemente, a restrição  $L_P$  do operador  $L$  ao conjunto  $\text{dom} L \cap \text{Ker} P$  é invertível, com inversa  $K_P : \text{Im} L \rightarrow \text{dom} L \cap \text{Ker} P$ . Denotaremos por  $K_{P,Q} : Z \rightarrow \text{dom} L \cap \text{Ker} P$  a inversa generalizada de  $L$  definida por  $K_{P,Q} = K_P(I - Q)$ .

Dados  $\Omega$  um subconjunto aberto e limitado de  $X$  e um operador  $N : \bar{\Omega} \rightarrow Z$ , diremos que  $N$  é um *operador  $L$ -compacto* se  $QN(\bar{\Omega})$  é limitado e o operador  $K_{P,Q}N$  é compacto.

**Lema 2 (Teorema de Continuação de Mawhin)** *Sejam  $X, Z$  espaços de Banach e  $\Omega$  um subconjunto aberto e limitado de  $X$ . Considere a equação  $Lx = \lambda Nx$ , em que  $L : \text{dom} L \subset X \rightarrow Z$  é um operador de Fredholm de índice zero,  $\lambda \in [0, 1]$  e  $N$  é um operador definido em  $\bar{\Omega}$  com valores em  $Z$ .*

*Sejam  $P : X \rightarrow X$  e  $Q : Z \rightarrow Z$  projeções contínuas tais que  $\text{Im} P = \text{Ker} L$  e  $\text{Ker} Q = \text{Im} L$ .*

*Suponha que o operador  $N : \bar{\Omega} \rightarrow Z$  seja  $L$ -compacto em  $\bar{\Omega}$ . Suponha, também, que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

*i) para  $\lambda \in (0, 1)$  e  $x \in \partial\Omega \cap \text{dom} L$ , tem-se  $Lx \neq \lambda Nx$ ;*

*ii) para  $x \in \partial\Omega \cap \text{Ker} L$ , tem-se  $QN(x) \neq 0$ ;*

*iii)  $\text{deg}(QN, \Omega \cap \text{Ker} L, 0) \neq 0$ .*

*Nestas condições, a equação  $Lx = Nx$  possuirá pelo menos uma solução em  $\bar{\Omega} \cap \text{dom} L$ .*

Visando utilizar o Lema 2 para demonstrar o Teorema 1, encontraremos uma equação a operadores  $Lx = Nx$ , onde  $L$  é um operador de Fredholm de índice zero e  $N$  é um operador  $L$ -compacto, ambos definidos e tomando valores em espaços adequados de funções, de forma que da existência de solução para tal equação seja possível inferir que a equação (3) possui pelo menos uma solução  $\omega$ -periódica em  $\mathbb{R}$ .

Considerando  $M(t) = \exp[x(t)]$ , a equação (3) pode ser reescrita do seguinte modo

$$x'(t) = -\delta(t) + R(t) \exp[x(t - \sigma(t))] - x(t) - a(t) \exp[x(t - \tau(t))] := \Delta(x, t). \quad (4)$$

Uma vez que as funções  $\delta, R, \sigma$  e  $\tau$  são  $\omega$ -periódicas, temos que  $\Delta(x, \cdot)$  é uma função  $\omega$ -periódica. Sejam  $Z = X = \{x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}); x(t + \omega) = x(t), \forall t \in \mathbb{R}\}$  espaços de Banach com a norma  $\|\cdot\|$ , em que  $\|x\| = \max_{t \in [0, \omega]} |x(t)|$ , para  $x \in X$  ou  $x \in Z$ . Sejam  $\text{dom} L = \{x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}); x(t + \omega) = x(t), \forall t \in \mathbb{R}\}$ ,

$$Lx = x' \text{ para } x \in \text{dom} L \quad \text{e} \quad Nx = \Delta(x, \cdot), \text{ para } x \in X.$$

Considerando as projeções contínuas  $Px(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega x(t) dt$  e  $Qz(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega z(t) dt$ , para  $x \in X, z \in Z, t \in \mathbb{R}$ , conseguimos provar o próximo resultado.

**Proposição 3**  $L$  é um operador de Fredholm de índice zero.

Fixe  $\lambda \in (0, 1)$  e considere a equação  $Lx = \lambda N(x)$ , que é equivalente a

$$x'(t) = -\lambda \delta(t) + \lambda R(t) \exp[x(t - \sigma(t)) - x(t) - a(t) \exp[x(t - \tau(t))]]. \quad (5)$$

**Proposição 4** Se a condição  $(H_1)$  ou  $(H_2)$  está satisfeita, então existe uma constante positiva  $A_0$ , que não depende de  $\lambda$ , tal que se  $x \in \text{dom} L$  satisfaz (5) então  $\|x\| < A_0$ .

Seja  $\Omega = \{x \in X; \|x\| < A_0\}$ . Claramente,  $\Omega$  é um subconjunto aberto e limitado de  $X$ .

**Proposição 5** O operador  $N$  é  $L$ -compacto em  $\overline{\Omega}$ .

**Proposição 6** Se a condição  $(H_1)$  ou  $(H_2)$  está satisfeita, então os operadores  $L, P, Q, N$  e o conjunto  $\Omega$  definidos acima cumprirão as hipóteses do Lema 2.

Através dos resultados enunciados acima, podemos demonstrar o Teorema 1, conforme veremos.

**Demonstração:** (do Teorema 1) Com efeito, suponha que a condição  $(H_1)$  esteja satisfeita. Pelas Proposições 3, 4, 5 e 6, as hipóteses do Lema 2 estão satisfeitas. Portanto, a equação (4) tem pelo menos uma solução  $\omega$ -periódica em  $\text{dom} L \cap \overline{\Omega}$ , a qual denotamos por  $y$ . Consequentemente,  $M(t) = \exp[y(t)]$  é uma solução  $\omega$ -periódica da equação (3) em  $\mathbb{R}$ . Quando  $\sigma = m\omega$ , para algum  $m \in \mathbb{N}$ , decorre da condição (2) que  $\bar{R} > \bar{\delta}$ . Das Proposições 3, 4, 5 e 6, podemos aplicar o Lema 2. Logo, a equação (4) tem pelo menos uma solução  $\omega$ -periódica em  $\text{dom} L \cap \overline{\Omega}$ , que denotaremos por  $z$ . Então  $M(t) = \exp[z(t)]$  é uma solução  $\omega$ -periódica da equação (3) em  $\mathbb{R}$ .

## Conclusões

Neste trabalho, vemos que, sob algumas hipóteses, é possível garantir a existência de soluções periódicas para os modelos de moscas-varejeiras de Nicholson.

## Agradecimentos

Agradeço a CAPES pela bolsa de Mestrado concedida para a realização deste trabalho.

## Referências

- CHEN, Y. Canadian Applied Mathematics Quartely. **Periodic solutions of delayed periodic Nicholson's blowflies models**, v. 11, n. 1, p. 23-28, 2003.
- GAINES R. E, MAWHIN J. L. **Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations**. Lecture Notes in Math. 568, Springer, 1977.
- S. H. SAKER, S. AGARWAL. Mathematical and Computer Modelling. **Oscillation and global attractivity in a periodic Nicholson's blowflies model**, v. 35, p. 719-731, 2002.



## Textos e atividades – matemática nos anos iniciais através do EMAI

*Isis Cristiane Barbosa Rossi*

*UNESP –Bauru - Faculdade de Ciências  
isisbarbosa@gmail.com*

*Ivete Maria Baraldi*

*UNESP –Bauru - Faculdade de Ciências  
ivete.baraldi@fc.unesp.br*

**Resumo:** Diante da vivência nos anos iniciais do Ensino Fundamental I, foi verificada a necessidade de se desenvolver um trabalho acerca das "práticas de formação" das professoras de ensino básico em matemática. Cientes da deficiência do ensino da disciplina na formação que receberam, e da compatibilidade entre as dificuldades levantadas pelas professoras relacionadas às habilidades matemáticas da matriz curricular dos anos iniciais que apresentaram déficit nas últimas avaliações apresentadas pela Plataforma Foco Aprendizagem, decidimos intervir de forma a contribuir através de ações de práticas de formação para o entendimento dos conteúdos a serem trabalhados com o material EMAI (Educação Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental I) que favoreçam o trabalho colaborativo e compartilhado. Foram planejados estudos sobre o material bem como são desenvolvidas atividades complementares. Através do trabalho aqui desenvolvido, as professoras puderam examinar, questionar e avaliar sua própria prática e construir novos conhecimentos para o enfrentamento das situações do cotidiano escolar.

**Palavras-chave:** Ensino. Matemática. Habilidades. EMAI.

### Introdução

Quando pensamos na importância da aprendizagem inicial da matemática de maneira “formal” nos anos iniciais da educação básica não podemos desconsiderar a importância da mesma e todo seu impacto na vida cotidiana de cada indivíduo. E não é incomum que alguns questionamentos sejam levantados, como por exemplo: um professor não especialista está preparado para assumir essa responsabilidade? O que sabem? O que já estudaram e quais suas práticas para garantir o sucesso desse componente curricular nos primeiros anos da escola básica?

Segundo NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. S.; PASSOS, C. L. B A na sessão *A formação matemática da professora polivalente* evidencia as deficiências formativas a nível médio (modalidade Normal) e em nível de graduação (Normal Superior e Pedagogia), no tocante ao trabalho com a matemática das primeiras séries do ensino fundamental. Já em *Crenças e sentimentos em relação à matemática e seu ensino*, os relatos autobiográficos de alunas da Pedagogia mostram que as experiências das licenciadas com a matemática da escola básica podem moldar a prática profissional da futura professora. (BATISTA, 2014).

É evidente a dificuldade de grande parte dos professores em lidar com determinados conteúdos matemáticos, e essa dificuldade tende a inibir o mesmo ao lecionar. É complicado explicar com clareza um conteúdo o qual não se possui o domínio necessário. A insegurança do educador sobre determinado conteúdo, fará, inevitavelmente que os mesmos sejam evitados quando possível, ou “transmitidos” de forma superficial.

Durante o trabalho desenvolvido, pudemos observar que os conteúdos matemáticos apontados como “problemas” para os professores, eram exatamente os mesmos nos quais os alunos da unidade escolar apresentavam baixo desempenho das habilidades contidas na matriz curricular apresentada na plataforma Foco Aprendizagem, conforme abaixo:

#### ***Dificuldades citadas pelas professoras envolvidas:***

Números racionais / frações, sistemas de numeração, divisão, formas geométricas (operações, classificações, etc), interpretação de problemas e Multiplicação.



Resultado de 2015 das habilidades que não atingiram os objetivos, referentes aos 5<sup>os</sup> Anos do Ensino Fundamental I. (fonte: Foco Aprendizagem)

60%	Habilidade HD7 - Resolver problemas que envolvam o cálculo do perímetro de figuras planas, desenhadas em malhas quadriculadas.
61%	Habilidade HD0 - Identificar a ampliação ou redução de uma dada figura plana.
63%	Habilidade HD7 - Identificar a fração decimal correspondente a um número decimal dado e vice-versa.
64%	Habilidade HD8 - Resolver problemas que envolvam o cálculo ou estimativa de áreas de figuras planas, desenhadas em malhas quadriculadas.
64%	Habilidade HI9 - Identificar semelhanças e diferenças entre polígonos, usando critérios como número de lados, número de ângulos, eixos de simetria e rigidez, sem o uso obrigatório da terminologia convencional.

Com o objetivo de minimizar a distância entre o ideal de educação e a realidade em nossas salas de aula, certas do importante papel da educação matemática nesse contexto, desenvolvemos o atual projeto com os objetivos abaixo elencados.

1 - Fomentar o estudo colaborativo em grupo, das professoras participantes sobre o material EMAI - Educação Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental I.

2 - Discutir e analisar as atividades do material EMAI.

3 - Desenvolver atividades complementares relacionadas às habilidades matemáticas da matriz curricular dos anos iniciais que apresentaram déficit nas últimas avaliações apresentadas pela Plataforma Foco Aprendizagem, dando condições aos educadores de desenvolverem um trabalho capaz de possibilitar uma melhora significativa na aprendizagem dos educandos nas habilidades em questão.

A primeira etapa do projeto foi muito bem avaliada pelos professores participantes, bem como pela equipe gestora da unidade escolar, e apresentou resultados positivos nas trocas de experiências e no sucesso obtido com a aplicação de atividades propostas durante o projeto.

O projeto terá continuidade no ano de 2017, e com a possibilidade e pretensão de se estender em mais uma unidade escolar, possibilitando assim alcançar um maior número de professores que possam contribuir na troca de suas angústias e experiências, e principalmente com a busca de soluções para possibilitar uma prática docente mais segura e coesa no que se refere aos conteúdos matemáticos nos anos iniciais.

Seguem abaixo algumas imagens do projeto em 2016, realizado na unidade escolar E.E.Prof<sup>a</sup> Mercedes Paz Bueno – Bauru/SP.

- Imagens 1 e 2 – Jogos de Frações - Trabalhando com Frações Equivalentes.



Imagem 1. As professoras Mariana do Amaral, Consuelo Magalhães, Adriane Abo Arrage e a Coord. Pedagógica Anacelis Espinosa.



Imagem 2. As professoras Isis Rossi e Cássia Oliveira.



- Imagens 3 e 4 – Formas e Sólidos Geométricos.



Imagem 3. Professora Dilza.

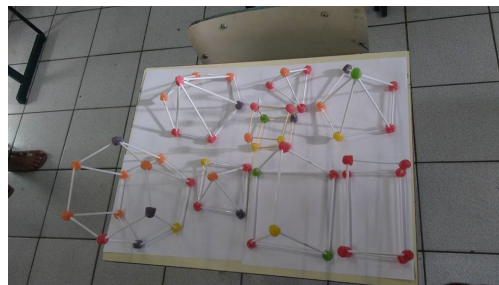


Imagem 4. Formas Geométricas produzidas com jujubas.

## Conclusões

A formação docente é concebida, atualmente, como um processo contínuo que se desenvolve em diferentes contextos, vivências e etapas. Ainda, esse processo é entendido, conforme Nacarato, Mengali e Passos (2009) como desenvolvimento profissional, ou seja, a professora, num trabalho colaborativo e compartilhado com suas parceiras, é protagonista de um processo pessoal, múltiplo, histórico, mutável e inconcluso. Assim, ao terem a oportunidade de vivenciar experiências de "práticas de formação" que favoreçam o desenvolvimento profissional, as professoras podem examinar, questionar e avaliar sua própria prática, construir novos conhecimentos para o enfrentamento das situações do cotidiano escolar. Entende-se que, então, são necessárias ações que favoreçam o desenvolvimento profissional dessas professoras, além das já efetuadas pela Secretaria da Educação e, conseqüentemente, pela Diretoria de Ensino local, outras podem e devem acontecer no próprio espaço escolar, em consonâncias com esta última estância.

## Agradecimentos

Departamento de Matemática, Diretoria de Ensino de Bauru, Direção, Coordenação e Professoras dos Anos Iniciais da EE Profa. Mercedes Paz Bueno.

## Referências

NACARATO, Adair M.; MENGALI, Brenda L. da Silva; PASSOS, Cármem L. B. **A Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**: tecendo fios do ensinar e do aprender. Belo Horizonte: Autêntica.

São Paulo (Estado) Secretaria da Educação. Coordenadoria de gestão da Educação básica. Departamento de Desenvolvimento Curricular e de gestão da Educação básica. Centro de Ensino Fundamental dos Anos Iniciais. **EMAI: educação matemática nos anos iniciais do ensino fundamental**; organização dos trabalhos em sala de aula, material do professor – (todos os anos) / Secretaria da Educação. Centro de Ensino Fundamental dos Anos Iniciais. - São Paulo : SE, 2013.; il.

BOLEMA: **Boletim de Educação Matemática**. 2014. Disponível em [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0103-636X2014000100026](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2014000100026). Acesso em: 21 mar. 2017

## Transformada de Laplace para EDO sob a ação de funções descontínuas e de impulso e aplicação em juros compostos

*Juliano R. C. Malta*

*Universidade de São Paulo; Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto  
juliano.malta@usp.br*

*Vanessa Rolnik*

*Universidade de São Paulo; Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto  
vanessarolnik@ffclrp.usp.br*

**Resumo:** Equações diferenciais ordinárias (EDOs) com termo não homogêneo descontínuo modelam problemas práticos de diversas áreas como Engenharia e Física, na análise do fluxo de corrente em circuitos elétricos, vibrações de sistemas mecânicos, entre outros. Existem ainda aplicações em que é necessário tratar fenômenos de natureza impulsiva, por exemplo, voltagens, oscilador harmônico (pêndulo, sistema massa-mola) nos quais a função é nula exceto em um instante onde tem um valor alto (impulso). A transformada de Laplace é uma ferramenta particularmente adequada para resolução de problemas de valor inicial (PVI) cuja equação diferencial é linear e com coeficientes constantes. O tratamento para equações homogêneas ou não homogêneas (incluindo funções seccionalmente contínuas e com impulsos) é semelhante. Esta técnica reduz a EDO a uma equação algébrica e embute as condições iniciais na resolução do problema, obtendo a solução do PVI automaticamente, sem a necessidade de obter valores para as constantes, como nas técnicas tradicionais. Neste trabalho, apresentamos a definição de transformada de Laplace, algumas de suas principais características e como é utilizada na resolução de PVIs. Como aplicação, exploramos os problemas de juros contínuos com depósitos de diferentes valores ao longo do período e com uma única retirada.

**Palavras-chave:** Equação diferencial ordinária. Descontinuidade no termo não homogêneo. Transformada de Laplace. Matemática Aplicada à Economia e a Finanças.

## Introdução

Seja o problema de valor inicial (PVI) composto pela equação diferencial ordinária (EDO) linear de ordem  $n$

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = g(t) \quad (1)$$

com coeficientes reais constantes  $a_0, \dots, a_n$ ,  $a_0 \neq 0$ ,  $g$  é uma função real definida em um intervalo  $I = (\alpha, \beta)$ , e as condições iniciais

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, \quad (2)$$

em que  $t_0$  pode ser qualquer ponto de  $I$  e  $y_0, \dots, y_{n-1}$  é qualquer conjunto dado de constantes reais.

Vamos considerar a função  $g$  seccionalmente contínua, ou contínua por partes, em  $I$ . Neste caso, o intervalo  $I$  pode ser dividido em um número finito de pontos  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ , de modo que  $f$  seja contínua em cada subintervalo aberto  $t_{i-1} < t < t_i$  e que  $f$  tenda a um limite finito nos extremos de cada subintervalo por pontos no interior do intervalo.

Começamos apresentando a técnica de Transformada de Laplace e algumas de suas propriedades e teoremas que auxiliam na resolução de PVIs (BOYCE; DI PRIMA, 2015; BRAUM, 1992).

A transformada de Laplace de uma função  $f(t)$ ,  $t \geq 0$ , é a função

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (3)$$

quando essa integral imprópria convergir.

O seguinte teorema mostra condições para a existência da transformada de Laplace.

**Teorema 1:** Suponha que  $f$  seja seccionalmente contínua no intervalo  $0 \leq t \leq A$  para qualquer  $A$  positivo e que  $|f(t)| \leq Ke^{at}$  quando  $t \geq M$ . Nessa desigualdade,  $K$ ,  $a$  e  $M$  são constantes reais, com  $K$  e  $M$  positivas. Então a transformada de Laplace  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , definida por (3), existe para  $s > a$ .

A seguir, calculamos as transformadas de Laplace de algumas funções de interesse:

- $\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} dt = -\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^A = \frac{1}{s}, \quad s > 0$
- $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}, \quad s > a$
- Função degrau unitário (Heaviside)  $u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}, \quad c \geq 0, \quad \mathcal{L}\{u_c(t)\} = \frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$
- Função deslocamento  $u_c(t)f(t-c) = \begin{cases} 0, & t < c \\ f(t-c), & t \geq c \end{cases}, \quad c \geq 0, \quad \mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}F(s)$
- Função impulso unitário (delta de Dirac) em  $t = t_0$ ,  $\delta(t-t_0) = 0, t \neq t_0, \int_{-\infty}^\infty \delta(t-t_0) dt = 1, \mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}$

Dois resultados são importantes para resolução de EDOs. O primeiro mostra a linearidade do operador e o segundo a relação entre as transformadas da função e de sua derivada.

**Teorema 2:** Sejam  $f_1$  e  $f_2$  duas funções cuja transformada de Laplace existem para  $s > a_1$  e  $s > a_2$  respectivamente e  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Então

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}. \quad (4)$$

**Teorema 3:** Suponha que  $f$  é contínua e que  $f'$  é seccionalmente contínua em qualquer intervalo  $0 \leq t \leq A$ . Suponha que existam constantes  $K, M$  e  $a$  tais que  $|f(t)| \leq Ke^{at}$  para  $t \geq M$ . Então  $\mathcal{L}\{f'(t)\}$  existe para  $s > a$  e, além disso,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0). \quad (5)$$

Para um PVI geral de primeira ordem

$$ay' + by = g(t), \quad y(0) = y_0, \quad (6)$$

cuja solução  $y = \phi(t)$  satisfaz as condições do Teorema 3, aplicamos a transformada, obtendo

$$\mathcal{L}\{ay'\} + \mathcal{L}\{by\} = \mathcal{L}\{g(t)\} \quad (7)$$

$$a(s\mathcal{L}\{y\} - y_0) + b\mathcal{L}\{y\} = G(s) \quad (8)$$

$$Y(s) = \frac{1}{as+b}(G(s) + ay_0) \quad (9)$$

A solução do PVI é  $\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ , a transformada inversa de  $Y(s)$ . Aqui reside a maior dificuldade da aplicação da técnica. No entanto, sabendo que a transformada inversa é um operador linear e expandindo  $Y(s)$  em frações parciais de forma a encontrar transformadas conhecidas, em geral, com algumas manipulações algébricas chega-se à solução.

Para equações diferenciais de primeira ordem são conhecidos métodos de resolução para certos tipos de equações (separáveis, exatas, autônomas, entre outras) porém assumem que o termo não homogêneo é contínuo, em todo o intervalo. É possível aplicar tais técnicas em cada subintervalo contínuo mas a transformada de Laplace é mais direta nessas situações. Para a solução de um PVI de ordem mais alta, existe uma fórmula geral obtida por meio de aplicações sucessivas do Teorema 3.

## Aplicação em juros compostos

Suponha que a capitalização de juros por um banco seja contínua, e que o indivíduo deposita uma quantia inicial neste banco que paga uma taxa de juros anual  $r$ . O valor do investimento, dado por  $S(t)$ , depende tanto da frequência de capitalização dos juros quanto da taxa de juros. A taxa de variação do valor do investimento é igual a taxa de juros vezes o valor atual do investimento. Suponha ainda que existe uma função  $p(t)$  que representa os depósitos e/ou retiradas e que sabemos o valor do investimento em algum instante particular  $S(0) = S_0$ , daí segue a EDO

$$\frac{dS(t)}{dt} = rS(t) + p(t). \quad (10)$$

**Exemplo 1.** O indivíduo deseja poupar até 20% de sua renda mensal  $q$ , porém de maneira gradativa, sendo 2,5% em  $t < 1$ , 5% em  $1 \leq t < 2$ , 10% em  $2 \leq t < 3$  e 20% em  $t \geq 3$ . Em termos da função degrau unitário,  $p(t) = 0,025q + 0,025q u_1(t) + 0,05q u_2(t) + 0,1q u_3(t)$ . Aplicando a técnica descrita por (7)-(9), obtemos a solução

$$S(t) = S_0 e^{rt} + 0,025q(h(t) + u_1(t)h(t-1) + 2u_2(t)h(t-2) + 4u_3(t)h(t-3)), \quad (11)$$

onde  $h(t) = (e^{rt} - 1)/r$ .

**Exemplo 2.** O indivíduo, com investimento inicial  $S_0$ , pretende manter todo seu dinheiro no banco, a menos de uma retirada de  $q$  no instante  $t = 2$ , de forma que  $p(t) = -q\delta(t-2)$ . Aplicando a técnica descrita por (7)-(9) obtemos a solução

$$S(t) = S_0 e^{rt} - u_2(t)q e^{r(t-2)}. \quad (12)$$

## Conclusões

No Exemplo 1, a solução da EDO em termos da função degrau mostra que, conforme as parcelas vão sendo aplicadas, os juros aumentam gradativamente. Para  $t < 1$  a solução é a solução da EDO homogênea mais um aumento de 2,5% de sua renda mensal, para  $1 \leq t < 2$ , a solução anterior é acrescida de um juros de 2,5%, para  $2 \leq t < 3$  é acrescida de um juros de 5%, e, finalmente, para  $t \geq 3$ , incide-se todos os juros anteriores e o indivíduo passa a aplicar 20% da renda mensalmente. Esta maneira de poupar é uma das formas indicadas para uma reeducação financeira. Já no Exemplo 2, para  $t < 1$  a solução é a solução da EDO homogênea, e a partir do instante  $t = 2$  é descontado o valor retirado neste instante.

Assim sendo, a técnica apresentada de solução de EDOs com termo não homogêneo descontínuo é viável e possui aplicações práticas relevantes.

## Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq pelo apoio financeiro.

## Referências

BOYCE, W. E.; DI PRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**, 10a. ed., Rio de Janeiro: LTC, 2015.

BRAUM, M. **Differential equations and their applications**, 4th ed., New York, SpringerVerlag, 1992.



## Um estudo sobre módulos e resoluções livres

*Guilherme Augusto Cestari Sanches*  
Unesp; Faculdade de Ciências  
gacs@fc.unesp.br

Cristiane Alexandra Lázaro  
Unesp; Faculdade de Ciências  
cristiane@fc.unesp.br

**Resumo:** Apresentamos neste trabalho os módulos livres. O estudo de módulos é bastante importante em diversas áreas da Matemática, sendo os módulos livres, através de resoluções livres e projetivas, essenciais na teoria de homologia e cohomologia de grupos dentro da Álgebra Homológica, oferecendo um grande número de possibilidades de interação entre Álgebra e Topologia Algébrica.

**Palavras-chave:** Matemática Discreta. Teoria de Módulos. Módulos Livres. Resoluções Livres.

### Introdução

O conceito de módulo é apenas uma generalização da noção de espaço vetorial, onde os escalares são elementos de um anel com unidade ao invés de um corpo. A teoria de módulos tem muitas aplicações, como no estudo de grupos abelianos, na Topologia Algébrica e também na Álgebra Linear, onde é possível obter-se resultados clássicos usando a teoria de módulos.

Vamos apresentar neste trabalho as definições e alguns exemplos de módulos, homomorfismos de módulos, módulos livres, bem como as sequências exatas e resoluções livres.

### Módulos

Iniciamos com uma apresentação de estudos preliminares da teoria de módulos, com definições e alguns exemplos relacionados a estes.

Seja  $R$  um anel comutativo com unidade  $1 \neq 0$ .

**Definição 1** Um  $R$ -módulo é um grupo abeliano aditivo  $M$  munido de uma aplicação de  $R \times M$  em  $M$ ,  $(r, a) \mapsto ra$ , tal que, para todo  $r, s \in R; a, b \in M$  :

$$M1. (r + s)a = ra + sa \text{ e } r(a + b) = ra + rb$$

$$M2. r(sa) = (rs)a$$

$$M3. 1a = a$$

**Exemplo 1**  $R$  é um  $R$ -módulo.

**Exemplo 2** Todo grupo abeliano é um  $\mathbb{Z}$ -módulo.

**Definição 2** Um subconjunto  $N$  não-vazio de um  $R$ -módulo  $M$  é um  $R$ -submódulo se  $N$  é um subgrupo aditivo de  $M$  e  $rb \in N$ , para todo  $r \in R$  e  $b \in N$ .

**Definição 3** Um  $R$ -módulo  $M$  é a soma direta dos  $R$ -módulos  $N_1$  e  $N_2$ , o que se denota por  $M = N_1 \oplus N_2$ , se  $N_1 \cap N_2 = \{0\}$  e  $M = \{a + b | a \in N_1, b \in N_2\}$ . Nesse caso,  $N_1$  é dito somando direto do módulo  $M$ .

**Definição 4** Consideremos os  $R$ -módulos  $M$  e  $N$ . Uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  é um  $R$ -homomorfismo se  $f(u + v) = f(u) + f(v)$  e  $f(ru) = rf(u)$ , para todo  $u, v \in M$  e  $r \in R$ .



## Módulos e resoluções livres

Apresentamos um estudo sobre módulos e resoluções livres, com alguns exemplos e resultados importantes.

**Definição 5** *Seja  $R$  um anel comutativo com unidade. Um  $R$ -módulo livre no conjunto  $S$  é um  $R$ -módulo  $F$  com a função  $f : S \rightarrow F$  tal que, para toda função  $g : S \rightarrow X$ , sendo  $X$  um  $R$ -módulo, existe um único homomorfismo  $h : F \rightarrow X$  tal que a relação de comutatividade  $h \circ f = g$  é verdadeira no seguinte triângulo:*

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & F \\ & \searrow g & \swarrow h \\ & & X \end{array}$$

**Exemplo 3** *Seja  $S = \{1\}$ . Então  $\mathbb{Z}$  é um  $\mathbb{Z}$ -módulo livre sobre  $S$ . De fato, seja  $f : S \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que  $f(1) = 1$  e  $g : S \rightarrow X$  qualquer função com  $g(1) = x_0$ , sendo  $x_0$  fixo. Definamos  $h : \mathbb{Z} \rightarrow X$  por  $h(n) = n \cdot x_0$ . Assim,  $(h \circ f)(1) = h(f(1)) = h(1) = x_0 = g(1)$ , ou seja,  $h \circ f = g$ .*

*Podemos generalizar esse fato.  $R$  é um  $R$ -módulo livre sobre  $S$ , onde  $S$  é um conjunto unitário. De fato, seja  $S = \{a\}$ . Dada  $f : S \rightarrow R$  tal que  $f(a) = 1$ , para toda função  $g : S \rightarrow X$ , com  $g(a) = x_0$ ,  $x_0$  fixo, definamos  $h : R \rightarrow X$  por  $h(r) = r \cdot h(1) = r \cdot x_0$ . Logo,  $(h \circ f)(a) = h(f(a)) = h(1) = x_0 = g(a)$ , ou seja,  $(h \circ f) = g$ .*

**Exemplo 4**  $\mathbb{Z}_2$  não é  $\mathbb{Z}$ -módulo livre sobre um conjunto unitário  $S$ .

*Provemos por contradição. Suponhamos que  $\mathbb{Z}_2$  é  $\mathbb{Z}$ -módulo livre sobre um conjunto unitário  $S$ . Seja  $S = \{c\}$ , dada  $f : S \rightarrow \mathbb{Z}_2$  teremos  $f(c) = \bar{0}$  ou  $f(c) = \bar{1}$ . Se  $f(c) = \bar{0}$ ,  $h \circ f = 0$  para qualquer função  $h$  e, como  $g$  é qualquer função, basta tomarmos  $g$  não nula e teremos  $g \neq h \circ f$ . Assim, para toda função  $g : S \rightarrow \mathbb{Z}$ , com  $g(c) = x_0 \neq 0$ ,  $x_0$  fixo, não existe  $h : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que  $h \circ f = g$ . Se  $f(c) = \bar{1}$ , dada uma função não nula  $g : S \rightarrow \mathbb{Z}$ , com  $g(c) = x_0$ , se existisse  $h : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que  $h \circ f = g$ , teríamos  $h(\bar{2}) = h(\bar{0}) = 0$ . Por outro lado,  $h(\bar{2}) = h(\bar{1} + \bar{1}) = h(\bar{1}) + h(\bar{1}) = h(f(c)) + h(f(c)) = g(c) + g(c) = x_0 + x_0 = 2x_0$ , o que implica em  $x_0 = 0$ . Mas isto é uma contradição, pois temos  $x_0 \neq 0$  por hipótese.*

*Portanto,  $\mathbb{Z}_2$  não é um  $\mathbb{Z}$ -módulo livre sobre um  $S$  unitário.*

**Teorema 1** (Teorema da Existência) *Para todo conjunto  $S$ , sempre existe um  $R$ -módulo livre  $F$  sobre  $S$ .*

Neste caso, dizemos que  $F$  é gerado pelo conjunto  $S$  e  $S$  é chamado base de  $F$ .

São válidos os seguintes resultados relacionados aos módulos livres:

**Teorema 2**  *$F$  é um  $R$ -módulo livre sobre  $S$  se, e somente se,  $F \simeq \bigoplus_{s \in S} X_s$ , onde cada  $X_s \simeq R$ .*

**Teorema 3** *Todo módulo sobre  $R$  é isomorfo a um quociente de um módulo livre.*

**Corolário 1** *Um módulo  $X$  sobre  $R$  tem uma base se, e somente se,  $X$  é livre.*

Escrevemos uma sequência finita ou infinita de homomorfismos de  $R$ -módulos da seguinte forma:

$$\dots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \dots$$



Deste modo, para cada módulo que não esteja nos extremos da sequência, por exemplo, para o  $Y$  desta sequência, existe um homomorfismo  $f$  indo para  $Y$  e um homomorfismo  $g$  saindo de  $Y$ . Definimos  $f$  como sendo o **homomorfismo de entrada** e  $g$  como sendo o **homomorfismo de saída** da sequência no módulo  $Y$ .

**Definição 6** *Uma sequência exata de  $R$ -módulos é uma sequência, como definida anteriormente, tal que a imagem do homomorfismo de entrada coincide com o Kernel do homomorfismo de saída em todos os módulos, exceto nos extremos da sequência.*

Agora, com os conceitos de módulos livres e sequências exatas, podemos definir as resoluções livres.

**Definição 7** *Seja  $X$  um  $R$ -módulo arbitrário. Uma resolução de  $X$  sobre  $R$ , ou uma  $R$ -resolução de  $X$ , é uma sequência exata de  $R$ -módulos*

$$C : \dots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots,$$

a qual satisfaz as seguintes condições:

(R1)  $C_{-1} = X$

(R2)  $C_n = 0, \forall n < -1$

*Equivalentemente, podemos escrever esta definição da seguinte forma: uma resolução de  $X$  sobre  $R$ , ou uma  $R$ -resolução de  $X$ , é uma sequência exata de  $R$ -módulos*

$$C : \dots \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} X \longrightarrow 0.$$

**Definição 8** *A aplicação  $\varepsilon : C_0 \rightarrow X$  é chamada **aplicação aumentação**. Se cada  $C_i$  é livre, dizemos que a resolução é livre.*

**Notação:**  $\varepsilon : C \rightarrow X$  denotará uma resolução de  $X$ .

## Conclusões

Dado um  $R$ -módulo  $M$  sempre podemos construir uma resolução livre de  $M$  sobre  $R$ . Além disto, o  $R$ -módulo  $M$  pode admitir muitas resoluções livres.

## Referências

BROWN, K. S. **Cohomology of Groups**. 1 ed. New York: Springer-Verlag, 1982.

HU, S. T. **Introduction to Homological Algebra**. 1 ed. San Francisco: Holden-Day, 1968.

MACLANE, S. **Homology**. 1 ed. Berlin: Academic Press, 1967.

ROTMAN, J.J. **Notes on Homological Algebra**. 1 ed. New York: Van Nostrand, 1970.



## Um modelo multi-grupo para infecções hospitalares

*T.N. Vilches*

*UNESP; Instituto de Biociências de Botucatu  
thomas\_vilches@ibb.unesp.br*

*C.P. Ferreira*

*UNESP; Departamento de Bioestatística - IBB  
pio@ibb.unesp.br*

**Resumo:** Propõe-se um modelo multi-grupo para a transmissão de infecções intra- e inter-hospitalares. A primeira é modelada através de equações diferenciais ordinárias (EDO) e a segunda, que acontece devido a transferência de pacientes, é modelada através de uma rede de conexões entre hospitais. Dois casos serão considerados: quando não há movimentação de pacientes entre UTI e enfermaria e quando há esta movimentação.

**Palavras-chave:** Biomatemática. Redes Complexas. Equações diferenciais.

### Introdução

Infecções relacionadas à Assistência à saúde (IrAS), ou simplesmente infecções hospitalares, são caracterizadas como infecções adquiridas após admissão em um serviço de saúde e, em geral, podem manifestar-se em até 48h após admissão do paciente (JAMIELNIAK, 2014). As IrAS causam um grande impacto econômico nas instituições de saúde, pois o paciente infectado tem seu tempo de internação prolongado, e este é um importante problema mundial. No Brasil, estima-se que 5 a 15% dos pacientes hospitalizados e 25 a 35% dos pacientes internados em UTI adquirem infecção hospitalar, sendo essa a quarta maior causa de mortalidade (OLIVEIRA et al., 2012). Pacientes admitidos na UTI apresentam um maior risco de infecção, pois são pacientes em estado grave, emergenciais e que apresentam, portanto, condições clínicas propícias ao desenvolvimento de uma infecção (JAMIELNIAK, 2014).

Propomos um modelo de equações diferenciais ordinárias (EDO) para descrever a dinâmica da transmissão da doença no ambiente hospitalar, e um modelo de metapopulação para descrever a dinâmica da transmissão da doença entre hospitais.

### Modelo proposto

O modelo considera oito populações, paciente suscetível na UTI,  $U_S$ , paciente colonizado na UTI,  $U_C$ , paciente suscetível na enfermaria,  $P_S$ , paciente colonizado na enfermaria,  $P_C$ , trabalhador de enfermaria suscetível,  $W_S^P$ , trabalhador de enfermaria colonizado,  $W_C^P$ , trabalhador de UTI suscetível,  $W_S^U$ , trabalhador de UTI colonizado,  $W_C^U$ .

O modelo metapopulacional proposto é representado na forma matricial por

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{U}}_S = \mu_U - (\hat{W}^U)^{-1}(\beta_U \hat{W}_C^U) \mathbf{U}_S - \hat{\delta}_{UP} \mathbf{U}_S + \hat{\delta}_{PU} \mathbf{P}_S - \hat{\nu} \mathbf{U}_S + T \mathbf{U}_S, \\ \dot{\mathbf{U}}_C = (\hat{W}^U)^{-1}(\beta_U \hat{W}_C^U) \mathbf{U}_S - \hat{\delta}_{UP} \mathbf{U}_C - \hat{\nu} \mathbf{U}_C + \hat{\delta}_{PU} \mathbf{P}_C + T \mathbf{U}_C, \\ \dot{\mathbf{P}}_S = \mu_P - (\hat{W}^P)^{-1}(\beta_P \hat{W}_C^P) \mathbf{P}_S + \hat{\delta}_{UP} \mathbf{U}_S - \hat{\delta}_{PU} \mathbf{P}_S - \hat{\alpha} \mathbf{P}_S + T \mathbf{P}_S, \\ \dot{\mathbf{P}}_C = (\hat{W}^P)^{-1}(\beta_P \hat{W}_C^P) \mathbf{P}_S + \hat{\delta}_{UP} \mathbf{U}_C - \hat{\delta}_{PU} \mathbf{P}_C - \hat{\alpha} \mathbf{P}_C + T \mathbf{P}_C, \\ \dot{\mathbf{W}}_S^U = \hat{\mu}_W \mathbf{W}^U - (\hat{U})^{-1}(\beta_W \hat{U}_C) \mathbf{W}_S^U + \hat{\lambda} \mathbf{W}_C^U - \hat{\mu}_W \mathbf{W}_S^U, \\ \dot{\mathbf{W}}_C^U = (\hat{U})^{-1}(\beta_W \hat{U}_C) \mathbf{W}_S^U - \hat{\lambda} \mathbf{W}_C^U - \hat{\mu}_W \mathbf{W}_C^U, \\ \dot{\mathbf{W}}_S^P = \hat{\mu}_W \mathbf{W}^P - (\hat{P})^{-1}(\beta_W \hat{P}_C) \mathbf{W}_S^P + \hat{\lambda} \mathbf{W}_C^P - \hat{\mu}_W \mathbf{W}_S^P, \\ \dot{\mathbf{W}}_C^P = (\hat{P})^{-1}(\beta_W \hat{P}_C) \mathbf{W}_S^P - \hat{\lambda} \mathbf{W}_C^P - \hat{\mu}_W \mathbf{W}_C^P, \end{array} \right.$$

no qual em negrito são vetores com  $n$  elementos representando cada hospital e com chapéu uma matriz diagonal, por exemplo  $\hat{\delta}_{UP}$ . Já o total de trabalhadores na UTI é dado por  $W^U$ , o total pacientes na UTI,  $U$ , o total de pacientes na enfermaria,  $P$  e o total de trabalhadores na enfermaria,  $W^P$ . A Tabela 1 descreve os parâmetros do modelo.

Tabela 1: Descrição dos parâmetros (unidade de dias<sup>-1</sup>)

Significado	Símbolo
Taxa de entrada na UTI	$\mu_U$
Taxa de colonização UTI	$\beta_U$
Taxa de mortalidade UTI	$\nu$
Taxa de transferência UTI para enfermaria	$\delta_{UP}$
Taxa de transferência enfermaria para UTI	$\delta_{PU}$
Taxa de entrada na enfermaria	$\mu_P$
Taxa de colonização na enfermaria	$\beta_P$
Taxa de alta	$\alpha$
Taxa de renovação trabalhadores	$\mu_W$
Taxa de colonização dos trabalhadores	$\beta_W$
Taxa de descolonização dos trabalhadores	$\lambda$
Matriz de transferências entre hospitais	$T$

## Resultados

Se não considerarmos o acoplamento entre UTI e enfermaria, e nem a transferência entre hospitais, o valor de  $R_0$  pode ser encontrado através dos autovalores da matriz jacobiana do sistema, calculada para o equilíbrio livre da doença, e é dado por:

$$R_0 = \max\{R_U, R_P\},$$

sendo

$$R_U = \frac{\beta_U \beta_W}{\nu(\lambda + \mu_W)} \quad \text{e} \quad R_P = \frac{\beta_P \beta_W}{\alpha(\lambda + \mu_W)}.$$

Já para a situação em que há acoplamento entre enfermaria e UTI, o valor de  $R_0$  é dado por:

$$R_0 = \max\{R_U, R_P\},$$

sendo

$$R_U = \frac{\beta_U \beta_W}{v(\lambda + \mu_W) + \delta_{UP}(\lambda + \mu_W) \left[1 - \frac{\delta_{PU}}{\alpha + \delta_{PU}}\right]} \quad \text{e} \quad R_P = \frac{\beta_P \beta_W}{\alpha(\lambda + \mu_W) + \delta_{PU}(\lambda + \mu_W) \left[1 - \frac{\delta_{UP}}{v + \delta_{UP}}\right]},$$

que é o raio espectral da matriz de próxima geração do sistema avaliada no ponto de equilíbrio livre da doença.

## Conclusões

O acoplamento entre UTI e enfermaria diminui o  $R_0$  da doença, quando considerado um único hospital.

## Agradecimento

Este trabalho é desenvolvido em colaboração com o Prof. Dr. Carlos Fortaleza (FMB-UNESP) e a Dra. Mariana Bonesso ambos da Faculdade de Medicina de Botucatu/Unesp e tem o apoio da FAPESP: 2015/05220-4.

## Referências

BOWONG, S.; DUMONT, Y.; TEWA, J.J.; *Biomath* 2. **A patchy model for Chikungunya-like diseases.** v.1, n.1, p.1-19, 2013.

DONKER, T. et al.; *PLoS Computational Biology*. **Patient Referral Patterns and the Spread of Hospital-Acquired Infections through National Health Care Networks,** v.6, n.3, p.1-9, 2010.

JAMIELNIAK, J.A. **Modelo epidemiológico discreto para a transmissão de *Acinetobacter baumannii* em uma UTI brasileira.** Dissertação (Mestrado em Biometria) – UNESP, Botucatu, 2014.

OLIVEIRA, A. et al.; *Revista Gaúcha de Enfermagem*. **Infecções relacionadas à assistência em saúde e gravidade clínica em uma unidade de terapia intensiva.** v.33, n.3, p.89-96, 2012.



## Um procedimento para a localização de picos na deconvolução de curvas cinéticas de processos complexos não isotérmicos

*Lucas Miranda*

*UNESP; Instituto de Química  
ra151141231@grad.iq.unesp.br*

*Marisa Veiga Capela*

*UNESP; Instituto de Química  
mvcapela@iq.unesp.br*

*Jorge Manuel Vieira Capela*

*UNESP; Instituto de Química  
capela@iq.unesp.br*

**Resumo:** O propósito deste trabalho é apresentar um estudo sobre a localização de picos na deconvolução de curvas cinéticas de processos complexos não isotérmicos submetidos a um programa de aquecimento linear, envolvendo duas ou mais curvas acopladas. O procedimento apresentado é baseado no mínimo da derivada segunda das curvas cinéticas e no ajuste da soma de funções de Fraser-Suzuki. A função de Fraser-Suzuki é uma modificação da função gaussiana realizada com a introdução de um parâmetro referente à assimetria característica das curvas cinéticas não isotérmicas.

**Palavras-chave:** Matemática Aplicada à Engenharia. Função Gaussiana. Função de Fraser-Suzuki. Deconvolução de Curvas Cinéticas.

### Introdução

Um dos objetivos do estudo da cinética de processos em fase condensada é a determinação dos parâmetros de reações estimuladas termicamente. Em geral os métodos de análise envolvem a estimação dos parâmetros cinéticos com base na equação geral dada por:

$$\frac{d\alpha}{dT} = \frac{A}{\beta} e^{-\frac{E}{RT}} f(\alpha), \quad (1)$$

onde  $t$  é o tempo,  $A$  ( $\text{min}^{-1}$ ) é o fator pré-exponencial ou fator de Arrhenius,  $E$  (kJ/mol) é a energia de ativação,  $T$  (K) é a temperatura absoluta,  $R$  é a constante dos gases,  $0 \leq \alpha \leq 1$  representa o grau de conversão da reação,  $\beta = dT/dt$  é a taxa de aquecimento e  $f(\alpha)$  é o modelo da reação. O modelo da reação é uma função que descreve a dependência da velocidade em relação à extensão da reação. Dependendo do mecanismo cinético considerado, diferentes formas funcionais para  $f(\alpha)$  são propostas na literatura (BAMDFORD; TIPPER, 1980; GALWEY; BROWN, 1999; SESTAK, 1984).

A Equação 1 representa um processo não isotérmico simples, governado por um único mecanismo de reação. Entretanto, no caso de processos complexos podem estar envolvidas duas ou mais reações sobrepostas, sendo necessário separar os processos individuais para uma análise cinética mais adequada. Perejón et al. (2011) mostraram que as curvas cinéticas não isotérmicas são assimétricas e que o ajuste da função de Fraser-Suzuki, que é uma modificação da função gaussiana com a introdução de um parâmetro de assimetria, é o mais adequado ao procedimento de separação (ou deconvolução) das curvas cinéticas experimentais.

Este trabalho tem por objetivo apresentar a função de Fraser-Suzuki e um procedimento para encontrar a localização aproximada dos picos na deconvolução da curva cinética global, no caso envolvendo dois ou mais processos não isotérmicos acoplados.

## Metodologia

A função gaussiana definida por

$$f(x) = a \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x-x_0}{\sigma} \right)^2 \right\}, \quad (2)$$

é uma função simétrica cujo gráfico é uma curva em forma de “sino”, sendo  $a$  é a amplitude,  $x_0$  o centro e  $\sigma$  a meia largura em meia altura (“Half-Width at Half Maximum” ou “HWHM”).

Com o objetivo de modelar perfis de bandas assimétricas Fraser e Suzuki (1969) modificaram a função gaussiana substituindo o termo  $(x-x_0)/\sigma$  por  $(1/\gamma) \ln(1 + \gamma(x-x_0)/\sigma)$ :

$$FS(x) = a \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\gamma} \ln \left( 1 + \gamma \frac{x-x_0}{\sigma} \right) \right]^2 \right\}, \quad (3)$$

onde o parâmetro  $\gamma$  está relacionado com a assimetria da curva, sendo que para  $\gamma > 0$  são observados “picos” com cauda e para  $\gamma < 0$  “picos” com assimetria frontal. Observa-se ainda que para  $\gamma \rightarrow 0$  a função de Fraser-Suzuki resulta na função gaussiana (FELINGER, 1998).

A enésima derivada da função gaussiana definida na Equação 2 verifica a seguinte relação

$$f^{(n)}(x) = -\frac{1}{\sigma^2} \left[ (n-1)f^{(n-2)}(x) + (x-x_0)f^{(n-1)}(x) \right], \quad n = 1, 2, \dots$$

Portanto em  $x = x_0$  tem-se  $f'''(x_0) = 0$  e  $f^{(iv)}(x_0) > 0$ , isto é  $f''(x)$  possui um mínimo local em  $x_0$ . Este resultado é importante para a localização dos picos das curvas individuais em procedimentos de deconvolução de uma curva experimental (FELINGER, 1998).

## Resultados

Na maioria das vezes os processos não isotérmicos não são simples como aqueles descritos pela Equação 1. Por exemplo, a equação cinética global de um processo envolvendo duas reações paralelas competitivas é dada por

$$\frac{d\alpha}{dT} = \frac{d\alpha_1}{dT} + \frac{d\alpha_2}{dT} = \frac{A_1}{\beta} e^{-\frac{E_1}{RT}} f_1(\alpha) + \frac{A_2}{\beta} e^{-\frac{E_2}{RT}} f_2(\alpha), \quad (4)$$

onde  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ . Em geral em experimentos de análise térmica obtém-se a curva cinética global  $d\alpha/dT$  como função da temperatura  $T$ , sendo os processos individuais que a compõem desconhecidos.

O valor absoluto do parâmetro  $\gamma$  da função de Fraser-Suzuki é tal que  $-1 \leq \gamma \leq 1$ . Então o fato da derivada segunda da função gaussiana possuir um mínimo local no “pico” da curva gaussiana pode ser utilizado para localizar, pelo menos aproximadamente, os “picos” dos processos individuais de uma curva cinética ajustada pela soma de funções de Fraser-Suzuki.

A Figura 1 mostra a deconvolução de uma curva cinética típica  $d\alpha/dT$  como função da temperatura, ajustada pela soma de duas funções de Fraser-Suzuki  $f_s(x) = f_{s1}(x) + f_{s2}(x)$ . O ajuste foi realizado minimizando-se a seguinte soma de quadrados:

$$\sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{d\alpha}{dT_i} \right) - f_s(T_i) \right]^2 \quad (5)$$

A Figura 2 mostra a derivada segunda  $d^3\alpha/dT^3$  da curva cinética  $d\alpha/dT$  dada na Figura 1 onde observa-se que a localização dos valores mínimos é próxima da localização dos “picos” da curva cinética. Estes valores podem ser usados como aproximações iniciais no procedimento de ajuste pelo método dos quadrados mínimos.

## Conclusões

Devido à sua assimetria a função de Fraser-Suzuki mostrou ser adequada para ajustar curvas cinéticas de reações em fase condensada, quaisquer que sejam os modelos cinéticos. Os valores da temperatura correspondentes aos valores mínimos da derivada segunda da curva cinética podem ser usados como valores aproximados dos picos das curvas individuais no procedimento de ajuste da soma de funções de Fraser-Suzuki à curva da reação global de processos complexos.



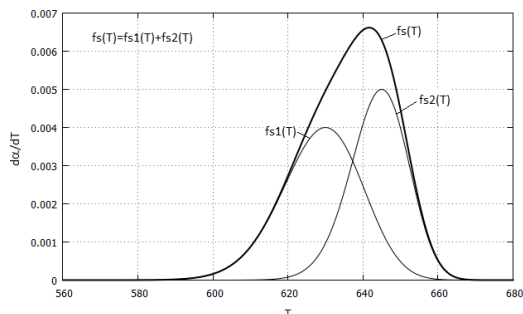


Figura 1: Deconvolução de uma curva cinética ajustada pela soma de duas funções de Fraser-Suzuki.

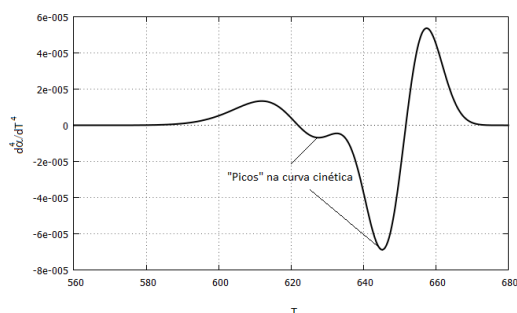


Figura 2: Derivada segunda da curva cinética dada na Figura 1

## Agradecimentos

Os autores agradecem à Fapesp pelo auxílio concedido na forma de bolsa de Iniciação Científica.

## Referências

- BAMDFORD, C.; TIPPER, C. F. H. **Comprehensive chemical kinetic: reactions in solid state**, Amsterdam: Elsevier, 1980.
- FELINGER, A. **Data analysis and signal processing in chromatography**, Amsterdam: Elsevier Science”, 1998.
- A. K. GALWEY, A. K.; BROWN, M. E. **Thermal Decomposition of Ionic Solids**, Amsterdam: Elsevier, 1999.
- PEREJÓN, A. et al. The Journal of Physical Chemistry. B, **Kinetic analysis of complex solid-state reactions. A new deconvolution procedure**, v. 115, p.1780-1791, 2011
- SESTAK, J. **Thermal analysis: thermophysical properties of solids. Their measurements and theoretical thermal analysis**. Amsterdam: Elsevier, 1984.
- FRASER, R.D.B.,SUZUKI, E. Analytical Chemistry, **Resolution of Overlapping Bands: Functions for Simulating Band Shapes**, v. 41, p.37-39, 1969

## Uma abordagem da Geometria Fractal para o Ensino Médio

*Clayton Eugênio Santos de Paula*  
Unesp; Faculdade de Ciências  
clayton\_espbs@hotmail.com

*Tatiana Miguel Rodrigues-Souza*  
Unesp; Faculdade de Ciências  
tatimi@fc.unesp.br

**Resumo:** Neste trabalho veremos a necessidade da criação de uma nova Geometria, diferente da Euclidiana, onde seja possível o surgimento de objetos com dimensão fracionária, por exemplo. Também pretendemos proporcionar aos alunos do ensino médio o contato com esta nova geometria de modo a instigar a curiosidade em relacionar os conceitos vistos durante as aulas de matemática com este novo aprendizado.

**Palavras-chave:** Ensino. Geometria. Fractais.

### Introdução

A Geometria Fractal oferece um método para analisar e descrever objetos e formas naturais, contrapondo-se com as limitações da geometria clássica. Suas aplicações estão relacionadas a outras ciências, como por exemplo a biologia (lei de crescimento), ciência da computação (Meio-tom digital), entre outras.

A primeira pessoa a usar o termo “fractal” foi Mandelbrot, baseando-se no latim, do adjetivo fractus, cujo verbo frangere significa quebrar, criar fragmentos. Foi Mandelbrot que iniciou os estudos sobre esses objetos, que possuem sua estrutura fracionada, inclusive sua dimensão, diferenciando-se assim da Geometria Euclidiana.

A Geometria Fractal está intimamente ligada à ciência do Caos. As estruturas dessa geometria fornecem certa ordem ao Caos. Por tal motivo, muitas vezes a essa geometria é considerada a linguagem do caos.

### Objetivos e Métodos

O objetivo deste trabalho é levar o estudo da Geometria Fractal para a sala de aula das escolas públicas de Bauru em forma de oficina. Utilizando a Geometria Fractal podemos abordar alguns conteúdos como: contagem, perímetros, áreas, volumes, relações entre figuras geométricas, estudo entre relações de grandezas, exponenciais, logaritmos, sequências (progressões geométricas e aritméticas), figuras tridimensionais, funções, entre outros. Em meio a tanta desmotivação no ensino e aprendizagem da matemática, a utilização dos fractais pode tornar a matemática mais instigante e mais real dentro da sala de aula, despertando o interesse, a curiosidade e criatividade dos alunos devido ao forte apelo estético. Como salienta Barbosa a fim justificar o nome do seu livro "Descobrimos geometria fractal para sala de aula".

Conexões com várias ciências; deficiências da Geometria Euclidiana para o estudo de formas da natureza, desde que é, em geral apenas apropriada para formas do mundo oriundas do humano, como construções de casas, prédios, pontes, estradas, máquinas etc.; os objetos naturais são com frequência mais complicados e exigem uma geometria mais rica, que os modela com fractais, possibilitando desenvolver projetos educacionais sobre temas transversais voltados para a compreensão de fenômenos que ocorram nos diversos ambientes; difusão e acesso aos computadores e a tecnologia da informática nos vários níveis de escolarização; existência do belo

nos fractais e possibilidade do despertar e desenvolver o senso estético com o estudo e arte aplicada à construção de fractais, entendendo-se arte como toda ação que envolve simultaneamente emoção, habilidade e criatividade; sensação de surpresa diante da ordem na desordem. (BARBOSA, 2002, p. 19)

Primeiramente, apresentaremos um estudo teórico dos fractais e suas propriedades; e utilizando papel A4, régua, esquadro, régua, transferidor, compasso, lápis e borracha construiremos os fractais: Conjunto de Cantor e Triângulo de Sierpinski, no qual exploraremos elementos destes fractais relacionando com objetos da Geometria Euclidiana, e apresentar a sua dimensão aplicando o conceito de logaritmo.

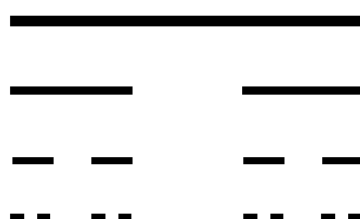


Figura 1: Conjunto de Cantor



Figura 2: Triângulo de Sierpinski

Após esta etapa, construiremos cartões fractais tridimensionais, que é uma forma interessante e descontraída de se trabalhar a Geometria Fractal. Para essa atividade foram escolhidos o cartão Triângulo de Sierpinski e o cartão Degraus Centrais, no qual utilizaremos papel A4, régua, tesoura, lápis e borracha para construção.

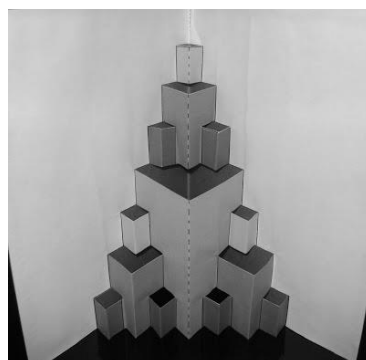


Figura 3: Cartão Triângulo de Sierpinski

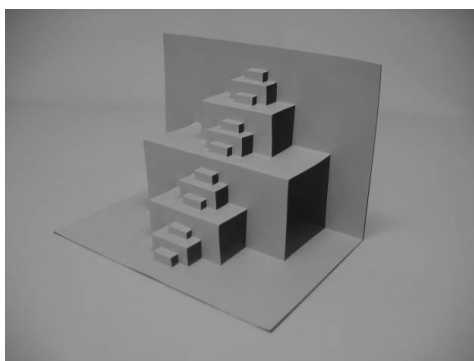


Figura 4: Cartão Degraus Centrais

## Discussões e Conclusões

O estudo da Geometria Fractal faz-se interessante como uma forma mais precisa de representação do nosso mundo, além de mostrar a matemática de uma forma mais instigante, inventiva e assim despertar a curiosidade dos alunos. A partir disso surge o interesse em compreender ao menos um pouco sobre os fractais e a sua geometria e com isso, tornar alguns conteúdos matemáticos mais significativos e concretos para os alunos. Logo, o objetivo deste trabalho é estudar esses objetos que revolucionaram a matemática e levá-los para sala de aula proporcionando aos alunos uma aprendizagem de novos conteúdos, estimulando a sua criatividade e a construção de seus conhecimentos.

## Referências

- ALVES, C., **Fractais: Conceitos Básicos, Representações Gráficas e Aplicações ao Ensino não Universitário**, Dissertação de Mestrado - Universidade de Lisboa, 2007.
- BARBOSA, R., **Descobrimo a Geometria Fractal**, Belo Horizonte: Autêntica, 2002.
- BARNSLEY, M., **Fractals Everywhere**, 1.ed. San Diego: Academic Press, Inc., 1998.
- DOMINGUES, H., **Espaços Métricos e uma Introdução a Topologia**, 4. ed. São Paulo : Atual Editora, 1982.



## Uma abordagem para as Leis de Kepler no Ensino Médio.

*Fabio Araújo Ravagnani*

*UNIFAFIBE; Bebedouro*

*fabiocatanduense@yahoo.com.br*

*Tatiana Miguel Rodrigues-Souza*

*Unesp; Faculdade de Ciências*

*tatimi@fc.unesp.br*

**Resumo:** Este trabalho aborda o movimento dos planetas, utilizando as Leis de Kepler via o Cálculo Diferencial e Integral. Iniciando com uma abordagem histórica dos principais estudiosos do assunto, em seguida apresentam-se alguns conceitos do Cálculo Diferencial e Integral e as leis de Kepler.

Além disso, foram feitas atividades relacionadas ao movimento planetário com alunos do ensino fundamental/médio e também foi utilizado um software da área para instigar tais alunos a pensar sobre o tema.

**Palavras-chave:** Ensino. Leis de Kepler. Matemática Aplicada.

### Introdução

As antigas civilizações utilizaram conceitos astronômicos como posições do Sol e da Lua para aferir o tempo em dia, meses e anos. Os astrônomos antigos ao observarem os movimentos dos astros foram capazes de determinar as estações do ano para orientar o início das atividades agrícolas além de utilizar os conceitos de movimentos planetários para as navegações. A partir da observação da posição de determinadas estrelas com relação ao meridiano celeste local e ao horizonte, pode-se calcular a posição geográfica correta de um lugar. A partir do século XIV e XV houve a expansão marítima dos países da Europa medieval com destaque para Espanha e Portugal organizando as grandes navegações intercontinentais e iniciando um massivo processo de colonização de territórios na África e América.

O século XVII é particularmente importante na história da matemática por ter apresentado alguns dos matemáticos mais expressivos da história. Harriot e Oughtred elaboraram notações de álgebra, Galileu elaborou a ciência da dinâmica e Kepler contribuiu com suas leis do movimento planetário, (HOWARD,2004).

O objetivo deste trabalho é incentivar os alunos do ensino médio a questionar a movimentação dos planetas, o lugar do Sol e da Terra. Como também mostrar que a matemática fornece a fundamentação teórica para o movimento planetário.

A abordagem pedagógica foi feita em sala de aula envolvendo aulas expositivas com auxílio de recursos áudio visuais, realização de oficinas didáticas envolvendo práticas e aplicações dos conceitos fundamentados nas Leis de Kepler dos movimentos planetários e a utilização do simulador online das Leis de Kepler (<http://astro.unl.edu/classaction/animations/renaissance/kepler.swf>) pelos alunos em sala de aula para resolver questões problematizadas por meio de discussões e sugestões entre docente e alunos. Este trabalho foi desenvolvido como tema de dissertação do Profmat.

### Metodologia

Foi realizada com os alunos do 3º ano do ensino médio do colégio Delta em Bebedouro-SP, a atividade sobre as Leis de Kepler abordadas em três momentos: no primeiro, foi realizada a revisão do conteúdo, no segundo, atividades práticas como descritas a seguir em cada seção e no terceiro foi

realizado uma atividade prática utilizando um simulador online das Leis de Kepler e os movimentos planetários. Dessa forma buscamos abordar assuntos relacionados com conceitos matemáticos utilizados nos cálculos dos movimentos celestes. Diante desse contexto, percebemos que abordar assuntos referentes à astronomia nos proporciona também a interdisciplinaridade, contribuindo para uma aula diferenciada, que foge da aula tradicional, despertando o interesse pelo conhecimento científico.

O objetivo é proporcionar aos alunos do ensino médio um contato com leis fundamentais dos movimentos planetários através de aulas expositivas e a aplicação das três leis de Kepler utilizando exercícios, atividades práticas de baixo custo utilizando materiais do cotidiano e o computador.

1ª Lei de Kepler (Lei das Órbitas) “Os planetas se movem em torno do Sol em órbitas elípticas, com o Sol num dos focos da elipse.” A atividade foi dividida em dois momentos: no primeiro, foi realizada uma aula de revisão sobre as Leis de Kepler e Gravitação Universal, para relembrar aos alunos o assunto já abordado em sala de aula e poder esclarecer algumas dúvidas. No segundo, realizamos a oficina de baixo custo sobre a 1ª Lei de Kepler, em que durante a oficina tivemos a preocupação de deixar um ambiente aberto para perguntas e respostas, tendo uma maior relação com o aluno por meio do diálogo. Utilizando papelão, folha de ofício, barbante, alfinete e lápis, quatro grupos de cinco alunos cada fizeram a construção de uma elipse referente à órbita do planeta anão Plutão do cinturão de Kuiper. Definimos a excentricidade (para facilitar vamos entender por “achatamento”) da elipse como sendo a razão entre a distância entre os focos  $F = d(F_1, F_2)$  (ou distância focal) e o comprimento do eixo maior (A).

2ª Lei de Kepler (Lei das Áreas) “A linha que liga o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.” Nesta atividade fizemos medições de áreas varridas pela linha que liga Plutão ao Sol, em idênticos intervalos de tempo (~ 50 anos), mas em diferentes posições do planeta ao redor do Sol, para comprovarmos que estas áreas são iguais. Foram selecionadas duas “áreas” da órbita de Plutão e copiadas sobre uma folha de papel milimetrado, em seguida calculou-se a área. Para a 3ª Lei de Kepler (Lei dos Períodos) “Os quadrados dos períodos de revolução de dois planetas quaisquer estão entre si como o cubo de suas distâncias médias ao Sol.” Os alunos foram divididos em grupos e usando uma tabela entregue a eles foi pedido que usassem os dados da tabela para encontrarem a constante mencionada nessa lei, como também verificar outros valores.

## Resultados e Discussão

As atividades realizadas foram de suma importância para que os alunos pudessem entender que o que faz os planetas girarem ao redor do Sol é a força gravitacional e que sua intensidade depende da massa dos corpos e da distância entre eles.

Esse trabalho apresentou resultados satisfatórios ao levar o conteúdo para os alunos por meio de uma oficina. Nesta atividade os alunos constroem um experimento relacionado com o conteúdo ajudando-os a observar de forma prática o que está sendo abordado de forma abstrata, tornando a aula mais participativa, diferenciada e de grande aceitação pelos estudantes, além de estimular o trabalho em grupo.

Tendo em vista que a matemática dada em sala de aula é abordada de forma apenas teórica e sem muita conjugação com outros ramos, a atividade realizada neste trabalho buscou efetivar uma aprendizagem mais participativa do aluno, fugindo da forma tradicional, a qual o aluno está condicionado a absorver os assuntos ditados pelo professor como forma de verdade absoluta. As



oficinas sobre as Leis de Kepler complementadas com as simulações computacionais mostraram aos estudantes a relação da matemática vista em sala com a astronomia e que é possível aprender ciências utilizando materiais do nosso cotidiano, além de estimular a atividade em grupo que reflete um rendimento individual e social do estudante. Desse modo, percebemos a importância de atividades práticas que relacionam o lúdico com o científico, mostrando para nós professores que é necessário inovar no processo de ensino-aprendizagem, despertando um maior interesse físico científico e tornando a aprendizagem mais completa.

### Trabalhos Futuros

Sendo este um tema muito interessante, um possível trabalho futuro seria a Lei da Gravitação Universal de Newton. Seria possível fazer um retrospecto histórico entre os principais pensadores, suas ideias e os conteúdos matemáticos envolvidos (DIAS, 2004). Também seria relevante desenvolver os principais efeitos da Lei da Gravitação, como por exemplo, a gravitação dos satélites.

### Referências

- ARAÚJO, D.C.C., **Astronomia no Brasil: das grandes descobertas à popularização**. 2010. Monografia de conclusão de curso, PUC, Brasília, 2010.
- AVILA G., Revista Professor de Matemática, **Kepler e a órbita elíptica**, n.15, p. 1-12, 2010.
- BARON, M. E.; BOS, H. J. M. **Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo**. Brasília, Unb, 1985.
- BRAGA G.R., **As leis de Kepler sob o ponto de vista de Newton**. 2002. Monografia de conclusão de curso (Especialização), UFMG, Belo Horizonte, 2002.
- DIAS, P.M.C., et al, **A Gravitação Universal (Um texto para o Ensino Médio)**, Marques de. A Gravitação Universal: um texto para o Ensino Médio. Rev. Bras. Ensino Fís. [online]. 2004, vol.26, n.3, pp.257-271. ISSN 1806-1117. <http://dx.doi.org/10.1590/S0102-47442004000300012>.
- HOWARD, E.; **Introdução à história da matemática**, 4ª Edição, Campinas: Editora Unicamp, 2004.
- LOPES, I.C., Saberes – Revista Interdisciplinar de Filosofia e Educação. **Giordano Bruno - Crítica ao geocentrismo e defesa universo infinito saberes**. v. 3, número especial, p. 47-56, 2010.
- MILONE AC.C., et al. **Introdução à astronomia e astrofísica**. São José dos Campos: INPE, 2013.
- NUSSENZVEIG, H.M. **Curso de Física Básica**, 4ª Edição, vol.1, São Paulo: Edgard Blücher, 2002.
- ASTRONOMY EDUCATION AT THE UNIVERSITY OF NEBRASKA-LINCOLN. **Planetary Orbit Simulator**. Disponível em: < <http://astro.unl.edu/naap/pos/animations/kepler.html> >. Acesso em 17 mar.2017.

## Uma análise das diferentes estratégias de atualização do método primal-dual barreira logarítmica e o fluxo de potência ótimo

*João Paulo de Lima*

*Departamento de Matemática-FC-Unesp- Bauru  
joaopaulolima0106@gmail.com*

*Edméa Cássia Baptista*

*Departamento de Matemática-FC-Unesp- Bauru  
baptista@fc.unesp.br*

**Resumo:** Neste trabalho, propõe-se uma análise do método Primal-Dual Barreira Logarítmica e sua eficiência em relação à solução do Problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo, um importante problema da Engenharia Elétrica, na área de sistemas elétricos de potência. Essa análise foi realizada em relação às estratégias de atualização do parâmetro de barreira, utilização das Hessianas e Gradientes e resolução dos sistemas lineares envolvidos método. Para tais análises, utiliza-se o pacote de otimização Knitro, implementado na plataforma GAMS, e as opções disponíveis neste pacote. Testes realizados com o problema de Fluxo de Potência Ótimo associado aos sistemas de 3 e IEEE14 barras são apresentados e diferenças significativas entre as opções são encontradas, podendo-se destacar as mais eficientes.

**Palavras-chave:** Otimização. Fluxo de Potência Ótimo. Método Primal-Dual barreira Logarítmica.

### Introdução

O problema de Fluxo de Potência Ótimo (FPO) é investigado na Engenharia Elétrica, área de Sistemas Elétricos de Potência. Seu modelo foi proposto por Carpentier (1962) e do ponto de vista matemático é possível descrevê-lo como um problema não linear, restrito, não convexo e de grande porte, com variáveis contínuas e inteiras. Neste trabalho, consideram-se somente variáveis contínuas.

Este problema é uma ferramenta que tem por finalidade fornecer a melhor condição de operação de um sistema elétrico sob um determinado objetivo. O objetivo pode ser, por exemplo, a condição de operação com a menor quantidade de perdas elétricas possível. Este problema não tem uma solução trivial, pois a solução encontrada deve respeitar os limites operativos dos equipamentos que compõem a rede elétrica assim como atender outras restrições inerentes à operação de um sistema elétrico. Vários autores resolveram o problema de FPO utilizando diferentes abordagens de otimização.

Na década de 80, o trabalho de Karmarkar (1984) iniciou uma nova linha de pesquisa que ficou conhecida como Método de Pontos Interiores (MPIs). Segundo Gondzio (2012), os MPIs revolucionaram o campo da otimização.

No início da década de 90, o autor de Granville (1994) foi o primeiro a utilizar um MPIs, denominado de Primal-Dual Barreira Logarítmica (PDBL), na resolução do FPO. As vantagens do PDBL é a facilidade de tratar as restrições de desigualdade pela função barreira logarítmica, a sua velocidade de convergência e o fato que o ponto inicial não necessita ser estritamente interior.

Destaca-se que, esse método é sensível às estratégias de atualizações do parâmetro de Barreira, à utilização de Hessianas e Gradientes exatos ou aproximados, além da estratégia utilizada para a resolução dos sistemas lineares, resultantes da linearização do sistema não linear. Neste trabalho, pretende-se observar as influências das estratégias citadas no desempenho do PDBL, apresentado por Waltz (2004), quando aplicado na resolução do FPO e elege as melhores.

### O problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo

O problema de FPO Reativo, que é o foco principal deste trabalho, com a função objetivo perdas de potência ativa na transmissão, é considerado uma das variantes mais difíceis de ser resolvida segundo Monticelli e Liu (1992). Este problema pode ser representado matematicamente por:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar } f(x) \\
 & \text{sujeito a : } g(x) = 0 \\
 & \quad h(x) \leq 0 \\
 & \quad \underline{x} \leq x \leq \bar{x}
 \end{aligned} \tag{1}$$

em que: o vetor  $x \in R^n$  onde  $x = (V, \theta, t)$  representa as variáveis de estado e de controle do sistema,  $\underline{x}$  e  $\bar{x}$  são os seus limites inferiores e superiores, respectivamente;  $\theta$  é o ângulo de fase da tensão;  $V$  é a magnitude da tensão e  $t$  são os taps dos transformadores. A função objetivo  $f(x)$  representa as perdas de potência ativa na transmissão; o vetor  $g(x) \in R^m$ , sendo  $m < n$ , é o conjunto das equações de balanço do fluxo de potência e  $h(x) \in R^p$  é o conjunto das restrições funcionais, que representam as gerações de potência reativa nas barras de controle de reativo.

### O Método e as Estratégias utilizadas

O Método Primal-Dual de Barreira Logarítmica, associa ao problema (1) a seguinte função Lagrangiana:

$$L = f(x) - \mu \sum_{j=1}^p \ln(s_j) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \pi_j [h_j(x) + s_j] \tag{2}$$

em que:  $\lambda_i, i=1, 2, \dots, m$  e  $\pi_j, j=1, 2, \dots, p$  são os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente. A variável de excesso,  $s_j, j=1, \dots, p$ , é estritamente positiva e o parâmetro de barreira  $\mu$  é um número positivo que tende a zero.

No método primal-dual de barreira Logarítmica transforma-se (1) utilizando (2) em um problema de minimização irrestrita e para sua solução, as condições necessárias de primeira ordem são aplicadas a (2), para  $\mu$  fixo, resultando em um sistema não-linear. Esse sistema é linearizado e resolvido pelo método de Newton, o qual gera as direções de busca para atualização das variáveis. O parâmetro de barreira é atualizado e um novo problema irrestrito é resolvido até que um critério de parada seja satisfeito.

Como este método é sensível as atualizações do parâmetro, utilização de Hessianas e gradientes exatos e aproximados e resolução do sistema linear, serão analisadas a combinação de: seis opções para a atualização do parâmetro de barreira: (B1) é decrescido monotonicamente; (B2) é calculado por uma regra adaptativa com base na diferença de complementaridade; (B3) é realizada uma investigação sobre o passo afim-escalada para determina-lo dinamicamente; (B4) é utilizada uma regra tipo previsor-corretor; (B5) é utilizada uma regra tipo previsor-corretor em que o passo corretor é condicionado; (B6) uma função qualidade é minimizada; quatro estratégias de atualização da Matriz Hessiana: (H1) Hessiana exata; (H2) Quase Newton BFGS; (H3) Quase Newton SR1; (H6) Quase Newton L-BFGS; três estratégias para o vetor gradiente: (G1) Gradiente exato; (G2) diferenças progressivas; (G3) diferenças centrais, e finalmente, cinco estratégias para resolução dos sistemas lineares: (L2) abordagem híbrida; (L3) Decomposição QR; (L4) rotina HSL MA27; (L5) rotina HSL MA57; (L6) rotina Intel MKL PARDISO. Estas estratégias e o método primal-dual de barreira logarítmica encontram-se implementados no pacote de otimização Knitro, Waltz e Nocedal (2003), o qual foi utilizado na plataforma GAMS.

### Resultados

Nos testes utiliza-se o problema de FPO, associado aos sistemas elétricos de 3 barras e IEEE 14 barras. Na Tabela 1 utiliza-se a Hessiana exata (H1) e variam-se as demais estratégias, desta forma,

foram realizados 90 testes. Na tabela 2, foram realizadas as combinações possíveis com Hessianas não exatas, isto é, 270 testes, havendo então a influência da estratégia do Gradiente e do método para resolver os sistemas lineares no desempenho do método.

Tabela 1: Resultados para Hessiana exata

Estratégias	B1	B2	B3	B4	B5	B6
<b>3 b (it)</b>	9	10	6	6	<u>4</u>	6
<b>14 b (it)</b>	18	13	10	8	<u>7</u>	9

Tabela 2: Porcentagem de eficiência das estratégias

	H2	H3	H6	G2	G3	L2	L3	L4	L5	L6
<b>3b(%)</b>	50	<u>83</u>	17	2	2	2	<u>5,6</u>	0	0	2
<b>14b(%)</b>	16	<u>86</u>	0	18	<u>31</u>	<u>28</u>	26	23	26	21

## Conclusões

Observa-se que as estratégias utilizadas influenciam no número de iterações para a solução do FPO. Ao utilizar-se H1 e variar as demais estratégias, a estratégia B5 mostra-se a mais eficiente. Entre as aproximadas, as estratégias H3 e G3 mostraram-se mais eficientes e os métodos L2 e L3 apresentam-se como os mais vantajosos.

## Agradecimentos

Ao CNPq pelo apoio financeiro. (Proc.Nº101703/2015-5, Proc. Nº448645/2014-9 e Proc. Nº 309588/2013- Bolsista).

## Referências

CARPENTIER, J.L. **Contribution a L’etude du Dispatching Economique**, Bull-Soc. Fr Elec, 1962.

GONDZIO, J. **“Interior point methods 25 years later”**, *European Journal of Operational Research*, vol. 218, no. 3, pp. 587-601, 2012.p. 431-447.

GRANVILLE, S. **“Optimal Reactive Dispatch Through Interior Point Methods”**, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 9, no.1, pp.136-146, 1994.

KARMAKAR, N. **“A new polynomial-time algorithm for linear programming”**, *In Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing* , pp. 302-311, 1984.

MONTICELLI, A.; Liu, W. H. E. **“Adaptive Movement Penalty Method for Newton Optimal Power Flow”**, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 7, no1, pp. 334-341,1992.

WALTZ. R. A.; et al. **An interior algorithm for nonlinear optimization that combines line search and trust region steps**. *Math. Prog. A*. vol. 107, pp. 391–408, 2004

WALTZ. R. A., NOCEDAL J., **“KNITRO user’s manual”**, Technical Report, Ziena Optimization, Evanston, IL, USA, 2003.



## Uma análise do método *Outer Approximation* na resolução do problema de fluxo de potência ótimo com variáveis de controle discretas

*Luiza Rodrigues Matos*

*Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"; Faculdade de Engenharia de Bauru  
ms.luiza.matos@ieee.org*

*Daisy Paes Silva*

*Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"; Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Elétrica  
daisy.silva@feb.unesp.br*

*Edilaine Martins Soler*

*Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"; Faculdade de Ciências  
edilaine@fc.unesp.br*

**Resumo:** O propósito de um problema de Fluxo de Potência Ótimo (FPO) é determinar o estado de um sistema de transmissão de energia elétrica que otimize um dado desempenho deste sistema e satisfaça suas restrições físicas e operacionais. O problema de FPO pode ser modelado matematicamente como um problema de Programação Não Linear (PNL) com variáveis discretas e contínuas. Neste trabalho, investiga-se a eficiência do método *Outer Approximation* na resolução do problema de FPO considerando suas variáveis contínuas e discretas. Testes com os sistemas elétricos IEEE 14, 30, 118 e 300 barras são apresentados.

**Palavras-chave:** Otimização. Fluxo de Potência Ótimo. BONMIN. Método *Outer Approximation*.

## Introdução

A energia elétrica é uma das formas de energia mais utilizada no mundo, além de ser indispensável no dia a dia de toda a população, é essencial para o desenvolvimento econômico de um país. O problema de Fluxo de Potência Ótimo (FPO) teve sua origem na década de 60 (CARPENTIER (1962)), desde então, surgiram na literatura inúmeros trabalhos com propostas de modelagem e de abordagens de resoluções para este problema. O propósito do problema de FPO é determinar o estado ótimo de um sistema de transmissão de energia elétrica a fim de otimizar um determinado desempenho do sistema e satisfazer as restrições físicas e operacionais do Sistema Elétrico de Potência. Devido à dificuldade de solução imposta pelas variáveis discretas, a maioria das abordagens da literatura ignora a natureza discreta destas variáveis e considera todas as variáveis do problema como contínuas. Estas formulações não são realistas, pois alguns controles somente podem ser ajustados através de passos discretos.

## Formulação Matemática

As restrições de igualdade do problema são obtidas impondo-se a primeira lei de Kirchhoff, no tocante à conservação das potências ativa e reativa em cada barra da rede, isto é, a potência líquida injetada em uma barra deve ser igual à soma das potências que fluem pelos componentes conectados a esta barra. A segunda lei de Kirchhoff é utilizada para expressar os fluxos de potência nos ramos como função das suas tensões terminais. As restrições de desigualdade representam restrições funcionais.

Na formulação adotada neste trabalho, o problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo (FPOR), caso particular do problema de FPO, é modelado como um problema de programação estático, não-convexo, com função objetivo não-linear, com um conjunto de restrições de igualdade e desigualdade lineares e não-lineares e com variáveis discretas e contínuas (SILVA, (2016)). Na formulação matemática do problema de FPOR adotada neste trabalho, objetiva-se minimizar as perdas de potência ativas nas linhas de transmissão de energia elétrica e é dada por:



$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && f(V, \theta) \\
 &\text{sujeito a} && \Delta P_k(V, \theta, t) = 0, \forall k \in BCCR; \\
 & && \Delta Q_k(V, \theta, t, b^{sh}) = 0, \forall k \in BC; \\
 & && \underline{Q}_k \leq Q_k(V, \theta, t, b^{sh}) \leq \overline{Q}_k, \forall k \in BCR; \\
 & && \underline{V}_k \leq V_k \leq \overline{V}_k, \forall k \in BS; \\
 & && t_{(k,m)} \in \{\underline{t}_{(k,m)}, \underline{t}_{(k,m)} + p, \underline{t}_{(k,m)} + 2p, \dots, \underline{t}_{(k,m)} + np\}, \quad \forall (k,m) \in T, n \in \mathbb{N}; \\
 & && b_k^{sh} \in Db_k^{sh}, \forall k \in BSS.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Em que:

- $V_k$  é o módulo da tensão na barra  $k$ ;
- $\theta$  é o ângulo de tensão da barra  $k$ ;
- $t_{(km)}$  é o *tap* do transformador da linha  $(k,m)$ ;
- $b_k^{sh}$  representa bancos de capacitores e de reatores *shunt* da barra  $k$ ;
- $f(V, \theta)$  é a função objetivo que representa as perdas de potência ativa nas linhas de transmissão;
- $\Delta P_k(V, \theta, t) = 0$  é o balanço de potência ativa para a barra  $k$ ;
- $\Delta Q_k(V, \theta, t, b^{sh}) = 0$  é o balanço de potência reativa para a barra  $k$ ;
- $Q_k(V, \theta, t, b^{sh})$  é a geração de potência reativa injetada na barra  $k$ ;
- $Db_k^{sh}$  representa valores discretos que os bancos de capacitores ou de reatores *shunt*  $k$  podem assumir;
- $\{\underline{t}_{(k,m)}, \underline{t}_{(k,m)} + p, \underline{t}_{(k,m)} + 2p, \dots, \underline{t}_{(k,m)} + np\}$  representa os valores discretos que os *taps* dos transformadores podem assumir;
- $BCCR$  é o conjunto de barras de carga e controle de reativo;
- $BC$  é o conjunto de barras de carga;
- $BCR$  é o conjunto de barras de controle de reativo;
- $BS$  é o conjunto de barras do sistema;
- $BSS$  é o conjunto de barras com bancos de capacitores e de reatores *shunt* variável.

## Resultados Numéricos

O *solver Basic Open-source Nonlinear Mixed INteger programming* (BONMIN) é um pacote open-source desenvolvido em C++ para resolver problemas de Programação Não-Linear Inteira Mista (PNLIM). O código tem sido desenvolvido por colaboradores da Universidade de *Carnegie Mellon* e da *IBM Research*. O BONMIN é distribuído gratuitamente sobre a Licença Pública Comum (LPC) pela Fundação COIN-OR. A opção mais importante deste pacote é a escolha do algoritmo de solução. Os algoritmos são exatos quando o problema é convexo. Caso contrário, quando a função objetivo e/ou as restrições são não-convexas, os algoritmos são considerados heurísticos.

Neste trabalho, o algoritmo do BONMIN escolhido foi o B-OA, baseado no método *Outer Approximation*. Neste método a função objetivo e as restrições do problema original são linearizadas (SOLER (2011)). Sucessivos problemas de programação não linear (com variáveis contínuas somente) são resolvidos e definem um problema linear, com variáveis contínuas e discretas, o qual é resolvido pelo método *Branch-and-Bound*, e cuja solução é equivalente à solução do problema original.

Os testes numéricos foram realizados com o *solver* BONMIN versão 1.8, em interface com o *software General Algebraic Modeling System* (GAMS), versão 24.7. Foram utilizados os sistemas elétricos IEEE 14, 30, 118 e 300 barras, referências na área de engenharia elétrica. O número de variáveis de controle discretas nestes sistemas são, respectivamente, 4, 6, 23 e 64. Estes valores discretos dizem respeito aos *taps* dos transformadores e aos bancos de capacitores e reatores *shunt*. Os testes realizados têm a finalidade de avaliar a eficiência do método *Outer Approximation* aplicado ao problema de FPOR com variáveis discretas e contínuas. A Tabela 1 apresenta os resultados obtidos.



Tabela 1: Resultados Numéricos

Opções	Sistema IEEE 14 barras		Sistema IEEE 30 barras		Sistema IEEE 118 barras		Sistema IEEE 300 barras	
	Perdas (MW)	Tempo (s)	Perdas (MW)	Tempo (s)	Perdas (MW)	Tempo (s)	Perdas (MW)	Tempo (s)
<i>best-bound</i>	13,62	0,725	17,89	0,859	122,67	1,191	351,94	190,098
<i>best-guess</i>	13,62	0,600	17,89	0,861	122,67	1,198	351,94	187,865
<i>breadth-first</i>	13,62	0,726	17,89	0,842	122,67	1,197	351,94	186,459
<i>depth-first</i>	13,62	0,732	17,89	0,879	122,67	1,229	351,94	186,631
<i>dynamic</i>	13,62	0,727	17,89	0,850	122,67	1,254	351,94	191,079
<i>dfs-dive</i>	13,62	0,607	17,89	0,851	122,67	1,186	351,94	213,867
<i>dfs-dive-dynamic</i>	13,62	0,747	17,89	0,860	122,67	1,127	351,94	247,147
<i>dive</i>	13,62	0,861	17,89	0,946	122,67	1,121	351,94	295,319
<i>probed-dive</i>	13,62	0,851	17,89	0,840	122,67	1,184	351,94	253,327
<i>top-node</i>	13,62	0,740	17,89	0,965	122,67	1,208	351,94	245,727

## Conclusões

O problema de FPOR é considerado um problema de difícil resolução ao ser modelado como um problema de programação não-linear inteira mista (PNLIM). Neste trabalho, o problema de FPOR foi resolvido com o algoritmo B-OA disponível no solver BONMIN para analisar a eficiência e competitividade deste algoritmo.

Todas as opções testadas deste algoritmo se mostraram eficientes na resolução do problema de FPOR e convergiram para o mesmo resultado em todos os sistemas. A principal diferença entre as opções testadas diz respeito ao tempo de resolução. As diferenças significativas em relação ao tempo de resolução foram notadas nos testes com o sistema IEEE 300 barras, em que a diferença entre o maior tempo de resolução obtido e o menor tempo foi de 37%. O algoritmo B-OA apresentou alto tempo computacional em todos os testes realizados com o sistema IEEE 300 barras.

Foi feita uma comparação entre os valores assumidos pela função objetivo do problema de FPO quando as variáveis de controle deste problema são consideradas discretas e quando estas são consideradas contínuas. Observou-se que a diferença entre os dois casos foi de, aproximadamente, 0,07%, 0,22%, 0,57% e 2% nos sistemas elétricos IEEE 14, 30, 118 e 300 barras, respectivamente, o que comprova a qualidade das soluções discretas obtidas.

## Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPESP (processo 2016/06756 – 8), CAPES e CNPq (processo 428740/2016 – 2).

## Referências

- CARPENTIER, J. L. **Contribution a l'Étude du dispatching Économique.** *Bulletin de la Société Française des Electriciens.* 1962.
- SILVA, D. P. **Funções Penalidade para o Tratamento das Variáveis Discretas do Problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo.** 2016. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Unesp, Bauru, 2016.
- SOLER, E.M. **Resolução do problema de Fluxo de Potência Ótimo com variáveis de controle discretas.** 2011. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – EESC/USP, São Carlos, 2011.



## Uma experiência com o jogo “Cinco em Linha” para o estímulo do raciocínio lógico

*Emily Bolinelli Arfeli*

*Unesp; Faculdade de Ciências  
clayton\_espbt@hotmail.com*

*Cristiane Alexandra Lázaro*

*Unesp; Faculdade de Ciências  
cristiane@fc.unesp.br*

*Tatiana Miguel Rodrigues-Souza*

*Unesp; Faculdade de Ciências  
tatimi@fc.unesp.br*

**Resumo:** Apresentamos neste trabalho o jogo “Cinco em Linha”, que tem como objetivo estimular cálculos mentais usando adição e subtração, estimativas e a lógica. Nos dias atuais, com o crescimento acelerado da tecnologia, o tempo é um dos requisitos para esta aceleração. A rapidez da internet ou da prestação de um serviço são, algumas vezes, sinônimos de qualidade. Como fazer para que um aluno tenha interesse em Matemática e também saiba ter um raciocínio lógico rápido e faça contas de modo mais ágil, sem utilizar o celular? Este jogo é capaz de ajudar a desenvolver estas habilidades. Além desta justificativa, um dos objetivos dos departamentos de Matemática das universidades brasileiras é estimular o interesse dos graduandos ingressantes pelo raciocínio lógico. Outro ângulo é buscar meios de incentivo para alunos e professores, na tentativa de colaborar para a melhoria do quadro brasileiro que se coloca. Assim, de forma lúdica, faremos este aluno pensar nos conceitos aprendidos na sala de aula, questionar a lógica usada para fazer o pensamento, fazendo com que este estudante crie conexões entre as várias áreas da matemática.

**Palavras-chave:** Ensino. Jogos Matemáticos. Matemática.

### Introdução

Ao pensarmos em jogos, logo nos vêm à mente disputa, competição e diversão. Entretanto, quando o objetivo está centrado na aprendizagem, é preciso ir além, possibilitando aos alunos a apropriação de novos conhecimentos associados aos que eles já possuem.

Quando se deparam com problemas matemáticos, os alunos do ensino fundamental e médio se sentem incapazes e angustiados por não saberem resolvê-los. Estas dificuldades estão relacionadas aos métodos usados, muitas vezes desmotivadores, repetitivos e que não envolvem o raciocínio, estigmatizando os alunos, bloqueando a sua criatividade, a organização do pensamento e a argumentação lógica.

Grando (2004), explica que o jogo representa uma atividade lúdica no qual estão envolvidos o desejo, o interesse do jogador pela própria ação do jogo, e ainda envolve a competição e o desafio que motivam o jogador a conhecer os seus limites e suas possibilidades de vencê-los, na busca da vitória.

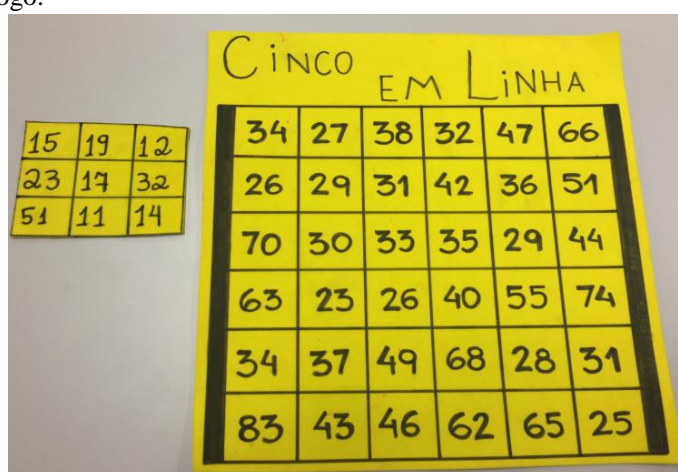
Jogos que envolvem Matemática são importantes não só para a aprendizagem, mas também para quebrar alguns preconceitos existentes, talvez culturais sobre a Matemática, que muitas vezes são causados pelos próprios professores, família e colegas.

Neste trabalho vamos apresentar o jogo “Cinco em linha” com a operação adição. Este jogo, como outros também, foi utilizado nas escolas públicas de Bauru, em forma de oficinas que fazem parte do projeto “Ensinando Matemática através de Jogos e Modelos Geométricos”. Este projeto tem como objetivo oferecer ao aluno, a partir dos jogos matemáticos, a diversão e a superação,

possibilitando a construção de aprendizagens significativas, além do propósito estimular o gosto pela Matemática, propiciando uma maior interação professor/aluno e promovendo uma aproximação comunidade/universidade, fazendo com que o aluno tenha uma nova visão da Matemática através dos jogos.

## Metodologia

Em um primeiro momento foi confeccionado o material, que são dois tabuleiros e vinte marcadores de duas cores distintas (os quais representarão as equipes), feitos em E.V.A., conforme figura abaixo. O professor pode optar por fazer as duas tabelas em uma folha só de E.V.A., isso não modifica as regras do jogo.



O objetivo deste jogo é que uma equipe consiga cobrir cinco números seguidos (“Cinco em linha”) do tabuleiro maior (em verde), em qualquer direção (horizontal, vertical, diagonal). As habilidades formadas pelos alunos é desenvolver estimativas, cálculo mental envolvendo adição e subtração, resolução de problemas.

As regras para jogar o “Cinco em linha” são: cada uma das equipes recebe 20 fichas (marcadores). A primeira equipe a jogar escolhe dois números do tabuleiro menor indicando-as à equipe adversária. Em seguida calculam, dizendo em voz alta, a soma dos números escolhidos, procuram este valor no tabuleiro maior e colocam sobre ele um de seus marcadores. Uma vez colocada esta ficha não pode ser mais retirada. Se a equipe, na sua vez, errar ou fizer uma soma que já tenha sido coberta, ela passa a vez, sem colocar nenhuma ficha. O objetivo do jogo é ser a primeira equipe a conseguir cobrir cinco números seguidos do tabuleiro maior, em qualquer direção (horizontal, vertical, diagonal). Se nenhuma equipe conseguir colocar cinco fichas em linha e o tabuleiro ficar completo, ganha o jogo a que tiver colocado mais marcadores no tabuleiro.

Após a construção do jogo, foram discutidos os conceitos matemáticos envolvidos no jogo e foram feitos treinamentos para apresentação dos universitários (bolsistas/voluntários) nas escolas. O passo seguinte foi à apresentação dos alunos bolsistas e voluntários nas escolas públicas da cidade de Bauru, através das oficinas.

## Resultados e Discussões

Usando o jogo “Cinco em linha” é possível estimular cálculos mentais usando adição, subtração, estimativa e lógica. Também é através dessas oficinas que o aluno desenvolve habilidades



sociais como respeitar o raciocínio e dialogar com os outros membros da sua equipe, atribuições que devem ser usados pelos indivíduos para viver em sociedade.

Com as ferramentas aprendidas tanto neste jogo como nos outros apresentados nas oficinas realizadas durante o projeto foi possível aprimorar as aulas dos nossos alunos bolsistas, tornando-as mais agradáveis, incentivando o estudo da matemática visto que os jogos incentivaram, a partir da forma concreta, o aprendizado da forma abstrata, propiciando a vivência em sala de aula com utilização de métodos diferenciados, de baixo custo, além de possibilitar sua efetiva interação com a comunidade.

### Conclusões

A ação de jogar não está subordinada ao ato em si, ela vai além, pois o aluno agora é capaz de pensar, levantar hipóteses, interpretar e criar as próprias relações entre os conhecimentos. O desencadeamento após um jogo ultrapassa a experiência e possibilita a aquisição para outros contextos. Isto significa que as atitudes adquiridas no momento do jogo tendem a ser propriedade do aluno e podem ser generalizadas para outras situações, inclusive em sala de aula. Percebemos com este projeto que o aluno ao jogar, passa a ter competência e habilidade para ser o elemento ativo no seu processo de aprendizagem.

Conseguimos assim, usar o lúdico para complementar a teoria aprendida em sala de aula e ser um instrumento para a melhoria do ensino, obtendo uma interação entre a universidade e a comunidade, como também propiciando o contato de alunos do ensino fundamental e médio com os universitários.

### Referências

AZEVEDO, M.V. R. **Jogando e construindo matemática**: a influência dos jogos e materiais pedagógicos na construção dos conceitos em Matemática. São Paulo: Unidas, 1993.

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas**: uma estratégia para as aulas de matemática. 5. ed. São Paulo: CAEM /USP, 2004.

GRANDO, R. C. O conhecimento matemático e o uso de jogos em sala de aula. 2000. 224 f. Tese (Doutorado em Educação)– Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

GRANDO, R. C. **O jogo e a matemática no contexto da sala de aula**. São Paulo: Editora Paulus, 2004.

LINS, R. C; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. 7. ed. Campinas: Papirus Editora, 2006.

SELVA, K. R.; CAMARGO, M. O jogo matemático como recurso para a construção do conhecimento. In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2009, Ijuí, **Anais...** Ijuí: Unijuí, 2009. Disponível em: <[http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd\\_egem/fscommand/CC/CC\\_4.pdf](http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_4.pdf)>. Acesso em: 06 nov. 2016.

## Uso de otimização no projeto estrutural de um suporte de duas barras

*Paulo Sergio da Silva Gouveia*  
Centro Universitário do Norte Paulista (UNORP)  
paulossg@gmail.com

*Jussara Longhi*  
Centro Universitário do Norte Paulista (UNORP)  
jussaralonghi@hotmail.com

*Sabrina Franciele Mendonça Janones*  
Centro Universitário do Norte Paulista (UNORP)  
sabinajanones@hotmail.com

*Eric Fabrício Farias Machado*  
Centro Universitário do Norte Paulista (UNORP)  
eric9\_jb@hotmail.com

**Resumo:** O presente trabalho visa ilustrar a aplicação dos modelos de Otimização no projeto de um suporte formado por duas barras. Para este fim, foi utilizado o software *Matlab* com a função *fmincon*. Resultados numéricos são apresentados para ilustrar o desenvolvimento.

**Palavras-chave:** Matemática Aplicada à Engenharia. Otimização. Modelagem.

### Introdução

Na engenharia, projetos estruturais consistem basicamente no dimensionamento dos elementos inerentes a estrutura, de forma que estes atendam aos esforços que serão solicitados. As decisões tomadas nesta etapa, impactam profundamente tanto no processo de construção, quanto no seu custo final e devem garantir a estabilidade, segurança e utilização do projeto em questão. Em um mundo cada vez mais competitivo e globalizado é essencial que estas decisões impactem diretamente na diminuição dos custos. Neste sentido, as técnicas de otimização são extremamente eficientes para alcançar tais objetivos, pois sua estrutura, permite definir qual objetivo deve ser focado, bem como restrições de projeto e restrições técnicas normativas (VENKATARAMAN, 2001, p. 2). Neste trabalho, abordaremos o problema de projetar um suporte constituído por duas barras de aço, submetidas a um carregamento no nó que as une, conforme a Figura 1. Para um melhor entendimento do modelo iremos realizar testes com variados ângulos de incidência do carregamento no nó.

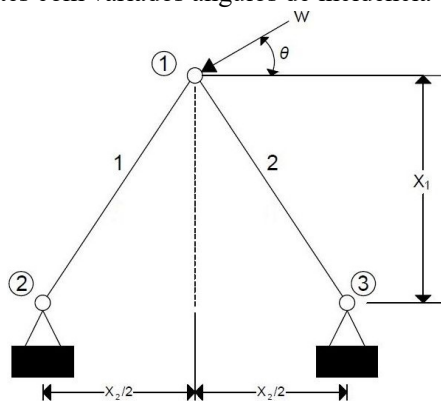


Figura 1: Suporte de duas barras.



Este esquema de construção, apesar de simples, está presente em inúmeras situações como por exemplo em torres de transmissão de energia, telhados entre outros.

## O problema

Para o problema das duas barras mostrado na Figura 1, nosso objetivo é descobrir quais as dimensões que minimizam a massa total de aço de forma que a estrutura não entre em colapso devido as tensões nas barras. Para este fim adotaremos que as duas barras são iguais com seção transversal tubo circular, cujos diâmetros externos e internos serão denotados por  $x_3$  e  $x_4$ , respectivamente e que a tensão máxima admissível nas barras seja denotada por  $\sigma_a$ , que pode ser de compressão ou de tração.

Desta forma, a partir do nó 1 na Figura 1, aplicando o diagrama de corpo rígido e as fórmulas de equilíbrio estático, podemos calcular as forças nas barras, o que nos fornece que as forças atuantes nas barras 1 e 2 são respectivamente:

$$\begin{aligned} & -0,5W\sqrt{x_1^2 + (0,5x_2)^2} \left[ \frac{\text{sen}(\theta)}{x_1} + \frac{2\text{cos}(\theta)}{x_2} \right] \\ & -0,5W\sqrt{x_1^2 + (0,5x_2)^2} \left[ \frac{\text{sen}(\theta)}{x_1} - \frac{2\text{cos}(\theta)}{x_2} \right]. \end{aligned}$$

Como as seções transversais são tubo circulares temos que a área pode ser vista como:

$$A = \frac{\pi(x_3^2 - x_4^2)}{4}.$$

Desta forma, o modelo de otimização associado a este problema pode ser visto como:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} \quad \frac{\pi\rho}{4}\sqrt{x_1^2 + (0,5x_2)^2}(x_3^2 - x_4^2 + x_5^2 - x_6^2) \\ & \text{s.a} \quad \frac{2W\sqrt{x_1^2 + (0,5x_2)^2} \left[ \frac{\text{sen}(\theta)}{x_1} + \frac{2\text{cos}(\theta)}{x_2} \right]}{\pi(x_3^2 - x_4^2)} \leq \sigma_a \\ & \quad \frac{-2W\sqrt{x_1^2 + (0,5x_2)^2} \left[ \frac{\text{sen}(\theta)}{x_1} + \frac{2\text{cos}(\theta)}{x_2} \right]}{\pi(x_3^2 - x_4^2)} \leq \sigma_a \\ & \quad \frac{2W\sqrt{x_1^2 + (0,5x_2)^2} \left[ \frac{\text{sen}(\theta)}{x_1} - \frac{2\text{cos}(\theta)}{x_2} \right]}{\pi(x_5^2 - x_6^2)} \leq \sigma_a \\ & \quad \frac{-2W\sqrt{x_1^2 + (0,5x_2)^2} \left[ \frac{\text{sen}(\theta)}{x_1} - \frac{2\text{cos}(\theta)}{x_2} \right]}{\pi(x_5^2 - x_6^2)} \leq \sigma_a \\ & \quad -x_3 + x_4 + 0.001 \leq 0 \\ & \quad -x_5 + x_6 + 0.001 \leq 0 \\ & \quad x_3 - x_5 = 0 \\ & \quad x_4 - x_6 = 0 \\ & \quad x_1 - h = 0 \\ & \quad x_2 - s = 0 \\ & \quad [0; 0; 0; 0; 0; 0] \leq [x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6] \leq [10; 10; 5; 4.5; 5; 4.5]. \end{aligned} \tag{1}$$

As quatro primeiras restrições garantem que as tensões não ultrapassem a tensão admissível  $\sigma_a$ , a quinta e sexta restrições garantem que os diâmetros internos e externos difiram por no mínimo 0.001 m, a sétima e oitava restrições impõem que as barras seja idênticas e por último a nona e décima restrições definem a altura e o espaçamento das barras.

Maiores detalhes sobre o desenvolvimento do modelo de otimização associado ao problema podem ser encontrados em (ARORA, 2012, p. 31).



## Resultados numéricos

A título de ilustrar o modelo de otimização bem como sua eficiência, iremos assumir que: o carregamento  $W$  será constante com valor de 10KN, o ângulo  $\Theta$  permanecerá no intervalo  $[0, \pi/2]$  com incrementos de  $\pi/12$ , o material será o aço com massa específica  $\rho = 7850 \text{ Kg/m}^3$  e tensão admissível  $\sigma_a = 250 \text{ MPa}$ , a altura será  $h = 1\text{m}$  e o espaçamento será  $s = 1.5\text{m}$ . Para resolver o problema de otimização foi utilizado o software *Matlab* com a função *fmincon* adotando o algoritmo *interior-point* (CHAPMAN, 2006, p. 1).

Tabela I: Ângulo X Massa.

$\Theta$ (rad)	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
massa ( $\text{Kg/m}^3$ )	0.6940	0.7590	0.8120	0.8493	0.7521	0.6433	0.5325

Note que a maior quantidade de massa ocorre quando o ângulo de incidência do carregamento está em  $\pi/4$  rad e que a menor ocorre em  $\pi/2$ , ou seja, quando a estrutura se comporta basicamente como um pilar.

## Conclusões e trabalhos futuros

O estudo efetuado neste trabalho nos permitiu modelar um problema de engenharia focando na minimização da quantidade de aço utilizada na estrutura. Através dos experimentos numéricos em *Matlab*, podemos notar que a variação do ângulo de incidência do carregamento no nó afeta consideravelmente a quantidade de aço necessária na estrutura. Além disso, nota-se uma eficiência muito grande do modelo, pois este permite resolver rapidamente o problema mesmo quando o ângulo de incidência do carregamento é alterado.

## Referências

ARORA, J. S. **Introduction to optimum design**. 3. ed. New York: Elsevier, 2012.

VENKATARAMAN P. **Applied Optimization with Matlab Programming**. Wile, 2001.

CHAPMAN S. J. **Programação em Matlab para engenheiros**, 2. ed. São Paulo, Thomson Learning, 2006.

## Uso de um Algoritmo Colônia de Formigas na seleção de variáveis dependentes e independentes para futura construção de um modelo de previsão de consumo de combustíveis

*José Antonio Rico Coque*

*Universidade Estadual Paulista; Faculdade de Engenharia de Bauru  
jose.coque@hotmail.com*

*Nair Cristina Margarido Brondino*

*Universidade Estadual Paulista; Faculdade de Ciências  
brondino@fc.unesp.br*

**Resumo:** Grande parte dos combustíveis aplicados no transporte rodoviário é proveniente de fontes não renováveis, o que faz com que a crescente demanda por este tipo de energia cause danos cada vez maiores ao meio ambiente. Neste contexto, o conhecimento das variáveis que influenciam as taxas de consumo de combustíveis pode auxiliar no planejamento e elaboração de políticas que visem a otimizar o aproveitamento destes recursos de forma sustentável. A partir de uma coleta criteriosa de dados junto a sites de órgãos oficiais, elaborou-se um banco de dados contendo séries temporais de 19 variáveis de natureza econômica e sociodemográfica. Com o objetivo de reduzir a dimensão do conjunto de entrada a partir do descarte das séries menos importantes, as relações entre as séries contidas nesse banco foram analisadas a partir de um método baseado em Otimização por Colônia de Formigas (ACO – Ant Colony Optimization).

**Palavras-chave:** Ant Colony Optimization. Consumo de combustíveis. Métodos Estocásticos e Estatísticos.

### Introdução

O setor de transportes consome mais da metade do petróleo utilizado no mundo e contribui com aproximadamente 25% das emissões de dióxido de carbono. De acordo com Anable et. al. (2012), tomando o ano de 2005 como base, espera-se que a energia consumida com transporte aumente em 50% até o ano de 2030 e mais de 200% até 2050.

O transporte é essencial para o desenvolvimento econômico sustentável e para a promoção de melhores padrões de vida. Entretanto, entre os outros setores consumidores de energia, ele aparece como um dos maiores desafios para atingir objetivos sustentáveis, no que diz respeito à conservação, diversificação e controle de emissões de CO<sub>2</sub>. Desta forma, o conhecimento da relação entre o consumo de combustíveis e variáveis de natureza econômica e demográfica pode servir como ferramenta auxiliar na proposta de políticas públicas que visem a reduzir esse consumo e, por consequência, controlar as emissões.

Para essa aplicação, dezenove séries temporais de variáveis econômicas e sociodemográficas foram coleadas em sites de órgão oficiais. Na sequência, aplicou-se um método baseado em ACO (Ant Colony Optimization), visando a identificar as variáveis que mais contribuem para a variabilidade total do sistema e assim promover uma redução de dimensão, a partir da exclusão de variáveis redundantes.

### ACO para seleção de variáveis

O método ACO é baseado no comportamento biológico de uma colônia de formigas. O seu princípio é o modo como as formigas procuram por comida e voltam à colônia, depositando feromônio pelo caminho que passam, o qual serve como meio de comunicação para guiá-las até a comida. As formigas tendem a escolher o caminho com maior concentração de feromônio, pois este é o caminho pelo qual a maioria das formigas passou mais vezes em menos tempo (DORIGO, 1996).

O algoritmo utilizado nesse trabalho foi implementado em MATLAB<sup>®</sup> e é denominado UFSACO (Tabakhi et. al., 2014). Sejam  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  e  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  os vetores que representam as variáveis  $A$  e  $B$ . Uma medida de similaridade entre as variáveis é dada pelo módulo do cosseno que os vetores  $A$  e  $B$  formam e é dada em (1). Pode-se observar que se  $A$  e  $B$  forem

aproximadamente paralelos, ou seja, representarem praticamente a mesma informação para o sistema, tem-se  $sim(A, B) \cong 1$  e se os dois forem ortogonais, teremos  $sim(A, B) \cong 0$ .

$$sim(A, B) = \left| \frac{\sum_{i=1}^p (a_i \cdot b_i)}{\left( \sqrt{\sum_{i=1}^p a_i^2} \right) \cdot \left( \sqrt{\sum_{i=1}^p b_i^2} \right)} \right| \quad (1)$$

O problema de seleção pode ser representado por um grafo não orientado totalmente conectado, em que as variáveis representam os nós e as similaridades representam o peso dos arcos que associam os respectivos pares de variáveis. No momento inicial, as formigas são distribuídas entre os nós, sendo que as quantidades de feromônio, denotadas por  $\tau$ , em cada arco são todas constantes. A cada iteração, as formigas se deslocam aleatoriamente para um nó diferente, a partir de duas regras possíveis: gulosa ou probabilística.

Suponhamos que  $i$  representa a variável na qual a formiga está e  $j$  representa a próxima variável a ser visitada; Na regra probabilística, a formiga que está na variável  $i$  escolhe deslocar-se para a variável  $j$ , de acordo com a regra dada em (2).

$$j = argmax \{ [\tau_u] [\eta(F_i, F_u)]^\beta \} \quad (2)$$

onde  $\eta(F_i, F_u) = 1/sim(A, B)$ ,  $\beta > 0$  é um parâmetro que controla a importância da similaridade versus o feromônio,  $J_i^k$  é o conjunto de variáveis ainda não visitadas,  $u \in J_i^k$  e  $\tau_u$  é a quantidade de feromônio atribuída a  $u$ .

Na regra probabilística, a formiga decide se deslocar para a cidade  $j$ , de acordo com a regra dada em (3). Para essa aplicação, assumiu-se que 30% das formigas escolhem o método guloso e as demais escolhem o método probabilístico.

$$P_k(i, j) = \begin{cases} [\tau_j] [\eta(F_i, F_j)]^\beta / \sum_{u \in J_i^k} [\tau_u] [\eta(F_i, F_u)]^\beta, & \text{se } j \in J_i^k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3)$$

A cada iteração, a quantidade de feromônio associada ao atributo  $i$  é atualizada de acordo com a equação (4).

$$\tau_i(t+1) = (1 - \rho)\tau_i(t) + \frac{FC[i]}{\sum_{j=1}^n FC[j]} \quad (4)$$

em que  $n$  é o número de atributos originais;  $\tau_i(t)$  e  $\tau_i(t+1)$  representam as quantidades de feromônio relativo à variável  $i$  nos tempos  $t$  e  $t+1$ , respectivamente;  $\rho$  é o parâmetro de evaporação de feromônio;  $FC[i]$  é um contador relativo ao número de visitas ao atributo  $i$ .

Ao final do processo, aquelas variáveis que possuem os maiores valores de feromônio serão as que trazem mais informação ao sistema.

## Resultados e Métodos

Para essa aplicação considerou-se 15 séries temporais de natureza econômica e demográfica, a saber: Exportações (E); Importações (I); PIB em US\$; População (P) em milhões; Preços em US\$ da gasolina (PG), do diesel (PD), do álcool (PA); Produção de automóveis (PAu), de comerciais leves (PCL), de caminhões (PC), de ônibus (PO); Licenciamento de automóveis (LA), de comerciais leves (LCL), de caminhões (LC) e de ônibus (LO).

Após a aplicação do método, construiu-se a figura 1, que representa as quantidades de feromônio relativas a cada uma das variáveis. Considerando as variáveis mais significativas como aquelas com a maior concentração de feromônio, observa-se que a População, PIB, a Produção de Ônibus e Caminhões, o Licenciamento de Ônibus e Caminhões e as taxas de Importações e Exportações são as variáveis mais relevantes. Desta forma, entre 15 variáveis iniciais, foram

selecionadas 8, diminuindo em quase 50% a dimensões do problema. A análise demorou 8,6 segundos com 100 formigas e 20 iterações. A figura 2 apresenta o método aplicado aos quatro tipos de combustível: Consumo em m<sup>3</sup>/mês de gasolina (CG), de diesel (CD), de álcool hidratado (CAH) e de álcool anidro (CAA). Os resultados observados indicam que o álcool anidro tem representatividade muito baixa no sistema. A análise demorou 1,1 segundo com 100 formigas e 20 iterações.

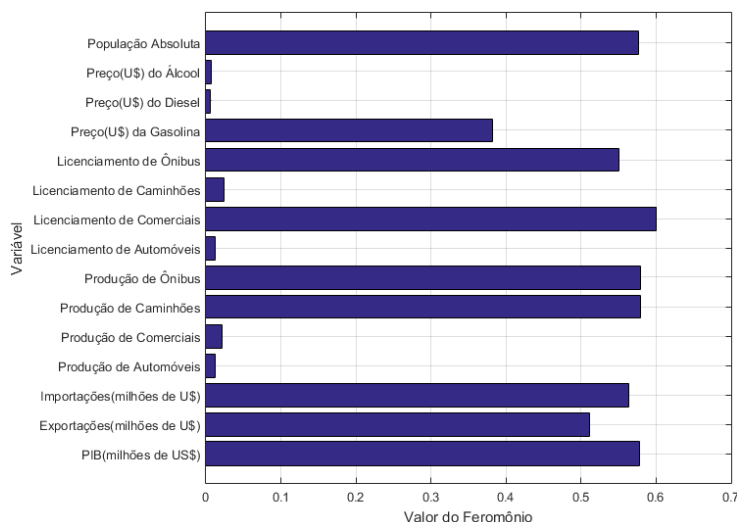


Figura 1: Quantidade de feromônio atribuída às variáveis econômicas e demográficas.

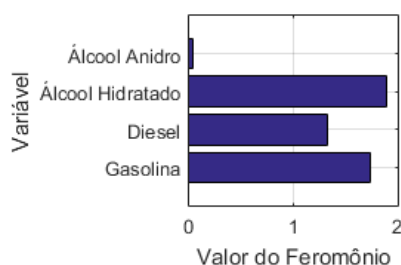


Figura 2: Quantidade de feromônio atribuída aos consumos dos combustíveis.

## Conclusões

A partir da aplicação do algoritmo baseado em ACO, a dimensão do conjunto de variáveis independentes, que anteriormente era 15, foi reduzida para 8, de tal forma que somente as variáveis mais importantes foram retidas no conjunto. Com isso, o número de parâmetros a serem estimados em modelos posteriores sofreram uma redução significativa.

Com relação ao conjunto de variáveis dependentes, que será composto pelo consumo dos quatro combustíveis, a aplicação do método indica que o consumo de álcool anidro é similar ao consumo de álcool hidratado.

## Referências

- Anable, J., Brand, C., Tran, M. and Eyre, N. (2012). **Modelling transport energy demand: a socio- technical approach.** *Energy Policy*.41, pp.125 - 138.
- Dorigo, M.; Maniezzo, V. Colomi, A. (1996). **Ant system: Optimization by a Colony of Cooperating Agents.** *IEEE Transactions on Systems, Man and cybernetics*, v. 26, n.1, 29 – 41.
- Tabakhi, S.; Moradi, P.; Akhlaghian, F. (2014). **An unsupervised feature selection algorithm based on ant colony optimization.** *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, v. 32, 112–123.

## Valor médio da exponencial periódica de uma combinação linear de $t$ , $\sin(t)$ e $\cos(t)$ em termos das funções de Bessel

*Bruno Pereira Ferrazzi*

*Unesp - Universidade Estadual Paulista; Curso de Física  
b.ferrazzi@fc.unesp.br*

*Alexys Bruno-Alfonso*

*Faculdade de Ciências, Unesp - Universidade Estadual Paulista; Departamento de Matemática  
alexys@fc.unesp.br*

**Resumo:** É calculado o valor médio de uma função da forma  $\exp(ig(t))$ , com  $g(t) = mt - x\sin(t) + y\cos(t)$ , em que  $m$  é inteiro enquanto  $x$  e  $y$  são complexos. O resultado é dado em termos das funções de Bessel. A fórmula é testada através de cálculos numéricos, com o auxílio do software *Mathematica*. Ela é útil, por exemplo, para expressar um pacote de ondas Gaussianas como combinação linear das funções de onda do átomo de Hidrogênio.

**Palavras-chave:** Funções de Bessel. Valor médio. Séries. Matemática Aplicada à Física.

### Introdução

Historicamente, as funções de Bessel têm sua denominação como homenagem ao matemático alemão Friedrich Wilhelm Bessel, quem as estudou sistematicamente, por volta de 1824. Vale ressaltar que outros matemáticos eminentes, tais como Euler e Fourier, já as tinham investigado (Watson, 1995). O estudo amplo delas, por mais de três séculos, deve-se à enorme variedade de suas aplicações. Essas se estendem pelos vários ramos da física, desde a hidrodinâmica até a Mecânica Quântica (Gray, 1966; Neuhauser, 1990).

Neste trabalho é apresentada uma fórmula simples para o valor médio de uma função de  $t$  que resulta da composição entre a exponencial periódica e uma combinação linear de  $t$ ,  $\sin(t)$  e  $\cos(t)$ . A integral correspondente é útil para resolver um problema importante da Mecânica Quântica. Trata-se da propagação de pacotes de ondas Gaussianas associados ao movimento de uma partícula carregada no potencial de Coulomb. Aparentemente, a fórmula não está disponível na literatura, mesmo em livros bastante abrangentes no tema de integrais definidas e funções especiais (Gradshteyn, 2007). Sistemas de computação algébrica, tais como o *Mathematica* (Wolfram, 2017), tampouco apresentam soluções para a integral. Acreditamos que a fórmula aqui apresentada tem utilidade em várias áreas de pesquisa, além da Mecânica Quântica.

### Funções de Bessel

As funções de Bessel satisfazem equação diferencial ordinária

$$y''(x) + \frac{y'(x)}{x} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)y(x) = 0, \quad (1)$$

para  $m$  inteiro. Trata-se da equação diferencial de Bessel (Hassani, 2009). A função de Bessel de ordem  $m$ , da variável complexa  $x$ , pode ser dada pela série

$$J_m(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(m+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \quad (2)$$

Ela também pode ser representada na forma integral

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i[mt - x \sin(t)]) dt. \quad (3)$$

## Cálculo do valor médio

Nesta seção, apresentamos uma fórmula para o valor médio da função

$$f_{m,x,y}(t) = \exp(i[mt - x \sin(t) + y \cos(t)]), \quad (4)$$

num intervalo de valores de  $t$  de comprimento  $2\pi$ . O índice  $m$  é um número inteiro arbitrário e os parâmetros  $x$  e  $y$  são números complexos quaisquer. Portanto, a função  $f_{m,x,y}(t)$  é periódica em  $t$ , com período  $2\pi$ . Isto faz com que os extremos do intervalo possam ser escolhidos arbitrariamente, desde que a diferença entre eles seja  $2\pi$ . Por simplicidade, em analogia com a Equação 3, escolhemos o intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

Pela definição de valor médio de uma função, sabemos que o valor médio de  $f_{m,x,y}(t)$  quando  $t$  varia em  $[-\pi, \pi]$ , com  $m$ ,  $x$  e  $y$  fixos, é dado por

$$F_m(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{m,x,y}(t) dt. \quad (5)$$

Então, com auxílio da Equação 3, é possível demonstrar que, para qualquer  $m$  inteiro e quaisquer números complexos  $x$  e  $y$ , vale

$$F_m(x,y) = \begin{cases} \left( \frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)^m J_m(\sqrt{x^2+y^2}) & \text{se } x^2+y^2 \neq 0, \\ \delta_{m,0}, & \text{se } x^2+y^2 = 0, \end{cases} \quad (6)$$

e que  $\delta$  é o símbolo de Kronecker. A combinação das Equações 5 e 6 formam o resultado principal deste trabalho.

É interessante notar que, para  $y = 0$ , a Equação 6 reduz-se a

$$F_m(x,0) = J_m(x), \quad (7)$$

em acordo com a Equação 3. Além disso, utilizando a Equação 2, verifica-se que

$$F_m(x,y) = \left( \frac{x+iy}{2} \right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(m+k)!} \left( -\frac{x^2+y^2}{4} \right)^k. \quad (8)$$

Aqui a série de potências converge para quaisquer números complexos  $x$  e  $y$  e qualquer inteiro  $m$ .

## Testes numéricos

Para verificar a validade das fórmulas apresentadas, foram comparados os valores numéricos gerados mediante as Equações 5, 6 e 8. A equação 5 foi avaliada mediante o comando NIntegrate[ ] do software *Mathematica* (Wolfram, 2017). A equação 8 foi avaliada aproximadamente, truncando a soma em  $k = 25$ . Na Tabela 1, as partes real e imaginária de  $x$  e  $y$  foram geradas ao tomar valores aleatórios entre  $-10$  e  $10$  e arredondar os resultados até uma casa decimal. Observa-se excelente acordo entre as diferentes formas de calcular. As diferenças seriam menores se aumentássemos o número de termos tomados na Equação 8 e a precisão no comando NIntegrate[ ].



Tabela 1: Na quarta coluna, valores numéricos da Equação 6 para cada  $(m, x, y)$ . A quinta e a sexta colunas apresentam os valores absolutos das diferenças com as Equações 8 e 5.

$m$	$x$	$y$	Equação 6	Eq. 6 - Eq. 8	Eq. 6 - Eq. 5
-5	$\frac{33}{5} + 3i$	$\frac{1}{10} + \frac{87i}{10}$	$-1110.967391 + 561.7544662i$	$3.8659 \times 10^{-18}$	$3.0032 \times 10^{-11}$
-4	$-\frac{37}{10} + 2i$	$\frac{1}{5} - \frac{23i}{10}$	$3.170427297 - 1.186019469i$	$5.8812 \times 10^{-33}$	$2.7465 \times 10^{-15}$
-3	$-\frac{31}{10} - \frac{39i}{5}$	$\frac{34}{5} + \frac{19i}{5}$	$557.9327578 + 343.4297956i$	$8.2773 \times 10^{-15}$	$8.0846 \times 10^{-12}$
-2	$\frac{15}{2} + 5i$	$\frac{73}{10} + \frac{83i}{10}$	$-1207.203051 - 1215.969217i$	$1.023 \times 10^{-8}$	$1.3372 \times 10^{-10}$
-1	$4 - \frac{14i}{5}$	$-\frac{97}{10} + \frac{97i}{10}$	$-501.3021575 - 215.5040409i$	$2.007 \times 10^{-11}$	$5.8846 \times 10^{-10}$
0	$\frac{8}{5} - \frac{31i}{10}$	$\frac{5}{2} + \frac{16i}{5}$	$5.046618318 - 4.652352071i$	$5.6184 \times 10^{-41}$	$4.65 \times 10^{-14}$
1	$-\frac{28}{5} - \frac{17i}{5}$	$\frac{51}{10} - \frac{42i}{5}$	$-30.16909989 - 13.36593164i$	$7.7704 \times 10^{-26}$	$4.1486 \times 10^{-12}$
2	$\frac{13}{2} - 4i$	$-\frac{77}{10} + \frac{87i}{10}$	$-220.6573375 - 868.6767214i$	$6.6988 \times 10^{-12}$	$1.5686 \times 10^{-9}$
3	$\frac{41}{5} - 4i$	$-\frac{38}{5} + \frac{43i}{5}$	$-418.0339399 - 25.19389837i$	$7.4837 \times 10^{-12}$	$3.0091 \times 10^{-9}$
4	$\frac{63}{10} + \frac{47i}{5}$	$-\frac{47}{10} + \frac{38i}{5}$	$41.70794723 - 20.76988683i$	$3.0217 \times 10^{-22}$	$4.3909 \times 10^{-12}$
5	$\frac{13}{10} + \frac{12i}{5}$	$-\frac{41}{5} - \frac{33i}{10}$	$0.2093439523 - 1.209242088i$	$1.3201 \times 10^{-24}$	$3.934 \times 10^{-15}$

## Conclusão

Foi apresentada uma fórmula para o cálculo de uma integral definida que representa o valor médio de uma função composta entre a exponencial periódica e as funções linear, seno e cosseno. A solução foi expressa em termos das funções de Bessel e de séries. Os resultados foram testados através de cálculos numéricos. Observamos excelente concordância para valores arbitrariamente escolhidos dos parâmetros.

As fórmulas apresentadas serão utilizadas para a descrição do movimento de uma partícula num campo Coulombiano. Espera-se que elas também sejam de utilidade para pesquisas em outros temas e que sejam incluídas em tabelas e softwares de grande uso na comunidade (Gradshteyn, 2007; Wolfram, 2017).

## Agradecimentos

Os autores agradecem o CNPq e o PIBIC/Unesp pelo apoio financeiro.

## Referências

- GRADSHTEYN I. S., A.; RYZHIK, I. M., **Table of Integrals, Series and Products**, Academic Press: Amsterdam, 2007.
- GRAY A., **A treatise on Bessel functions and their applications to Physics**, Dover Publications: New York, 1966.
- HASSANI S., **Mathematical Methods: For Students of Physics and Related Fields**, Lecture Notes in Physics, Springer: New York, 2009.
- NEUHAUSER D., **Bound state eigenfunctions from wave packets: Time-energy resolution**. The Journal of Chemical Physics, v. 93 . 4, p. 2611-2616, 1990.
- WATSON G.A., **Treatise on the Theory of Bessel Functions**, Cambridge University Press: Cambridge, 1995.
- WOLFRAM MATHEMATICA. Sistema definitivo para computação técnica moderna. Disponível em: <https://www.wolfram.com/mathematica/>. Acesso em: 08 mar. de 2017.

## Variabilidade na duração das fases do ciclo de vida de insetos-praga

*Benedito, A. S.*

*Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - Instituto de Biociências  
antone@ibb.unesp.br*

*Ferreira, C. P.*

*Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - Instituto de Biociências  
pio@ibb.unesp.br*

**Resumo:** Nosso foco de estudo são as variações na dinâmica das populações de insetos-praga em função da variação do tempo de transição de uma fase para outra no seu ciclo de vida. Apresentamos um modelo genérico de equações diferenciais com retardo discreto, no qual a duração da fase imatura dos insetos é regida por uma função não-linear do tempo. Soluções analíticas e numéricas serão apresentadas e discutidas.

**Palavras-chave:** Biomatemática. Insetos-praga. Retardo.

### Introdução

Atualmente, equações diferenciais com retardo e equações integro-diferenciais do tipo Volterra (também classificadas equações com retardos concentrados e retardos distribuídos, respectivamente) são capítulos importantes da teoria das equações diferenciais e seu interesse foi especialmente elevado por causa de modelos em dinâmica populacional, segundo Mimmo (2014).

Ao tentar descrever o status de um ecossistema em um determinado momento, devemos estar cientes do fato de que alguns dos mecanismos envolvidos na dinâmica podem depender do status da população em tempos passados, mais do que no presente. Em primeiro lugar, observamos que a reprodução deve refletir o status da população em algum momento do passado, uma vez que os tempos de gestação implicam que as taxas de nascimento presentes devem depender do número de indivíduos na fecundação mais do que do atual. Uma razão mais geral para retardos é que algumas das características do habitat que influenciam o crescimento populacional em um dado tempo podem ser afetadas pela abundância populacional no passado.

No tocante a insetos, diversos fatores influenciam fortemente seu desenvolvimento tais como, por exemplo, variações climáticas (temperatura e umidade), predação, competição por alimento e qualidade dos alimentos; de modo que a duração das fases de seu ciclo de vida e, por conseguinte, a quantidade de indivíduos em cada fase podem oscilar ao longo do tempo. Interessados em tal relação, propomos um modelo de equações diferenciais com retardo pois, conforme Smith (2011, p. 13), apresentam uma tendência característica de originar soluções oscilatórias. Dividimos o ciclo de vida de um inseto-praga qualquer em duas fases, imatura e adulta, em que o período de maturação, isto é, a duração da fase imatura, é determinado por uma função não linear do tempo. Como tal não linearidade afeta a dinâmica das subpopulações imaturas e adultas é o que pretendemos verificar.

### Modelagem

O modelo é dado por:

$$\begin{aligned} I'(t) &= -\gamma I(t) + K(I(t))P(t) - e^{-\gamma\tau} K(I(t-\tau))P(t-\tau) \\ P'(t) &= -\mu P(t) + \alpha e^{-\gamma\tau} K(I(t-\tau))P(t-\tau) \end{aligned} \quad (1)$$

com as condições iniciais

$$I(t) = \phi(t), \quad P(t) = \psi(t), \quad \text{para } -\tau \leq t \leq 0,$$

sendo  $I$  a população de insetos imaturos,  $P$  a população total de adultos,  $\gamma$  e  $\mu$  suas respectivas mortalidades naturais,  $K$  uma função não-linear que modela crescimento da população imatura e considera competição entre as duas fases do inseto,  $\alpha$  a proporção de fêmeas e  $\tau$  o período de maturação, isto é, duração da fase imatura. Assim,  $K(I(t))P(t)$  e  $K(I(t-\tau))P(t-\tau)$  representam os indivíduos imaturos gerados nos instantes  $t$  e  $t-\tau$ , respectivamente. Por sua vez,  $e^{-\gamma\tau}$  corresponde à probabilidade de um indivíduo sobreviver durante um período de tempo  $\tau$  e, portanto,  $e^{-\gamma\tau}K(I(t-\tau))P(t-\tau)$  equivale aos insetos imaturos gerados em  $t-\tau$  que atingem a fase adulta. Finalmente,  $\alpha e^{-\gamma\tau}K(I(t-\tau))P(t-\tau)$  representa a proporção de fêmeas dentre os insetos gerados em  $t-\tau$ .

Consideramos a seguinte função, similar à utilizada em Sanches (2011, p. 2920), para  $\tau$  :

$$\tau = \tau_0 \left( 1 + \delta \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi t}{365} \right) \right) \quad (2)$$

em que  $\tau_0$  é o período de maturação médio dos insetos em dias e  $\delta$  descreve a amplitude relativa das variações sazonais. Quando  $\delta = 0$ , o período de maturação é constante e igual a  $\tau_0$ , ou seja, não há variação ao longo do ano. Discutiremos os casos em que  $\delta = 0$  e  $\delta > 0$ , obtendo para isso as soluções de equilíbrio e avaliando sua estabilidade.

## Conclusões

A partir da análise de estabilidade das soluções de equilíbrio (caso  $\delta = 0$ ), obtém-se o limiar para a persistência da população de inseto-praga. À medida que  $\tau$  cresce, a região do espaço paramétrico que representa a persistência da população diminui. Ao considerarmos dependência temporal em  $\tau$  (equação 2), observam-se oscilações na dinâmica populacional de inseto-praga.

## Agradecimentos

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo suporte financeiro.

## Referências

IANNELLI, M.; PUGLIESE, A. An Introduction to Mathematical Population Dynamics: Along the trail of Volterra and Lotka. 1. ed. Switzerland: Springer, 2014.

SANCHES, R. P.; FERREIRA, C. P.; KRAENKEL, R. A. Bull Math Bio. **The Role of Immunity and Seasonality in Cholera Epidemics**, v.73, p.2920, 2011.

SMITH, H. An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences. 1. ed. New York: Springer, 2011.

