Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 12, jul. 2018

Ricardo Pessoa dos Santos
Secretaria da Educação do Estado de São Paulo
ricopessoa@gmail.com

Luis Antonio da Silva Vasconcellos
UNESP - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
toninho@fc.unesp.br

A matemática por trás do sudoku

The mathematics behind sudoku

Resumo

Apresentamos para alunos da 3ª série do Ensino Médio da escola estadual Prof.ª Carolina Lopes de Almeida, localizada na cidade de Bauru/SP, o jogo Sudoku, utilizando-o como recurso didático na abordagem e desenvolvimento de conceitos matemáticos, concentração e raciocínio lógico. Embora a regra desse jogo seja muito simples, as dificuldades na busca da solução são desafios constantes. Conceitos importantes escondidos por trás de suas linhas, colunas e blocos, intrigam e desafiam os matemáticos. Neste artigo, pretendemos discutir conceitos utilizados para responder uma das primeiras perguntas feitas: "Qual é a quantidade total de jogos Sudoku existentes?". Para isso, foram aplicadas atividades ao grupo de alunos, seguindo o raciocínio de pesquisadores que completaram essa tarefa, aproveitando também, para retomar conceitos de análise combinatória, notação científica e matrizes.

Palavras-chave: Sudoku. Raciocínio lógico. Análise combinatória. Quadrados latinos.

Abstract

We present to the students of the 3rd grade of the public school Prof.ª Carolina Lopes de Almeida, located in the city of Bauru/SP, the Sudoku game, using it as a didactic resource in the approach and development of mathematical concepts, concentration and logical reasoning. Although the rule of this game is very simple, the difficulties in finding the solution are constant challenges. Important concepts hidden behind their lines, columns and blocks intriguing and challenging mathematicians. In this paper, we intend to discuss concepts used to answer one of the first questions asked: " What is the total amount of existing Sudoku games?". For this, activities were applied to the group of students, following the reasoning of the researchers who completed this task, taking advantage also to resume concepts of combinatorial analysis, scientific notation and matrices.

Keywords: Sudoku. Logical reasoning. Combinatorial analisys. Latin squares.

Artigo recebido em abr. 2018 e aceito em jun. 2018

1 Introdução

Ao contrário do que se possa pensar, Sudoku não se assemelha ao conhecido quadrado mágico, pois não necessita de operações aritméticas para determinarmos sua solução. Trata-se de um jogo de raciocínio lógico e experimentação, onde em sua versão mais comum, o jogador é desafiado a encaixar algarismos de 1 a 9 em uma grade 9×9, com 81 células distribuídas em 9 linhas, 9 colunas e 9 blocos 3×3, utilizando para isso, alguns algarismos fornecidos como dados iniciais (pistas do jogo) e com uma única regra restritiva: "Não repetir elementos nas linhas, colunas e blocos". Nesse jogo, precisamos apenas verificar se o elemento em questão já foi ou não utilizado (na linha, coluna ou bloco), o que nos permite substituir os 9 dígitos (algarismos de 1 a 9), por 9 letras, ou 9 símbolos.

O Sudoku como hoje conhecemos, foi criado em 1979, por Howard Garns [1], um arquiteto americano aposentado de 74 anos de idade e construtor de quebra cabeças, provavelmente utilizando como base o quadrado latino, assim denominado por Leonhard Euler (1707 - 1783) pelo fato de utilizar letras latinas em seus estudos [2]. A semelhança entre o Sudoku e um quadrado latino de ordem 9 é notável, pois a solução de um quadrado latino, consistia em distribuir os elementos em linhas e colunas, sem que ocorresse repetição de elementos.

O jogo foi publicado pela primeira vez no Japão no ano de 1984, e ganhou projeção mundial após 2004, quando Wayne Gould, um juiz aposentado que conheceu o jogo em uma visita ao Japão em 1997, criou um programa capaz de gerar diferentes jogos e propôs ao jornal Britânico "The Times" que publicasse o passatempo em suas páginas. O sucesso alcançado pelo jogo foi tanto que outros jornais resolveram fazer o mesmo, publicando também o jogo em suas páginas. A partir de então, o Sudoku passou a ganhar popularidade e se transformou em fonte de estudo e pesquisa para diversos matemáticos.

Com o objetivo de responder uma das primeiras perguntas feita pelos matemáticos: "Qual é o número total de jogos existentes?", reproduzimos os passos de Felgenhauer e Jarvis, descritos em [3], aplicando à um grupo de alunos da 3ª série do ensino médio da rede pública do Estado de São Paulo várias atividades que permitiram, retomar conceitos de análise combinatória, notação científica, propriedades de potências, além de promover o desenvolvimento do raciocínio lógico e concentração diante de problemas.

Aproveitamos também, para apresentar algumas questões sobre o jogo que ainda estão em aberto, como o problema do número mínimo de dados iniciais necessários para se determinar um jogo válido [4] e [5], e mostrar que existem diversos campos de pesquisa e estudo esperando pessoas interessadas na busca de soluções.

Durante o desenvolvimento das atividades, surgiram dúvidas que quando sanadas, ofereceram oportunidades de retomada dos conceitos envolvidos, permitindo que os alunos possam utilizá-los em situações encontradas durante a realização de avaliações e problemas teóricos apresentados pela matriz curricular do Estado de São Paulo.

Visando também o desenvolvimento do raciocínio, foi proposto aos alunos que implementassem um processo para gerar uma grade válida de Sudoku partindo de uma simples matriz quadrada de ordem 3, e em seguida, que gerassem um par ortogonal para a solução encontrada.

1.1 O jogo

Utilizando-se apenas da regra única, o jogador é desafiado a distribuir os 9 algarismos de 1 a 9 dentro da grade quadriculada. Apesar de existir apenas a regra única, e parecer muito simples sua resolução [6], o Sudoku apresenta muitos aspectos matemáticos interessantes que pretendemos discutir ao longo desse trabalho. Um desses aspectos trata do fato de como se obter a quantidade de possíveis grades completas para o problema.

O número de grades completas de Sudokus 9×9, foi determinada por Bertram Felgenhauer e Frazer Jarvis [3] no ano de 2005, utilizando computadores e algoritmos especialmente preparados para essa tarefa, obtendo um número gigantesco (6.670.903.752.021.072.936.960, ou aproximadamente, $6{,}67 \times 10^{21}$). Para se ter uma ideia da grandeza desse número, vamos supor que todos os habitantes do planeta, aproximadamente 7 bilhões de pessoas, passassem a resolver um jogo por segundo, seria então necessário, cerca de 30.200 anos para que a tarefa fosse completada. Até o momento, não existe uma demonstração para esse cálculo sem a ajuda computacional.

Durante o processo de contagem, os matemáticos encontraram dentro desse universo, diversos jogos considerados simétricos [6], e então, efetuando algumas reduções, foi possível determinar a quantidade de "grades essencialmente diferentes".

Um dos objetivos desse trabalho é que tais atividades sirvam para desafiar os alunos na construção do conhecimento, formalização de conceitos matemáticos e desenvolvimento do raciocínio lógico e na concentração.

2 Fundamentação teórica

2.1 Quadrados greco - latinos

Devido à grande popularidade do Sudoku, os quadrados latinos, ganharam maior projeção e destaque. Quadrados latinos são estudados há bastante tempo, e passaram a receber mais atenção desde o problema dos 36 oficiais de Euler, quando ele buscava alocar 36 oficiais de 6 regimentos e 6 patentes diferentes em um quadrado 6×6. O problema consistia em saber se existia apenas um oficial de um regimento e uma patente diferente em cada linha e cada coluna. Esses arranjos eram conhecidos como "quadrados greco-latinos" devido ao fato da utilização de letras gregas e latinas em sua solução.

Após muita procura e sem obter êxito, Euler afirmou não haver solução para tal problema e foi além, conjecturou que não havia solução para quadrados greco-latinos da forma: $n \equiv 2 \mod 4$, (onde n é a ordem do quadrado), fato que só foi comprovado em 1901 pelo matemático Gaston Tarry, que demonstrou que Euler estava parcialmente certo, pois realmente não há solução para o quadrado latino 6×6. Dessa forma a conjectura de Euler ganhou mais força, sendo mostrada sua falha apenas em 1959, quando Raj Chandra Bose e Sharadchandra Shankar Shrikhande, utilizaram um computador para encontrar um quadrado greco-latino 22×22, além de Ernest Parker que encontrou um 10×10. Esses 3 matemáticos conseguiram depois de muitos anos (aproximadamente 200 anos), mostrar que Euler estava errado, provando que sua conjectura era falsa para as ordens: 10, 14, 18, 22, ... e o único quadrado que não apresentava solução era o de ordem 6.

Para a solução do problema dos 36 oficiais, utilizou-se os quadrados greco-latino, posteriormente rebatizados de quadrados latinos ortogonais. Na Figura 1 temos um exemplo de quadrado greco-latino de ordem 5.

$A\alpha$	$B\delta$	$C\beta$	$D\varepsilon$	$E\gamma$
$B\beta$	$C\varepsilon$	$D\gamma$	$E\alpha$	$A\delta$
$C\gamma$	$D\alpha$	$E\delta$	$A\beta$	$B\varepsilon$
$D\delta$	$E\beta$	$A\varepsilon$	$B\gamma$	$C\alpha$
$E\varepsilon$	$A\gamma$	$B\alpha$	$C\delta$	$D\beta$

Figura 1: Quadrado Greco-Latino
Fonte: Elaborado pelo autor

Um quadrado latino de ordem n, é uma matriz n $\times$ n, com n símbolos distintos, onde cada símbolo aparece apenas uma vez em cada linha e cada coluna [1]. Os quadrados latinos foram assim denominados pelo fato de Euler utilizar letras latinas em seus estudos. Dois quadrados latinos são ditos ortogonais, se após sobreposição, cada par ordenado de entradas acontecer exatamente uma vez (ver Figura 2).

0	1	3	2
2	3	1	0
3	2	0	1
1	0	2	3

0	3	2	1
2	1	0	3
3	0	1	2
1	2	3	0

Figura 2: Quadrados ortogonais
Fonte: Elaborado pelo autor

2.2 Princípios de análise combinatória

A análise combinatória trata vários problemas incluindo àqueles que envolvem a contagem de casos em situações de agrupamentos de determinado número de elementos, como por exemplo, calcular, quantos grupos diferentes de 3 pessoas podem ser formados a partir de um conjunto com 6 elementos disponíveis, ou de quantas maneiras diferentes podemos responder 10 questões de uma prova com 5 alternativas, e diversas outras situações [7].

Desenvolvendo métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes, agrupamentos formados sob certas condições.

Os inúmeros problemas envolvendo a contagem de agrupamentos, podem ser resolvidos por meio de uma ou mais operações elementares entre números naturais. Elas exigem a mobilização de estratégias de raciocínio semelhantes, sempre utilizando a ideia de multiplicação. Esse procedimento que exige o uso do raciocínio combinatório recebe o nome de "princípio fundamental da contagem".

2.3 Simetria no sudoku

Um único Sudoku pode dar origem a diversos jogos, apenas efetuando nele algumas operações simples, como por exemplo uma rotação de 90° no sentido horário.

Podemos a partir de um jogo válido, gerar um novo Sudoku, inicialmente diferente do original, mas com solução simétrica a primeira. Soluções dessa forma são "essencialmente as mesmas" e não são contadas quando consideramos "soluções essencialmente diferentes". Em [8], podemos verificar a utilização da teoria de grupos, mostrando diversos casos de simetria em quadrados e como aplicá-lo às grades Sudoku. Observe as Figuras 3 e 4 que apresentam Sudokus simétricos, aplicando uma rotação de 90° no sentido horário.

	2			3			4	
6								3
		4				5		
			8		6			
8				1				6
			7		5			
		7				6		
4								8
	3			4			2	

Figura 3: Sudoku simétrico
Fonte: [8].

	4			8			6	
3								2
		7				4		
			7		8			
4				1				3
			5		6			
		6				5		
2								4
	8			6			3	

Figura 4: Rotação de 90°
Fonte: [8].

Para determinar se um jogo é simétrico a outro, vamos recorrer a "Teoria de Grupos". A seguir, temos as transformações que podem ser aplicadas a um quadrado, tornando - o simétrico a outro.

Podemos aplicar rotações de 90°, 180°, 270° e 360° no sentido horário, além de uma reflexão através do eixo vertical e da diagonal. Uma rotação de 90°, será indicada por a, uma de 180° por a^2, uma de 270° por a^3 e uma rotação de 360° por a^4 ou e. Enquanto que a reflexão pelo eixo vertical, será indicada por b [9] e [10].

De uma maneira simplificada, podemos afirmar que existem 8 casos de simetria aplicadas à um quadrado e que podem ser utilizadas em um Sudoku (Tabela 1).

Nome	Simetria	Ordem
e	Elemento Neutro	1
a	Rotação de 90°	4
a^2	Rotação de 180°	2
a^3	Rotação de 270°	4
b	Reflexão no Eixo Vertical	2
ba	Reflexão na Diagonal Secundária	2
ba^2	Reflexão no Eixo Horizontal	2
ba^3	Reflexão na Diagonal Principal	2

Tabela 1: Casos de simetria no quadrado
Fonte: [8].

Esses 8 casos, representam os possíveis casos de simetria de um quadrado, pois qualquer outra forma poderá ser obtida através de uma ou mais combinações dessas operações. Portanto, afirmamos que essas 8 transformações formam um grupo.

Definição 1 *Um grupo é um conjunto G com uma operação binária • e um elemento especial e* $\in$ *G, satisfazendo as seguintes propriedades:*

- *Fechamento: Se x, y $\in$ G, então $x \bullet y \in G$;*
- *Associativa: Para todo x, y, z $\in$ G temos $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$;*
- *Elemento Neutro: Para todo $x \in G$ temos $x \bullet e = e \bullet x = x$;*
- *Elemento Inverso: Para cada $x \in G$ existe um elemento $x^{-1} \in G$ tal que $x \bullet x^{-1} = x^{-1} \bullet x = e$.*

Obs.: Normalmente, usamos xy para representar $x \bullet y$.

Definição 2 *Órbita de grupo é um conjunto formado com as soluções Sudoku que não são simétricas, ou seja, não podem ser transformadas em outras através das operações de simetria. São consideradas essencialmente diferentes.*

2.4 Grupo sudoku

Um grupo de soluções Sudoku, será formado por grades completas de Sudoku, obtidas através de manipulações simples como:

- Renomeação das entradas (trocar, por exemplo, todos os algarismos 1 pelos algarismos 2);
- Trocar duas linhas ou colunas de blocos;
- Trocar duas linhas ou colunas dentro de uma faixa (conjunto de 3 colunas) ou pilha (conjunto de 3 linhas);
- Reflexão através da diagonal (transposição da matriz).

Essas manipulações, junto com o grupo de simetrias, irão gerar grades de Sudoku simétricas. É sabido que um Sudoku grau 2 (matriz 4×4) possui apenas duas órbitas de grupo; ou seja, um Sudoku grau 2, tem apenas duas soluções essencialmente distintas (aquelas que não podem ser transformadas em outras através de operações simples, não são simétricas), enquanto um Sudoku grau 3 (matriz 9×9) terá 5.472.730.538 órbitas de grupo [11], fato que torna o cálculo manual praticamente impossível de ser realizado.

Dois jogos são essencialmente os mesmos se eles estão na mesma órbita de grupo sob essas operações, isto é, se um puder ser transformado no outro através das operações listadas acima, e serão essencialmente diferentes em caso contrário.

2.5 Soluções de Keedwell

Anthony Donald Keedwell (atualmente professor honorário senior da Surrey University - Inglaterra, onde atuou por mais de 60 anos), teve como seus principais interesses de pesquisa a combinatória e os quadrados latinos, é autor do livro "Latin squares and their applications", lançado no ano de 1974 e reeditado em 2015, onde são propostos problemas relacionados aos quadrados latinos mutuamente ortogonais e sugere sua utilização em quadrados mágicos e em jogos de Sudoku.

Em [12], é proposto uma forma de gerar grades completas de soluções. Para isso, devemos utilizar como ponto de partida, uma matriz 3×3 que preenche o primeiro bloco da grade, e então efetuar algumas operações, permutando a posição de suas linhas e colunas. Essas operações, permitem obter as matrizes que completam os demais blocos da grade Sudoku.

Dada qualquer matriz de ordem n^2, vamos identificar as localizações dos blocos n $\times$ n com o conjunto Z_n^2 (Tabela 2).

(0,0)	(0,1)	...	(0,n-2)	(0,n-1)
(1,0)	(1,1)	...	(1,n-2)	(1,n-1)
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
(n-1,0)	(n-1,1)	...	(n-1,n-2)	(n-1,n-1)

Tabela 2: Matriz de Keedwell
Fonte: [11].

Vamos denotar α e β operadores de comutação nos n $\times$ n blocos K de modo que αK e βK sejam n $\times$ n blocos que satisfaçam:

- A i - ésima linha de αK é a (i + 1) - ésima linha de K mod n; e
- A j - ésima coluna de βK é a (j + 1) - ésima coluna de K mod n.

Obs.: Os operadores α e β receberão um expoente indicando quantas vezes a operação será realizada. Podemos indicar esses valores em uma matriz que receberá o nome de matriz expoente. Chamamos de **matriz expoente**, pois esses índices serão aplicados aos operadores α e β, indicando assim a quantidade de vezes que precisamos deslocar as linhas ou colunas da matriz original. Abaixo, podemos ver um exemplo dessa matriz:

$$\begin{pmatrix} (0,0) & (1,1) & (2,2) \\ (0,1) & (1,2) & (2,0) \\ (0,2) & (1,0) & (2,1) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} K & \alpha\beta K & \alpha^2\beta^2 K \\ \beta K & \alpha\beta^2 K & \alpha^2 K \\ \beta^2 K & \alpha K & \alpha^2\beta K \end{pmatrix}$$

Exemplo: Considerando $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, podemos ver na Figura 5, a matriz solução M.

$$M = \begin{pmatrix} K & \alpha\beta K & \alpha^2\beta^2 K \\ \beta K & \alpha\beta^2 K & \alpha^2 K \\ \beta^2 K & \alpha K & \alpha^2\beta K \end{pmatrix} = \begin{array}{|ccc|ccc|ccc|} \hline 0 & 1 & 2 & 4 & 5 & 3 & 8 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 8 & 6 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 0 & 5 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 5 & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 3 & 8 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 6 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 5 & 7 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 0 \\ 8 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Figura 5: Solução sudoku obtida através da regra de Keedwell
Fonte: [13].

3 O problema do número mínimo de entradas

Um Sudoku para ser considerado válido, deve partir de algumas entradas ou dados iniciais e ser finalizado de forma única, ou seja, deve permitir uma única solução; caso contrário ele não será válido. Nos jornais e revistas os jogos trazem em torno de 25 números como dados iniciais, e a medida que diminuímos esse número o nível de dificuldade para completá-lo aumenta [4]. Mas deve-se tomar cuidado com essa diminuição dos dados iniciais para que o nosso jogo mantenha a solução única.

Entre as várias questões que podem ser feitas sobre o Sudoku, vamos citar o “problema do número mínimo de entradas ou dados iniciais”. Atualmente o menor número possível de dados iniciais que levam a uma solução única é 17 (Figura 6), entretanto vários pesquisadores tem analisado possibilidades de se determinar um jogo válido com 16 entradas.

			8		1			
							4	3
5								
				7		8		
						1		
	2			3				
6							7	5
		3	4					
			2			6		

2	3	7	8	4	1	5	6	9
1	8	6	7	9	5	2	4	3
5	9	4	3	2	6	7	1	8
3	1	5	6	7	4	8	9	2
4	6	9	5	8	2	1	3	7
7	2	8	1	3	9	4	5	6
6	4	2	9	1	8	3	7	5
8	5	3	4	6	7	9	2	1
9	7	1	2	5	3	6	8	4

Figura 6: Sudoku com 17 pistas e solução única
Fonte: [4].

É fácil concluir que um Sudoku 9×9 com 7 entradas terá sempre múltiplas soluções, pois os dois números faltantes nos dados iniciais podem ser trocados entre si permitindo diversas soluções. O mesmo raciocínio já não pode ser utilizado para um Sudoku com 8 entradas dificultando a demonstração [4].

4 Apresentação das atividades

O trabalho iniciou-se com a utilização de uma grade 4×4, cuja principal vantagem é o tamanho reduzido, permitindo trabalhar com um número menor de casos, e assim verificar os resultados mais rapidamente, tornando o processo mais simples de ser compreendido e manipulado pelos alunos. Em seguida, foi utilizado um raciocínio semelhante para aplicar o caso 9×9.

4.1 Organização das atividades propostas

Organizados em grupos com 4 pessoas (Grupo de Trabalho), os alunos foram orientados a resolver algumas situações relacionadas ao tema Sudoku.

Inicialmente, aplicamos uma atividade para descobrir o grau de conhecimento dos alunos quanto ao Sudoku e sua resolução. Foi proposto ao grupo de trabalho que respondessem algumas questões, passando em seguida, à uma apresentação e discussão de cada resposta.

Finalizado esse levantamento, cada aluno recebeu uma grade 4×4 (conforme modelo da Figura 7), e foi solicitado para que a preenchessem completamente, utilizando 4 símbolos diferentes, de modo que fosse respeitada a “Regra Única”.

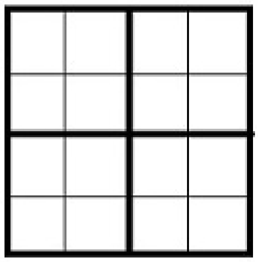

Figura 7: Grade completamente vazia
Fonte: Elaborada pelo autor

Destacamos aqui que, uma grade totalmente vazia sempre pode ser preenchida de várias maneiras, aceitando diversas soluções. E para evitar que alunos de um mesmo grupo copiassem as grades preenchidas uns dos outros, foi solicitado que cada aluno preenchesse sua grade com elementos diferentes (algarismos, letras, símbolos ou letras gregas). Na Figura 8, 9, 10 e 11, podemos ver exemplos de grades preenchidas.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

Figura 8: Grade com algarismos
Fonte: Elaborada pelo autor

A	B	C	D
D	C	B	A
B	D	A	C
C	A	D	B

Figura 9: Grade com letras
Fonte: Elaborada pelo autor

*	+	%	#
%	#	*	+
#	*	+	%
+	%	#	*

Figura 10: Grade com símbolos
Fonte: Elaborada pelo autor

β	α	π	μ
π	μ	β	α
α	β	μ	π
μ	π	α	β

Figura 11: Grade com letras gregas
Fonte: Elaborada pelo autor

Após completar as respectivas grades e anotar a solução encontrada, os alunos trocaram suas folhas de atividades entre os grupos, e passaram a verificar suas soluções. O aluno que preencheu a grade com algarismos, trocou sua atividade com um aluno de outro grupo que também preencheu sua grade com algarismos, e assim, sucessivamente. Assim, eles notaram que a atividade poderia ser concluída de algumas formas diferentes.

Finalmente, discutimos o fato de utilizar elementos diferentes para preencher a grade e qual a influência desse procedimento na resolução do problema proposto. Para responder essa questão, os alunos trocaram novamente suas grades, agora dentro de um mesmo grupo e foi proposto “traduzir” a grade de um colega para a linguagem de cada um, ou seja, quem completou a grade com

SANTOS, R. P. dos; VASCONCELLOS, L. A. dos S. A matemática por trás do sudoku. **C.Q.D.– Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 12, p. 26-46, jul. 2018.
DOI: 10.21167/cqdvol12201823169664rpslasv2646 Disponível em: http://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/revista-cqd/

algarismo recebeu de seu colega, uma grade com letras, símbolos ou letras gregas e transcreveu utilizando algarismos.

Para isso, cada aluno elaborou uma forma de fazer a correspondência entre os elementos (por exemplo, colocar o algarismo 1 no lugar da letra A, colocar o 2 no lugar do B, colocar o 3 no lugar do C e colocar o 4 no lugar do D). Essa transformação também poderia ser feita de outras formas.

Na Figura 12, temos um exemplo de preenchimento inicial para a grade, feito com letras e em seguida, sua "transformação" para o sistema preenchido com algarismos. Vamos verificar, se a solução "transformada" está igual a solução inicial do aluno que preencheu a grade com algarismos. Na Figura 13, podemos ver essa comparação e notamos algumas diferenças.

A	B	C	D
D	C	B	A
B	D	A	C
C	A	D	B

1	2	3	4
4	3	2	1
2	4	1	3
3	1	4	2

Figura 12: Grade transformada
Fonte: Elaborada pelo autor

1	2	3	4
4	3	2	1
2	4	1	3
3	1	4	2

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

Figura 13: Comparação entre as grades
Fonte: Elaborada pelo autor

4.2 Contando as possibilidades - o caso 4×4

Conforme visto na atividade anterior, uma grade Shidoku (jogo formado por um quadrado 4×4), sem nenhum dado inicial, poderá ser preenchida de diversas formas, e passamos então, ao cálculo da quantidade total de possibilidades para completar uma grade 4×4.

Para isso, foram propostas algumas atividades, utilizando como ponto de partida, os conhecimentos prévios dos alunos. Nesse ponto, aproveitamos para retomar conceitos já estudados e introduzir novos conceitos relacionados à análise combinatória e raciocínio lógico.

4.3 Método para contar

Para determinar a quantidade total de grades 4×4, partimos de uma grade, onde o bloco superior esquerdo, foi preenchido com os algarismos: 1, 2, 3 e 4 em uma determinada ordem.

Mantendo fixo o bloco superior esquerdo, determinamos 6 regiões 2×1 para serem preenchidas com dois algarismos disponíveis. Na Figura 14, por exemplo: a linha 1 poderá ser preenchida com os algarismos 3 e 4, a linha 2 poderá ser preenchida com os algarismos 1 e 2, a coluna 1 poderá ser preenchida com os algarismos 2 e 4, a coluna 2 poderá ser preenchida com os algarismos 1 e 3, enquanto o bloco inferior direito dependerá da ordem dos algarismos que forem colocados anteriormente nas linhas e colunas.

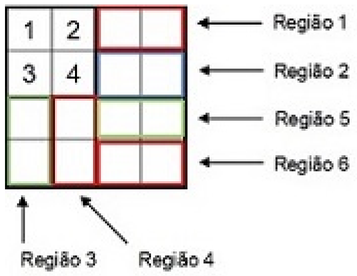

Figura 14: 6 Regiões 2 x 1
Fonte: Elaborada pelo autor

Podemos, então determinar o número X de maneiras de preencher essa grade. Cada região 2×1, poderá ser preenchida de duas maneiras diferentes. Como nossa grade é formada por 6 regiões 2×1 indicadas anteriormente, pode-se concluir que o número de maneiras diferentes para preencher essa grade será dado por:

$$X = 6 \cdot 2!$$

$$X = 12$$

Para finalizar o cálculo, aplica-se uma permutação dos algarismos. Como existem 4 algarismos disponíveis e 4 posições dentro de um bloco da grade, calcula-se uma permutação entre eles, determinando assim, o número total (N), de grades Shidoku:

$$N = 6 \cdot 2! \cdot 4!$$

$$N = 288$$

Temos então, 288 grades completas que são soluções de um Shidoku [11].

4.4 Contando possibilidades - o caso 9×9

Utilizando-se de um raciocínio semelhante, discutiu-se com o grupo de alunos, os procedimentos descritos em [14], para determinar a quantidade de grades de um Sudoku.

Sabemos que esse número é gigantesco, e foi obtido através de cálculos computacionais utilizando algoritmos especialmente preparados para essa finalidade. Por esse motivo, iniciamos com um processo semelhante ao realizado pelos pesquisadores e para finalizar, vamos realizar os cálculos descritos em [15] que podem ser efetuados em sala de aula, utilizando apenas uma calculadora científica.

De modo semelhante, ao efetuado no caso 4×4, foram propostas atividades ao grupo de alunos, para desenvolver o raciocínio esperado e completar a tarefa principal.

4.5 Preparando a contagem

Cada aluno recebeu uma grade 9×9, sem nenhum algarismo anotado e passaram a preencher o bloco superior esquerdo com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, sendo orientados a obter uma grade com o formato apresentado na Figura 15 e que iremos chamar de formato padrão.

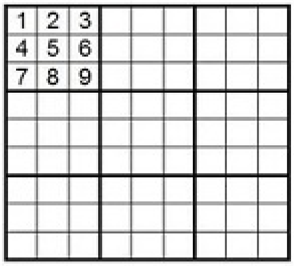

Figura 15: Grade sudoku 9×9 no formato padrão

Fonte: Elaborada pelo autor

Em seguida, solicitamos que os alunos preenchessem a primeira linha do bloco central e do bloco direito, esperando que os alunos dentro de seus grupos, indiquem que isso poderá ser feito com qualquer combinação dos algarismos 4, 5, 6, 7, 8 e 9, observando que existem diferentes maneiras de preencher essa grade.

Passamos a explorar um processo para realizar a contagem dessas grades. Trabalhou-se apenas com o bloco das três linhas superiores, listando todas as possibilidades de preenchê-la. Essa tarefa pode ser feita utilizando os algarismos 4, 5, 6; ou 7, 8, 9, ou qualquer permutação deles. Na Figura 16 vemos as possíveis configurações para a linha superior.

$$\begin{array}{ll}
\{4,5,6\}|\{7,8,9\} & \{7,8,9\}|\{4,5,6\} \\
\{4,5,7\}|\{6,8,9\} & \{6,8,9\}|\{4,5,7\} \\
\{4,5,8\}|\{6,7,9\} & \{6,7,9\}|\{4,5,8\} \\
\{4,5,9\}|\{6,7,8\} & \{6,7,8\}|\{4,5,9\} \\
\{4,6,7\}|\{5,8,9\} & \{5,8,9\}|\{4,6,7\} \\
\{4,6,8\}|\{5,7,9\} & \{5,7,9\}|\{4,6,8\} \\
\{4,6,9\}|\{5,7,8\} & \{5,7,8\}|\{4,6,9\} \\
\{5,6,7\}|\{4,8,9\} & \{4,8,9\}|\{5,6,7\} \\
\{5,6,8\}|\{4,7,9\} & \{4,7,9\}|\{5,6,8\} \\
\{5,6,9\}|\{4,7,8\} & \{4,7,8\}|\{5,6,9\}
\end{array}$$

Figura 16: Possibilidades para a linha superior

Fonte: [14].

Podemos então, definir uma contagem para as três primeiras linhas da nossa grade. Mantendo o bloco superior esquerdo no formato padrão, temos 6 pequenas regiões 3×1 para serem preenchidas com 3 algarismos. O que resulta um total de $(3!)^6$ possibilidades.

Conforme visto na listagem acima, há 20 formas diferentes para completar a linha superior, apenas utilizando 4, 5, 6, 7, 8, 9, das quais consideramos dois tipos:

- Primeiro tipo: a linha será preenchida pelos algarismos $\{4,5,6\}\{7,8,9\}$ ou $\{7,8,9\}$ $\{4,5,6\}$ nessa ordem (não há mistura de elementos do segundo e terceiro blocos);
- Segundo tipo: a linha será preenchida por uma mistura desses algarismos, por exemplo: $\{4,5,7\}\{6,8,9\}$ (há mistura dos elementos do segundo e terceiro blocos).

Para efetuar a contagem, precisamos diferenciá-las, pois, as linhas do segundo tipo, apresentam um comportamento diferente quanto a forma de preenchimento do restante da grade. Na Figura 17 notamos a linha do tipo 1, que permite a colocação dos algarismos 1, 2 e 3 todos na mesma linha do bloco.

As linhas do primeiro tipo só permitem as permutações entre os algarismos $\{1,2,3\}$; $\{4,5,6\}$; $\{7,8,9\}$ dentro de um mesmo bloco.

1	2	3	$\{4,$	5,	$6\}$	$\{7,$	8,	$9\}$
4	5	6	$\{7,$	8,	$9\}$	$\{1,$	2,	$3\}$
7	8	9	$\{1,$	2,	$3\}$	$\{4,$	5,	$6\}$

Figura 17: Linha do tipo 1 (algarismos 1, 2, 3 permanecem na mesma linha)
Fonte: [14].

As linhas do segundo tipo permitem uma maior quantidade de combinações, pois os algarismos 1, 2, 3 não podem ficar na mesma linha, dentro de um mesmo bloco. Na Figura 18 temos um exemplo de linha do tipo 2.

1	2	3	$\{4,$	5,	$7\}$	$\{6,$	8,	$9\}$
4	5	6	$\{8,$	9,	$a\}$	$\{7,$	$b,$	$c\}$
7	8	9	$\{6,$	$b,$	$c\}$	$\{4,$	5,	$a\}$

Figura 18: Linha do tipo 2 (algarismos 1, 2, 3 não podem permanecer juntos)
Fonte: [14].

Obs.: As letras a, b e c podem assumir os valores 1, 2 e 3, completando assim a segunda e terceira linha. O uso do algarismo 1 no lugar da letra a do segundo bloco (formando $\{8,9,1\}$), força seu uso na terceira linha do terceiro bloco (formando $\{4,5,1\}$). Fazendo todas as permutações possíveis, teremos um total de 6 possibilidades: ($a = 1$, $b = 2$ e $c = 3$ ou $a = 1$, $b = 3$ e $c = 2$); ($a = 2$, $b = 1$ e $c = 3$ ou $a = 2$, $b = 3$ e $c = 1$) e ($a = 3$, $b = 1$ e $c = 2$ ou $a = 3$, $b = 2$ e $c = 1$) .

4.6 Completando as linhas superiores

Foi solicitado aos alunos que completassem as segunda e terceira linhas, da grade, listando todas as combinações possíveis para preenchê-la, utilizando os algarismos 1, 2, 3 no lugar de a, b, c.

Aqui, podemos notar um aspecto importante dos problemas de contagem, mesmo tendo 3 elementos possíveis, para 3 lugares, não podemos calcular o resultado final como sendo 3!, pois a utilização de qualquer algarismo em uma das posições, impõe seu uso em um determinado lugar no outro bloco. Por exemplo, se utilizarmos o algarismo 1 no segundo bloco e na segunda linha, formando $\{8,9,1\}$, automaticamente, ele deverá ser colocado na terceira linha do terceiro bloco, formando $\{4,5,1\}$. Podemos notar que esse fato acontecerá com os outros algarismos, ou seja, caso o algarismo 1 seja substituído pelo algarismo 2 no segundo bloco, ele também deverá ser substituído no terceiro bloco.

Temos então, um total de 6 possibilidades para completar as linhas:

Dessa forma, podemos determinar o número de possibilidades para preencher as 3 linhas superiores, mantendo o primeiro bloco no formato padrão. Como temos duas primeiras linhas do primeiro tipo e dezoito primeiras linhas do segundo tipo, vamos indicar as possibilidades, de acordo com [10]:

$$2 \times (3!)^6 + 18 \times 3 \times (3!)^6 = 56 \times (3!)^6 = 2.612.736.$$

Ainda podemos permutar os algarismos dentro de cada bloco, gerando 9! maneiras de preencher as três primeiras linhas. O número total (N) de possibilidades para o bloco superior, será dado por:

$$N_{BLOCO} = 9! \times 2.612.736 = 948.109.639.680.$$

Pensando em uma maneira mais direta para se chegar ao total de jogos de Sudoku completo, foi proposto em [10] e [15], a seguinte solução: como temos 9 blocos com 9 células, podemos preenche-los de $(9!)^9$ maneiras.

Sabemos que existem 948.109.639.680 formas para preencher os três blocos superiores, o mesmo seria verdadeiro para os três blocos centrais e também para os três blocos inferiores. Assim, o número de formas de preencher os 9 blocos obedecendo a regra única, será dado por: $(948109639680)^3$.

Chamemos de K a proporção do preenchimento para as linhas. Essa proporção será dada por:

$$K = \frac{948109639680^3}{(9!)^9}.$$

Temos também a proporção das grades que obedecem a propriedade das colunas, que será dada por:

$$(9!)^9 \times K^2 = (9!)^9 \times \left(\frac{(948109639680)^3}{(9!)^9}\right)^2 \approx 6,6571 \times 10^{21}.$$

Essa forma de calcular nos conduz a uma pequena diferença entre o valor real e o valor calculado, pois as probabilidades entre linhas e colunas não são totalmente independentes além deste resultado não ser um número inteiro. Mas o cálculo por esse processo apresentou uma diferença de apenas 0,2%, além de permitir a sua realização em sala de aula, utilizando uma calculadora científica.

5 Comentários sobre a aplicação

Nesta seção, vamos comentar e discutir alguns aspectos observados durante a aplicação das atividades desenvolvidas. Inicialmente, tínhamos interesse em descobrir o grau de conhecimento dos alunos quanto ao jogo, se já haviam tentado completá-lo, se tinham obtido êxito nessa tarefa e quais habilidades eles consideravam necessárias para se jogar.

5.1 Um pouco sobre a escola

Esse trabalho foi realizado na Escola Estadual Professora Carolina Lopes de Almeida, localizada na periferia da cidade de Bauru, interior de São Paulo, que atende alunos do ensino fundamental anos iniciais e finais, além de alunos do ensino médio. Atualmente a escola recebe alunos não só de bairros próximos a ela, como também alguns alunos atendidos pelo sistema de transporte escolar, tem aproximadamente 900 alunos, divididos em 3 períodos (manhã, tarde e noite).

Para avaliar o rendimento do trabalho desenvolvido pela escola, anualmente são realizadas avaliações externas como: SARESP (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo), SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) e PROVA BRASIL. Os dados obtidos nessas provas, junto com os indicadores de fluxo (retenção, evasão e promoção de alunos), geram o Índice de Desenvolvimento da Educação de São Paulo (IDESP), criado em 2007, um dos principais indicadores da qualidade do ensino na rede estadual paulista, que estabelece metas para as escolas alcançarem todo ano.

Atualmente os índices da escola encontram-se abaixo da média estadual (Figura 19) e diversos projetos estão sendo realizados, visando não só desenvolver as competências e habilidades propostas pela matriz curricular do estado de São Paulo, como também ajudar a corrigir os indicadores de fluxo (fator que tem afetado na composição dos índices da escola).

	Indicadores de Desempenho		Indicador de Desempenho	Indicador de Fluxo	IDESP 2016
	Língua Portuguesa	Matemática			
5º ANO EF	6,1600	4,8900	5,53	0,9442	5,22
9º ANO EF	2,0833	2,4200	2,25	0,7365	1,66
3ª SÉRIE EM	3,7033	2,0267	2,87	0,7079	2,03

Figura 19: IDESP - 2016 - Indicadores da Escola
Fonte: Elaborada pelo autor (Disponível em: http://idesp.edunet.sp.gov.br/Arquivos2016/025483.pdf Acesso em: 4 dez. 2017)

Este trabalho isolado não mudará a realidade, mas somado a outras ações, colaborará para uma melhor participação dos alunos nas atividades e consequentemente um maior compromisso com o processo ensino-aprendizagem.

5.2 Sobre os alunos

Esta atividade foi inicialmente pensada para ser aplicada com alunos de todas as turmas do ensino médio que demonstram interesse na área de matemática, e que foram convidados a participar da pesquisa. Infelizmente, por ser aplicada fora do período regular de aulas, poucos alunos compareceram, o que impossibilitou a realização da pesquisa com todos os alunos.

Então as atividades passaram a ser aplicadas em uma turma regular do 3° ano do ensino médio, período da manhã. De acordo com o currículo do estado de São Paulo, as competências e habilidades relacionadas à análise combinatória são trabalhadas no 2° ano e deveriam ser rapidamente relembradas pelos alunos, por se tratar de princípios básicos, fato que não aconteceu, sendo necessário uma retomada desses conceitos, e também de potências, notação científica e matrizes.

SANTOS, R. P. dos; VASCONCELLOS, L. A. dos S. A matemática por trás do sudoku. **C.Q.D.– Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 12, p. 26-46, jul. 2018.
DOI: 10.21167/cqdvol12201823169664rpslasv2646 Disponível em: http://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/revista-cqd/

Ao todo trabalhamos com 30 alunos, e como todos não se lembravam do princípio fundamental da contagem, foram necessárias diversas intervenções para atingir os objetivos propostos, oferecendo assim, uma nova oportunidade para a retomada de conteúdos e mais uma chance de aprender e utilizar alguns conceitos. Atualmente os alunos são imediatistas, envolvem-se na realização das atividades, mas não apropriam-se das ideias trabalhadas, e não conseguem fazer uso futuro dos conceitos, todas as atividades precisam ser iniciadas e terminadas em um mesmo dia sob o risco de completo esquecimento.

5.3 Conhecimentos sobre o jogo

O primeiro questionamento feito foi sobre o conhecimento que tinham sobre o jogo. Na Tabela 3, podemos ver o resultado obtido.

Você conhece o Sudoku?	
Sim	100%
Não	0%

Tabela 3: Conhecimento do sudoku
Fonte: Elaborada pelo autor

O segundo foi se haviam tentado resolver e se conseguiram completar a tarefa. A Tabela 4 mostrou um resultado esperado, afinal de contas completar um Sudoku nas primeiras tentativas não é uma tarefa simples e facilmente desmotivante.

Você já jogou ou tentou jogar?	
Sim, mas não terminei	70%
Sim, e consegui terminar	20%
Nunca tentei	10%

Tabela 4: Alunos e tentativas quanto ao jogo
Fonte: Elaborada pelo autor

Foram exploradas também, questões relacionadas ao objetivo do trabalho, que era discutir o total de jogos existentes. A Tabela 5 mostra esses resultados e podemos perceber algumas dificuldades dos alunos quando o assunto é trabalhar com números extremamente grandes.

Você tem ideia de quantos jogos diferentes existem?	
Menos de 1000	33,3%
Entre 1000 e 100000	16,7%
Entre 100000 e 1000000	6,7%
Não tenho ideia	43,3%

Tabela 5: Conhecimentos sobre a quantidade de jogos
Fonte: Elaborada pelo autor

Também foi questionado sobre quais habilidades ou conhecimentos eles julgariam necessários para obter a resolução de um Sudoku, e qual a importância do conhecimento matemático na busca de uma solução. Na Tabela 6 e 7 podemos ver esses resultados.

Quais habilidades você considera importantes na resolução de um sudoku?	
Raciocínio	10
Paciência	15
Concentração	17
Cálculos	4

Tabela 6: Habilidades necessárias para o jogo
Fonte: Elaborada pelo autor

Obs: Nessa questão os alunos escolheram mais de uma alternativa.

Saber matemática, auxilia na busca da solução?	
Sim, raciocínio	65%
Sim, contagem	15%
Não	20%

Tabela 7: Importância da matemática na busca de soluções
Fonte: Elaborada pelo autor

5.4 Conhecendo o sudoku

Após uma conversa e discussão de algumas ideias com os alunos, notamos que todos possuíam conhecimento sobre o jogo, quer seja por ter tentado jogar, ou apenas por ver em um jornal ou revista, a grande maioria, afirmou ter tentado jogar como curiosidade, mas notou-se que poucos obtiveram êxito na tarefa de finalizar o jogo.

O fato de encontrar dificuldades desanima nossos jovens, fazendo-os desistir e afirmar que a tarefa não tem solução, não mostrando sinais de esforços e dedicação para solucionar o problema (fato que pretendíamos diminuir com a realização dessas atividades).

O trabalho foi aplicado em duas turmas, uma sala de aula normal com todos os alunos da turma e em outra menor com alguns alunos convidados a participar fora do período de aulas (infelizmente apenas uma pequena quantidade destes compareceram às atividades, inviabilizando uma análise separada e, portanto, os dados obtidos nessa turma foram incluídos a turma normal).

A aplicação na turma regular, não mostrou grandes novidades, e o comportamento continuou parecido como se estivessem realizando uma atividade diária de uma aula qualquer, pois nem todos envolveram-se com as atividades propostas, e mesmo se tratando de uma atividade diferenciada, continuaram demonstrando desinteresse habitual sem a devida dedicação, o que é uma realidade em praticamente todas as salas de aula.

Na turma de alunos convidados, informados anteriormente que participariam de algumas atividades extras de Matemática, não notou-se esse problema, e todos demonstraram interesse e dedicação, esforçando-se para cumprir as atividades propostas.

De forma geral, os alunos demonstraram desconhecimento em problemas básicos de contagem, não lembrando como resolvê-los, e não souberam estimar a quantidade existente de Sudokus. Ao solicitar um valor aproximado para o total de jogos, esse número ficou bem aquém da quantidade total existente. Afirmaram também não ser necessário saber "regras" matemáticas para solucionar um Sudoku, citando como habilidades necessárias: o raciocínio, a paciência e a concentração. Em suma, afirmaram que a única coisa necessária para se fazer é: "pensar bastante" e "contar de 1 a 9 diversas vezes".

Foi proposto aos alunos da turma, completar um jogo Sudoku, forçando-os ao máximo na busca da solução, tentando eliminar a possibilidade de desistência e, assim, determinar o tempo que cada um gastaria para concluir o problema. Também foi possível observar e analisar as diversas dificuldades encontradas pelo grupo de alunos. Como sendo a primeira vez que a maioria resolveu um Sudoku até o final, foram necessárias diversas intervenções de ajuda para podermos concluir a tarefa que em média levou 50 minutos, para um jogo de nível fácil. O fato importante que destacamos, foi que através de estímulos, os alunos empenharam-se na busca da solução, mostrando interesse para completar a tarefa. Infelizmente, nem todos tiveram esse mesmo comportamento e desistiram pelo caminho.

5.5 Realizando a contagem

O caso 4×4

Para a contagem do total de grades 4×4 (conforme descrito nas atividades), inicialmente solicitamos aos alunos que completassem uma grade totalmente vazia de qualquer maneira. Atividade essa que não apresentou maiores dificuldades, pois não havia qualquer restrição, além da regra única. Logo na sequência foi pedido que os alunos trocassem suas folhas de atividades e comparassem com as soluções de seus colegas, percebendo assim que existem diferentes maneiras para se completar uma grade de Shidoku.

Em seguida, passou-se para a atividade de transformação entre as grades, (de algarismos para letras e de símbolos para letras gregas), que necessitou um pouco mais de orientações devido a permitir interpretações diferentes, e assim continuamos na aplicação e discussão das atividades.

A partir deste momento, os alunos já tinham conhecimento que existiam diversas maneiras de preencher uma grade 4×4. Foi então apresentado o processo para a contagem, e a partir de uma grade 4×4, pedimos que colocassem os algarismos 1, 2, 3 e 4 no bloco superior esquerdo, gerando um bloco em "formato padrão". Notou-se que nos outros blocos sempre sobravam regiões com dois quadrados a serem preenchidos com dois algarismos. Neste ponto, explorou-se o princípio fundamental da contagem.

Assim, foi possível determinar o total de grades que poderiam ser formadas com o bloco superior esquerdo em formato padrão, chegando a um total de 12 grades. Finalmente, para determinarmos o total das grades, faltava apenas permutar os algarismos. Foram necessárias algumas intervenções para que os alunos entendessem o que era solicitado. Analisamos alguns exemplos, e os alunos puderam perceber o que era esperado. Aproveitou-se para falar em permutações, mostrando que a ideia era trocar os algarismos (1, 2, 3 e 4) de lugar. Concluiu-se que como temos 4 algarismos e 4 posições dentro de cada bloco, teremos um total de 4! formas para alocar os algarismos, obtendo assim o total de 288 grades.

Essas atividades iniciais serviram para apresentar aos alunos o jogo do Sudoku, falar da sua importância no desenvolvimento do raciocínio e introduzir conceitos de análise combinatória, aplicados na contagem.

Durante a realização dessas atividades, percebeu-se que teríamos muitas dificuldades em utilizar esse processo para os Sudokus, tendo em vista que a sequência a ser calculada, saltou de 4 (números) para 9 e o total de “casas” saltou de 16 para 81.

O caso 9 $\times$ 9

Os alunos receberam uma grade Sudoku completamente em branco, e pedimos que, se atentassem apenas para as três linhas superiores. Conforme feito no caso anterior, preencheram o bloco superior esquerdo com os algarismos de 1 a 9 no formato padrão, e em seguida passou-se a discutir maneiras de preencher as “casas” restantes.

Inicialmente, podemos notar a semelhança com o caso 4 $\times$ 4, mas agora é preciso analisar 6 regiões com 3 posições a serem preenchidas com os algarismos restantes. O fato de termos 20 formas diferentes para a linha superior (sem contar as permutações), e essas 20 formas serem divididas em 2 grupos (um grupo com 2 elementos e outro com 18 elementos), gerou muitas dúvidas e dificuldades, que foram contornadas utilizando o caminho mais longo: soluções caso a caso.

Nesse ponto visualizou-se a dificuldade em solucionar problemas de contagem quando temos diversos elementos e foi mostrado aos alunos que era necessário elaborar uma sequência lógica para escrever os grupos. Foi mostrado que deveriam seguir uma ordem numérica, trocando apenas um elemento de cada vez, ficando mais fácil verificar quais formas ainda estavam faltando.

Também podemos citar como dificuldade que esse grupo com 18 elementos pode ser preenchidos de 3 formas diferentes (conforme explicado durante as atividades), gerando assim um total de 56 maneiras de preencher as 3 linhas superiores.

Dessa forma calculou-se o total de maneiras diferentes de preencher as 3 linhas superiores do Sudoku, mantendo o primeiro bloco no formato padrão, alcançando um total de 2.612.736 formas, faltando ainda efetuar as permutações dos 9 algarismos, que finalmente geram um total de 948.109.639.680 formas diferentes (lembrando que ainda era necessário completar as demais linhas do jogo).

Nesse momento, surgiram algumas ideias de como poderíamos terminar o cálculo. Um aluno comentou que deveríamos multiplicar esse número por 3, afinal de contas seria necessário repetir o mesmo processo mais duas vezes.

Durante a realização do cálculo, aproveitamos para relembrar o conceito de notação científica, pois vários deles estranharam a forma apresentada pela calculadora. O fato preocupante é que alguns alunos, mesmo estando no 3° ano do ensino médio, sequer conheciam esse formato numérico.

Em seguida, comentou-se não haver demonstrações para o total de grades de um Sudoku e também foi explicado aos alunos como Felgenhauer e Jarvis pensaram em reduzir o total de casos para terminar a contagem. Seguindo a ideia dos pesquisadores, aplicamos ao total de agrupamentos algumas reduções. Foi então mencionado que para terminar o cálculo seria necessário o uso de algoritmos especiais e computadores utilizando o método da tentativa e erro.

6 Conclusão

Os dados do rendimento escolar dos estudantes do Ensino Médio (não só da Escola Estadual Prof^{a} Carolina Lopes de Almeida, mas também de outras escolas), apresentados por índices governamentais, nos mostram um baixo rendimento dos alunos em matemática. Atualmente os alunos abandonam as atividades ao se depararem com as primeiras dificuldades, não se esforçando para superá-las, além de não terem um hábito de estudo em casa, o que leva a uma falta de requisitos básicos.

Neste trabalho, buscou-se propor desafios e mostrar que os objetivos podem ser alcançados. Quando o assunto é matemática, a prática é o melhor caminho para superar dificuldades.

Após a realização das atividades, os alunos apontaram aspectos positivos e negativos a respeito da aplicação, e assim, foi possível fazer uma avaliação do trabalho desenvolvido. Destaca-se a importância da utilização de atividades diferenciadas, onde a maioria dos alunos acabam envolvendo-se em sua realização, passando a utilizar naturalmente alguns conceitos matemáticos.

Como pontos fortes desse trabalho, os alunos citaram: "o estímulo do raciocínio e aumento da concentração", influenciando no processo ensino-aprendizagem. Diversos alunos passaram a enxergar o Sudoku de outra forma, dando ao jogo maior importância. Essas avaliações demonstram que o Sudoku pode ser um aliado no desenvolvimento do raciocínio, e servir como um subsídio didático.

As atividades propostas, permitiram aos alunos uma oportunidade de praticarem habilidades e competências necessárias na resolução de provas como: ENEM, vestibulares e concursos. O empenho, a dedicação e o comprometimento dos alunos, foram fatores importantes no sucesso do trabalho, e mesmo encontrando dificuldades e falta de requisitos básicos, eles não desistiram dos problemas.

As atividades programadas, atingiram os objetivos propostos, e ainda foi possível explorar outros (não programados) que surgiram durante a realização do trabalho, fato frequente durante as aulas, onde o professor determina um objetivo, e ao iniciar sua aula, acaba sendo necessário um percurso diferente.

Referências

[1] BAILEY, R. A.; CAMERON, P. J.; CONNELLY, R. Sudoku, gerechte designs, resolutions, affine space, spreads, reguli, and hamming codes. **American Mathematical Monthly,** Washington, v. 115, n. 5, p. 383-404, 2008.

[2] DELAHAYE, J. P. The science behind sudoku. **Scientific American,** New York, v. 294, n. 6, p. 80-87, 2006.

[3] FELGENHAUER, B.; JARVIS, F. Mathematics of Sudoku I. **Mathematical Spectrum,** Sheffield, v. 39, n. 1, p. 15-22, 2006.

[4] MARTINS, P. M.; PICADO, J. Existe um sudoku com 16 pistas? **Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática**, Lisboa, n. 66, p. 57-63, maio 2012.

[5] MCGUIRE, G.; TUGEMANN, B.; CIVARIO, G. There is no 16-clue sudoku: solving the sudoku minimum number of clues problem via hitting set enumeration. **Experimental Mathematics**, Boston, v. 23, n. 2, p. 190-217, 2014.

[6] RUSSELL, E.; JARVIS, F. Mathematics of sudoku II. **Mathematical Spectrum,** Sheffield, v. 39, n. 2, p. 54-58, 2006.

[7] SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Material de apoio ao currículo do Estado de São Paulo:** caderno do professor; matemática, ensino médio, 2^a série. São Paulo, 2014. v. 2, p.128.

[8] ROYLE, G. **Combinatorial concepts with sudoku I:** symmetry. [S.1.], 2006. Disponível em: <http://ko.c.wong.tripod.com/sudoko/study/sudoku-symmetry.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2017.

[9] CORNELL UNIVERSITY DEPARTAMENT OF MATHEMATICS. The math behind sudoku. [Ithaca, 2009 ?]. Disponível em: <http://www.math.cornell.edu/~mec/Summer2009/Mahmood/Home.html>. Acesso em: 10 abr. 2017.

[10] JONES, S. K.; ROACH, P. A.; PERKINS, S. Properties of sudoku puzzles. In: RESEARCH STUDENT WORKSHOP, 2., 2007, Trefforest. **Proceedings...** Trefforest: University of Glamorgan, 2007. p. 7-11.

[11] LORCH, C.; LORCH, J. Enumerating small sudoku puzzles in a first abstract algebra course. **PRIMUS:** Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, New York, v. 18, n. 2, p. 149-157, 2008.

[12] KEEDWELL, A. D. On sudoku squares. **Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications**, Winnipeg, v. 50, p. 52-60, 2007.

[13] LORCH, J. Mutually orthogonal families of linear sudoku solutions. **Journal of the Australian Mathematical Society**, Melbourne, v. 87, n. 3, p. 409-420, 2009.

[14] FELGENHAUER, B.; JARVIS, F. **Enumerating possible sudoku grids.** [S. 1.], 2005. Disponível em: <http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/sudoku.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2017.

[15] ROSENHOUSE, J.; TAALMAN, L. **Taking sudoku seriously:** the math behind the world's most popular pencil puzzle. Oxford: Oxford University Press, 2011.