Comparando exponenciais aninhadas envolvendo alternadamente os números e e π

Comparing nested exponentials involving alternately the numbers e and π

ISSN 2316-9664
Volume 12, jul. 2018

Maurício Zahn
Universidade Federal de Pelotas
mauricio.zahn@ufpel.edu.br

Resumo

Um interessante problema que surge em Cálculo é verificar qual dos números é maior, π^e ou e^π. A resposta a essa questão é simples e está apresentada uma prova no Teorema 1. Inspirados pelo problema acima, nos questionamos o que ocorre se resolvermos aumentar alternadamente tais potências, ou seja, se quisermos comparar, por exemplo, os números π^{e^π} e e^{π^e}, qual deles será maior? E assim por diante. Curiosamente, notaremos que as desigualdades obtidas nestas comparações não serão todas no mesmo sentido, ou seja, a relação de ordem vai alternando, conforme evoluirmos nas exponenciais aninhadas alternadas envolvendo os números e e π.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial. Exponenciais aninhadas. Números π e e. Números algébricos e transcedentes.

Abstract

An interesting problem that surges in Calculus is to check which of the numbers is the larger, π^e or e^π. The answer to this question is very simple and is shown in Theorem 1. Inspired by the above problem, we wonder what happens if we resolve alternately to increase such exponentials, that is, if we want to compare, for example, the numbers π^{e^π} and e^{π^e}, which one will be larger? And so on. Interestingly, we will note that the inequalities obtained in these comparisons will not all be in the same sense, that is, the order relation will alternate as we evolve in alternating nested exponentials involving the numbers e and π.

Keywords: Differential Calculus. Nested exponentials. Numbers π and e. Algebraic and transcendental numbers.

Artigo recebido em jan. 2018 e aceito em jul. 2018

1 Introdução

As constantes matemáticas π e e ocorrem com muita frequência em Cálculo. O número de Euler e é dado pelo limite [1, p. 200]

$$e = \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}},$$

e também pela série [2, p. 43]

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

O número de Euler também é usado como uma importante base de logaritmos e aparece em problemas envolvendo taxas de crescimento e decrescimento em equações diferenciais ordinárias, além de inúmeras outras aplicações no Cálculo e demais áreas do Conhecimento.

Já o número π, definido como a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência, corresponde a uma das constantes mais importantes da matemática. Mesmo sendo extremamente simples a sua definição, sua natureza somente ficou completamente estabelecida no século XIX, e mesmo hoje algumas questões sobre este número ainda continuam sem resposta [3, p. 62].

Em [4] e [5] são apresentadas várias relações interessantes envolvendo os números π e e.

Chamaremos de *exponencial aninhada de altura n* a seguinte torre de potências

$${a_1}^{{a_2}^{{a_3}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a_n}}}}}} = (a_1)^{{a_2}^{{a_3}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a_n}}}}}},$$

onde $a_i > 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Neste artigo efetuamos um estudo sobre exponenciais aninhadas de altura n formadas por combinações alternadas dos números reais π e e.

Assim, por exemplo, vamos considerar a exponencial aninhada de altura 5: $\pi^{e^{\pi^{e^{\pi}}}}$.

Em particular, já são conhecidos alguns fatos curiosos a respeito dos números π^e e e^π, ou seja, das exponenciais aninhadas de altura 2 de π e e e de e e π.

Lembramos que um número real ou complexo α é dito ser algébrico se existir um polinômio não nulo $p(x)$ com coeficientes racionais tal que $p(\alpha) = 0$ e é dito transcedente quando não for algébrico [6, p. 139]. Em [7] temos uma prova para a transcedência de e (Theorem 1.2, p. 4) e uma prova para a transcedência de π (Theorem 1.3, p. 5).

Em 1934 Alexandr Gelfond provou a conjectura de Hilbert, conhecida hoje por Teorema de Gelfond, que estabelece que α^β é um número transcedente se α for algébrico e for diferente de zero e de 1, e β for algébrico e não racional. [8, p. 562]. Dessa forma, Gelfond provou que o número e^π é transcedente, pois pode ser escrito como [6, p. 168]

$$e^\pi = (e^{i\pi})^{-i} = (-1)^{-i}.$$

No entanto, ainda não se sabe se π^e é um número algébrico ou transcedente [3, p. 59].

Archibald [4, p. 120] cita que os valores aproximados de e^π e π^e foram determinados pela primeira vez em 1920 por E. Chanzy, encontrando

$$e^\pi = 23,1406926327787..., \quad \text{e} \quad \pi^e = 22,4591577183...$$

Chanzy já nos fornece, portanto, a resposta de que $\pi^e < e^\pi$. O que fizemos foi apresentar uma resposta analítica para tal questão, muito embora possa ser encontrada uma prova, por exemplo, em [9]. A grande novidade neste trabalho, no entanto, foi procurar responder se tal relação de ordem continuaria ou não ao prosseguirmos alternadamente uma exponenciação aninhada envolvendo os números π e e. Concluiremos que a relação de ordem dessas exponenciações irá alternar.

2 Qual dos números é maior, π^e ou e^π?

Nesta seção encerramos um resultado simples, porém importante, que norteará o desenvolvimento do artigo.

Teorema 1 $\pi^e < e^\pi$.

Demonstração. Defina a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = e^x - x$.

Assim, temos que a função derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f'(x) = e^x - 1.$$

É fácil ver que $f'(x) = e^x - 1 > 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$ e $f'(0) = 0$. Logo, a função f é estritamente crescente em $(0, +\infty)$. Disso, segue que, para todo $x \in (0, +\infty)$, $f(x) > f(0) = 1$, ou seja, temos que

$$e^x - x > 1, \forall x \in (0, +\infty) \Longrightarrow e^x > 1 + x, \forall x \in (0, +\infty).$$

Em particular, para $x = \dfrac{\pi}{e} - 1 > 0$ teremos

$$e^{\frac{\pi}{e} - 1} > 1 + \frac{\pi}{e} - 1,$$

ou seja,

$$e^{\frac{\pi}{e}} \cdot \frac{1}{e} > \frac{\pi}{e},$$

e então

$$e^{\frac{\pi}{e}} > \pi.$$

Em seguida, elevando à potência e em ambos os membros chegamos à desigualdade desejada. $\square$

3 Consequências do Teorema 1

Nesta seção apresentamos as primeiras desigualdades de exponenciações aninhadas envolvendo alternadamente os números π e e e sua generalização (Teorema 6). Observamos no Corolário abaixo que, comparado ao Teorema 1, o resultado já nos fornece uma desigualdade contrária.

Corolário 2 $\pi^{e^{\pi}} > e^{\pi^{e}}$.

Demonstração. Por absurdo, suponha que $\pi^{e^{\pi}} \leq e^{\pi^{e}}$. Como cada um dos números são maiores do que 1, usando logaritmos, vamos obter

$$e^{\pi} \cdot \ln \pi \leq \pi^{e} \cdot \ln e = \pi^{e}.$$

Como $\ln \pi > 1$, obtemos

$$e^{\pi} < e^{\pi} \cdot \ln \pi \leq \pi^{e},$$

ou seja, teríamos $e^{\pi} < \pi^{e}$, uma contradição com o Teorema 1.

$\square$

Corolário 3 $\pi^{e^{\pi^{e}}} < e^{\pi^{e^{\pi}}}$.

Demonstração. Primeiramente, mostremos que

$$\ln(\ln \pi) < \ln \pi - 1. \tag{1}$$

De fato, como pelo Teorema 1 tem-se que $\pi^{e} < e^{\pi}$, aplicando logaritmo natural, vem

$$\ln \pi^{e} < \ln e^{\pi},$$

e então $e \cdot \ln \pi < \pi$. Aplicando logaritmo natural novamente, vem

$$\ln(e \cdot \ln \pi) < \ln \pi,$$

e então $\ln e + \ln(\ln \pi) < \ln \pi$, donde segue $\ln(\ln \pi) < \ln \pi - 1$, como desejávamos mostrar.

Isto posto, podemos iniciar a prova do Corolário. Como $\ln \pi > 1$, então $-\ln \pi < -1$. Multiplicando esta desigualdade por $e^{\pi} - 1 > 0$, vem

$$-(e^{\pi} - 1) \cdot \ln \pi < -(e^{\pi} - 1),$$

e então obtemos

$$e^{\pi} + \ln \pi - 1 < e^{\pi} \cdot \ln \pi. \tag{2}$$

Pelo Teorema 1 e pela desigualdade (1) segue que

$$e^{\pi} + \ln \pi - 1 > \pi^{e} + \ln(\ln \pi),$$

e então (2) fica

$$\pi^{e} + \ln(\ln \pi) < e^{\pi} \cdot \ln \pi,$$

e assim, tem-se

$$\pi^e + \ln(\ln\pi) < \ln\pi^{e^\pi},$$

ou seja,

$$\ln e^{\pi^e} + \ln(\ln\pi) < \ln\pi^{e^\pi},$$

e então

$$\ln(e^{\pi^e} \cdot \ln\pi) < \ln\pi^{e^\pi},$$

donde segue que

$$e^{\pi^e} \cdot \ln\pi < \pi^{e^\pi},$$

ou seja,

$$\ln\pi^{e^{\pi^e}} < \pi^{e^\pi} = \ln e^{\pi^{e^\pi}}.$$

Portanto, concluímos $\pi^{e^{\pi^e}} < e^{\pi^{e^\pi}}$, como queríamos mostrar.

$\square$

Para provar o próximo Corolário necessitamos de um Lema básico.

Lema 4 *Se* $1 < a < b$ *e* $0 < p < q$*, então* $a^p < b^q$.

Demonstração. Sendo $1 < a < b$ segue que $0 < \ln a < \ln b$, e como $0 < p < q$, multiplicando tais desigualdades adequadamente e usando de propriedades dos logaritmos, obtemos

$$0 < p \cdot \ln a < q \cdot \ln b \Longrightarrow \ln a^p < \ln b^q \Longrightarrow a^p < b^q.$$

$\square$

Corolário 5 $\pi^{e^{\pi^{e^\pi}}} > e^{\pi^{e^{\pi^e}}}$.

Demonstração. Defina $f, g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, respectivamente, por

$$f(x) = e^{\pi^{e^x}} \quad \text{e} \quad g(x) = \pi^{e^{\pi^x}}.$$

Assim, de acordo com o Corolário 3 temos que

$$0 < g(e) = \pi^{e^{\pi^e}} < e^{\pi^{e^\pi}} = f(\pi), \tag{3}$$

Considerando no Lema 4 os valores $p = g(e) < f(\pi) = q$ e $a = e < \pi = b$, segue que $a^p < b^q$, ou seja,

$$e^{g(e)} < \pi^{f(\pi)},$$

donde segue o resultado.

$\square$

O próximo resultado estabelece uma generalização de nosso estudo.

Teorema 6 *Defina as sequências de exponenciais aninhadas (x_n) e (y_n), respectivamente, por*

$$(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \quad e \quad (y_n) = (y_1, y_2, y_3, \ldots),$$

onde

$$x_1 = \pi^e,\ x_2 = \pi^{e^\pi},\ x_3 = \pi^{e^{\pi^e}}, \ldots$$

e

$$y_1 = e^\pi,\ y_2 = e^{\pi^e},\ y_3 = e^{\pi^{e^\pi}}, \ldots$$

Então, tem-se que

$$x_{2n+1} < y_{2n+1} \quad e \quad x_{2n+2} > y_{2n+2}, \quad para\ \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Demonstração. A prova é feita por indução sobre n.

(i) Quando $n = 0$ teremos

$$x_1 < y_1 \ \text{ e } \ x_2 > y_2,$$

o que correspondem, respectivamente, ao Teorema 1 e o Corolário 2. Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponha o Teorema válido para um certo índice $n = k$, isto é, que valem

$$x_{2k+1} < y_{2k+1} \quad \text{e} \quad x_{2k+2} > y_{2k+2}. \tag{4}$$

Vamos mostrar que vale para $n = k + 1$, ou seja, provaremos que

$$x_{2k+3} < y_{2k+3} \quad \text{e} \quad x_{2k+4} > y_{2k+4}.$$

Primeiramente, observamos que as sequências (x_n) e (y_n) dadas satisfazem as seguintes propriedades recursivas:

$$x_1 = \pi^e, \ \ y_1 = e^\pi,$$

e para $n = 2, 3, 4, \ldots$, valem as relações

$$x_n = \pi^{y_{n-1}} \quad \text{e} \quad y_n = e^{x_{n-1}}. \tag{5}$$

Por absurdo, suponha que $x_{2k+3} \geq y_{2k+3}$. Então, pelas propriedades recursivas acima segue que

$$\pi^{y_{2k+2}} \geq e^{x_{2k+2}}.$$

Aplicando logaritmo natural, vem

$$y_{2k+2} \cdot \ln\pi \geq x_{2k+2},$$

e, novamente aplicando o logaritmo natural, obtemos

$$\ln y_{2k+2} + \ln(\ln\pi) \geq \ln x_{2k+2},$$

o que, pelas propriedades recursivas, vem,

$$\ln e^{x_{2k+1}} + \ln(\ln\pi) \geq \ln \pi^{y_{2k+1}},$$

ou seja,

$$x_{2k+1} + \ln(\ln \pi) \geq y_{2k+1} \cdot \ln \pi.$$

Como por hipótese da indução vale que $y_{2k+1} > x_{2k+1}$, obtemos as desigualdades:

$$x_{2k+1} + \ln(\ln \pi) \geq y_{2k+1} \cdot \ln \pi > x_{2k+1} \cdot \ln \pi,$$

ou seja, obtemos

$$x_{2k+1} + \ln(\ln \pi) > x_{2k+1} \cdot \ln \pi. \tag{6}$$

Como $\ln(\ln \pi) < \ln \pi - 1$ (veja na prova do Corolário 3), de (6) vem

$$x_{2k+1} \cdot \ln \pi < x_{2k+1} + \ln(\ln \pi) < x_{2k+1} + \ln \pi - 1,$$

ou seja,

$$x_{2k+1} \cdot (\ln \pi - 1) - \ln \pi + 1 < 0,$$

isto é,

$$x_{2k+1}(1 - \ln \pi) - (1 - \ln \pi) > 0, \quad \text{com } x_{2k+1} > \pi > 1. \tag{7}$$

Porém, definindo a função polinomial de primeiro grau $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = (1 - \ln \pi)x - (1 - \ln \pi),$$

tem-se que $f(x) < 0$, para todo $x > 1$, uma contradição com (7)!

Portanto, segue que

$$x_{2k+3} < y_{2k+3}, \tag{8}$$

como queríamos mostrar, provando a primeira desigualdade requerida. Mostremos, agora, a segunda.

Usando (5) e notando que a função exponencial e^x é crescente e que, para cada $x > 0$ fixado, $e^x < \pi^x$, obtemos, com a desigualdade (8) acima obtida:

$$y_{2k+4} = e^{x_{2k+3}} < e^{y_{2k+3}} < \pi^{y_{2k+3}} = x_{2k+4},$$

ou seja, mostramos também que

$$y_{2k+4} < x_{2k+4}$$

Portanto, de acordo com (i) e (ii), concluímos a prova por indução.

$\square$

De nosso estudo ficou um interessante Problema em aberto:

Problema 7 *Classificar os números $y_2, y_3, y_4, \ldots$ e $x_1, x_2, x_3, \ldots$ do Teorema 6 em algébricos e transcedentes.*

Observação 1. Conforme discutido na introdução, ainda é um problema em aberto saber se $x_1 = \pi^e$ é um número algébrico ou transcedente. Se for algébrico, por [7, Theorem 2.3] segue a transcedência do número $y_2 = e^{\pi^e}$.

Observação 2. É interessante notar que os números $\pi^{e^{\pi^e}}$ e $e^{\pi^{e^\pi}}$ apresentados no Corolário 3 são "absurdamente grandes". Por exemplo, com auxílio de um software adequado, determinamos a seguinte aproximação para $\pi^{e^{\pi^e}}$:

$$4,17119582516903826365869808791959903076845558786 85 \times 10^{2820821452}.$$

Já os números $\pi^{e^{\pi^{e^\pi}}}$ e $e^{\pi^{e^{\pi^e}}}$ apresentados no Corolário 5 são tão grandes que sequer puderam ser determinados pelo mesmo software.

4 Considerações finais

Para encerrar, no que segue mostraremos que o Teorema 6 realmente estabelece um resultado especial, visto que há outras exponenciações aninhadas que não geram sequências cujas desigualdades se comportam de forma alternada. Para isso, vamos considerar exponenciações aninhadas alternadas envolvendo o número de ouro $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e e. Para mais detalhes referentes ao número de ouro φ, recomendamos a leitura de [10]. Isto posto, temos:

Proposição 8 $\varphi^e < e^\varphi$.

Demonstração. Seguiremos a mesma ideia da prova do Teorema 1.

Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = e^x - x$, como feito no Teorema 1.

Neste caso, teremos $f'(x) < 0$, para todo $x \in (-\infty, 0)$, e portanto, segue que f é estritamente decrescente em $(-\infty, 0)$.

Logo, para todo x tal que $x < 0$, segue que $f(x) > f(0) = 1$.

Em particular, para $x = \dfrac{\varphi}{e} - 1 < 0$, teremos

$$e^{\frac{\varphi}{e}-1} - \frac{\varphi}{e} + 1 > 1,$$

ou seja,

$$e^{\frac{\varphi}{e}} \cdot \frac{1}{e} > \frac{\varphi}{e} \Rightarrow e^{\frac{\varphi}{e}} > \varphi.$$

Elevando à potência e vamos finalmente obter

$$\varphi^e < e^\varphi,$$

como desejado.

$\square$

No entanto, a relação de ordem das próximas exponenciações aninhadas alternadas de altura 3, envolvendo os números φ e e, não ficará na ordem contrária à de altura 2 estabelecida na Proposição 8.

Ou seja, também temos

$$\varphi^{e^{\varphi}} < e^{\varphi^{e}}.$$

Verifiquemos tal desigualdade. Defina a função $f : [1,e] \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = e^x \ln x - x^e.$$

Para obter os zeros de f, resolvemos a equação $e^x \ln x - x^e = 0$, obtendo a igualdade $x^{e^x} = e^{x^e}$, à qual possui a solução única $x = e$, a trivial. De fato, mostremos que a solução é única: Afirmamos que a função $g : [1,e] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \frac{e^x \cdot \ln x}{x^e}$ é crescente. De fato, se calcularmos a função derivada, vamos obter

$$g'(x) = \frac{e^x}{x^{e+1}}[1 + (x-e) \cdot \ln x], \tag{9}$$

e como o quociente destacado é sempre positivo, o termo entre colchetes decidirá o sinal da função derivada de g. Afirmamos que $1 + (x-e) \cdot \ln x > 0$ em $(1,e)$. De fato, se por absurdo valer a desigualdade contrária, ou seja, se

$$1 + (x-e) \cdot \ln x \leq 0,$$

então

$$1 \leq (e-x) \cdot \ln x,$$

e portanto, deve valer por propriedade das integrais definidas, que

$$\int_1^e 1\,dx \leq \int_1^e (e-x) \cdot \ln x\,dx. \tag{10}$$

Porém,

$$\int_1^e 1\,dx = e - 1 \approx 1,718,$$

e

$$\int_1^e (e-x) \cdot \ln x\,dx = e - \frac{1}{4} - \frac{e^2}{4} \approx 0,621,$$

o que contradiz a desigualdade (10). Portanto, vale

$$1 + (x-e) \cdot \ln x > 0,\ \forall x \in (1,e).$$

Dessa forma, como o termo entre colchetes de (9) também é positivo, concluímos que $g'(x) > 0$, $\forall x \in (1,e)$, ou seja, g é crescente em $(1,e)$. Logo, se $1 < x < e$, então $g(x) < g(e)$, ou seja,

$$\frac{e^x \cdot \ln x}{x^e} < \frac{e^e \cdot \ln e}{e^e} = 1,\ \forall x \in (1,e),$$

donde segue que $e^x \cdot \ln x < x^e$, $\forall x \in (1,e)$, ou seja,

$$f(x) = e^x \cdot \ln x - x^e < 0,\ \forall x \in (1,e).$$

Portanto, f possui uma única raiz real em $x = e$, isto é, $f(e) = 0$. E como $f(1) = e^1 \ln 1 - 1^e = -1 < 0$, concluímos que $f(x) < 0$, para todo $x \in [1, e)$ e $f(e) = 0$.

Assim, em particular para $x = \varphi \in [1, e]$, teremos $f(\varphi) < 0$, ou seja,

$$e^{\varphi} \ln \varphi - \varphi^e < 0,$$

e então

$$\ln \varphi^{e^{\varphi}} < \ln e^{\varphi^e},$$

donde segue a desigualdade desejada.

Portanto, temos que

$$\varphi < e, \;\; \varphi^e < e^{\varphi} \quad \text{e} \quad \varphi^{e^{\varphi}} < e^{\varphi^e},$$

um resultado diferente comparado ao que apresentamos no Teorema 6.

No que diz respeito à questão da transcedência dos números apresentados nesta seção, devido ao fato de φ ser algébrico (pois é raiz da equação $x^2 - x - 1 = 0$, de coeficientes racionais), convém notar que por [7, Theorem 2.3] segue a transcendência de e^{φ}.

Assim, um outro Problema interessante que deixamos é:

Problema 9 *Classificar os números*

$$\varphi^e, \; \varphi^{e^{\varphi}} \quad e \quad e^{\varphi^e}$$

em algébricos e transcedentes.

Referências

[1] STEWART, J. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. v. 1.

[2] COURANT, R. **Differential and integral calculus**. 2. ed. New York: Interscience Publishers, 1937. v. 1.

[3] MAOR, E. *e* : a história de um número. 5. ed. Rio de Janeiro: Ed Record, 2008.

[4] ARCHIBALD, R. C. Historical notes on the relation $e^{-\pi/2} = i^i$. **The American Mathematical Monthly**, v. 28, n. 33, p. 116-121, Mar. 1921.

[5] SONDOW, J.; YI, H. New Wallis- and Catalan- type infinite products for π, e, and $\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **The American Mathematical Monthly**, v. 117, n. 10, p. 912-917, Dec. 2010.

[6] EYMARD, P.; LAFON, J. P. **Autour du nombre π**. Paris: Hermann Éditeurs des Sciences et des Arts, 1999.

[7] BAKER, A. **Transcendental number theory**. London: Cambridge University Press, 1975.

[8] BOYER, C.; MERZBACH, U. C. **A history of mathematics**. 3. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2011.

[9] SCHAUMBERGER, N. An instant proof of $e^{\pi} > \pi^{e}$. **The College Mathematics Journal**, v. 16, n. 4, p. 280, Sept. 1985.

[10] LIVIO, M. **The golden ratio**: the story of phi, the world's most astonishing number. New York: Broadway Books, 2002.