



**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 11, dez. 2017

Jorge Corrêa de Araújo

Prof. Associado do
Departamento de Matemática.
FFP-UERJ
jcaraujo_55@yahoo.com.br

Rosa García Márquez

Profa. Associada do
Departamento de Matemática.
FFP-UERJ
rosagmarquez@yahoo.com.br

Transformadas de Fourier em seno e cosseno: aplicações no cálculo integral e na equação de Laplace

Fourier Transform in sine and cosine: applications in the integral calculus and in the Laplace equation.

Resumo

Da representação da integral de Fourier de uma função real, pode-se obter a usual fórmula integral em seno ou cosseno, caso a função seja respectivamente ímpar ou par. Tais representações, junto com outras propriedades operacionais dessas transformações, permitem reduzir certas equações diferenciais parciais a equações diferenciais ordinárias, quase sempre, de menor complexidade em seu tratamento. Neste trabalho são analisadas duas aplicações. A primeira mostra detalhadamente a representação integral de Fourier em cosseno de uma particular função, utilizando um formalismo algébrico e a integração complexa. A segunda aplicação utiliza a equação de Laplace na representação da distribuição de temperaturas em uma região situada no primeiro quadrante, examinada à luz da transformada de Fourier em seno e também, da integração complexa. Uma das integrais impróprias que aparece na solução da equação de Laplace pode ser resolvida usando duas diferentes metodologias adicionais.

Palavras-chave: Teorema de Cauchy. Fórmula Integral de Fourier. Equação de Laplace. Distribuição de Temperatura.

Abstract

From the representation of the integral Fourier for a real function, we can obtain the usual integral formula in sine or cosine, if the function is respectively odd or even. These representations, together with other operational properties of these transformations, allow reducing certain partial differential equations to ordinary differential equations, almost always, of less complexity in its treatment. In this work, two applications are analyzed. The first shows in detail the integral cosine Fourier representation of a particular function using an algebraic formalism and complex integration. The second application uses the Laplace Equation in the representation of temperatures in the quarter plane, examined in the light of Fourier transform in sine and also the complex integration. One of the improper integrals that appears in the solution of the Laplace equation can be solved using two additional different methodologies.

Keywords: Cauchy's Theorem Fourier. Integral Fourier Formula. Laplace Equation; Distribution of Temperature.



1 Introdução

A importância das transformadas integrais, como por exemplo, a transformada de Fourier, a transformada de Fourier em Seno e Cosseno e a transformada de Laplace é que elas constituem um método operacional poderoso segundo Debnath e Bhatta (2015, p. xxi), para resolver problemas de valor inicial, problemas de valores de contorno, descritos por equações diferenciais lineares e equações integrais (IÓRIO, 1991, p. 215-217) e Churchill (1963, p. 122). Entretanto, o uso de transformações integrais para resolver uma equação diferencial é útil se a equação transformada resultante for mais simples. A transformada de uma integral, em particular, a transformada de Fourier, teve origem na fórmula integral de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos[\alpha(\xi - x)] d\xi d\alpha \quad (\text{CHURCHILL, 1963, p. 115}).$$

foi obtido por Joseph Fourier (1768-1830) no século XIX. Essas ideias de Fourier eram também do conhecimento de P. S. Laplace (1749-1827) e de A. L. Cauchy (1789-1857), pois alguns de seus trabalhos envolviam essa transformação (DEBNATH; BHATTA, 2015, p. 2) Essa transformação, bem como a transformada de Laplace, que é um caso particular da transformada de Fourier para uma classe particular de funções definidas sobre o eixo real positivo, foram popularizadas por Oliver Heaviside (1850-1925), um engenheiro britânico, que utilizou a transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais ordinárias aplicadas em circuitos e sistemas elétricos (DEBNATH; BHATTA, 2015, p. 2).

Embora, tais transformadas tenham diversas aplicações como, por exemplo, na física e estatística, seu uso é ainda, segundo Debnath e Bhatta (2015, p. xxi), predominantemente utilizada nos estudos avançados e na pesquisa. Por exemplo, Castro (2014, p. 1-5) usou as transformadas de Fourier em seno e cosseno para estudar um potencial delta duplo com base na equação de Schrödinger. Negero (2014, p. 44-57) utilizou a transformada de Fourier em seno para obter a solução formal da equação de Laplace em um meio plano, entre outros exemplos de interesse analisados no referido estudo. Convém notar que no artigo de Negero, que para a obtenção da solução da equação de Laplace (NEGERO, 2014, p.54), algumas passagens matemáticas são dadas de forma sucinta.

Neste trabalho são analisadas duas aplicações, a primeira trata da verificação da fórmula integral de Fourier de uma particular função real, $f(x)$. Essa verificação é equivalente à resolução da equação integral singular na incógnita $\mathfrak{F}_c(\alpha)$, onde $\mathfrak{F}_c(\alpha)$ é a transformada de Fourier em cosseno da função $f(x)$ dada. Essa equação foi resolvida através de dois diferentes métodos. O primeiro, algébrico, oriundo da transformação de Fourier em cosseno e o segundo, utilizando a análise complexa. A segunda aplicação consiste na análise com detalhes da obtenção da solução explícita para a equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ na representação da distribuição de temperaturas em uma região limitada do primeiro quadrante com condições de Dirichlet (PERLA MENZALA, 1977, p. 88) utilizando a transformada de Fourier em seno combinada com a análise complexa. Essa aplicação foi apresentada por Debnath e Bhatta (2015, p. 106) e resolvido usando a transformada de Fourier em seno, mas de forma concisa, isto é, com a omissão a nosso ver, do detalhamento matemático necessário para a obtenção da solução. Esse problema também foi estudado de maneira mais geral por O'Neil (2014, p. 246-249), mas usando o método de variáveis separáveis e os coeficientes integrais de Fourier.

O método de separação de variáveis baseia-se essencialmente em assumir que a solução da equação diferencial parcial linear pode ser obtida na forma de um produto de duas funções de variáveis independentes, para dar origem a equações diferenciais ordinárias desacopladas (BOYCE, 1999, p.425-426; IÓRIO, 1989, p.158-159). Desse modo, a forma da equação

diferencial parcial constitui uma restrição ao uso do método de separação de variáveis. O método da transformada de Fourier em seno (ou cosseno) não impõe restrições iniciais na forma da equação diferencial parcial. Tais métodos guardam em suas concepções uma forte relação entre si, levando à mesma expressão integral da solução do problema analisado.

Uma das integrais impróprias que aparece no cálculo da solução do problema de Laplace com as condições de contorno de Dirichlet dadas foi resolvida por duas metodologias adicionais, as quais constam no Apêndice.

2 Materiais e métodos

Nesta seção são apresentados a fórmula integral de Fourier, as transformadas de Fourier em Seno e Cosseno bem como os teoremas básicos para o cálculo de integrais impróprias usando o cálculo complexo.

2.1 A Transformada de Fourier nas funções seno e cosseno

Teorema 1. Seja $f(x)$ uma função que é seccionalmente contínua sobre todo o intervalo finito no eixo x e que nos pontos de descontinuidade, x_0 , satisfaz a igualdade $f(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]$ e que seja absolutamente integrável, isto é, $\int_0^{\infty} |f(x)| dx < \infty$. Então em todo ponto x onde $f(x)$ é derivável, a função $f(x)$ é representada pela fórmula integral de Fourier (CHURCHILL, 1963, p. 115)

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos[\alpha(\xi - x)] d\xi d\alpha, \quad -\infty < x < \infty. \quad (1)$$

É conveniente introduzir as funções

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos(\alpha\xi) d\xi. \quad (2)$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin(\alpha\xi) d\xi. \quad (3)$$

E usando a seguinte identidade trigonométrica relativa ao cosseno,

$$\cos(\alpha\xi - \alpha x) = \cos(\alpha\xi) \cos(\alpha x) + \sin(\alpha\xi) \sin(\alpha x), \quad (4)$$

a Eq. (1) pode ser reescrita como

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(\alpha) \cos(\alpha x) + B(\alpha) \sin(\alpha x)] d\alpha. \quad (5)$$

Suponhamos também que $f(x)$ é uma função ímpar. Daí, $f(\xi) \cos(\alpha\xi)$ é uma função ímpar e, portanto $A(\alpha) = 0$, enquanto $f(\xi) \sin(\alpha\xi)$ é uma função par logo tem-se

$$B(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\xi) \sin(\alpha\xi) d\xi. \quad (6)$$

Das Eqs. (5) e (6) a expressão de $f(x)$ em termos dos coeficientes de Fourier $B(\alpha)$ em seno é dada por

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(\alpha x) \int_0^{\infty} f(\xi) \sin(\alpha\xi) d\xi d\alpha. \quad (7)$$

Analogamente, caso $f(x)$, seja uma função par, então $B(\alpha) = 0$ e da Eq. (4) tem-se a fórmula da integral de Fourier em cosseno dada por

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\alpha x) \int_0^{\infty} f(\xi) \cos(\alpha \xi) d\xi d\alpha. \quad (8)$$

Considerando $f(x)$ com as condições anteriormente assumidas no Teorema 1 a transformada de Fourier em seno, $\mathfrak{F}_s(\alpha)$, de $f(x)$ é dada por

$$\mathfrak{F}_s(\alpha) = \int_0^{\infty} f(\xi) \operatorname{sen}(\alpha \xi) d\xi, \quad (9)$$

sendo sua fórmula de inversão,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \mathfrak{F}_s(\alpha) \operatorname{sen}(\alpha x) d\alpha. \quad (10)$$

Analogamente, a transformada de Fourier em cosseno, $\mathfrak{F}_c(\alpha)$, de $f(x)$ é dada por

$$\mathfrak{F}_c(\alpha) = \int_0^{\infty} f(\xi) \cos(\alpha \xi) d\xi, \quad (11)$$

enquanto sua fórmula de inversão é dada por

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \mathfrak{F}_c(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha. \quad (12)$$

As Eqs. (7) e (8) são respectivamente as representações integrais de Fourier em seno e cosseno de $f(x)$. Tais equações são chamadas “equações integrais singulares” por que as integrais são impróprias (CHURCHILL, 1963, p. 122). Pode-se observar, que pelo menos teoricamente, as funções incógnitas dessas equações podem ser calculadas respectivamente pelas Eqs. (9) e (11). A seguir, será dado um lema que sob certas condições, diga-se de passagem, plausíveis em aplicações físicas, permite que essas funções incógnitas sejam calculadas por meio de uma equação algébrica, em vez do uso direto das equações (9) e (11). Vamos usar indistintamente as seguintes notações para a transformada em seno, $\mathfrak{F}_s\{f(x)\} = \mathfrak{F}_s(\alpha)$ e cosseno $\mathfrak{F}_c\{f(x)\} = \mathfrak{F}_c(\alpha)$, com $x, \alpha \in \mathbb{R}$.

Lema 1. Sejam f e g são funções integráveis. As transformadas de Fourier em seno e cosseno são lineares, isto é,

$$\mathfrak{F}_{s,c}\{af(x) + bg(x)\} = a \mathfrak{F}_{s,c}\{f(x)\} + b \mathfrak{F}_{s,c}\{g(x)\}, \quad (13)$$

onde a e b são duas constantes reais.

Lema 2. Suponhamos que f , f' e f'' são funções contínuas para $x \geq 0$ e que $f, f' \rightarrow 0$ quando x tende ao infinito. Se, além disso, f é absolutamente integrável, isto é, $\int_0^{\infty} |f(x)| dx < \infty$.

Então

$$\mathfrak{F}_s\{f''\}(\alpha) = -\alpha^2 \mathfrak{F}_s(\alpha) + \alpha f(0), \quad (14)$$

$$\mathfrak{F}_c\{f''\}(\alpha) = -\alpha^2 \mathfrak{F}_c(\alpha) - f'(0), \quad (15)$$

onde o símbolo $\mathfrak{F}_s\{f\}(x)$ tem o mesmo sentido de $F_s(\alpha)$. Idem para $\mathfrak{F}_c\{f\}(x) = \mathfrak{F}_c(\alpha)$.

Prova

Por definição temos

$$\mathfrak{F}_s\{f''\}(x) = \int_0^{\infty} f''(x) \operatorname{sen}(\alpha x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M f''(x) \operatorname{sen}(\alpha x) dx. \quad (16)$$

Integrando por partes duas vezes o lado direito da Eq. (16) segue

$$\int_0^M f''(x) \operatorname{sen}(\alpha x) dx = f'(M) \operatorname{sen}(\alpha M) - \alpha f(M) \operatorname{cos}(\alpha M) + \alpha f(0) - \alpha^2 \int_0^M f(x) \operatorname{sen}(\alpha x) dx. \quad (17)$$

Fazendo $M \rightarrow \infty$ na Eq. (17) e considerando as hipóteses do Lema 1, obtemos a Eq. (14).

Analogamente, para mostrar a Eq. (15), usando a Eq. (11), tem-se que

$$\mathfrak{I}_c \{f''\}(x) = \int_0^\infty f''(x) \operatorname{cos}(\alpha x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M f''(x) \operatorname{cos}(\alpha x) dx. \quad (18)$$

Ao efetuar integrações sucessivas por partes na Eq. (18), tem-se

$$\int_0^M f''(x) \operatorname{cos}(\alpha x) dx = f'(M) \operatorname{cos}(\alpha M) - f'(0) + \alpha f(M) \operatorname{sen}(\alpha M) - \alpha^2 \int_0^M f(x) \operatorname{cos}(\alpha x) dx. \quad (19)$$

Fazendo $M \rightarrow \infty$ temos que $\mathfrak{I}_c \{f''\}(x) = -f'(0) - \alpha^2 \mathfrak{I}_c \{f\}(x)$, provando assim a Eq. (15).

Estes resultados podem ser generalizados para funções de derivadas de ordem mais elevadas $f^{(n)}(x)$.

O lema anterior mostra que a transformação do seno (ou cosseno) troca a forma diferencial $f''(x)$ por uma forma algébrica envolvendo $\mathfrak{I}_s(\alpha)$, e o valor inicial $f(0)$ (ou $f'(0)$). Segundo Iório (1991, p.206), Debnath e Bhatta (2015, p. 68) e Churchill (1963, p. 122) as propriedades (14) e (15) com o Lema 1, conduzem à redução de certos tipos de problema de valores de fronteira em problemas algébricos de transformadas de funções desconhecidas como será visto nesse trabalho. Para lidarmos com integrais impróprias que aparecem na série de Fourier daremos a seguir alguns resultados de análise complexa que são necessários na resolução dos problemas.

Teorema 2. Teorema dos resíduos de Cauchy

Seja C um caminho fechado simples orientado positivamente. Se f é uma função analítica em cada ponto de C e em todos os pontos da região limitada por C , exceto por um finito de singularidades $z = z_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), então (BROWN; CHURCHILL, 2015, p. 233).

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f(z), z_k). \quad (20)$$

Muitas vezes é útil considerar o caminho C formado por uma semicircunferência C_R de raio R na sua metade superior ou inferior, percorrida em sentido anti-horário mais o segmento de reta S no eixo real, cuja representação paramétrica $z = \xi$ tal que $-R \leq \xi \leq R$. Como $C = C_R \cup S$ a Eq. (20) pode ser escrita como

$$\int_{-R}^R f(\xi) d\xi + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f(z), z_k). \quad (21)$$

Se o $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$, segue da Eq. (21) que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(\xi) d\xi = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f(z), z_k). \quad (22)$$

Para o cálculo dos resíduos em polos (singularidades isoladas) usaremos o seguinte resultado (BROWN; CHURCHILL, 2015, p. 242).



Teorema 3: Seja z_0 uma singularidade isolada de uma função f . As duas afirmações a seguir são equivalentes.

- (a) z_0 é um polo de ordem m ($m=1, 2, \dots$) de f ;
 (b) $f(z)$ pode ser escrita na forma

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}, \quad (23)$$

onde a função $\phi(z)$ é analítica e não nula nesse polo. Além disso, caso (a) ou (b) sejam verdadeiras, então o resíduo de $f(z)$ nesse polo é dado por

$$\text{Res}(f(z), z_0) = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}. \quad (24)$$

Teorema 4: Seja $f(z)$ uma função analítica em cada ponto do semiplano superior $y \geq 0$, exterior ao semicírculo de equação $|z| = R_0$ e C_R a curva $C_R = \left\{ z / z = Re^{i\theta} \quad 0 \leq \theta \leq \pi; R > R_0 \right\}$. Se existe alguma constante M_R tal que $|f(z)| \leq M_R$ e $\lim_{R \rightarrow \infty} M_R = 0$ para todo ponto $z \in C_R$, então dada qualquer constante positiva a , temos que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0. \quad (25)$$

4 Aplicações

Nesta seção são apresentadas duas aplicações, a primeira é uma aplicação do cálculo de certa integral imprópria utilizando a integral de Fourier em cosseno. Na segunda aplicação é resolvida a equação de Laplace através da integral de Fourier em seno para a representação de um problema de distribuição de temperaturas em uma região do primeiro quadrante com condições de Dirichlet.

4.1 Aplicação do cálculo integral com a integral de Fourier em cosseno

Vamos verificar a equação que segue através de dois métodos, o primeiro utilizando a integração de Fourier em cosseno e o segundo através do teorema dos resíduos.

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(\alpha x) \int_0^\infty \frac{2 - \xi^2}{\xi^4 + 4} \cos(\alpha \xi) d\xi d\alpha = \frac{2 - x^2}{x^4 + 4}, \quad \text{com } \xi > 0 \quad (26)$$

Prova

1º Método: Utilizando a integração de Fourier.

Seja $f(x) = e^{-x} \text{sen}(x)$. As funções $f(x)$, $f'(x) = e^{-x}(\cos(x) - \text{sen}(x))$ e $f''(x) = -2e^{-x} \cos(x)$ são contínuas para todo $x \geq 0$ e tendem a zero quando $x \rightarrow \infty$. Usando a Eq. (15) tem-se

$$\mathfrak{F}_c \{f''(x)\} = \int_0^\infty f''(\xi) \cos(\alpha \xi) d\xi = -2 \int_0^\infty e^{-\xi} \cos(\xi) \cos(\alpha \xi) d\xi. \quad (27)$$

Usando a identidade trigonométrica: $\cos(\alpha\xi)\cos(\xi) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha\xi + \xi) + \cos(\alpha\xi - \xi)]$ na Eq. (27) tem-se

$$-2 \int_0^{\infty} e^{-\xi} \cos(\xi)\cos(\alpha\xi) d\xi = - \int_0^{\infty} e^{-\xi} [\cos(\alpha\xi + \xi) + \cos(\alpha\xi - \xi)] d\xi. \quad (28)$$

Integrando cada parcela da Eq. (28)

$$\int_0^{\infty} e^{-\xi} \cos(\alpha\xi + \xi) d\xi = \frac{1}{(\alpha + 1)^2 + 1} \quad \text{e} \quad \int_0^{\infty} e^{-\xi} \cos(\alpha\xi - \xi) d\xi = \frac{1}{(\alpha - 1)^2 + 1}. \quad (29)$$

Das Eqs. (28) e (29) resulta

$$\mathfrak{F}_c\{f''(x)\} = -2 \frac{\alpha^2 + 2}{\alpha^4 + 4}. \quad (30)$$

Daí, e usando a Eq. (15) tem-se a transformada de Fourier em cosseno para $f(x)$ dada por

$$-2 \frac{\alpha^2 + 2}{\alpha^4 + 4} = -\alpha^2 \mathfrak{F}_c(\alpha) - 1. \quad (31)$$

Então,

$$\mathfrak{F}_c(\alpha) = \frac{2 - \alpha^2}{\alpha^4 + 4}.$$

(32)

Como $f(x) = e^{-x} \text{sen}(x)$, da Eq. (32) e da fórmula de inversão dada pela Eq. (12) tem-se

$$e^{-x} \text{sen}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2 - \alpha^2}{\alpha^4 + 4} \cos(\alpha x) d\alpha. \quad (33)$$

Ao fazer as mudanças de variáveis $x = \alpha$ e $\alpha = \xi$ na Eq. (33) temos

$$e^{-\alpha} \text{sen}(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2 - \xi^2}{\xi^4 + 4} \cos(\alpha\xi) d\xi. \quad (34)$$

Multiplicando ambos os lados da Eq. (34) pelo fator $\frac{2}{\pi} \cos(\alpha x)$ e depois integrando ambos os lados da igualdade em relação a α de zero até infinito, temos

$$\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-\alpha} \text{sen}(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha}_{\mathfrak{F}_c(x)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\alpha x) \int_0^{\infty} \frac{2 - \xi^2}{\xi^4 + 4} \cos(\alpha\xi) d\xi d\alpha. \quad (35)$$

Portanto, da Eq. (32) e (35) confirma a igualdade da Eq. (23)

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\alpha x) \int_0^{\infty} \frac{2 - \xi^2}{\xi^4 + 4} \cos(\alpha\xi) d\xi d\alpha = \frac{2 - x^2}{4 + x^4}. \quad (36)$$

2º Método: O cálculo integral complexo constitui uma alternativa para a solução da integral imprópria, $\int_0^{\infty} \frac{2 - \xi^2}{\xi^4 + 4} \cos(\alpha\xi) d\xi$, que aparece no lado esquerdo da Eq. (36). Como o objetivo é calcular a integral

$$\int_0^{\infty} \frac{2-\xi^2}{\xi^4+4} \cos(\alpha\xi) d\xi, \quad (37)$$

é conveniente introduzir a função dada por

$$f(z) = \frac{2-z^2}{z^4+4}. \quad (38)$$

A função $f(z)e^{i\alpha z}$ é analítica nos pontos, z tais que, $\text{Im } z \geq 0$, exceto nas raízes da equação $z^4+4=0$, isto é, nos pontos $z_0=1+i$ e $z_1=-1+i$, que são as singularidades isoladas de $f(z)e^{i\alpha z}$ nessa região. Seja C uma curva fechada constituída por uma semicircunferência orientada positivamente de centro na origem e raio $R > \sqrt{2}$, mais o segmento S no eixo real de $z=-R$ até $z=R$ conforme mostra a Fig.1. Desse modo, as singularidades de interesse estão no interior do caminho fechado $C = C_R \cup S$.

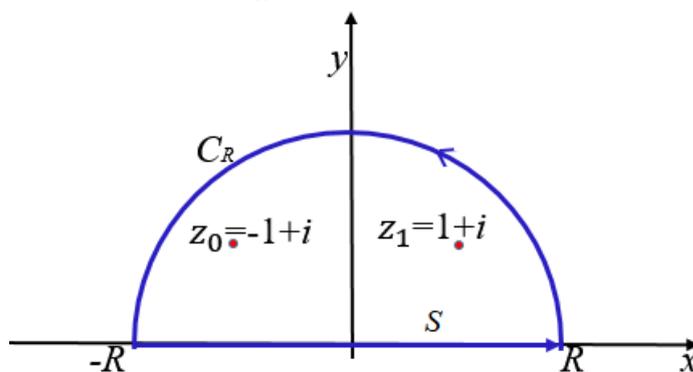


Figura 1. Região de definição de f com as singularidades z_0 e z_1 .

A singularidade z_0 é um polo simples da função

$$f(z)e^{i\alpha z} = \frac{\phi_0(z)}{z-z_0}, \quad (39)$$

onde

$$\phi_0(z) = \frac{(2-z^2)e^{i\alpha z}}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}, \quad (40)$$

sendo $z_2=1-i$ e $z_3=-1-i$ as outras raízes quartas de quatro. A função $\phi_0(z)$ é analítica no interior da região limitada por C e não nula em z_0 , e nessas condições, o resíduo de $f(z)e^{i\alpha z}$ nesse polo é dado por

$$\text{Res}(f(z)e^{i\alpha z}, z_0) = \phi_0(z)|_{z=z_0} = -\frac{1}{4}e^{-\alpha}e^{i\alpha}. \quad (41)$$

Analogamente, para o polo $z = z_1$,

$$\phi_1(z) = \frac{(2-z^2)e^{i\alpha z}}{(z-z_0)(z-z_2)(z-z_3)}, \quad (42)$$

$$\text{Res}(f(z)e^{i\alpha z}, z_1) = \phi_1(z)|_{z=z_1} = \frac{1}{4}e^{-\alpha}e^{-i\alpha}. \quad (43)$$

Pelo Teorema dos Resíduos de Cauchy (Eq. 20) tem-se

$$\oint_C f(z)e^{i\alpha z} dz = 2\pi i \sum_{k=0}^1 \text{Res}(f(z)e^{i\alpha z}, z_k). \quad (44)$$

A Eq. (44) pode ser reescrita usando a representação paramétrica $z=\xi$ do segmento do eixo real como

$$\int_{-R}^R \frac{2-\xi^2}{\xi^4+4} e^{i\alpha\xi} d\xi = -2\pi i e^{-\alpha} \left(\frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{4} \right) - \oint_{C_R} f(z)e^{i\alpha z} dz, \quad (45)$$

ou, ainda como

$$\int_{-R}^R \frac{2-\xi^2}{\xi^4+4} (\cos(\alpha\xi) + i\text{sen}(\alpha\xi)) d\xi = 2\pi e^{-\alpha} \left(\frac{\text{sen}(\alpha)}{2} \right) - \oint_{C_R} f(z)e^{i\alpha z} dz. \quad (46)$$

Considerando as partes reais em ambos os lados da Eq. (46) tem-se

$$\int_{-R}^R \frac{2-\xi^2}{\xi^4+4} \cos(\alpha\xi) d\xi = \pi e^{-\alpha} \text{sen}(\alpha) - \text{Re} \oint_{C_R} f(z)e^{i\alpha z} dz. \quad (47)$$

Como $f(z) = \frac{2-z^2}{z^4+4}$ tem polos e raízes com módulo igual a $R_o = \sqrt{2}$, seja R um número real, tal que $R > R_o$.

Considerando os pontos da curva C_R , ou seja, $|z|=R$. Observa-se que

$$|2-z^2| \leq R^2+2 \quad \text{e} \quad |z^4+4| \geq R^2-4.$$

Daí, resulta

$$|f(z)| = \frac{|2-z^2|}{|4+z^4|} \leq \frac{R^2+2}{R^4-4} = \frac{1}{R^2-2} = M_R. \quad (48)$$

Como o $\lim_{R \rightarrow \infty} M_R = 0$, então pelo Teorema 4, tem-se que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R} f(z)e^{i\alpha z} dz = 0. \quad (49)$$

Das Eqs. (47) e (49) tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2-\xi^2}{\xi^4+4} \cos(\alpha\xi) d\xi = \pi e^{-\alpha} \text{sen}(\alpha), \quad (50)$$

ou ainda, usando a paridade do integrando da Eq. (50)

$$\int_0^{\infty} \frac{2-\xi^2}{\xi^4+4} \cos(\alpha\xi) d\xi = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha} \text{sen}(\alpha). \quad (51)$$

Portanto, substituindo o resultado da Eq. (51) no lado esquerdo da Eq. (26) tem-se

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\alpha x) \int_0^{\infty} \frac{2-\xi^2}{\xi^4+4} \cos(\alpha\xi) d\xi d\alpha = \frac{2-x^2}{4+x^4}, \quad (52)$$

que corresponde à representação integral em cosseno da função $f(x) = \frac{2-x^2}{x^4+4}$.

4.2 A equação de Laplace

Vamos considerar a equação de Laplace (CHURCHILL, 1963, p. 33)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (53)$$

definida na região $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < \infty, 0 < y < \infty\}$, com as condições de Dirichlet (DEBNATH; BHATTA, 2015, p. 106) dadas por

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{e} \quad u(0, y) = a, \quad (54)$$

sendo u_{xx} e u_{yy} funções limitadas na região Ω , seja $u(x, y)$ a representação de distribuição de temperaturas estacionárias no primeiro quadrante. Estamos supondo que a placa bidimensional encontra-se em isolamento térmico na direção do eixo z . Desse modo, a energia térmica não está sendo criada nem destruída dentro do corpo sólido, ou seja, não há presença de fontes ou sumidouros (BROWN; CHURCHILL, 2015, p. 365).

Além disso, são admitidas as seguintes condições: $u \in C^2(\Omega)$, $\nabla u \rightarrow (0, 0)$ quando $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$ e $|u(x, y)| < \infty$. A Fig. 2 mostra a região Ω no primeiro quadrante, incluindo os eixos x e y com as condições de fronteira dadas.

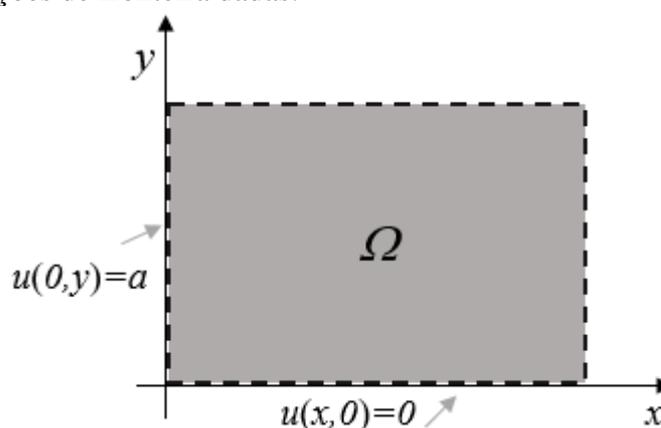


Figura 2: Região Ω de distribuição de temperaturas com as condições de Dirichlet.

Devido à condição, $u(0, y) = a$ vamos aplicar a transformada de Fourier em seno na variável x , \mathfrak{F}_s dada pela Eq. (14) na equação de Laplace $\Delta u = 0$.

Daí, e usando a linearidade da transformada (Lema 1), tem-se

$$\mathfrak{F}_s \{u_{xx}(x, y)\} = -\alpha^2 U_s(\alpha, y) + \alpha u(0, y) \quad \text{e} \quad \mathfrak{F}_s \{u_{yy}(x, y)\} = \frac{d^2 U_s(\alpha, y)}{dy^2}. \quad (55)$$

Para cada α fixo e $\alpha > 0$, das igualdades dadas na Eq. (54) e do Lema 1, tem-se a equação diferencial ordinária, dada por

$$-\alpha^2 U_s(\alpha, y) + \alpha u(0, y) + \frac{d^2 U_s(\alpha, y)}{dy^2} = 0, \quad (56)$$

ou

$$\frac{d^2 U_s(\alpha, y)}{dy^2} - \alpha^2 U_s(\alpha, y) = -\alpha \underbrace{u(0, y)}_a, \quad (57)$$

com a condição inicial, $U_s(\alpha, 0) = \mathfrak{F}_s \{u(x, 0)\} = \mathfrak{F}_s \{0\} = 0$, isto é,

$$U_s(0, 0) = 0. \quad (58)$$

A Eq. (57) é uma equação diferencial ordinária linear não homogênea na variável y e pode ser resolvida por métodos conhecidos, como o proposto por (ARAÚJO; HUAROTO; MÁRQUEZ, 2016; BOYCE; DIPRIMA, 1999). A equação característica associada ao

problema homogêneo dado pela Eq. (56) é dada por $\lambda^2 - \alpha^2 = 0$ cujas raízes são $\lambda = \pm\alpha$, portanto a solução geral do problema homogêneo associado à Eq. (57) é dado por

$$U_{sH}(\alpha, y) = c_1 e^{-\alpha y} + c_2 e^{\alpha y}. \quad (59)$$

Para determinar a solução particular do problema não homogêneo, utilizamos o método dos coeficientes a determinar, (ARAÚJO; HUAROTO; MÁRQUEZ, 2016, p. 181-186). Seja U_{sP} a solução particular da forma $U_{sP} = A$, onde A é uma constante. Substituindo U_{sP} na Eq. (57) tem-se a equação $-\alpha^2 A = -\alpha a$, onde

$$U_{sP} = \frac{a}{\alpha}, \quad \alpha > 0. \quad (60)$$

Logo a solução geral da Eq. (56) é dada por

$$U_s(\alpha, y) = c_1 e^{-\alpha y} + c_2 e^{\alpha y} + \frac{a}{\alpha}. \quad (61)$$

Como $|u(x, y)| < \infty$ e a transformada de Fourier de qualquer função integrável tende a zero quando $\alpha \rightarrow \infty$, então $c_2 = 0$, logo a solução do problema não homogêneo Eq. (57) é dado por

$$U_s(\alpha, y) = c_1 e^{-\alpha y} + \frac{a}{\alpha}. \quad (62)$$

Essa equação depende da constante c_1 , mas usando a condição (58) tem-se $c_1 = -\frac{a}{\alpha}$.

Portanto, a solução do problema diferencial (57), é dado por

$$U_s(\alpha, y) = \frac{a}{\alpha} (1 - e^{-\alpha y}). \quad (63)$$

Para a obtenção da distribuição de temperatura $u(x, y)$ para $x > 0$ basta aplicarmos a transformada inversa de Fourier em seno, \mathfrak{F}_s^{-1} na Eq. (63), isto é,

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \text{sen}(\alpha x) U_s(\alpha, y) d\alpha, \quad (64)$$

ou ainda

$$u(x, y) = \frac{2a}{\pi} \left[\underbrace{\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(\alpha x)}{\alpha} d\alpha}_{(I)} - \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(\alpha x)}{\alpha} e^{-\alpha y} d\alpha}_{(II)} \right]. \quad (65)$$

As integrais indefinidas associadas àquelas na Eq. (65) não podem ser expressas por meio de um número finito de operações aritméticas envolvendo funções elementares (ROSENLICHT, 1972 p. 963-964). Entretanto, elas podem ser calculadas sem o uso da antiderivação por meio de transformações adequadas como veremos a seguir.

Inicialmente vamos calcular a integral (II) já que a integral (I) pode ser calculada como um caso particular da integral (II), ao fazer $y = 0$ na integral (II).

Para calcular a integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(\alpha x)}{\alpha} e^{-\alpha y} d\alpha, \quad (66)$$

Aplicaremos a transformada de Fourier em seno na função $e^{-\alpha y}$, isto é, $\mathfrak{F}_s\{e^{-\alpha y}\}$ e utilizaremos a sugestão de Debnath e Bhatta (2015, p. 100).

Ao calcular $\mathfrak{F}_s \{e^{-\alpha y}\}$ tem-se

$$\mathfrak{F}_s \{e^{-\alpha y}\} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha y} \operatorname{sen}(\alpha x) d\alpha = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M e^{-\alpha y} \operatorname{sen}(\alpha x) d\alpha \quad (67)$$

$$\mathfrak{F}_s \{e^{-\alpha y}\} = - \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{x e^{-My} (\cos(My) + y \operatorname{sen}(Mx)) - x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}. \quad (68)$$

A transformada dada pela Eq. (68) é comumente dada em tabelas, como por exemplo, Debnath e Bhatta (2015, p. 645).

Por outro lado pode-se verificar que

$$\int_y^{\infty} e^{-\alpha w} dw = \frac{e^{-\alpha y}}{\alpha}, \quad (69)$$

então a Eq. (66) pode ser escrita como:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha y}}{\alpha} \operatorname{sen}(\alpha x) d\alpha = \int_0^{\infty} \left[\int_y^{\infty} e^{-\alpha w} dw \right] \operatorname{sen}(\alpha x) d\alpha = \int_0^{\infty} \left[\int_y^{\infty} \operatorname{sen}(\alpha x) e^{-\alpha w} dw \right] d\alpha. \quad (70)$$

Como $|\operatorname{sen}(\alpha x) e^{-\alpha w}| \leq e^{-\alpha w}$ para todo $\alpha \geq 0$, pelo critério M de Weierstrass, a integral dada pela Eq. (67) converge uniformemente com respeito α (HAASER; SULLIMAN, 1977, p. 569). Logo podemos inverter a ordem de integração no último termo da Eq. (70) que combinada com a Eq. (67) tem-se

$$\int_y^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \operatorname{sen}(\alpha x) e^{-\alpha w} d\alpha \right) dw = \int_y^{\infty} \frac{x}{x^2 + w^2} dw. \quad (71)$$

No Apêndice pode ser visto outra prova da inversão da ordem de integração da integral dupla da Eq. (70), com base no estabelecido por Churchill (1972, p. 65).

Finalmente, integrando do lado direito da Eq. (71) por meio de substituição do tipo $\theta = \frac{y}{x}$ obtemos

$$\int_y^{\infty} \frac{x}{x^2 + w^2} dw = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{\frac{y}{x}}^M \frac{1}{1 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right). \quad (72)$$

Portanto, concluímos que

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x) e^{-\alpha y}}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right). \quad (73)$$

Fazendo $y=0$ na Eq. (73) tem-se a integral (I) (outras duas formas de determinar a integral (74) estão no anexo B), dada por

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2}. \quad (74)$$

Portanto, das Eqs. (64), (73) e (74) resulta a função de representação da distribuição de temperaturas na região $\Omega = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 / 0 < x < \infty, 0 < y < \infty\}$ dada por

$$u(x, y) = \frac{2a}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right). \quad (75)$$

Convém notar que a escolha da direção x ou y para a aplicação de \mathfrak{F}_s é importante. De fato, se tivéssemos usado \mathfrak{F}_s com relação a variável y , na Eq. (53) obteríamos uma equação diferencial linear homogênea na variável x da mesma forma que a Eq. (57) apenas trocando os pares (α, y) por (x, α) e dy por dx . Embora a equação diferencial homogênea resultante fosse desejável, a transformada de Fourier em seno na direção vertical, é dada por uma integral imprópria divergente, $U_s(0, \alpha) = a \int_0^{\infty} \text{sen}(k\alpha) d\alpha$. Também pode ser notado, que mesmo usando a transformada de Fourier em seno na variável x , a representação para $u(x, y)$ dada pela transformada inversa em seno, \mathfrak{F}_s^{-1} na Eq. (63) não é consistente com a condição de contorno vertical dada pela Eq. (54), ou seja, $u(0, y) = a$. Daí, a exigência de \mathfrak{F}_s^{-1} ter sido definida a partir de $x > 0$, o que implica que a integral dada pela Eq. (64) não tem convergência uniforme em $x = 0$, indicando desse modo, certa desvantagem do método.

A solução dada pela Eq. (75) é a única (PERLA MENZALA, 1977, p. 91). E a Eq. (75) atende as condições da equação de Laplace estipuladas na seção 4.2. De fato, o cálculo de u_{xx} e u_{yy} na região Ω são dadas por

$$u_{xx} = \frac{4a}{\pi} \left(\frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \right) \quad \text{e} \quad u_{yy} = \frac{4a}{\pi} \left(\frac{-xy}{(x^2 + y^2)^2} \right) \quad (76)$$

Somando os termos em (76) resulta que

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (77)$$

Logo $u(x, y)$ satisfaz a equação de Laplace em Ω . Além disso, tem-se

$$u(x, 0) = \frac{2a}{\pi} \text{arctg} \left(\frac{0}{x} \right) = 0 \quad (78)$$

e

$$u(0, y) = \frac{2a}{\pi} \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{2a}{\pi} \frac{\pi}{2} = a \quad (79)$$

Também podemos notar que a solução é limitada em Ω .

$$|u(x, y)| = \frac{2a}{\pi} \left| \text{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) \right| < \frac{2a}{\pi} \frac{\pi}{2} = a. \quad (80)$$

Por outro lado, $u(x, y)$ satisfaz a condição: $\nabla u \rightarrow 0$, quando $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$, pois

$$\lim_{x^2 + y^2 \rightarrow \infty} \nabla u(x, y) = \lim_{x^2 + y^2 \rightarrow \infty} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = (0, 0). \quad (81)$$

A Figura (3) mostra algumas isotermas (semirretas) de temperatura obtidas da Eq. (80) fazendo $u(x, y) = c$ e $a = 1$, com c sendo uma constante real positiva. Pode ser notado que as isotermas próximas do eixo vertical têm temperaturas mais elevadas, o que era de se esperar.

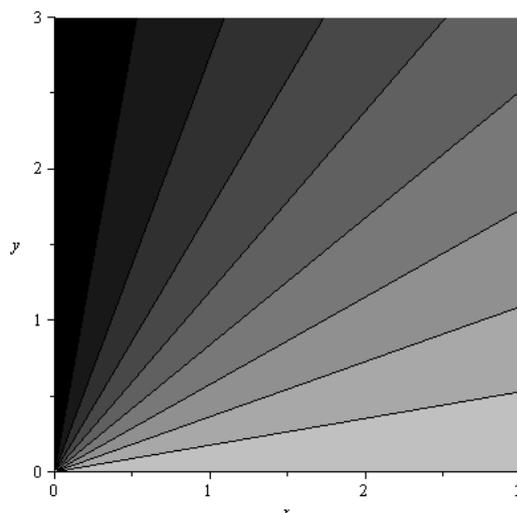


Figura 3: Isotermas de temperaturas $\frac{2a}{\pi} \arctg\left(\frac{y}{x}\right) = c$, onde c é uma constante positiva.

O problema de distribuição de temperaturas analisado nesse trabalho à luz da transformada de Fourier em seno, pode ser considerado uma extensão do problema de Dirichlet em um retângulo (BOYCE; DIPRIMA, 1999, p. 425) que consiste em encontrar uma solução da equação de Laplace, com valores dados dessa função na fronteira do retângulo.

Esse tipo de problema, conhecido como problema de Dirichlet pode ser também, e o é comumente resolvido, pelo método de separação de variáveis e séries de Fourier envolvendo uma série trigonométrica de infinitos termos (IÓRIO, 1991, p. 157-159), ou ainda usando resolução numérica que consiste na discretização do domínio de interesse dividindo-o em células elementares gerando um sistema de equações algébricas derivado da equação de Laplace, onde a ordem desse sistema depende do número de pontos de discretização, e que em geral são resolvidas computacionalmente (MALISKA, 1995, p. 25).

Outro método, muito utilizado para resolver equações diferenciais parciais, é conhecido como transformada dupla de Laplace (DEBNATH, 2016, p. 225). Tal método consiste essencialmente em aplicar a transformada dupla de Laplace diretamente na equação diferencial utilizando em geral, tabelas dessas transformadas, que são elaboradas a partir de tabelas padrões da transformada de Laplace ou pelo uso direto da definição (DEBNATH, 2016, p. 225-230). Depois disso, usam-se as condições suplementares do problema estudado, como por exemplo: condições de contorno, condição inicial, conhecimento de derivadas parciais ao longo das regiões de fronteira entre outras, para em seguida, aplicar a transformada dupla inversa de Laplace (DEBNATH, 2016, p. 225), de modo a obter (caso seja possível, devido ao processo de integração inerente ao método), a solução original.

Recentemente, Dhunde e Waghmare (2017, p. 14-20), usaram esse método em algumas equações conhecidas da física-matemática, obtendo soluções explícitas concisas para vários casos particulares. Também Debnath (2016, p. 223-241), utilizou esse método em cinco exemplos de equações diferenciais parciais, sendo um deles, um problema de condução de calor bidimensional com condição inicial e de fronteira, para a distribuição de temperaturas $u(x, y, t)$ em uma região restrita do primeiro quadrante.

O desenvolvimento da busca da solução para o problema de distribuição de temperaturas, $u(x, y)$ exposto na seção 4.2, por meio desse método, não foi o objetivo desse estudo, e nem das referências Debnath (2016, p. 223-241) e Dhunde e Waghmare (2017, p. 14-20).



5 Conclusões

As aplicações analisadas mostram que o cálculo de integrais impróprias da análise de Fourier em seno ou cosseno, foram obtidas mediante metodologias distintas, uma delas usando um formalismo algébrico e a outra utilizando o Teorema dos Resíduos de Cauchy. O problema da equação de Laplace que modela a distribuição de temperaturas em uma região bidimensional infinita com condições de Dirichlet foi resolvido detalhadamente, usando a transformada de Fourier em seno. Foi obtida e verificada uma solução analítica. Uma das integrais impróprias que aparece na resolução da equação de Laplace pode ser resolvida usando a análise complexa.

Bibliografia

- ARAÚJO, J. C.; MÁRQUEZ, R. G.; HUAROTO, Y. A. R. **Equações diferenciais ordinárias: teoria básica e aplicações com o uso do Maple**. Joinville: Ed. Clube de Autores, 2016.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.
- BROWN, K. W.; CHURCHILL R. V. **Variáveis complexas e aplicações**. 9. ed. Porto Alegre: McGraw Hill Education, 2015.
- CASTRO, A. S. Estados ligados em um potencial delta duplo via transformadas seno e cosseno de Fourier. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 36, n. 2, p. 1-5, 2014.
- CHURCHILL R. V. **Fourier series and boundary value problems**. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1963.
- CHURCHILL R. V. **Operational mathematics**. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1972.
- DEBNATH, L.; BHATTA, D. **Integral transforms and their applications**. 3. ed. Boca Raton: A Chapman & Hall Book, 2015.
- DEBNATH, L. The double Laplace transforms and their properties with applications to functional, integral and partial differential equations. **International Journal of Applied and Computational Mathematics**, v. 2, n. 2, p. 223-241, 2016.
- DHUNDE. R. R; WAGHMARE, G. L. Double Laplace transform method in mathematical physics. **International Journal of Theoretical and Mathematical Physics**. v. 7, n. 1, p. 14-20, 2017.
- HAASER, N. B.; LASALLE, J. P.; SULLIVAN, J. A. **Análisis matemático: curso intermedio**, México: Ed. Trillas, 1977. v. 2.
- IÓRIO, V. **EDP: um curso de graduação**. Rio de Janeiro: IMPA, 1991. (Coleção Matemática Universitária).
- MALISKA, R.; CLÓVIS. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. Rio de Janeiro: Editora LTC, 1995.
- NEGERO, N. T. Fourier transform methods for partial differential equations. **International Journal of Partial Differential Equations and Applications**, v. 2, n. 3, p. 44-57, 2014.



O'NEIL, P. **Beginning partial differential equations**. 3. ed. Indianapolis: Wiley, 2014.

PERLA MENZALA, G. Introdução às equações diferenciais parciais. In: COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA, 11., Poços de Caldas, 1977. **Anais...** Poços de Caldas: IMPA, 1977.

ROSENLICHT, W. Integration in finite terms. **The American Mathematical Monthly**, v. 79, n. 9, p. 963-972, 1972.



APÊNDICE

Neste Apêndice é justificado com o formalismo mínimo necessário duas passagens. No Apêndice A, a troca da ordem de integração na Eq. (70) e no Apêndice B é resolvida a integral dada na Eq. (66), de duas formas diferentes.

APÊNDICE A

Outro modo de se provar a troca da ordem de integração na Eq. (70) é dado a seguir.

Seja $F(\alpha) = \text{sen}(\alpha x)$. Logo, $F(\alpha)$ é contínua para todo $\alpha \geq 0$ e de ordem $e^{\alpha y}$. Daí, e usando Eq. (68) tem-se

$$f(y) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha y} \text{sen}(\alpha x) d\alpha = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (\text{a.1})$$

Onde a integral de Laplace dada pela Eq. (a.1) é segundo Churchill (1972, p. 65), uniformemente convergente para todo $y \geq 0$ e, desse modo, a ordem de integração da integral dupla dada por

$$\int_0^{\infty} \left[\int_y^{\infty} \text{sen}(\alpha x) e^{-\alpha w} dw \right] d\alpha, \quad (\text{a.2})$$

pode ser trocada, isto é,

$$\int_0^{\infty} \left[\int_y^{\infty} \text{sen}(\alpha x) e^{-\alpha w} dw \right] d\alpha = \int_y^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \text{sen}(\alpha x) e^{-\alpha w} d\alpha \right] dw. \quad (\text{a.3})$$

Reobtendo desse modo a Eq. (70).

APÊNDICE B

Veremos duas outras formas de resolver a integral (I) dada por $\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(\alpha x)}{\alpha} d\alpha$.

B₁) Considere a função complexa

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + b^2}. \quad (\text{b.1})$$

Multiplicando ambos os lados da Eq. (b.1) pelo fator $e^{i\alpha z}$ têm-se

$$f(z) e^{i\alpha z} = \frac{z e^{i\alpha z}}{z^2 + b^2} = \frac{\phi(z)}{z - ib}, \quad (\text{b.2})$$

Da Eq. (b.2) resulta que

$$\phi(z) = \frac{z e^{i\alpha z}}{z + ib}. \quad (\text{b.3})$$

Pelo Teorema 3 a função $\phi(z)$ é analítica e não nula no polo $z_0 = ib$ que é uma singularidade de $f(z) e^{i\alpha z}$. Essa singularidade encontra-se no interior da região limitada cuja fronteira consiste no segmento, $-R \leq x \leq R$ (com $R > |z_0| = \sqrt{b}$) do eixo real e a metade superior do círculo $|z| = R$ de $z = -R$ até $z = R$ (C_R), tornando o caminho orientado positivamente. Usando o Teorema 2 (Teorema dos resíduos de Cauchy), segue que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x e^{i\alpha x}}{x^2 + b^2} dx = 2\pi i \phi(z_0) - \int_{C_R} f(z) e^{i\alpha z} dz, \quad (\text{b.4})$$

onde

$$\text{Res}(f(z) e^{i\alpha z}, z = z_0) = \phi(z_0) = \frac{e^{-\alpha b}}{2}. \quad (\text{b.5})$$

Se $z \in C_R$, $|z^2 + b^2| \geq |z|^2 - b^2 = R^2 - b^2$, fazendo a inversão da desigualdade tem-se que

$$\frac{1}{|z^2 + b^2|} \leq \frac{1}{R^2 - b^2}, \quad (\text{b.6})$$

ou ainda

$$|f(z) e^{i\alpha z}| = \left| \frac{z e^{i\alpha z}}{z^2 + b^2} \right| \leq \frac{\text{Re}^{-\alpha R}}{R^2 - b^2} = M_R. \quad (\text{b.7})$$

Para ver a desigualdade (b.7) observe que,

$$|e^{i\alpha z}| = |e^{i\alpha(x+iy)}| = e^{-\alpha y} |e^{i\alpha x}| \leq e^{-\alpha R}. \quad (\text{b.8})$$

Então considerando as partes imaginárias da Eq. (b.4) resulta

$$\int_{-R}^R \frac{x \text{sen}(\alpha x)}{x^2 + b^2} dx = \pi e^{-\alpha b} - \text{Im} \int_{C_R} f(z) e^{i\alpha z} dz. \quad (\text{b.9})$$

Da desigualdade (b.7) e do Teorema 4, tem-se que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{i\alpha z} dz = 0$. Daí, e da Eq. (b.9)

obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \text{sen}(\alpha x)}{x^2 + b^2} dx = \pi e^{-\alpha b}, \quad (\text{b.10})$$

ou, usando a paridade do integrando,

$$\int_0^{\infty} \frac{x \text{sen}(\alpha x)}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha b}. \quad (\text{b.11})$$

Ao fazer $b = 0$ na Eq. (b.11), e como $x > 0$, tem-se que

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(\alpha x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{b.12})$$

Fazendo uma troca nas variáveis pode-se obter a solução da integral procurada da integral (I), isto é,

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(\alpha x)}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{b.13})$$

B2) Observe que

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha y} \text{sen}(\alpha x) dy = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-\alpha y} \text{sen}(\alpha x)}{\alpha} \Big|_0^M \right) = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-\alpha M} \text{sen}(\alpha x)}{\alpha} + \frac{e^{-\alpha 0} \text{sen}(\alpha x)}{\alpha} \right), \quad (\text{b.14})$$

então quando M tende ao infinito tem-se

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha y} \operatorname{sen}(\alpha x) dy = \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{\alpha}. \quad (\text{b.15})$$

Integrando novamente a Eq. (b.15), em relação a ξ , segue que

$$\int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha y} \operatorname{sen}(\alpha x) dy \right] d\alpha = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{\alpha} d\alpha. \quad (\text{b.16})$$

Pelo critério M de Weirstrass, tem-se

$$\int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha y} \operatorname{sen}(\alpha x) dy \right] d\alpha = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha y} \operatorname{sen}(\alpha x) d\alpha \right] dy \quad (\text{b.17})$$

Agora, usando a integração por partes temos

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\alpha y} \operatorname{sen}(\alpha x) d\alpha &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M e^{-\alpha y} \operatorname{sen}(\alpha x) d\alpha = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left[-\frac{x e^{-My} \cos(My)}{x^2 + y^2} - \frac{y e^{-My} \operatorname{sen}(My)}{x^2 + y^2} + \frac{x \cos(0)}{x^2 + y^2} + \frac{x \operatorname{sen}(0)}{x^2 + y^2} \right], \end{aligned}$$

portanto,

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha y} \operatorname{sen}(\alpha x) d\alpha = \frac{x}{x^2 + y^2}. \quad (\text{b.18})$$

Integrando (b.18) em relação a y de zero a infinito e mudando a ordem de integração tem-se

$$\int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha y} \operatorname{sen}(\alpha x) d\alpha \right] dy = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha y} \operatorname{sen}(\alpha x) dy \right] d\alpha = \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2 + y^2} dy. \quad (\text{b.19})$$

De (b.15) e (b.19) podemos concluir que

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{\alpha} d\alpha = \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \lim_{M \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) \Big|_0^M = \lim_{M \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{M}{x} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{0}{x} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Artigo recebido em abr. 2017 e aceito em dez. 2017.