Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 11, dez. 2017
Edição Iniciação Científica

Identidades bi e tridimensionais para os números de Fibonacci na forma complexa

Two and three-dimensional identities of Fibonacci numbers in complex form

Rannyelly Rodrigues de Oliveira
Aluna do mestrado em Ensino de Ciências e Matemática do IFCE
nanny-rockstar@hotmail.com

Francisco Régis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE
fregis@ifce.edu.br

Rui Eduardo Brasileiro Paiva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE
rui.brasileiro@ifce.edu.br

Resumo

O modelo de Fibonacci tem sua gênese no problema sobre a reprodução de pares de coelhos imortais, proposto por Leonardo Pisano em 1202. Nos anos 60, as repercussões foram evidenciadas pela exuberância de modelos generalizados dessa sequência. Nesse sentido, este trabalho aborda uma discussão inerente às relações recorrentes bidimensionais e tridimensionais definidas a partir do modelo recursivo unidimensional $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \in \mathbb{N}$, para os valores iniciais definidos $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, e propostas no âmbito das pesquisas sobre o processo de complexificação da sequência de Fibonacci caracterizado pela inserção da unidade imaginária, do aumento dimensional e da correspondente representação algébrica. À vista disso, pretende-se descrever propriedades matemáticas dos números de Fibonacci $G(n,m)$ e $G(n,m,p)$ na forma complexa, discutidas por Harman (1981), que nos instigou a explorar identidades derivadas desse modelo, a fim de divulgar aspectos relevantes sobre a extensão da sequência de Fibonacci.
Palavras-chave: Sequência de Fibonacci. Forma complexa. Identidades bidimensionais. Identidades tridimensionais.

Abstract

The Fibonacci model has its genesis in the problem of reproduction of pairs of immortal rabbits, proposed by Leonardo Pisano in 1202. In the 1960s, the repercussions were evidenced by the exuberance of generalized models of this sequence. In this sense, this work addresses a discussion inherent to the recurrent two-dimensional and three-dimensional relations defined from the one-dimensional recursive model $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \in \mathbb{N}$, for the initial values defined $F_0 = 0$ and $F_1 = 1$, and proposed in the scope of research on the Fibonacci sequence complexation process characterized by the insertion of the imaginary unit, the dimensional increase and the corresponding algebraic representation. In view of this, we intend to describe mathematical properties of the Fibonacci numbers $G(n,m)$ and $G(n,m,p)$ in complex form, discussed by Harman (1981), who instigated us to explore identities derived from this model, In order to publicize relevant aspects about the extension of the Fibonacci sequence.
Keywords: Fibonacci sequence. Complex form. Two-dimensional identities. Three-dimensional identities.

1 Introdução

A sequência de Fibonacci surgiu a partir do problema sobre a reprodução de pares de coelhos imortais, proposto por Leonardo Pisano em 1202. Segundo Alves e Catarino (2017), essa sequência pode ser representada por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, com $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, que é uma relação unidimensional de segunda ordem, inicialmente, discutida pelo matemático francês François Édouard Anatole Lucas (1842 - 1891), que elaborou algumas identidades unidimensionais exploradas por Koshy (2001).

O início do processo evolutivo do modelo de Fibonacci é marcado pelo trabalho de Brother (1965), através da extensão da sequência para os números inteiros. Além do mais, outros autores também investigaram sobre o processo de generalização do modelo de Fibonacci, assim como Pethe e Horadam (1986) que apresentaram uma extensão do modelo, através dos números de Fibonacci/Gaussiano com suas relações de recorrência e identidades e o Berzsenyi (1977), o qual desenvolveu uma representação complexa da sequência por meio dos inteiros gaussianos.

Nesse sentido, o processo de complexificação da sequência de Fibonacci é associado à inserção da unidade imaginária, ao aumento dimensional e a sua correspondente representação algébrica. Dessa forma, serão discutidos aspectos inerentes às relações recorrentes e identidades bidimensionais e tridimensionais definidas a partir do modelo recursivo unidimensional $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, com os valores iniciais definidos $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

À vista disso, o artigo de Harman (1981) instiga a exploração de determinadas identidades bidimensionais, com duas variáveis m e n para os números $G(n,m)$, derivadas das relações recorrentes:$G(n+2,m) = G(n+1,m) + G(n,m)$ e $G(n,m+2) = G(n,m+1) + G(n,m)$, com os seguintes valores iniciais definidos: $G(0,0) = 0$, $G(1,0) = 1$, $G(0,1) = i$ e $G(1,1) = 1+i$, assim como as identidades, para os números $G(n,m,p)$, oriundas das relações de recorrência tridimensionais: $G(n+2,m,p) = G(n+1,m,p) + G(n,m,p)$, $G(n,m+2,p) = G(n,m+1,p) + G(n,m,p)$ e $G(n,m,p+2) = G(n,m,p+1) + G(n,m,p)$, com os seguintes valores iniciais definidos: $G(0,0,0) = 0$, $G(1,0,0) = 1$, $G(0,1,0) = i$, $G(0,0,1) = j$, $G(1,1,1) = 1+i+j$, $G(0,1,1) = i+j$, $G(1,0,1) = 1+j$ e $G(1,1,0) = 1+i$. Por conseguinte, Horadam (1993) aponta em seus artigos, a extensão dos números de Fibonacci propostos por Harman (1981) aos quaternions.

2 A sequência recorrente de Fibonacci e suas propriedades

A sequência de Fibonacci é definida recursivamente pela fórmula abaixo, sendo os dois primeiros termos $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

reescrita por: $F_{n+1} = F_{n+2} - F_n$. Em particular:

$$\begin{aligned}
F_1 &= F_2 \\
F_2 &= F_3 - F_1 \\
F_3 &= F_4 - F_2 \\
F_4 &= F_5 - F_3 \\
&\vdots \\
F_{2n-1} &= F_{2n} - F_{2n-2} \\
F_{2n} &= F_{2n+1} - F_{2n-1} \\
F_{2n+1} &= F_{2n+2} - F_{2n}
\end{aligned}$$

Isto posto, o próximo passo é listar interessantes identidades relacionadas com os números dessa sequência. Vejamos:

Identidade 1 *A soma dos números de Fibonacci, até a ordem* $2n$*, de índice ímpar pode ser descrita por*

$$\sum_{\ell=1}^{n} F_{2\ell-1} = F_{2n}.$$

Prova. Segue da apresentação dos números de Fibonacci, em sua forma reescrita, considerando apenas os termos de índice ímpar. Vejamos:

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{n} F_{2\ell-1} &= F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} \\
&= F_2 + (F_4 - F_2) + (F_6 - F_4) + (F_8 - F_6) + \cdots + (F_{2n} - F_{2n-2}) \\
&= F_{2n}.
\end{aligned}$$

■

Identidade 2 *A soma dos números de Fibonacci, até a ordem* $2n$*, de índice par e não nulo pode ser descrita por*

$$\sum_{\ell=1}^{n} F_{2\ell} = F_{2n+1} - 1.$$

Prova. Uma vez que $F_1 = 1$ temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{n} F_{2\ell} &= F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} \\
&= (F_3 - F_1) + (F_5 - F_3) + (F_7 - F_5) + \cdots + (F_{2n+1} - F_{2n-1}) \\
&= F_{2n+1} - F_1 \\
&= F_{2n+1} - 1.
\end{aligned}$$

■

Identidade 3 *A soma dos* n *primeiros números de Fibonacci, até a ordem* n*, de índice maior que zero pode ser descrita por*

$$\sum_{\ell=1}^{n} F_{\ell} = F_{n+2} - 1.$$

Prova. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{n} F_{\ell} &= F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_{n-1} + F_n \\
&= F_2 + (F_3 - F_1) + (F_4 - F_2) + (F_5 - F_3) + \cdots + (F_n - F_{n-2}) + (F_{n+1} - F_{n-1}) \\
&= F_{n+1} + F_n - F_1 \\
&= F_{n+2} - 1.
\end{aligned}$$

■

Identidade 4 *A soma dos n primeiros quadrados dos números de Fibonacci, de índice maior que zero, é descrita por*

$$\sum_{\ell=1}^{n} (F_\ell)^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$

Prova. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{n} F_\ell &= F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n{}^2 \\
&= F_1 \cdot F_2 + F_2 \cdot (F_3 - F_1) + F_3 \cdot (F_4 - F_2) + F_4 \cdot (F_5 - F_3) + \cdots + F_n \cdot (F_{n+1} - F_{n-1}) \\
&= F_1 \cdot F_2 + F_2 \cdot F_3 - F_2 \cdot F_1 + F_3 \cdot F_4 - F_3 \cdot F_2 + \cdots + F_n \cdot F_{n+1} - F_n \cdot F_{n-1} \\
&= F_n \cdot F_{n+1}.
\end{aligned}$$

■

Identidade 5 *A soma de seis números consecutivos de Fibonacci é divisível por quatro, podendo ser expressa por:*

$$\sum_{\ell=0}^{5} F_{n+\ell} = 4F_{n+4}.$$

Prova. De fato,

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^{5} F_{n+\ell} &= (F_n + F_{n+1}) + (F_{n+2} + F_{n+3}) + (F_{n+4} + F_{n+5}) \\
&= F_{n+2} + F_{n+4} + (F_{n+4} + F_{n+5}) \\
&= F_{n+2} + 2F_{n+4} + (F_{n+3} + F_{n+4}) \\
&= F_{n+2} + F_{n+3} + 3F_{n+4} \\
&= 4F_{n+4}.
\end{aligned}$$

■

Identidade 6 *A soma de dez números consecutivos de Fibonacci é divisível por onze, podendo ser expressa por:*

$$\sum_{\ell=0}^{9} F_{n+\ell} = 11F_{n+6}.$$

Prova. De fato,

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^{9} F_{n+\ell} &= (F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5}) + F_{n+6} + \cdots + F_{n+9} \\
&= 4F_{n+4} + F_{n+6} + F_{n+7} + F_{n+8} + F_{n+9} \\
&= 4F_{n+4} + F_{n+6} + 2(F_{n+7} + F_{n+8}) \\
&= 4F_{n+4} + F_{n+6} + 2F_{n+7} + 2(F_{n+6} + F_{n+7}) \\
&= 4F_{n+4} + 3F_{n+6} + 4F_{n+7} \\
&= 4F_{n+4} + 3F_{n+6} + 4(F_{n+5} + F_{n+6}) \\
&= 4F_{n+4} + 4F_{n+5} + 7F_{n+6} \\
&= 4F_{n+6} + 7F_{n+6} \\
&= 11F_{n+6}.
\end{aligned}$$

■

Antes de iniciarmos a seção subsequente, quando nos atemos aos elementos do tipo $a+bi$, em que a e b são termos da sequência de Fibonacci, de imediato, poderemos nos apropriar de uma notação geral da forma $F_n + F_{n+1}i$, para um índice $n \in \mathbb{N}$. O elemento que, eventualmente, chama atenção nesse caso, corresponde à presença da unidade imaginária $i^2 = -1$ e, assim, intuitivamente, passamos a exergá-la como um número complexo (de Fibonacci). Assim, doravante, abordaremos maiores elementos sobre este assunto.

3 Relações recorrentes bidimensionais e propriedades

No que segue, discutimos de modo pormenorizado determinadas propriedades inerentes as relações de recorrência ditas bidimensionais.

Definição 7 *Os números da forma $G(n,m)$ devem satisfazer às seguintes condições bidimensionais de recorrência: $G(n+2,m) = G(n+1,m) + G(n,m)$ e $G(n,m+2) = G(n,m+1) + G(n,m)$, com os seguintes valores iniciais definidos: $G(0,0) = 0$, $G(1,0) = 1$, $G(0,1) = i$ e $G(1,1) = 1+i$.*

Lema 8 *Valem as seguintes propriedades:*

(a) $G(n,0) = F_n$

(b) $G(0,m) = F_m \cdot i$

(c) $G(n,1) = F_n + F_{n+1} \cdot i$

(d) $G(1,m) = F_{m+1} + F_m \cdot i$

Prova. (a) Sendo $G(n+2,m) = G(n+1,m) + G(n,m)$ e os valores iniciais $G(0,0) = 0 = F_0$ e $G(1,0) = 1 = F_1$, basta aplicar o segundo princípio de indução sobre n na recorrência avaliada em $m = 0$. Com efeito, para $n = 0$ temos $G(2,0) = G(1,0) + G(0,0) = 1 = F_2$. Supondo que para $n = 1, \ldots, k-1$ vale, respectivamente, $G(3,0) = F_3, \ldots, G(k+1,0) = F_{k+1}$, então para $n = k$ temos:

$$\begin{aligned} G(k+2,0) &= G(k+1,0) + G(k,0) \\ &= F_{k+1} + F_k \\ &= (F_{k+2} - F_k) + F_k \\ &= F_{k+2} \end{aligned}$$

Portanto, segue-se que $G(n,0) = F_n$.

(b) Sendo $G(n,m+2) = G(n,m+1) + G(n,m)$ e os valores iniciais $G(0,0) = 0 = F_0$, $G(1,0) = 1 = F_1$ e $G(0,1) = i$, o resultado segue análogo ao item (a), aplicando o segundo princípio de indução sobre m na recorrência avaliada em $n = 0$.

(c) Sendo $G(n+2,m) = G(n+1,m) + G(n,m)$ e os valores iniciais $G(0,0) = 0 = F_0$, $G(1,0) = 1 = F_1$, $G(0,1) = i$ e $G(1,1) = 1+i$, o resultado segue análogo ao item (a), aplicando o segundo princípio de indução sobre n na recorrência avaliada em $m = 1$.

(d) Sendo $G(n,m+2) = G(n,m+1) + G(n,m)$ e os valores iniciais $G(0,0) = 0 = F_0$, $G(1,0) = 1 = F_1$, $G(0,1) = i$ e $G(1,1) = 1+i$, o resultado segue análogo ao item (a), aplicando o segundo princípio de indução sobre m na recorrência avaliada em $n = 1$. ■

Teorema 9 *Os números da forma $G(n,m)$ são descritos por $G(n,m) = F_n \cdot F_{m+1} + (F_{n+1} \cdot F_m) \cdot i$, para quaisquer $n,m \in \mathbb{N}$.*

Prova. Fixado um natural m qualquer, faremos a prova por indução sobre n. De fato, para $n = 0$ temos $G(0,m) = F_0 \cdot F_{m+1} + (F_1 \cdot F_m) \cdot i = F_m \cdot i$, que é verdadeiro pelo Lema 8, já que $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$. Ademais, supondo que para $n = 1, \ldots, k-1$ vale as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} G(1,m) &= F_1 \cdot F_{m+1} + (F_2 \cdot F_m) \cdot i \\ G(2,m) &= F_2 \cdot F_{m+1} + (F_3 \cdot F_m) \cdot i \\ &\vdots \\ G(k-2,m) &= F_{k-2} \cdot F_{m+1} + (F_{k-1} \cdot F_m) \cdot i \\ G(k-1,m) &= F_{k-1} \cdot F_{m+1} + (F_k \cdot F_m) \cdot i, \end{aligned}$$

vamos mostrar que, para $n = k$, também vale a igualdade $G(k,m) = F_k \cdot F_{m+1} + (F_{k+1} \cdot F_m) \cdot i$. Ora, mas pela Definição 7, podemos considerar a relação

$$\begin{aligned} G(k,m) &= G(k-1,m) + G(k-2,m) \\ &= F_{k-1} \cdot F_{m+1} + (F_k \cdot F_m) \cdot i + F_{k-2} \cdot F_{m+1} + (F_{k-1} \cdot F_m) \cdot i \\ &= (F_{k-1} + F_{k-2}) \cdot F_{m+1} + (F_k + F_{k-1}) \cdot F_m \cdot i \\ &= F_k \cdot F_{m+1} + (F_{k+1} \cdot F_m) \cdot i, \end{aligned}$$

o que é suficiente para provar o resultado. ∎

3.1 Identidades bidimensionais para os números de Fibonacci na forma complexa

De agora em diante exploraremos algumas identidades bidimensionais, constatando intrinsecas propriedades relacionadas com os números presentes na sequência de Fibonacci.

Identidade 10 *A soma dos números $G(n,m)$ de índice n ímpar pode ser descrita por*

$$\sum_{i=0}^{n} G(2i+1,m) = F_{2n+2} \cdot F_{m+1} + (F_{2n+3} - 1) \cdot F_m \cdot i.$$

Prova. Ora, $G(n+2,m) = G(n+1,m) + G(n,m) \Leftrightarrow G(n+1,m) = G(n+2,m) - G(n,m)$. Assim, em particular,

$$\begin{aligned} G(1,m) &= G(2,m) - G(0,m) \\ G(3,m) &= G(4,m) - G(2,m) \\ G(5,m) &= G(6,m) - G(4,m) \\ &\vdots \\ G(2n+1,m) &= G(2n+2,m) - G(2n,m). \end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue aplicando o Lema 8 e o Teorema 9 na seguinte soma telescópica:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{n} G(2\ell+1,m) &= G(1,m) + G(3,m) + G(5,m) + \cdots + G(2n+1,m) \\ &= G(2n+2,m) - G(0,m) \\ &= F_{2n+2} \cdot F_{m+1} + F_{2n+3} \cdot F_m \cdot i - F_m \cdot i \\ &= F_{2n+2} \cdot F_{m+1} + (F_{2n+3} - 1) \cdot F_m \cdot i. \end{aligned}$$

∎

Identidade 11 *A soma dos números $G(n,m)$ de índice n par e não nulo pode ser descrita por*

$$\sum_{\ell=1}^{n} G(2\ell,m) = (F_{2n+1}-1)\cdot F_{m+1} + (F_{2n+2}-1)\cdot F_m \cdot i.$$

Prova. Análogo à demonstração anterior, consideramos:

$$\begin{aligned} G(2,m) &= G(3,m)-G(1,m) \\ G(4,m) &= G(5,m)-G(3,m) \\ G(6,m) &= G(7,m)-G(5,m) \\ &\vdots \\ G(2n,m) &= G(2n+1,m)-G(2n-1,m). \end{aligned}$$

Agora, aplicando o Lema 8 e o Teorema 9 na seguinte soma telescópica:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{n} G(2\ell,m) &= G(2,m)+G(4,m)+G(6,m)+\cdots+G(2n,m) \\ &= G(2n+1,m)-G(1,m) \\ &= F_{2n+1}\cdot F_{m+1}+F_{2n+2}\cdot F_m\cdot i-(F_{m+1}+F_m\cdot i) \\ &= (F_{2n+1}-1)\cdot F_{m+1}+F_{2n+2}\cdot F_m\cdot i-F_m\cdot i \\ &= (F_{2n+1}-1)\cdot F_{m+1}+(F_{2n+2}-1)\cdot F_m\cdot i, \end{aligned}$$

donde segue o resultado. ■

Identidade 12 *A soma dos n primeiros números $G(n,m)$, com índice n maior que zero, pode ser descrita por*

$$\sum_{\ell=1}^{n} G(\ell,m) = (F_{n+2}-1)\cdot F_{m+1} + (F_{n+3}-2)\cdot F_m \cdot i.$$

Prova. Com efeito, $G(n+2,m) = G(n+1,m)+G(n,m) \Leftrightarrow G(n,m) = G(n+2,m)-G(n+1,m)$. Em particular,

$$\begin{aligned} G(1,m) &= G(3,m)-G(2,m) \\ G(2,m) &= G(4,m)-G(3,m) \\ G(3,m) &= G(5,m)-G(4,m) \\ &\vdots \\ G(n,m) &= G(n+2,m)-G(n+1,m). \end{aligned}$$

Novamente, o resultado segue aplicando o Lema 8 e o Teorema 9 na seguinte soma telescópica:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{n} G(\ell,m) &= G(1,m)+G(2,m)+G(3,m)+\cdots+G(n,m) \\ &= G(n+2,m)-G(2,m) \\ &= F_{n+2}\cdot F_{m+1}+F_{n+3}\cdot F_m\cdot i-(F_2\cdot F_{m+1}+F_3\cdot F_m\cdot i) \\ &= (F_{n+2}-1)\cdot F_{m+1}+(F_{n+3}-2)\cdot F_m\cdot i. \end{aligned}$$

■

Identidade 13 *A soma dos n primeiros quadrados dos números $G(n,m)$, com índice n maior que zero, é descrita por:*

$$\sum_{\ell=1}^{n}[G(\ell,m)]^2 = [(1-F_{n+1}\cdot F_{n+2})\cdot F_m^2 + F_n\cdot F_{n+1}\cdot F_{m+1}^2] + (F_{n+1}^2 + F_n\cdot F_{n+2} - 1)\cdot F_m\cdot F_{m+1}\cdot i.$$

Prova. Observando que $G(n,m)^2 = [G(n+1,m) - G(n-1,m)]\cdot G(n,m)$ para cada n inteiro positivo, então:

$$\begin{aligned}
G(1,m)^2 &= G(2,m)\cdot G(1,m) - G(0,m)\cdot G(1,m)\\
G(2,m)^2 &= G(3,m)\cdot G(2,m) - G(1,m)\cdot G(2,m)\\
G(3,m)^2 &= G(4,m)\cdot G(3,m) - G(2,m)\cdot G(3,m)\\
&\vdots\\
G(n,m)^2 &= G(n+1,m)\cdot G(n,m) - G(n-1,m)\cdot G(n,m).
\end{aligned}$$

Assim, temos a seguinte soma telescópica:

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{n}[G(\ell,m)]^2 &= G(1,m)^2 + G(2,m)^2 + \ldots + G(n,m)^2\\
&= G(n+1,m)\cdot G(n,m) - G(0,m)\cdot G(1,m). \qquad (1)
\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema 9 no resultado obtido em (1) obtemos a identidade

$$\sum_{\ell=1}^{n}[G(\ell,m)]^2 = [(1-F_{n+1}\cdot F_{n+2})\cdot F_m^2 + F_n\cdot F_{n+1}\cdot F_{m+1}^2] + (F_{n+1}^2 + F_n\cdot F_{n+2} - 1)\cdot F_m\cdot F_{m+1}\cdot i.$$

■

Identidade 14 *A soma de seis números $G(n,m)$ consecutivos é divisível por quatro, podendo ser representada por*

$$\sum_{\ell=0}^{5} G(n+\ell,m) = 4G(n+4,m).$$

Prova. De fato,

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^{5} G(n+\ell,m) &= G(n,m) + G(n+1,m) + \ldots + G(n+5,m)\\
&= (F_n + F_{n+1} + \ldots + F_{n+5})\cdot F_{m+1} + (F_{n+1} + F_{n+2} + \ldots + F_{n+6})\cdot F_m\cdot i\\
&= \left(\sum_{\ell=0}^{5} F_{n+\ell}\right)\cdot F_{m+1} + \left(\sum_{\ell=1}^{6} F_{n+\ell}\right)\cdot F_m\cdot i\\
&= 4F_{n+4}\cdot F_{m+1} + 4F_{n+5}\cdot F_m\cdot i\\
&= 4(F_{n+4}\cdot F_{m+1} + F_{n+5}\cdot F_m\cdot i)\\
&= 4G(n+4,m).
\end{aligned}$$

■

Identidade 15 *A soma de dez números $G(n,m)$ consecutivos é divisível por onze, podendo ser representada por*

$$\sum_{\ell=0}^{9} G(n+\ell,m) = 11G(n+6,m).$$

Prova. De fato,

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^{9} G(n+\ell,m) &= G(n,m)+G(n+1,m)+\ldots+G(n+9,m) \\
&= (F_n+F_{n+1}+\ldots+F_{n+9})\cdot F_{m+1}+(F_{n+1}+F_{n+2}+\ldots+F_{n+10})\cdot F_m\cdot i \\
&= \left(\sum_{\ell=0}^{9} F_{n+\ell}\right)\cdot F_{m+1}+\left(\sum_{\ell=1}^{10} F_{n+\ell}\right)\cdot F_m\cdot i \\
&= 11F_{n+6}\cdot F_{m+1}+11F_{n+7}\cdot F_m\cdot i \\
&= 11(F_{n+6}\cdot F_{m+1}+F_{n+7}\cdot F_m\cdot i) \\
&= 11G(n+6,m).
\end{aligned}$$

■

Na seção subsequente enunciaremos e demonstraremos alguns resultados primordiais para a discussão envolvendo os números da forma $G(n,m,p)$, com n,m,p naturais quaisquer, condicionados por determinadas relações de recorrências.

4 Relações recorrentes tridimensionais e propriedades

Nessa seção, seguindo a mesma perspectiva de antes, promovemos o estudo de relações generalizadas de recorrência tridimensional.

Definição 16 *Os números da forma $G(n,m,p)$ devem satisfazer às seguintes condições tridimensionais de recorrência: $G(n+2,m,p) = G(n+1,m,p)+G(n,m,p)$, $G(n,m+2,p) = G(n,m+1,p)+G(n,m,p)$ e $G(n,m,p+2) = G(n,m,p+1)+G(n,m,p)$, com os seguintes valores iniciais definidos: $G(0,0,0) = 0$, $G(1,0,0) = 1$, $G(0,1,0) = i$, $G(0,0,1) = j$, $G(1,1,1) = 1+i+j$, $G(0,1,1) = i+j$, $G(1,0,1) = 1+j$ e $G(1,1,0) = 1+i$.*

Lema 17 *Valem as seguintes propriedades:*

(a) $G(n,0,0) = F_n$

(b) $G(n,1,0) = F_n+F_{n+1}\cdot i$

(c) $G(n,0,1) = F_n+F_{n+1}\cdot j$

(d) $G(n,1,1) = F_n+F_{n+1}\cdot i+F_{n+1}\cdot j$

Prova. (a) Sendo $G(n+2,m,p) = G(n+1,m,p)+G(n,m,p)$ e os valores iniciais $G(0,0,0) = 0$ e $G(1,0,0) = 1$, basta aplicar o segundo princípio de indução sobre n na recorrência avaliada em $m = p = 0$. Com efeito, para $n = 0$ temos $G(2,0,0) = G(1,0,0)+G(0,0,0) = 1 = F_2$. Supondo que para $n = 1, \ldots, k-1$ vale, respectivamente, $G(3,0,0) = F_3, \ldots, G(k+1,0,0) = F_{k+1}$, então para $n = k$ temos:

$$\begin{aligned} G(k+2,0,0) &= G(k+1,0,0) + G(k,0,0) \\ &= F_{k+1} + F_k \\ &= (F_{k+2} - F_k) + F_k \\ &= F_{k+2} \end{aligned}$$

Portanto, segue-se que $G(n,0,0) = F_n$.

(b) Sendo $G(n+2,m,p) = G(n+1,m,p) + G(n,m,p)$ e os valores iniciais $G(1,1,0) = 1+i$ e $G(0,1,0) = i$, o resultado segue análogo ao item (a), aplicando o segundo princípio de indução sobre n na recorrência avaliada em $m = 1$ e $p = 0$.

(c) Sendo $G(n+2,m,p) = G(n+1,m,p) + G(n,m,p)$ e os valores iniciais $G(1,0,1) = 1+j$ e $G(0,0,1) = j$, o resultado segue análogo ao item (a), aplicando o segundo princípio de indução sobre n na recorrência avaliada em $m = 0$ e $p = 1$.

(d) Sendo $G(n+2,m,p) = G(n+1,m,p) + G(n,m,p)$ e os valores iniciais $G(0,1,1) = i+j$ e $G(1,1,1) = 1+i+j$, o resultado segue análogo ao item (a), aplicando o segundo princípio de indução sobre n na recorrência avaliada em $m = p = 1$. ■

Lema 18 *Valem as seguintes propriedades:*

(a) $G(0,m,0) = F_m \cdot i$

(b) $G(0,m,1) = F_m \cdot i + F_{m+1} \cdot j$

(c) $G(1,m,0) = F_{m+1} + F_m \cdot i$

(d) $G(1,m,1) = F_{m+1} + F_m \cdot i + F_{m+1} \cdot j$

Prova. (a) Sendo $G(n,m+2,p) = G(n,m+1,p) + G(n,m,p)$ e os valores iniciais $G(0,0,0) = 0$ e $G(0,1,0) = i$, basta aplicar o segundo princípio de indução sobre m na recorrência avaliada em $n = p = 0$. Com efeito, para $m = 0$ temos $G(0,2,0) = G(0,1,0) + G(0,0,0) = i = 1 \cdot i = F_2 \cdot i$. Supondo que para $m = 1, \ldots, k-1$ vale, respectivamente, $G(0,3,0) = F_3 \cdot i, \ldots, G(0,k+1,0) = F_{k+1} \cdot i$, então para $m = k$ temos:

$$\begin{aligned} G(0,k+2,0) &= G(0,k+1,0) + G(0,k,0) \\ &= F_{k+1} \cdot i + F_k \cdot i \\ &= [(F_{k+2} - F_k) + F_k] \cdot i \\ &= F_{k+2} \cdot i \end{aligned}$$

Portanto, segue-se que $G(0,m,0) = F_m \cdot i$.

(b) Sendo $G(n,m+2,p) = G(n,m+1,p) + G(n,m,p)$ e os valores iniciais, $G(0,0,1) = j$ e $G(0,1,1) = i+j$, o resultado segue análogo ao item (a), aplicando o segundo princípio de indução sobre m na recorrência avaliada em $n = 0$ e $p = 1$.

(*c*) Sendo $G(n,m+2,p) = G(n,m+1,p)+G(n,m,p)$ e os valores iniciais $G(1,0,0) = 1$ e $G(1,1,0) = 1+i$, o resultado segue análogo ao item (a), aplicando o segundo princípio de indução sobre m na recorrência avaliada em $n = 1$ e $p = 0$.

(*d*) Sendo $G(n,m+2,p) = G(n,m+1,p)+G(n,m,p)$ e os valores iniciais $G(1,0,1) = 1+j$ e $G(1,1,1) = 1+i+j$, o resultado segue análogo ao item (a), aplicando o segundo princípio de indução sobre m na recorrência avaliada em $n = p = 1$. ■

Lema 19 *Valem as seguintes propriedades:*

(a) $G(0,0,p) = F_p \cdot j$

(b) $G(0,1,p) = F_{p+1} \cdot i + F_p \cdot j$

(c) $G(1,0,p) = F_{p+1} + F_p \cdot j$

(d) $G(1,1,p) = F_{p+1} + F_{p+1} \cdot i + F_p \cdot j$

Prova. (a) Sendo $G(n,m,p+2) = G(n,m,p+1)+G(n,m,p)$ e os valores iniciais $G(0,0,0) = 0$ e $G(0,0,1) = j$, basta aplicar o segundo princípio de indução sobre p na recorrência avaliada em $n = m = 0$. Com efeito, para $p = 0$ temos $G(0,0,2) = G(0,0,1)+G(0,0,0) = j = 1\cdot j = F_2 \cdot j$. Supondo que para $p = 1,\ldots,k-1$ vale, respectivamente, $G(0,0,3) = F_3 \cdot j, \ldots, G(0,0,k+1) = F_{k+1} \cdot j$, então para $p = k$ temos:

$$\begin{aligned} G(0,0,k+2) &= G(0,0,k+1)+G(0,0,k) \\ &= F_{k+1} \cdot j + F_k \cdot j \\ &= [(F_{k+2}-F_k)+F_k] \cdot j \\ &= F_{k+2} \cdot j \end{aligned}$$

Portanto, segue-se que $G(0,0,p) = F_p \cdot j$.

(b) Sendo $G(n,m,p+2) = G(n,m,p+1)+G(n,m,p)$ e os valores iniciais, $G(0,1,0) = i$ e $G(0,1,1) = i+j$, o resultado segue análogo ao item (a), aplicando o segundo princípio de indução sobre p na recorrência avaliada em $n = 0$ e $m = 1$.

(c) Sendo $G(n,m,p+2) = G(n,m,p+2)+G(n,m,p)$ e os valores iniciais $G(1,0,0) = 1$ e $G(1,0,1) = 1+j$, o resultado segue análogo ao item (a), aplicando o segundo princípio de indução sobre p na recorrência avaliada em $n = 1$ e $m = 0$.

(d) Sendo $G(n,m,p+2) = G(n,m,p+1)+G(n,m,p)$ e os valores iniciais $G(1,1,0) = 1+i$ e $G(1,1,1) = 1+i+j$, o resultado segue análogo ao item (a), aplicando o segundo princípio de indução sobre p na recorrência avaliada em $n = m = 1$. ■

Teorema 20 *Os números da forma* $G(0,m,p)$ *são descritos por*

$$G(0,m,p) = (F_m \cdot F_{p+1}) \cdot i + (F_{m+1} \cdot F_p) \cdot j,$$

para quaisquer $m,p \in \mathbb{N}$.

Prova. Fixado $p \in \mathbb{N}$, faremos a demonstração por indução sobre m. Com efeito, para $m = 0$ temos:

$$\begin{aligned} G(0,0,p) &= (F_0 \cdot F_{p+1}) \cdot i + (F_1 \cdot F_p) \cdot j \\ &= F_p \cdot j, \end{aligned}$$

que é verdadeiro de acordo com o Lema 19, já que $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$. Supondo que para $m = 1, \ldots k-1$ vale as identidades:

$$\begin{aligned} G(0,1,p) &= (F_1 \cdot F_{p+1}) \cdot i + (F_2 \cdot F_p) \cdot j \\ G(0,2,p) &= (F_2 \cdot F_{p+1}) \cdot i + (F_3 \cdot F_p) \cdot j \\ &\vdots \\ G(0,k-2,p) &= (F_{k-2} \cdot F_{p+1}) \cdot i + (F_{k-1} \cdot F_p) \cdot j \\ G(0,k-1,p) &= (F_{k-1} \cdot F_{p+1}) \cdot i + (F_k \cdot F_p) \cdot j, \end{aligned}$$

vamos mostrar que para $m = k$ também vale a igualdade

$$G(0,k,p) = (F_k \cdot F_{p+1}) \cdot i + (F_{k+1} \cdot F_p) \cdot j.$$

Ora, mas pela Definição 16 podemos considerar a relação

$$\begin{aligned} G(0,k,p) &= G(0,k-1,p) + G(0,k-2,p) \\ &= [(F_{k-1} + F_{k-2}) \cdot F_{p+1}] \cdot i + [(F_k + F_{k-1}) \cdot F_p] \cdot j \\ &= (F_k \cdot F_{p+1}) \cdot i + (F_{k+1} \cdot F_p) \cdot j, \end{aligned}$$

donde segue o resultado. ■

Teorema 21 *Os números da forma $G(n,m,p)$ são descritos por*

$$G(n,m,p) = F_n \cdot F_{m+1} \cdot F_{p+1} + (F_{n+1} \cdot F_m \cdot F_{p+1}) \cdot i + (F_{n+1} \cdot F_{m+1} \cdot F_p) \cdot j,$$

para quaisquer $n, m, p \in \mathbb{N}$.

Prova. Fixados naturais m e p quaisquer, faremos a prova por indução sobre n. De fato, para $n = 0$ temos

$$\begin{aligned} G(0,m,p) &= F_0 \cdot F_{m+1} \cdot F_{p+1} + (F_1 \cdot F_m \cdot F_{p+1}) \cdot i + (F_1 \cdot F_{m+1} \cdot F_p) \cdot j \\ &= (F_m \cdot F_{p+1}) \cdot i + (F_{m+1} \cdot F_p) \cdot j, \end{aligned}$$

que é verdadeiro pelo Teorema 20, já que $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$. Ademais, supondo que para $n = 1, \ldots, k-1$ vale as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} G(1,m,p) &= F_1 \cdot F_{m+1} \cdot F_{p+1} + (F_2 \cdot F_m \cdot F_{p+1}) \cdot i + (F_2 \cdot F_{m+1} \cdot F_p) \cdot j \\ G(2,m,p) &= F_2 \cdot F_{m+1} \cdot F_{p+1} + (F_3 \cdot F_m \cdot F_{p+1}) \cdot i + (F_3 \cdot F_{m+1} \cdot F_p) \cdot j \\ &\vdots \\ G(k-2,m,p) &= F_{k-2} \cdot F_{m+1} \cdot F_{p+1} + (F_{k-1} \cdot F_m \cdot F_{p+1}) \cdot i + (F_{k-1} \cdot F_{m+1} \cdot F_p) \cdot j \\ G(k-1,m,p) &= F_{k-1} \cdot F_{m+1} \cdot F_{p+1} + (F_k \cdot F_m \cdot F_{p+1}) \cdot i + (F_k \cdot F_{m+1} \cdot F_p) \cdot j, \end{aligned}$$

vamos mostrar que, para $n=k$, também vale a igualdade

$$G(k,m,p) = F_k \cdot F_{m+1} \cdot F_{p+1} + (F_{k+1} \cdot F_m \cdot F_{p+1}) \cdot i + (F_{k+1} \cdot F_{m+1} \cdot F_p) \cdot j.$$

Ora, mas pela Definição 16, podemos considerar a relação

$$\begin{aligned} G(k,m,p) &= G(k-1,m,p) + G(k-2,m,p) \\ &= (F_{k-1}+F_{k-2}) \cdot F_{m+1} \cdot F_{p+1} + [(F_k+F_{k-1}) \cdot F_m \cdot F_{p+1}] \cdot i + [(F_k+F_{k-1}) \cdot F_{m+1} \cdot F_p] \cdot j \\ &= F_k \cdot F_{m+1} \cdot F_{p+1} + (F_{k+1} \cdot F_m \cdot F_{p+1}) \cdot i + (F_{k+1} \cdot F_{m+1} \cdot F_p) \cdot j, \end{aligned}$$

o que é suficiente para provar o resultado. ■

4.1 Identidades tridimensionais para os números de Fibonacci na forma complexa

Doravante passaremos a explorar algumas identidades tridimensionais, constatando mais uma vez, intrínsecas propriedades relacionadas com os números presentes na sequência de Fibonacci.

Identidade 22 *A soma dos números $G(n,m,p)$ de índice n ímpar pode ser descrita por*

$$\sum_{\ell=0}^{n} G(2\ell+1,m,p) = F_{2n+2} \cdot F_{m+1} \cdot F_{p+1} + (F_{2n+3}-1) \cdot F_m \cdot F_{p+1} \cdot i + (F_{2n+3}-1) \cdot F_{m+1} \cdot F_p \cdot j.$$

Prova. Ora, de acordo com a Definição 16 temos:

$$G(n+2,m,p) = G(n+1,m,p) + G(n,m,p) \Leftrightarrow G(n+1,m,p) = G(n+2,m,p) - G(n,m,p).$$

Assim, em particular,

$$\begin{aligned} G(1,m,p) &= G(2,m,p) - G(0,m,p) \\ G(3,m,p) &= G(4,m,p) - G(2,m,p) \\ G(5,m,p) &= G(6,m,p) - G(4,m,p) \\ &\vdots \\ G(2n+1,m,p) &= G(2n+2,m,p) - G(2n,m,p). \end{aligned}$$

Portanto, faz sentido considerar a seguinte soma telescópica:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{n} G(2\ell+1,m,p) &= G(1,m,p) + G(3,m,p) + G(5,m,p) + \cdots + G(2n+1,m,p) \\ &= G(2n+2,m,p) - G(0,m,p). \qquad (2) \end{aligned}$$

O resultado segue aplicando os Teoremas 20 e 21 na igualde (2). ■

Identidade 23 *A soma dos números $G(n,m,p)$ de índice n par e não nulo pode ser descrita por*

$$\sum_{\ell=1}^{n} G(2\ell,m,p) = (F_{2n+1}-1) \cdot F_{m+1} \cdot F_{p+1} + (F_{2n+2}-1) \cdot F_m \cdot F_{p+1} \cdot i + (F_{2n+2}-1) \cdot F_{m+1} \cdot F_p \cdot j.$$

Prova. Análogo à demonstração anterior, consideramos:

$$\begin{aligned}
G(2,m,p) &= G(3,m,p)-G(1,m,p)\\
G(4,m,p) &= G(5,m,p)-G(3,m,p)\\
G(6,m,p) &= G(7,m,p)-G(5,m,p)\\
G(2n,m,p) &= G(2n+1,m,p)-G(2n-1,m,p).
\end{aligned}$$

Agora, consideramos a seguinte soma telescópica:

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{n} G(2\ell,m,p) &= G(2,m,p)+G(4,m,p)+G(6,m,p)+\cdots+G(2n,m,p)\\
&= G(2n+1,m,p)-G(1,m,p). \qquad (3)
\end{aligned}$$

E mais uma vez o resultado segue aplicando o Teorema 21, agora na igualdade (3) acima. ■

Identidade 24 *A soma dos n primeiros números $G(n,m,p)$ com índice n maior que zero pode ser descrita por*

$$\sum_{\ell=1}^{n} G(\ell,m,p) = (F_{n+2}-1)\cdot F_{m+1}\cdot F_{p+1}+(F_{n+3}-2)\cdot F_m\cdot F_{p+1}\cdot i+(F_{n+3}-2)\cdot F_{m+1}\cdot F_p\cdot j.$$

Prova. Com efeito,

$$G(n+2,m,p)=G(n+1,m,p)+G(n,m,p) \Leftrightarrow G(n,m,p)=G(n+2,m,p)-G(n+1,m,p).$$

Em particular,

$$\begin{aligned}
G(1,m,p) &= G(3,m,p)-G(2,m,p)\\
G(2,m,p) &= G(4,m,p)-G(3,m,p)\\
G(3,m,p) &= G(5,m,p)-G(4,m,p)\\
&\ \vdots\\
G(n,m,p) &= G(n+2,m,p)-G(n+1,m,p).
\end{aligned}$$

Decorre disso a seguinte soma telescópica:

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{n} G(\ell,m,p) &= G(1,m,p)+G(2,m,p)+G(3,m,p)+\cdots+G(n,m,p)\\
&= G(n+2,m,p)-G(2,m,p). \qquad (4)
\end{aligned}$$

Novamente, o resultado segue aplicando o Teorema 21 na igualdade (4) acima. ■

Identidade 25 *A soma dos n primeiros quadrados dos números $G(n,m,p)$, com índice n maior que zero, é descrita por:*

$$\sum_{\ell=1}^{n}[G(\ell,m,p)]^2 = A+(F_n\cdot F_{n+2}+F_{n+1}^2-1)(B\cdot i+C\cdot j)+(F_{n+1}\cdot F_{n+2}-1)\cdot(D\cdot i\cdot j+E\cdot j^2),$$

onde:

$$\begin{cases}
A = ({F_m}^2+F_n\cdot F_{n+1}\cdot F_{m+1}^2-F_{n+1}\cdot F_{n+2}\cdot F_m^2)\cdot F_{p+1}^2\\
B = F_m\cdot F_{m+1}\cdot F_{p+1}^2\\
C = F_{m+1}^2\cdot F_p\cdot F_{p+1}\\
D = 2\cdot F_m\cdot F_{m+1}\cdot F_{p+1}\cdot F_p\\
E = F_{m+1}^2\cdot F_p^2
\end{cases}$$

Prova. Observando que $[G(n,m,p)]^2 = [G(n+1,m,p) - G(n-1,m,p)] \cdot G(n,m,p)$ para cada n inteiro positivo, então:

$$\begin{aligned}
G(1,m,p)^2 &= G(2,m,p)\cdot G(1,m,p) - G(0,m,p)\cdot G(1,m,p)\\
G(2,m,p)^2 &= G(3,m,p)\cdot G(2,m,p) - G(1,m,p)\cdot G(2,m,p)\\
G(3,m,p)^2 &= G(4,m,p)\cdot G(3,m,p) - G(2,m,p)\cdot G(3,m,p)\\
&\vdots\\
G(n,m,p)^2 &= G(n+1,m,p)\cdot G(n,m,p) - G(n-1,m,p)\cdot G(n,m,p).
\end{aligned}$$

Assim, temos a seguinte soma telescópica:

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{n}[G(\ell,m,p)]^2 &= G(1,m,p)^2 + G(2,m,p)^2 + \ldots + G(n,m,p)^2\\
&= G(n+1,m,p)\cdot G(n,m,p) - G(0,m,p)\cdot G(1,m,p). \qquad (5)
\end{aligned}$$

Aplicando os Teoremas 20 e 21 no resultado obtido em (4) obtemos a identidade desejada. ■

Identidade 26 *A soma de seis números $G(n,m,p)$ consecutivos é divisível por quatro, podendo ser representada por*

$$\sum_{\ell=0}^{5} G(n+\ell,m,p) = 4G(n+4,m,p).$$

Prova. De fato,

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^{5} G(n+\ell,m,p) &= G(n,m,p) + G(n+1,m,p) + \ldots + G(n+5,m,p)\\
&= \left(\sum_{\ell=0}^{5} F_{n+\ell}\right)\cdot F_{m+1}\cdot F_{p+1} + \left(\sum_{\ell=1}^{6} F_{n+\ell}\right)\cdot F_m \cdot F_{p+1}\cdot i + \left(\sum_{\ell=1}^{6} F_{n+\ell}\right)\cdot F_{m+1}\cdot F_p \cdot j\\
&= 4F_{n+4}\cdot F_{m+1}\cdot F_{p+1} + 4F_{n+5}\cdot F_m\cdot F_{p+1}\cdot i + 4F_{n+5}\cdot F_{m+1}\cdot F_p\cdot j\\
&= 4(F_{n+4}\cdot F_{m+1}\cdot F_{p+1} + F_{n+5}\cdot F_m\cdot F_{p+1}\cdot i + F_{n+5}\cdot F_{m+1}\cdot F_p\cdot j)\\
&= 4G(n+4,m,p).
\end{aligned}$$

■

Identidade 27 *A soma de dez números $G(n,m,p)$ consecutivos é divisível por onze, podendo ser representada por*

$$\sum_{\ell=0}^{9} G(n+\ell,m,p) = 11G(n+6,m,p).$$

Prova. De fato,

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^{9} G(n+\ell,m,p) &= G(n,m,p) + G(n+1,m,p) + \ldots + G(n+9,m,p)\\
&= \left(\sum_{\ell=0}^{9} F_{n+\ell}\right)\cdot F_{m+1}\cdot F_{p+1} + \left(\sum_{\ell=1}^{10} F_{n+\ell}\right)\cdot F_m \cdot F_{p+1}\cdot i + \left(\sum_{\ell=1}^{10} F_{n+\ell}\right)\cdot F_{m+1}\cdot F_p \cdot j\\
&= 11F_{n+6}\cdot F_{m+1}\cdot F_{p+1} + 11F_{n+7}\cdot F_m\cdot F_{p+1}\cdot i + 11F_{n+7}\cdot F_{m+1}\cdot F_p\cdot j\\
&= 11(F_{n+6}\cdot F_{m+1}\cdot F_{p+1} + F_{n+7}\cdot F_m\cdot F_{p+1}\cdot i + F_{n+7}\cdot F_{m+1}\cdot F_p\cdot j)\\
&= 11G(n+6,m,p).
\end{aligned}$$

■

5 Conclusão

Neste trabalho, apresenta-se uma discussão direcionada ao processo de complexificação da sequência de Fibonacci, através de investigações em torno da inserção da unidade imaginária, do aumento dimensional e de suas correspondentes representações algébricas. Segundo Alves (2016) o modelo matemático $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n > 2$ pode ser compreendido como uma modelagem da reprodução de coelhos, um problema proposto por Leonardo Pisano em 1202.

À vista disso, a generalização do modelo de Fibonacci tem sua gênese no trabalho de Brother (1965), por intermédio da extensão da sequência para os números inteiros, assim, outros autores contribuíram para esse processo evolutivo, tais como Pethe e Horadam (1986) que apresentaram os números de Fibonacci/Gaussiano com suas relações de recorrência e identidades e o Berzsenyi (1977), que desenvolveu uma representação complexa da sequência com os inteiros gaussianos. Por conseguinte, neste artigo, partindo do modelo recursivo unidimensional $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \in \mathbb{N}$ com os valores iniciais definidos $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$ e de suas identidades Koshy (2001) elaboradas pelo matemático francês François Édouard Anatole Lucas (1842 - 1891), são exploradas as relações recorrentes e as identidades bidimensionais e tridimensionais descritas por Harman (1981), a fim de compreender aspectos relevantes sobre a complexificação do modelo de Fibonacci através de propriedades matemáticas inerentes aos números $G(n,m)$ e $G(n,m,p)$ na forma complexa.

6 Referências bibliográficas

[1] ALVES, F. R. V. Engenharia didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. **Educ. Matem. Pesq.**, v. 18, n. 1, p. 61-93, 2016.

[2] ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A classe dos polinômios bivariados de Fibonacci (PBF): elementos recentes sobre a evolução de um modelo. **Revista Thema**, v. 14, n. 1, p. 112-136, 2017.

[3] BERZSENYI, G. Gaussian Fibonacci numbers. **The Fibonacci Quarterly**, v. 15, n. 3, p. 233-236, 1977.

[4] BROTHER, U. A. Introduction of Fibonacci Discovery. S.I.: The Fibonacci Association, 1965. Disponível em: <http://www.fq.math.ca/Books/Complete/discovery.pdf>. Acesso em: 15 maio 2017.

[5] HARMAN. C. J. Complex Fibonacci numbers. **The Fibonacci Quarterly**, v. 19, n. 1, p. 82-86, 1981.

[6] HORADAM, A. F. Quaternion recurrence relations. **Ulam Quarterly**, v. 2, n. 2, p. 23-33, 1993.

[7] KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas numbers with appllications**. Wiley and Sons Publications, 2001.

[8] PETHE, S.; HORADAM, A. F. Generalized Gaussian Fibonacci numbers. **Bull. Aust. Math. Soc.**, v. 33, n. 1, p. 37-48, 1986.

Artigo recebido em maio 2017 e aceito em out. 2017.