Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 11, dez. 2017

# O que é um conjunto?

What is a set?

**Décio Krause**
Universidade Federal de Santa Catarina
krause.decio@ufsc.br

**Newton Carneiro Afonso da Costa**
Universidade Federal de Santa Catarina
ncacosta@terra.com.br

**Resumo**

Neste artigo, discutimos a noção de conjunto, desde sua concepção intuitiva como sendo uma coleção qualquer de objetos, os elementos desse conjunto, até a forma como essa noção é capturada nas diferentes teorias. Enfatiza-se que não há uma só teoria de conjuntos, mas (potencialmente) uma infinidade delas, muitas entre si não equivalentes. O que resulta é que não há um conceito absoluto de conjunto, um que coincida de alguma forma em todas essas teorias: o que é ou deixa de ser um conjunto depende da teoria considerada. Uma breve ideia do que sejam multiconjuntos e quase-conjuntos é apresentada ao final para enfatizar a tese principal.
**Palavras-chave:** Conjunto. Teorias de conjuntos. Teoria dos tipos. Multi-conjuntos. Quase-conjuntos.

**Abstract**

In this paper we discuss the notion of set, since its intuitive meaning, as a collection of objects whatever, the elements of the set, until the way this notion is captured in the different set theories. We emphasize that there is no just one set theory, but (potentially) infinitely many, most of them not equivalent one each other. It results that there is no an absolute concept of set, one that can be said to be the same in all theories: what is or not a set depends on the considered theory. A brief account on multisets and quasi-sets is given at the end to emphasize the main thesis of the paper.
**Keywords:** Set. Set theories. Type theory. Multisets. Quasi-sets.

# 1 Introdução

A noção intuitiva de conjunto é clara e simples: trata-se de uma coleção de objetos, que são os elementos do conjunto.

De acordo com Cantor, o criador da teoria (ver abaixo), "por um 'conjunto' [*Menge*] entendemos qualquer coleção, reunida em uma totalidade $M$ de objetos $m$ definidos e distintos (os quais são chamados de 'elementos' de $M$) de nossa intuição ou pensamento" (KRAUSE, 2002, p.73). Ou seja, qualquer coleção pode, em princípio, ser considerada como um conjunto. Sinônimos são coleção, agregado, classe.

Dizemos que os elementos de um conjunto a ele pertencem, ou que são seus membros. Se um objeto $a$ pertence a um conjunto $x$, escrevemos $a \in x$, e escrevemos $a \notin x$ em caso contrário.

Resulta da lógica clássica, que subjaz à teoria, que para quaisquer $a$ e $x$, sempre temos um dos casos: $a \in x$ ou $a \notin x$ (*Princípio do Terceiro Excluído*), e não se pode ter ambos (*Princípio da Contradição*).

A natureza dos objetos é também bastante geral, não havendo, em princípio, qualquer restrição relativa ao que possam ser os elementos de um conjunto.

Em princípio, nada impede que um dos elementos de um conjunto possa ser ele mesmo, assim, podemos ter, para um certo $x$, que $x \in x$ ou então, que $x \notin x$, tudo dependendo dos axiomas que adotemos.

Assim, de um ponto de vista intuitivo, podemos ter conjuntos cujos elementos são anjos, cadeiras, números irracionais, triângulos, o que quer que seja.

Um conjunto pode ter inclusive uma infinidade de elementos. O conjunto dos números naturais, por exemplo, que usualmente denominamos de $\mathbb{N}$, tem como elementos os números naturais $0, 1, 2, 3$, etc. (muitas vezes, 0 não é considerado um número natural — isso depende dos interesses do matemático). O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais também tem infinitos elementos, os quais podem ser identificados com os pontos de uma reta.

A noção informal de conjunto sempre esteve presente não só na matemática, mas na ciência em geral, e até o final do século XIX, não houve (aparentemente) necessidade de se refletir detalhadamente sobre esse conceito.

A situação começou a se alterar depois de Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918). Motivado por problemas em uma parte da matemática denominada de Análise Matemática, desenvolveu uma teoria desses conjuntos, e impôs apenas uma restrição para o que sejam os elementos de um conjuntos: eles devem ser distintos uns dos outros, como vimos na sua 'definição' acima.

Cantor criou uma teoria verdadeiramente genial, mostrando que há diversos tipos de conjuntos com infinitos elementos; há o conjunto dos números naturais (uma quantidade 'enumerável'), cuja quantidade de elementos, ou (mais precisamente) cardinal, denotava por $\aleph_0$ (alefe-zero, sendo alefe a primeira letra do alfabeto hebraico). Há o conjunto dos números reais, cujo cardinal é denotado por '$\mathfrak{c}$' (para indicar o 'contínuo'), e muitos outros conjuntos aos quais se associam cardinais.

Além de nos apresentar infinitos de diversas ordens, Cantor ainda criou uma álgebra de tais cardinais que tem propriedades distintas das da aritmética comum (só coincide com essa no caso de cardinais finitos, que são exatamente os números naturais); por exemplo, resulta que $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, o que contraria a álgebra dos números que conhecemos.

Uma observação digna de nota é a seguinte. Usualmente, encontramos nos livros de iniciação a afirmativa de que a relação de pertinência é primitiva, 'indefinível'. A rigor, isso não é certo.

O que pode ou não ser definido depende do sistema axiomático que se está utilizando. Se a pertinência for adotada como conceito primitivo, então ela de fato não é definida nessa abordagem. Mas podemos escolher outra na qual ela seja definida; por exemplo, tome-se o conjunto unitário (ver mais abaixo) como primitivo, ou seja, tomamos $\{x\}$ como primitivo, para $x$ qualquer. Assim, definimos a pertinência pondo $a \in x$ se e somente se $x = \{a\}$.

## 2 A teoria de Cantor

Na teoria de Cantor, dois conjuntos têm o mesmo número cardinal se existe uma correspondência um a um (que os matemáticos chamam de *bijeção*) entre eles.

Todos os conjuntos que admitem uma bijeção com o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais são ditos enumeráveis, e têm cardinal $\aleph_0$, o que não acontece com o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, como mostrou o próprio Cantor.

Um conjunto é contável de for finito ou enumerável.

Exemplos de conjuntos enumeráveis são o conjunto dos números naturais pares, o dos números naturais ímpares, o dos números inteiros, o dos números racionais (frações) e muitos outros.

Note que a intuição vai sendo deixada de lado: afinal o conjunto dos números pares não é um subconjunto do conjunto dos números naturais? Então, como podem ter 'o mesmo número de elementos?'. O problema é a noção intuitiva de 'mesmo número de elementos', que para conjuntos infinitos perde seu sentido, motivo pelo qual fala-se em número cardinal.

Assim, se $A$ e $B$ são dois conjuntos enumeráveis, como os conjuntos dos números pares e o dos números ímpares, a soma desses cardinais é o mesmo número cardinal para cada um deles, a saber, $\aleph_0$ (a definição de adição de cardinais, com efeito, tem que ser dada adequadamente).

Para saber se um certo objeto pertence ou não a um conjunto, há duas alternativas básicas: podemos simplesmente verificar se o referido objeto é um dos elementos, como quando o conjunto tem poucos elementos e eles são descritos explicitamente. A outra alternativa é verificar se o objeto satisfaz alguma propriedade característica dos elementos do conjunto; por exemplo, podemos definir um conjunto contendo como elementos os números naturais maiores do que 10. Assim, um certo objeto pertence a este conjunto se e somente se for um número natural maior do que 10.

A teoria de Cantor nos diz como operamos com conjuntos, fazendo uniões, interseções, diferenças, produtos cartesianos e outras operações, e por meio desses conceitos e operações, podemos exprimir praticamente todos os conceitos utilizados na matemática e na ciência padrões.

Um dos princípios básicos dessa teoria, que está implícito na teoria informal (não axiomatizada), denomina-se de *Princípio da Compreensão*, ou da Abstração: dada uma propriedade $P$ qualquer, existe o conjuntos dos objetos $x$ que têm a tal propriedade; escrevemos isso assim: $\{x : P(x)\}$, os dois pontos ':' significando 'tal que' (ou 'tais que').

Por exemplo, seja $P$ a propriedade, ou condição, que diz que '$x$ é carioca'. De imediato, somos levados ao conjunto dos cariocas, que chamaremos de $C$, ou seja, à coleção (conjunto) cujos elementos são aquelas pessoas e somente aquelas pessoas, denominadas de 'cariocas'.

É fácil entender que o próprio conjunto dos cariocas não é carioca (pois é o conjunto dos cariocas). Logo, constatamos que $C$ não pertence a $C$. Ou seja, há conjuntos que não pertencem a eles mesmos, e há os que pertencem, como o chamado 'conjunto universal', o conjunto que contém todos os conjuntos (que, por conter todos os conjuntos, contém a si próprio).

Bertrand Russell (1872-1970) percebeu que se chamarmos de $U$ ao conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos (como o conjunto $C$ do cariocas), acontece o seguinte:

pelo *Princípio do Terceiro Excluído*, $U$ pertence a $U$ ou $U$ não pertence a $U$. Se $U$ pertence a $U$, então possui a propriedade característica de seus elementos, que é de não pertencer a si mesmo. Logo $U$ não pertence a si mesmo. Assim, $U$ não pertence a $U$. Por outro lado, se $U$ não pertence a $U$, então possui a referida propriedade e pertence a $U$. Disso se deriva que $U$ pertence a $U$ e que não pertence a $U$, uma contradição.

Outros 'paradoxos' foram obtidos, mostrando-se que a teoria de Cantor é inconsistente, ou seja, permite que nela se derivem proposições contraditórias (uma sendo a negação da outra).

Alguns matemáticos, que não gostavam da teoria de conjuntos, vibraram. Outros, notando a extrema capacidade redutora da teoria, permitindo que os conceitos matemáticos fossem adequadamente definidos, preferiam seguir Hilbert, que sustentava o caráter duradouro da teoria de conjuntos, alegando que "ninguém nos expulsará do paraíso criado por Cantor".

Os motivos para tais desacordos eram diversos; alguns, como Kronecker (1823-1891) e Poincaré (1854-1912) achavam que não se podia retroceder, nos fundamentos da matemática, para aquém dos números naturais. A frase célebre de Kronecker, "Deus criou os números naturais; todo o resto é obra do homem" é bem conhecida. Ou seja, a matemática deveria partir dos números naturais, mas a teoria de Cantor permitia que eles fossem definidos em termos de conjuntos, apresentando assim uma fundamentação ainda mais primária.

A história da teoria de conjuntos é muito bem descrita por J. Dauben (1990).

# 3 Zermelo e Zermelo-Fraenkel

O que fazer para se contornar o problema dos paradoxos e para mostrar que a matemática podia ser fundamentada em bases sólidas?

Uma solução foi estabelecer uma fundamentação axiomática para a própria teoria de conjuntos, o que foi feito por Ernst Zermelo (1971-1953) em 1908. Alternativamente, Russell propôs a Teoria dos Tipos em 1908, que alicerça seu monumental *Principia Mathematica*, escrito em parceria com A. N. Whitehead (1861-1947), e publicado em três volumes (1910, 1912 e 1913). Essa teoria, que Russell classificava como "no class theory", não envolve conjuntos.

Há ainda outras alternativas para a fundamentação da matemática padrão sem que conjuntos sejam envolvidos: duas delas são a *teoria de categorias*, iniciada com S. Eilenberg (1913-1998) e S. Mac Lane (1909-2005) em 1945 (MARQUIS, c2016) e a *mereologia* criada por S. Lesniewski (1836-1939) (SIMONS, 2015); em nenhuma delas há conjuntos.

Zermelo apresentou a primeira versão axiomática da teoria de conjuntos, na qual se evitam os paradoxos conhecidos, como o apresentado por Russell, visto acima.

O problema é que a teoria de Zermelo não era suficientemente rigorosa, como se constatou em seguida.

A teoria original de Zermelo comportava duas espécies de entidades, os conjuntos e os átomos (ele se referia a eles como *Urelemente*). Ur-elementos, ou 'elementos básicos', como os denominamos, não são conjuntos, mas podem ser elementos de conjuntos.

Na teoria de Zermelo, conjuntos, portanto, podem ter átomos ou outros conjuntos como elementos. Como se constatou depois, na teoria de Zermelo não há qualquer restrição a que um conjunto pertença a ele mesmo, ou que haja cadeias de conjuntos pertencendo uns aos outros, como $x \in y \in z \in x$.

Para se evitar isso, necessita-se de um postulado, conhecido como Axioma da Regularidade (ou da Fundação), originalmente introduzido por J. von Neumann (1903-1957). Se não tivermos tal axioma, nada impede que um conjunto pertença a ele próprio.

A teoria de Zermelo foi incrementada por A. A. Fraenkel (1891-1965) e por T. Skolem (1887-1963) nas duas primeiras décadas do século XX, resultando na teoria conhecida como Zermelo-Fraenkel, simbolizada por ZF (mas deveria comportar ainda o nome de Skolem), e é talvez a mais conhecida e utilizada quando se necessita fazer referência a uma teoria de conjuntos.

Por exemplo, em ZF não há átomos; todos os objetos tratados pela teoria são conjuntos. Os axiomas de ZF são os seguintes (KRAUSE, 2002):

1. (Extensionalidade) Dois conjuntos que contêm os mesmos elementos são iguais.

2. (Par) Dados dois objetos (conjuntos) quaisquer $a$ e $b$, existe o conjunto (par não ordenado) que os contém e somente a eles, denotado por $\{a,b\}$. Em particular, se $a = b$, obtemos o conjunto cujo único elemento é $a$, dito unitário de $a$, e denotado por $\{a\}$.

3. (Separação) Dados um conjunto $z$ e uma propriedade ou condição $P(x)$, existe o subconjunto daqueles elementos de $z$ que cumprem a condição $P$, denotado por $\{x \in z : P(x)\}$. Assim, de um conjunto dado $z$ qualquer, mediante a propriedade $P(x)$ definida por $x \neq x$, obtemos o conjunto que não tem elementos (pois é um fato da lógica que todo objeto $x$ é tal que $x = x$), que se prova ser único. Tal conjunto é o conjunto vazio, denotado por $\emptyset$ (letra dos alfabetos norueguês e holandês).

4. (Conjunto das Partes) Dado um conjunto $x$ qualquer, existe o conjunto cujos elementos são os subconjuntos do conjunto dado, dito conjunto das partes do conjunto original, denotado $\mathscr{P}(x)$.

5. (Conjunto união) Dado um conjunto qualquer $x$, existe o conjunto cujos elementos são os elementos dos elementos de $x$, dito conjunto união de $x$, denotado $\bigcup(x)$.

6. (Infinito) Existe um conjunto que contém o conjunto vazio e que contém o 'sucessor conjuntista' de qualquer de seus elementos. O sucessor conjuntista de um conjunto $x$, denotado $x^+$ é o conjunto união de $x$ com o seu conjunto unitário, $\{x\}$, ou seja, $x^+ = x \cup \{x\}$.

7. (Substituição) Introduzido por Fraenkel, generaliza o axioma da separação, permitindo, dentre outras coisas, que este seja dele derivado.

O axioma da separação impede que surjam paradoxos como o de Russell e outros conhecidos, pois para formarmos o conjunto dos objetos que têm uma certa propriedade, devemos ter um conjunto previamente formado do qual os elementos são 'separados'.

No caso do conjunto de Russell, não há nada previamente especificado pela teoria de onde possamos 'separar' os conjuntos que não são elementos de si mesmos. Isso salva a teoria não só do paradoxo de Russell, como de todos os demais paradoxos conhecidos.

O problema de saber se pode-se ou não derivar contradições em uma teoria como ZF é de difícil resposta. Dito de modo breve, não se pode demonstrar tal fato, mas este assunto foge aos objetivos destas notas. No entanto, o leitor pode confortar-se sabendo que, se houver tal possibilidade, a 'real' derivação de uma contradição será muito difícil de ser alcançada, devida a um teorema genial de Fefferman (CORRADA, 1990).

Hoje, podemos reintroduzir ur-elementos em ZF sem problemas, obtendo uma teoria denominada de ZFU (Zermelo-Fraenkel com *Urelemente*), a qual parece ser mais apropriada para aplicações em ciência, onde trabalha-se com objetos que não são, em princípio, conjuntos, mas que podem ser elementos de conjuntos.

Isso captaria a ideia de que objetos físicos podem formar conjuntos mas não são, eles mesmos, conjuntos (o fato de um objeto físico poder ser composto de outros, como uma molécula de água ser composta de oxigênio e hidrogênio, não implica que a relação entre o oxigênio e a molécula seja a pertinência; para isso, é aparentemente mais adequado que se use algum tipo de mereologia, vulgarmente denominada de "lógica do todo e das partes", criada pelo matemático polonês S. Leśniewski (1886-1939). Assim, um átomo de oxigênio seria parte de uma molécula de água e a relação entre eles a de "parte de".).

As duas teorias, ZFC e ZFU, são equiconsistentes: uma delas leva a uma contradição se e somente se a outra também faz isso.

# 4 Outras teorias

Houve outros desenvolvimentos posteriores. von Neumann, na década de 20, desenvolveu uma teoria, posteriormente modificada por P. Bernays (1888-1977) e K. Gödel (1906-1978), que ficou conhecida como teoria de Von Neumann, Bernays e Godel (NBG) (KRAUSE, 2002, Sec. 5.3).

Em NBG, há classes e conjuntos, e estas duas palavras não são mais sinônimas; todos os conjuntos são classes, mas nem toda classe é um conjunto. Conjuntos são classes que pertencem a outras classes; aquelas classes que não pertencem a outras classes são chamadas de *classes próprias*.

Os conjuntos de NBG, de certo modo, coincidem com os de ZF. Em qualquer dessas teorias, podemos provar que não há conjunto universal, desde que essas teorias sejam consistentes.

A prova é simples. Seja $A$ um conjunto qualquer e seja $B$ um subconjunto de $A$ definido assim: os elementos de $B$ são aqueles elementos de $A$ que não pertencem a si mesmos. Então $B$ pertence a $B$ se e somente se pertence a $A$ e não pertence a si mesmo.

Desse modo, se $B$ pertence a $A$, deduzimos que $B$ pertence a $B$ se e somente se $B$ não pertence a $B$ e obtemos uma contradição nos moldes vistos acima.

A única saída é assumir que $B$ não pertence a $A$. Ora, isso mostra que, dado qualquer $A$, podemos sempre encontrar um conjunto que não pertença a ele. Logo, não há conjunto que contenha todos os conjuntos.

O filósofo Willard Quine (1906-2000) criou duas teorias, conhecidas como NF (porque foi publicada em um artigo que iniciava com as palavras "**N**ew **F**oundations") e ML (porque apareceu em seu livro Mathematical Logic), que diferem substancialmente de ZF e de NBG.

NF foi corrigida posteriormente por B. Rosser (1907-1989) e ML por H. Wang (1921-1995). Em NF, há conjunto universal, contrariamente a ZF (suposta consistente). ML é obtida acrescentando-se classes próprias a NF, de modo similar ao que se faz em ZF para obter NBG. Essas duas teorias têm propriedades distintas daquelas de ZF e de NBG (KRAUSE, 2002).

Apenas um exemplo: em NF, o célebre Axioma da Escolha é falso, mas em ML ele vale para conjuntos, e ninguém sabe se o axioma se aplica a classes próprias.

O axioma da escolha é independente dos axiomas de ZF e de NBG, se estes forem consistentes, ou seja, não pode ser demonstrado e nem refutado nessas teorias.

Apesar de mais famosas, essas teorias não são as únicas: há muitas outras teorias de conjuntos. Em cada uma delas um conceito de conjunto é delineado, e pode diferir daquele conceito que é delineado em outras teorias. Ou seja: *o que é conjunto em uma teoria pode não coincidir com o que é conjunto em outra*.

Por exemplo, mudando-se a lógica subjacente, mudamos de teoria, e utilizando uma lógica conveniente, podemos elaborar teorias paraconsistentes de conjuntos nas quais o conjunto dos conjuntos que não pertencem a si mesmos, por exemplo, têm existência estabelecida sem os problemas usuais (de uma contradição acarretar que todas as proposições formuladas na linguagem da teoria possam ser derivadas como teoremas) (DA COSTA; BÉZIAU; BUENO, 1998).

Cabe aqui uma observação importante. Do ponto de vista formal, podemos desenvolver uma teoria de conjuntos sem nos referirmos em nenhum momento à palavra 'conjunto'. Tal teoria seria abstrata, sem qualquer compromisso para com este conceito, ainda que pudesse ser interpretada como dizendo respeito a conjuntos, mas não os conteria em sua origem abstrata. Em outras palavras, o conceito de conjunto não é absoluto, mas relativo à particular teoria considerada.

## 4.1 Universos

Um outro modo de se estender a noção de conjuntos é por meio de *universos*.

Universos foram introduzidos por Alexander Grothendieck (1928-2014) para dar conta da *teoria de categorias* em um ambiente conjuntista, isto é, empregando os axiomas e a linguagem da teoria de conjuntos (Martin 1964).

Por simplicidade, vamos assumir ZFC. Um universo é um conjunto (não se deve interpretar essa palavra literalmente, pois $U$ não pode ser um conjunto *em* ZFC) $U$ que satisfaz as seguintes condições:

(i) se $x \in y$ e $y \in U$, então $x \in U$. Com isso, dizemos que $U$ é *transitivo*;

(ii) se $x, y \in U$, então $\{x, y\} \in U$;

(iii) se $x \in U$, então $\mathscr{P}(x) \in U$, e

(iv) se $(x_i)$, com $i \in I$ é uma família de elementos de $U$, então $\bigcup_{i \in I} x_i \in U$.

Podemos agora realizar todas as operações conjuntistas usuais (uniões, produtos cartesianos, tomar conjuntos das partes, etc.) sem medo de 'sairmos' do universo.

O importante é que em uma teoria de conjuntos com universos, podemos desenvolver a teoria de categorias, poisa gora entidades como 'a coleção de todos os grupos', 'a coleção de todos os espaços topológicos', que são categorias e não 'cabem em ZFC', podem agora ser tratados como elementos de um universo determinado.

Tais coleções são, portanto, conjuntos da teoria ampliada.

## 4.2 Multiconjuntos e quase-conjuntos

Vimos que em sua caracterização informal do conceito de conjunto, Cantor requereu que os elementos de um conjunto devem ser distintos uns dos outros.

Seria isso necessário? A resposta é negativa.

Na teoria de multiconjuntos (BLIZARD, 1989), um mesmo elemento pode figurar mais de uma vez em um conjunto. Nas teorias anteriores, os conjuntos $\{1, 1, 2, 3, 3\}$ e $\{1, 2, 3\}$ são iguais devido ao Axioma da Extensionalidade, pois têm os mesmos elementos, e seu cardinal é 3, pois têm três elementos.

Mas na teoria de multiconjuntos eles são diferentes; o primeiro tem cardinal 5, e o segundo tem cardinal 3. Assim, um conjunto na teoria de multiconjuntos (que muito apropriadamente chamamos de multiconjunto), os elementos não precisam ser distintos, podendo ser inclusive iguais.

Os quase-conjuntos, por outro lado, que são os ‘conjuntos’ na teoria de quase-conjuntos (FRENCH; KRAUSE, 2006), têm motivação em uma interpretação da mecânica quântica (MQ) relativista ou não-relativista, que entende as entidades básicas (que aqui denominaremos de partículas) como destituídas de condições de identidade.

‘Ter identidade’ significa, grosso modo, poder ser identificado em um contexto e em outros como sendo *o mesmo indivíduo*. Indivíduos são objetos que têm identidade nesse sentido.

Tome agora uma reação química simples, a combustão do metano, na qual um átomo de gás metano se mistura com dois átomos de oxigênio, fornecendo uma molécula de dióxido de carbono e duas moléculas de água; em termos químicos,

$$\mathrm{CH_4} + 2\mathrm{O_2} \rightarrow \mathrm{CO_2} + 2\mathrm{H_2O}.$$

Consideremos os quatro átomos de hidrogênio que há entre os reagentes e os quatro átomos de oxigênio também entre os reagentes (fixaremos os átomos de oxigênio, mas o raciocínio se aplica também para os átomos de hidrogênio, assim como para qualquer átomo, elétron, próton, etc.).

Após a reação, há dois átomos de oxigênio na molécula de dióxido de carbono e mais dois, um em cada molécula de água. Quais dos quatro que havia entre os reagentes estão em cada caso entre os resultantes? É impossível dizer. Não é nem mesmo possível dizer que se tratam dos mesmos átomos que havia entre os reagentes.

O conceito de identidade, como expresso acima, não pode fazer sentido para essas entidades. O interessante é que não se trata de uma falta de capacidade nossa ou de nossos laboratórios de identificar quais átomos foram para qual lugar. É um pressuposto da teoria que não pode haver identificação (SCHINAIDER; KRAUSE, 2014).

A teoria de quase-conjuntos trata de coleções de objetos que podem ser indiscerníveis sem que com isso resultem colapsar no mesmo indivíduo, como seria requisitado pela matemática usual, na qual não há entidades indiscerníveis que não sejam a mesma entidade.

O assunto é interessante mas extrapola os objetivos dessas notas. Porém, mostra mais uma vez a relatividade do conceito de conjunto.

# 5 Conclusões

É comum encontrarmos livros elementares, muitos adotados em nossas escolas, que consideram como um conjunto uma coleção de objetos, como bolas de futebol ou pessoas. É preciso cuidado aqui. Podemos fotografar bolas e pessoas, mas não podemos fotografar um conjunto. Enquanto bolas e pessoas supostamente são ‘reais’ (existindo no espaço e no temo), um conjunto é uma entidade abstrata.

Pelo menos os professores de matemática deveriam conhecer essa distinção fundamental, ainda que possam continuar a utilizar a noção informal com seus alunos em classes elementares.

No entanto, a aplicação desses conceitos ao mundo em que vivemos requer cuidado e muito preparo.

Quando dizemos que uma coleção de pessoas forma um conjunto, trata-se de um abuso de linguagem. O que queremos dizer é que *representamos* a coleção de pessoas por meio de conjuntos, que podem ter subconjuntos, correspondendo por exemplo aos das pessoas de sexo masculino e o das pessoas de sexo feminino. Mas a coleção de pessoas não é um conjunto.

Ainda que o conceito de conjunto seja importante e razoavelmente fácil de manusear, não constitui o único modo de se fundamentar a matemática.

Com efeito, a quase totalidade dos conceitos matemáticos que usamos podem ser obtidos na Teoria dos Tipos de Russell, ou na chamada Teoria de Categorias. Em tais teorias, como dito, não há conjuntos.

Como esperamos se evidenciou acima, não há *a* teoria de conjuntos, mas (potencialmente) uma infinidade delas. Assim, o que é ou deixa de ser um conjunto depende da teoria que se está utilizando; algo pode ser um conjunto em uma teoria, mas não em outra.

# 6 Referências bibliográficas


ARTIN, M.; GROTHENDIECK, A.; VERDIER, J. L. (Dir.). **Théorie des topos et cohomologie etale des schémas**. Berlin: Springer-Verlag, 1972. Disponível em: ⟨https://link.springer.com/book/10.1007/BFb0081551⟩. Acesso em: 10 nov. 2017.

BLIZARD, W. D. Multiset theory. **Notre Dame Journal of Formal Logic**, v. 3, n. 1, p. 36-66, 1989. Disponível em: ⟨https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.ndjfl/1093634995⟩. Acesso em: 8 nov. 2017.

CORRADA, M. On the length of proofs of set theoretical statements in Zermelo-Fraenkel set theory and Kelley-Morse theory of classes. **The Journal of Non-Classical Logic**, v. 7, n. 1/2, p. 139-143, 1990. Disponível em: ⟨http://www.cle.unicamp.br/jancl/logica/Nova%20pasta/Vol%207/Vol7part1-2/139a143.pdf⟩. Acesso em: 8 nov. 2017.

DA COSTA, N. C. A.; BÉZIAU, J.-Y.; BUENO, O. **Elementos para uma teoria paraconsistente de conjuntos**. Campinas: Unicamp, 1998. (Coleção CLE, v. 23).

DAUBEN, J. W. **Georg Cantor**: his mathematics and philosophy of the infinite. Princeton: Princeton University Press, 1990.

FRENCH, S. R. D.; KRAUSE, D. **Identity in physics**. Oxford: Claredon, 2006.

KRAUSE, D. **Introdução aos fundamentos axiomáticos da ciência.** São Paulo: EPU, 2002.

MARQUIS, J.-P. **Category theory**. In: STANFORD encyclopedia of philosophy. Stanford: Stanford University, c2016. Disponível em: ⟨https://plato.stanford.edu/entries/category-theory/⟩. Acesso em: 8 nov. 2017.

SCHINAIDER, J.; KRAUSE, D. Indiscernibilidade e identidade em química: aspectos filosóficos e formais. **Manuscrito**, v. 37, n. 1, p. 113-160, 2014.

SIMONS, P. **Stanislaw Lésniewski**. In: STANFORD encyclopedia of philosophy archive. Winter 2015 ed. Stanford: Stanford University, c2015. Disponível em: ⟨https://plato.stanford.edu/archives/win2015/entries/lesniewski⟩. Acesso em: 8 nov. 2017.



Artigo recebido em nov. 2017 e aceito em nov. 2017.