Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 11, dez. 2017
Edição Iniciação Científica

Marcelo Wachter Maroski
Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul - UNIJUÍ
marcelomaroski@gmail.com

Desenvolvimento de expressões algébricas para calcular o produto de dois termos consecutivos de progressões aritméticas e geométricas

Development of algebraic expressions to calculate the product of two consecutive terms of arithmetic and geometric progressions

Resumo

O presente artigo expõe os resultados de um breve estudo sobre progressões aritméticas e geométricas cujo objetivo é demonstrar a existência de uma determinada constante *c* em ambos os tipos de progressões, através da qual é possível desenvolver expressões algébricas para calcular o produto de dois termos consecutivos, conhecendo-se os primeiros termos e a razão. Para a demonstração de tais expressões, recorreu-se, em grande parte, à observação de padrões, sendo que a introdução deste artigo traz uma breve explanação sobre a importância que este tipo de raciocínio teve para o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos sobre sequências numéricas durante a história da humanidade. Dessa forma, nos itens 2, 3 e 4, procurou-se demonstrar a validade das expressões algébricas obtidas como resultados deste estudo, tendo por base os conhecimentos de progressões aritméticas e geométricas já formalizados e com o objetivo de enriquecer o estudo destes tópicos da Matemática.
Palavras-chave: Sequências Numéricas; Padrões; Expressões algébricas.

Abstract

This article presents the results of a brief study on arithmetic and geometric progressions whose purpose is to prove the existence of a certain *c* constant in both kinds of progressions, through which it is possible to develop algebraic expressions to calculate the product of two consecutive terms, knowing the first terms and the common difference. For to prove such expressions, resorted, in large part, to the observation of patterns, and the introduction of this article brings a brief explanation about the importance that this kind of reasoning was for the development of mathematical knowledge about number sequences for the history of mankind. Thus, on points 2, 3 and 4, sought to prove the validity of the algebraic expressions obtained as a result of this study, based on the knowledge of arithmetic and geometric progressions have formalized and aiming to enrich the study of these topics of Mathematics.
Keywords: Number sequences; Patterns; Algebraic expressions.

1 Introdução

Desde o surgimento das primeiras civilizações, o ser humano preocupa-se em observar regularidades e procurar padrões. Inicialmente, tal ação era uma questão de sobrevivência e estava relacionada ao comportamento da natureza, permitindo que o homem pudesse identificar, por exemplo, o padrão das fases lunares, que, posteriormente, foi entendido como fator de influência no cultivo de diferentes espécies vegetais.

Com a criação do sistema de numeração e o desenvolvimento das primeiras ideias matemáticas, o homem encontrou nos números uma rica fonte para observar regularidades e conjecturar sobre elas. Assim, as sequências numéricas passaram a figurar dentre os tópicos matemáticos que mais despertaram o interesse do ser humano.

Logo, os padrões numéricos passaram a ser associados a situações cotidianas, geralmente relacionadas à agricultura, ao comércio ou, até mesmo, a religião; como é o caso dos egípcios, que associavam ao Deus Hórus, tido como o deus do céu, a sequência:

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{64}\right)$$

Cada um dos números da sequência acima é uma fração do *hekat*, uma unidade de medida de volume de grãos, e constitui uma das partes do olho de Hórus (CARVALHO, 1997, p. 39), assim como está representado na figura 1:

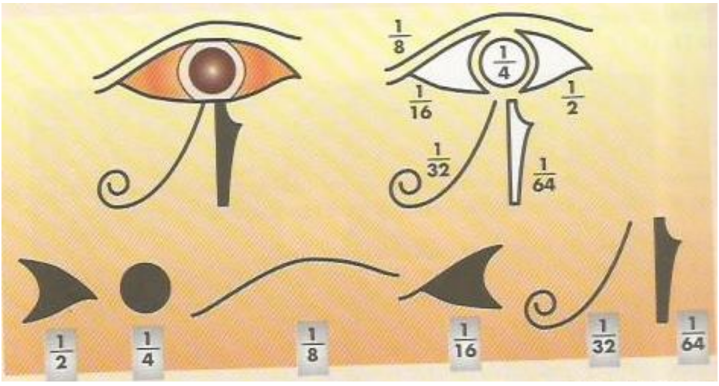

Figura 1 - Frações dos olhos de Hórus

Fonte: (CARVALHO, 1997, p. 39).

Outro povo que dedicava-se ao estudo das sequências numéricas era os hindus. No ano 499 da era cristã, o matemático Aryabhata escreveu sua obra mais conhecida: *Aryabhatiya*, que, segundo Boyer (1996, p. 144), "[...] é na verdade uma miscelânea de coisas simples e complexas, corretas e incorretas.". Uma parte do *Aryabhatiya* é dedicada ao estudo das progressões aritméticas e traz uma regra, no mínimo, curiosa para calcular o número de termos:

> Multiplique-se a soma da progressão por oito vezes a razão, some-se o quadrado da diferença entre duas vezes o primeiro termo e a razão, extraia-se a raiz quadrada

> disso, subtraia-se duas vezes o primeiro termo, divida-se pela razão, some-se um, divida-se por dois. O resultado será o número de termos. (BOYER, 1996, p. 144).

Analisando a regra apresentada, percebe-se o quão complexa e distante da realidade dos conhecimentos algébricos atuais ela é. Também pode-se afirmar que os hindus empregavam certo grau de generalização em seus trabalhos, embora não fizessem uso de uma linguagem algébrica ou simbólica para tal.

Avançando cerca de 700 anos, deparamo-nos com a obra *Tractatus de arte numerandi*, escrita entre 1225 e 1230 por Joannis de Sacro-Bosco. No capítulo VIII desta obra, Sacro-Bosco trata das progressões, classificando-as em naturais e intermitentes (SACRO-BOSCO, 1838, p. 18), que, na notação atual, seria equivalente a progressões aritméticas com razão igual a 1 e razão diferente de 1, respectivamente. Em seguida, Sacro-Bosco apresenta regras para a soma dos termos dos dois tipos de progressões citadas por ele, entretanto, assim como na obra de Aryabhata, não há nenhuma explicação do porquê de se utilizar tais regras.

Uma última obra que merece ser citada aqui é *Triparty en la Science des Nombres*, escrita no século XV pelo matemático Nicolas Chuquet. No terceiro capítulo desta obra, Chuquet trata das progressões dos números, trazendo a seguinte definição: “Progressão é certa sequência de números na qual o primeiro é excedido do segundo o mesmo tanto que o segundo é excedido do terceiro e assim segue para os demais.” (CHUQUET, 1881, p. 65, tradução nossa).

Ainda, Chuquet apresenta um método para calcular a soma dos termos de uma progressão que consiste em somar o primeiro termo ao último e dividir pela metade do número de termos. (CHUQUET, 1881, p. 66). Embora não seja usada a notação algébrica, a regra de Chuquet nada mais é do que a expressão para a soma dos termos de uma progressão aritmética utilizada atualmente.

Finalmente, chegamos aos conceitos contemporâneos trazidos por Iezzi e Hazzan (2013, p. 6) para a progressão aritmética (P.A.): “[...] uma P.A. é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante r dada.” e para a progressão geométrica (P.G.): “[...] uma P.G. é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do anterior por uma constante q dada.” (IEZZI; HAZZAN, 2013, p. 24). Ainda, vale mencionar que, em ambas as progressões, a_n representa o n-ésimo termo e n é o número total de termos.

Através destas considerações preliminares, percebe-se o quanto o conhecimento sobre sequências numéricas evoluiu ao longo dos séculos. Todavia, comparada ao surgimento da Matemática, a formalização dos conceitos de progressão aritmética e geométrica é algo recente, datando dos últimos séculos, o que torna-se um incentivo para que mais conhecimentos sejam produzidos acerca de tal temática.

Assim, na sequência deste artigo, serão demonstradas expressões algébricas para calcular o produto de dois termos consecutivos de progressões aritméticas e geométricas, baseando-se nas ideias de generalização e observação de padrões.

2 Constante *c*

Na presente seção, demonstrar-se-á a existência de uma constante, nomeada pela letra c, que está relacionada à razão. Para qualquer progressão aritmética, esta constante é dada pela expressão (1):

$$c = 2r^2 \tag{1}$$

e pode ser observada no exemplo apresentado a seguir.

Seja a P.A.: (1, 3, 5, 7, ...), em que $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$ e $r = 2$. O produto do terceiro termo pelo quarto é 35 e o produto do segundo termo pelo terceiro é 15. Realizando a subtração dos dois produtos, 35 – 15, tem-se 20 como resultado, que chamaremos de A.

Da mesma forma, podemos calcular o produto do primeiro termo pelo segundo, que resulta 3, e subtrair este valor do produto do segundo termo pelo terceiro, ou seja, 15 – 3, cujo resultado é 12, que chamaremos de B.

Por fim, efetuando A – B, temos 8 como resultado, que é o valor da constante *c* para qualquer progressão aritmética que tenha razão igual a 2. De fato, substituindo *r* por 2 em (1), o resultado obtido é 8.

Para demonstrar algebricamente a constante *c*, inicialmente, escreveremos a expressão que gerou o valor chamado de A:

$$(a_3 \cdot a_4) - (a_2 \cdot a_3) \tag{2}$$

Reescrevendo cada termo de (2) em função do primeiro termo da progressão e da razão, tem-se:

$$(a_1 + 2r)(a_1 + 3r) - (a_1 + r)(a_1 + 2r) \tag{3}$$

Efetuando as multiplicações e agrupando os termos semelhantes, obtemos a expressão (5), que é genérica para o valor de A:

$$(a_1)^2 + (a_1 \cdot 5r) + 6r^2 - (a_1)^2 - (a_1 \cdot 3r) - 2r^2 = \tag{4}$$

$$(a_1 \cdot 2r) + 4r^2 \tag{5}$$

Analogamente, podemos escrever uma expressão genérica para B, como segue abaixo:

$$(a_2 \cdot a_3) - (a_1 \cdot a_2) = \tag{6}$$

$$(a_1 + r)(a_1 + 2r) - a_1(a_1 + r) = \tag{7}$$

$$(a_1)^2 + (a_1 \cdot 3r) + 2r^2 - (a_1)^2 - (a_1 \cdot r) = \tag{8}$$

$$(a_1 \cdot 2r) + 2r^2 \tag{9}$$

Enfim, podemos fazer a subtração entre a expressão (5) e a expressão (9), que é equivalente a diferença A-B que calculamos anteriormente:

$$(a_1 \cdot 2r) + 4r^2 - (a_1 \cdot 2r) - 2r^2 \tag{10}$$

Desenvolvendo a expressão (10), o resultado é duas vezes a razão ao quadrado, que é exatamente igual à expressão (1), que trata-se de uma constante porque, se tivéssemos escolhido quaisquer outros quatro termos da mesma P.A. ou de qualquer outra P.A. com a mesma razão, a diferença A – B teria o mesmo valor.

Uma vez demonstrada a constante para a progressão aritmética, faremos o mesmo para a progressão geométrica. No caso da P.G., a constante c é dada por:

$$c = q^2 \tag{11}$$

Tomando como exemplo a P.G.: (1, 3, 9, 27,...), em que $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 9$, $a_4 = 27$ e q = 3, tem-se que: o produto do terceiro termo pelo quarto é 243, do segundo pelo terceiro é 27 e do primeiro pelo segundo é 3. Fazendo a divisão de 243 por 27, o resultado é 9. Da mesma forma, a divisão de 27 por 3 também resulta em 9. Portanto, substituindo a razão da P.G. em (11), conclui-se que o valor da constante c é realmente igual a razão ao quadrado.

Algebricamente, a constante c pode ser calculada por:

$$\frac{a_2 \cdot a_3}{a_1 \cdot a_2} \tag{12}$$

Porém, o termo a_2 está presente tanto no numerador quanto no denominador da expressão (12), logo, podemos simplificá-la através do cancelamento do termo a_2. Assim, a expressão resultante é o quociente entre a_3 e a_1, que, em função do primeiro termo e da razão, resulta na expressão (13):

$$\frac{a_1 \cdot q^2}{a_1} \tag{13}$$

Finalmente, ao simplificarmos a expressão (13) através do cancelamento de a_1, resta apenas a razão ao quadrado, que é justamente a constante c dada pela expressão (11).

3 Produto de dois termos consecutivos de uma progressão aritmética

Como aplicação da constante c, será demonstrada uma expressão para calcular o produto de dois termos consecutivos de uma P.A., conhecendo-se os três primeiros termos e a razão. De acordo com o que foi exposto anteriormente, sabemos que a constante c é igual a diferença entre as expressões (2) e (6). Assim:

$$c = (a_3 \cdot a_4) - (a_2 \cdot a_3) - (a_2 \cdot a_3) + (a_1 \cdot a_2) \tag{14}$$

Agrupando os termos semelhantes, vem:

$$c = (a_3 \cdot a_4) - 2(a_2 \cdot a_3) + (a_1 \cdot a_2) \tag{15}$$

Como o objetivo é calcular o produto de dois termos consecutivos, isolaremos o produto do terceiro pelo quarto termo em (15), obtendo a expressão (16):

$$a_3 \cdot a_4 = 2(a_2 \cdot a_3) - (a_1 \cdot a_2) + c \tag{16}$$

Na expressão (14), c é dada em função dos quatro primeiros termos da P.A. Porém, também podemos escrevê-la em função do segundo, do terceiro, do quarto e do quinto termos; da seguinte forma:

$$c = (a_4 \cdot a_5) - (a_3 \cdot a_4) - (a_3 \cdot a_4) + (a_2 \cdot a_3) \tag{17}$$

Isolando o produto do quarto pelo quinto termo, obtemos:

$$a_4 \cdot a_5 = 2(a_3 \cdot a_4) - (a_2 \cdot a_3) + c \tag{18}$$

Entretanto, podemos recorrer à expressão (16), que fornece o produto do terceiro pelo quarto termo, e fazer a substituição em (18):

$$a_4 \cdot a_5 = 2[2(a_2 \cdot a_3) - (a_1 \cdot a_2) + c] - (a_2 \cdot a_3) + c \tag{19}$$

Desenvolvendo a expressão (19), vem:

$$a_4 \cdot a_5 = 4(a_2 \cdot a_3) - 2(a_1 \cdot a_2) + 2c - (a_2 \cdot a_3) + c \Rightarrow \tag{20}$$

$$a_4 \cdot a_5 = 3(a_2 \cdot a_3) - 2(a_1 \cdot a_2) + 3c \tag{21}$$

Analogamente, podemos utilizar este mesmo procedimento para o produto de quaisquer outros dois termos consecutivos. Entretanto, ele não se demonstra nem um pouco eficiente quando se trata de termos que não estão logo no início da progressão. Por exemplo, se quiséssemos calcular o produto do quinto pelo sexto termo, deveríamos escrever a expressão para $a_5.a_6$, nela substituir a expressão para $a_4.a_5$ e na resultante substituir $a_3.a_4$ por sua respectiva expressão. Dessa forma, o cálculo de um produto de dois termos consecutivos só seria possível se conhecêssemos as expressões para todos os produtos anteriores. Sendo assim, devemos buscar por regularidades que nos levem, de uma maneira menos trabalhosa, a uma generalização para o cálculo do produto de dois termos consecutivos de uma PA.

Observando as expressões (16) e (21), percebe-se que ambas possuem três termos: $a_2.a_3$, $a_1.a_2$ e c, cada qual com seu respectivo coeficiente. Ao escrevermos as expressões para os próximos produtos, obtemos o seguinte quadro de coeficientes:

Quadro 1 – Coeficientes

Produto	Coeficiente de $a_2.a_3$	Coeficiente de $a_1.a_2$	Coeficiente de *c*
$a_1.a_2$	0	1	0
$a_2.a_3$	1	0	0
$a_3.a_4$	2	1	1
$a_4.a_5$	3	2	3
$a_5.a_6$	4	3	6
$a_6.a_7$	5	4	10
$a_7.a_8$	6	5	15
$a_8.a_9$	7	6	21

Fonte: Elaborado pelo autor, 2017.

A análise do quadro 1 permite afirmar que o coeficiente de $a_2.a_3$ será sempre uma unidade menor em relação à posição na P.A. do primeiro termo que se quer multiplicar, enquanto o coeficiente de $a_1.a_2$, a partir da segunda linha, será duas unidades menor. Já o coeficiente da constante c não segue nenhum padrão imediato.

Tratando algebricamente as informações retiradas do quadro 1, passaremos a utilizar a notação $a_n.a_{n+1}$ para representar o produto de dois termos consecutivos, em que n é a posição ocupada na P.A. pelo primeiro termo que se quer multiplicar e $n + 1$ é a posição do termo consecutivo a ele. Nestas condições, o coeficiente de $a_2.a_3$ é $n - 1$, o coeficiente de $a_1.a_2$ é $n - 2$

e o coeficiente de *c* será indicado, provisoriamente, pela letra *x*. Assim, podemos escrever uma expressão parcial para o produto dos termos consecutivos de uma P.A.:

$$a_n \cdot a_{n+1} = (n-1)a_2 \cdot a_3 - (n-2)a_1 \cdot a_2 + xc \tag{22}$$

Para expressar o valor de *x* em função de *n*, podemos subtrair, de dois a dois, os valores de *x* que são consecutivos e se encontram presentes no quadro 1 indicados como coeficientes da constante *c*. Desse modo, temos: 21 – 15 = 6; 15 – 10 = 5; 10 – 6 = 4; 6 – 3 = 3; 3 – 1 = 2; 1 – 0 = 1 e 0 – 0 = 0. Somando estes valores, 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0, o resultado é 21, ou seja, é o valor de *x* para o produto do oitavo pelo nono termo (ver última linha do quadro 1) e, também, o mesmo número que deu início à série de subtrações acima.

Assim, conclui-se que para obter o valor de x_n, ou seja, o valor de *x* correspondente a posição *n* do primeiro termo que se quer multiplicar, é preciso calcular o somatório das diferenças entre x_a e x_{a-1}, iniciando em $a = 2$ e terminando em a igual ao valor de n que é índice de *x*. Matematicamente, temos:

$$x_n = \sum_{a=2}^{n} x_a - x_{a-1} \tag{23}$$

Da observação dos valores que precisam ser somados para que obtenhamos o valor de x_n, conclui-se que eles diminuem uma unidade até chegar em 0. Por exemplo, para o produto $a_5.a_4$, *n*, que é a posição na P.A. do primeiro termo que se quer multiplicar, vale 5 e x_5, que vale 6, pode ser escrito como 3 + 2 + 1 + 0. Algebricamente, esta soma pode ser escrita como: (*n* – 2) + (*n* – 3) + (*n* – 4) + (*n* – 5). Desse modo, percebe-se que o somatório que fornece o valor de x_n inicia com uma parcela em que foram subtraídas 2 unidades de *n* e termina com uma parcela em que foram subtraídas *n* unidades de *n*. Generalizando:

$$x_n = (n-2) + (n-3) + (n-4) + \ \dots + (n-n) \tag{24}$$

que também pode ser escrito na forma de um somatório:

$$x_n = \sum_{a=2}^{n} n - a \tag{25}$$

Se definirmos uma valor para *n* em (24), logicamente, o somatório terá um número finito de parcelas. Tomando, a título de exemplo, *n* = 5, vem:

$$x_5 = (n-2) + (n-3) + (n-4) + (n-5) \tag{26}$$

Ao somarmos as parcelas de (26), temos:

$$x_5 = 4n - 14 \tag{27}$$

Fazendo o mesmo procedimento para os demais somatórios, no intervalo de x_2 até x_8, temos as seguintes expressões:

$$x_2 = n - 2 \tag{28}$$

$$x_3 = 2n - 5 \tag{29}$$

$$x_4 = 3n - 9 \tag{30}$$

$$x_5 = 4n - 14 \tag{31}$$

$$x_6 = 5n - 20 \tag{32}$$

$$x_7 = 6n - 27 \tag{33}$$

$$x_8 = 7n - 35 \tag{34}$$

A partir da observação das expressões de (28) a (34), podemos afirmar que, em cada caso, o coeficiente de n é igual ao respectivo índice de x decrescido de uma unidade. Porém, devemos lembrar que o valor de n é igual ao índice de x correspondente. Logo, o valor de x para o produto do n-ésimo termo da P.A. pelo seu subsequente, é dado por $n - 1$ multiplicado por n, menos um determinado valor, que chamaremos de k. Assim:

$$x_n = n^2 - n - k \tag{35}$$

Voltando a observar as expressões de (28) a (34), é possível afirmar que, para determinarmos k em função de n, devemos somar os valores dos índices de x, iniciando em 2 e terminando no n correspondente ao k que queremos descobrir. Por exemplo, para determinar k quando n é igual a 5, devemos calcular o somatório 5 + 4 + 3 + 2, que é igual a 14: exatamente o valor de k na expressão (31).

Desse modo, o valor de k pode ser calculado como sendo a soma dos termos de uma P.A. finita, em que o primeiro termo é igual a 2, o último termo é igual a n, a razão é igual a 1 e a quantidade de termos é $n - 1$.

Sabe-se que a expressão para calcular a soma dos m primeiros termos de uma P.A. finita é:

$$S_m = \frac{(a_1 + a_m) \cdot m}{2} \tag{36}$$

Então, podemos substituir, assim como indicado no parágrafo anterior, S_m por k, a_1 por 2, a_m por n e m por $n - 1$, sendo importante frisar que n, último termo da progressão que queremos somar, trata-se do índice de x. Realizando as substituições em (36) e aplicando a propriedade distributiva no produto do numerador, obtém-se:

$$k = \frac{n^2 + n - 2}{2} \tag{37}$$

Uma vez que conhecemos o valor de k em função de n, podemos retornar à expressão (35) e escrever:

$$x_n = n^2 - n - \left(\frac{n^2 + n - 2}{2}\right) \tag{38}$$

Adicionando os termos em (38), encontramos a expressão genérica para o valor de x:

$$x = \frac{n^2 - 3n + 2}{2} \tag{39}$$

Por fim, substituindo (39) em (22), obtemos a expressão para calcular o produto de dois termos consecutivos de uma P.A., utilizando a constante c e conhecendo-se os três primeiros termos e a razão:

$$a_n \cdot a_{n+1} = (n-1)a_2 \cdot a_3 - (n-2)a_1 \cdot a_2 + \left(\frac{n^2 - 3n + 2}{2}\right) \cdot c \tag{40}$$

com n pertencente ao conjunto dos números naturais e a_1, a_2, a_3 e a razão pertencentes ao conjunto dos números reais.

4 Produto de dois termos consecutivos de uma progressão geométrica

Assim como fizemos para a P.A., também podemos calcular o produto de quaisquer dois termos consecutivos de uma P.G. aplicando a constante c.

Da expressão (12), sabemos que:

$$c = \frac{a_2 \cdot a_3}{a_1 \cdot a_2} \tag{41}$$

Isolando o produto do segundo pelo terceiro termo, tem-se:

$$a_2 \cdot a_3 = (a_1 \cdot a_2)c \tag{42}$$

Analogamente, escrevemos uma expressão para o produto do terceiro pelo quarto termo:

$$a_3 \cdot a_4 = (a_2 \cdot a_3)c \tag{43}$$

Entretanto, (42) dá-nos um valor algébrico para o produto do segundo pelo terceiro termo, portanto, podemos substituir (42) em (43). Logo:

$$a_3 \cdot a_4 = (a_1 \cdot a_2 \cdot c)c \tag{44}$$

que resulta na expressão (45):

$$a_3 \cdot a_4 = (a_1 \cdot a_2)c^2 \tag{45}$$

Em uma primeira generalização, podemos afirmar que o produto de dois termos consecutivos de uma P.G. é dado por:

$$a_n \cdot a_{n+1} = (a_1 \cdot a_2)c^x \tag{46}$$

em que x é um valor dado em função de n.

Para determinar o valor de x, podemos observar que, em (42), quando n é 2, x vale 1 e, em (45), quando n é 3, x vale 2. Se escrevêssemos os próximos produtos de dois termos consecutivos, perceberíamos que o padrão se mantém, ou seja, x é sempre uma unidade menor em relação a n.

Assim, obtemos a expressão que permite calcular o produtos de quaisquer dois termos consecutivos de uma P.G., utilizando a constante c e conhecendo-se os dois primeiros termos e a razão:

$$a_n \cdot a_{n+1} = (a_1 \cdot a_2) \cdot c^{n-1} \tag{47}$$

em que n pertence ao conjunto dos números naturais e a_1, a_2 e a razão pertencem ao conjuntos nos números reais.

Ainda, é possível escrever (47) de uma segunda maneira, pois, da expressão (11), sabemos que c é igual ao quadrado da razão. Assim, temos:

$$a_n \cdot a_{n+1} = (a_1 \cdot a_2) \cdot (q^2)^{n-1} \Rightarrow \tag{48}$$

$$a_n \cdot a_{n+1} = (a_1 \cdot a_2) \cdot q^{2n-2} \tag{49}$$

Sabendo que, em função do primeiro termo e da razão, a_2 é $a_1.q$, então (49) pode ser escrito como:

$$a_n \cdot a_{n+1} = a_1 \cdot a_1 \cdot q \cdot q^{2n-2} \tag{50}$$

que, finalmente, resulta em:

$$a_n \cdot a_{n+1} = (a_1)^2 \cdot q^{2n-1} \tag{51}$$

5 Conclusão

A partir da demonstração da constante c para progressões aritméticas e geométricas e sua utilização para o desenvolvimento das expressões (40) e (47), ficou comprovado que é possível calcular o produto de dois termos consecutivos sem ser necessário conhecer o valor destes termos. Diante disto, percebe-se que tais tópicos matemáticos envolvendo sequências numéricas não estão totalmente esgotados, sendo possível desenvolver importantes estudos sobre eles.

A utilização de um raciocínio baseado na observação de padrões e na generalização de regularidades em vários momentos deste artigo, permitiu demonstrar a importância deste tipo de pensamento tanto para o campo matemático quanto para situações cotidianas, assim como mostra-nos a evolução da Matemática dentro da história da humanidade.

Enfim, com este estudo acerca das progressões aritméticas e geométricas, espera-se estar contribuindo para a ampliação dos conhecimentos sobre sequências numéricas, bem como reafirmando a relevância do estudo dos padrões matemáticos.

6 Referências

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução de Elza Furtado Gomide. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda., 1996. 496 p.

CARVALHO, Maria Cecilia Costa e Silva. **Padrões numéricos e sequências.** 2. ed. São Paulo: Moderna, 1997. 80 p.

CHUQUET, Nicolas. **Triparty en la Science des Nombres**. Rome: Impr. des Sciences Mathématiques et Physiques, 1881, 229 p. Disponível em: <http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PID=PPN594125278%7CLOG_0005>. Acesso em: 03 jan. 2017.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática elementar:** sequências, matrizes, determinantes e sistemas. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. 282 p.

SACRO-BOSCO, Joannis de. **Tractatus de arte numerandi.** Cantabrigiae: Metcalfe et Palmer, 1838. 26 p. Disponível em: <http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PID=PPN61809685X%7CLOG_0002>. Acesso em: 03 jan. 2017.

Artigo recebido em abr . 2017 e aceito em set. 2017.