Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 11, dez. 2017

Geometria, radicais duplos e a raiz quadrada de números complexos

Geometry, double radicals and the square root of complex numbers

Rudimar Luiz Nós
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Curitiba
rudimarnos@utfpr.edu.br

Olga Harumi Saito
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Curitiba
harumi@utfpr.edu.br

Marcos André dos Santos
Instituto Federal de Santa Catarina, Palhoça
marcos.andre@ifsc.edu.br

Resumo

Apresentamos neste artigo as relações que permitem escrever um radical duplo do tipo

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$$

como uma soma (ou diferença) de radicais simples na forma

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b}.$$

Empregamos problemas geométricos para motivar o estudo de radicais duplos e usamos as relações provenientes da transformação para calcular a raiz quadrada de números complexos de uma forma simplificada. Os objetivos do trabalho são relacionar Geometria, Álgebra e Trigonometria e destacar a importância da correlação de conteúdos nas aulas de Matemática.
Palavras-chave: Radiciação. Volume da pirâmide. Diagonal do pentágono regular. Área do octógono regular. Lei dos Cossenos.

Abstract

We present in this article the relationships that allow to write a double radical of type

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$$

as a sum (or difference) of simple radicals in the form

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b}.$$

We use geometric problems to motivate the study of double radicals and we employ the relations from the transformation to calculate the square root of complex numbers in a simplified way. The aims of the work are connect Geometry, Algebra and Trigonometry, and highlight the importance of the correlation of contents in Mathematics classes.
Keywords: Root extraction. Volume of the pyramid. Diagonal of the regular pentagon. Regular octagon area. Cosine law.

1 Introdução

Radicais duplos do tipo

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$$

aparecem com certa constância em problemas geométricos, como ilustram os exemplos da seção 2. Escrever esses radicais, quando possível, como radicais simples na forma

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$$

pode simplificar drasticamente relações para o cálculo de medidas de área e de volume, por exemplo. Contudo, encontrar referências modernas de Álgebra que abordem o assunto é tarefa difícil. Precisamos recorrer a referências antigas, como Silva e Paulo (1969). Guimarães (2008) apenas apresenta a relação de transformação, sem analisar os critérios de quando é possível utilizá-la. Guimarães (2008) também propõe empregar a relação de transformação para calcular raízes quadradas de números complexos. Porém, novamente, não aborda sob quais condições é permitido fazê-lo.

Dessa forma, motivados pela necessidade de transformar radicais duplos em radicais simples em problemas geométricos abordados nas disciplinas de Geometria Plana e de Geometria Espacial do Curso de Licenciatura em Matemática, redigimos este artigo. Além de apresentarmos a relação que permite transformar radicais duplos em radicais simples, nas formas descritas anteriormente, e a empregarmos para calcular raízes quadradas de números complexos, exploramos as limitações de seu uso em ambos os casos.

2 Problemas motivadores

Problema 1 (Diedro)**.** *Dois triângulos equiláteros ABC e BCD de lados* $3\sqrt{3}$*cm têm um lado comum. Os planos que contêm esses triângulos formam um diedro de* 150^o*. Calcular a medida do segmento AD.*

A Figura 1 ilustra o diedro do Problema 1.

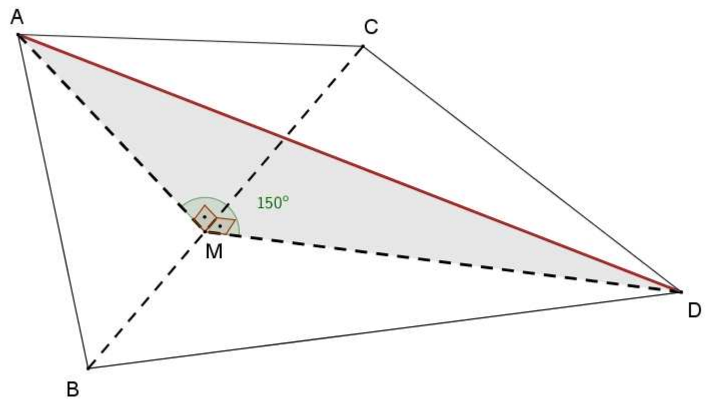


Figura 1: Diedro do Problema 1.

As alturas AM e MD dos triângulos equiláteros ABC e BCD, respectivamente, medem $\frac{3\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}cm$. Aplicando a Lei dos Cossenos (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005) no triângulo AMD, concluimos que:

$$\begin{aligned} AD^2 &= \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 2\frac{9}{2}\frac{9}{2}\cos 150^o; \\ AD^2 &= \frac{81}{4} + \frac{81}{4} + \frac{81\sqrt{3}}{4}; \\ AD &= \frac{9}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}cm. \end{aligned} \tag{1}$$

A medida do segmento AD (1) é dada por um radical duplo. Podemos escrevê-lo como uma soma de radicais simples?

Problema 2 (Diagonal do pentágono regular)**.** *Calcular a medida d das diagonais do pentágono regular cujo lado mede ℓ.*

Um pentágono regular tem cinco ângulos internos congruentes de medida 108^o e cinco diagonais congruentes de medida d. A Figura 2 mostra duas dessas diagonais.

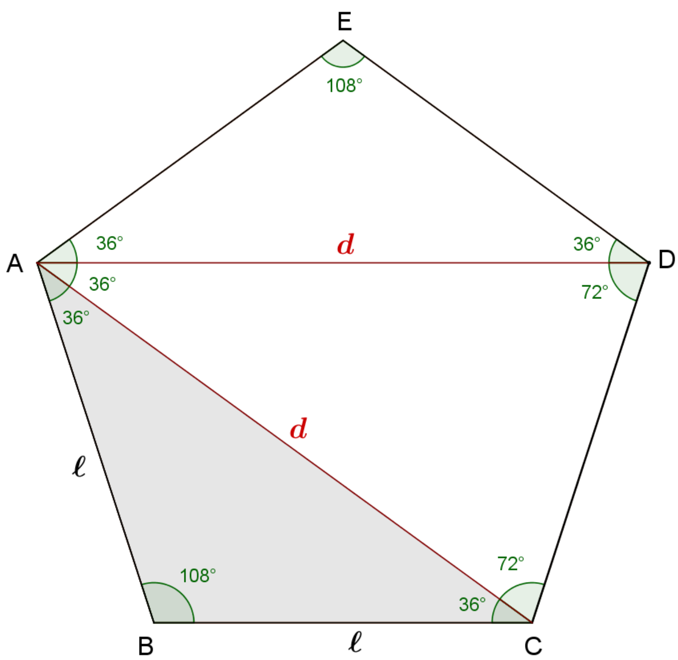


Figura 2: Diagonal do pentágono regular do Problema 2.

Aplicando a Lei dos Cossenos (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005) no triângulo ABC da Figura 2, obtemos:

$$\begin{aligned} d^2 &= \ell^2+\ell^2-2\ell\ell\cos 108^o; \\ d^2 &= 2\ell^2-2\ell^2\cos 108^o; \\ d^2 &= 2\ell^2\left(1-\cos 108^o\right); \\ d &= \sqrt{2\left(1-\cos 108^o\right)}\,\ell. \end{aligned} \tag{2}$$

Para calcular a medida (2) precisamos determinar o valor de $\cos 108^o$. Para tanto, consideramos o triângulo isósceles ABC ilustrado na Figura 3, de lados congruentes de medida 1 e ângulos internos congruentes de medida 72^o. Neste triângulo, traçamos o segmento $\overline{CD}\equiv\overline{BC}$, de medida x, e a altura $\overline{AM}$ relativa ao lado $\overline{BC}$, que também é a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C = 36^o$.

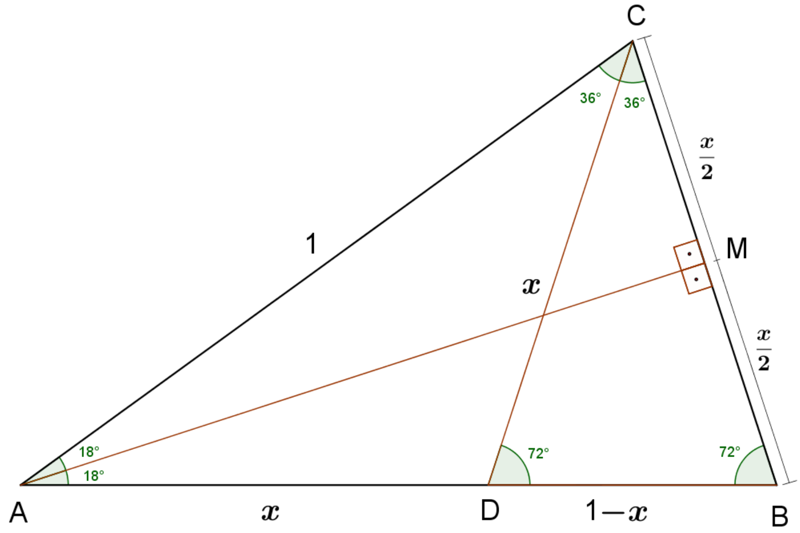


Figura 3: Triângulo isósceles ABC para calcular sen18^o.

Na Figura 3, os triângulos CDB e ABC são semelhantes (caso ângulo-ângulo). Assim, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{CD}{AC} &= \frac{BD}{BC}; \\ \frac{x}{1} &= \frac{1-x}{x}; \\ x^2 &= 1-x; \\ x^2+x-1 &= 0; \\ x &= \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \end{aligned} \tag{3}$$

No triângulo retângulo AMC da Figura 3, podemos determinar o valor sen18^o utilizando (3), ou seja:

$$\begin{aligned}
\mathrm{sen}18^o &= \frac{\frac{x}{2}}{1};\\
\mathrm{sen}18^o &= \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}-1}{2};\\
\mathrm{sen}18^o &= \frac{\sqrt{5}-1}{4}. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Como

$$\cos 108^o = \cos\left(90^o + 18^o\right),$$

usando a propriedade do cosseno da soma de dois arcos (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005) e o valor obtido em (4), temos que:

$$\begin{aligned}
\cos 108^o &= \cos\left(90^o + 18^o\right);\\
\cos 108^o &= \cos 90^o \cos 18^o - \mathrm{sen}90^o \mathrm{sen}18^o;\\
\cos 108^o &= -\mathrm{sen}18^o;\\
\cos 108^o &= \frac{1-\sqrt{5}}{4}. \qquad (5)
\end{aligned}$$

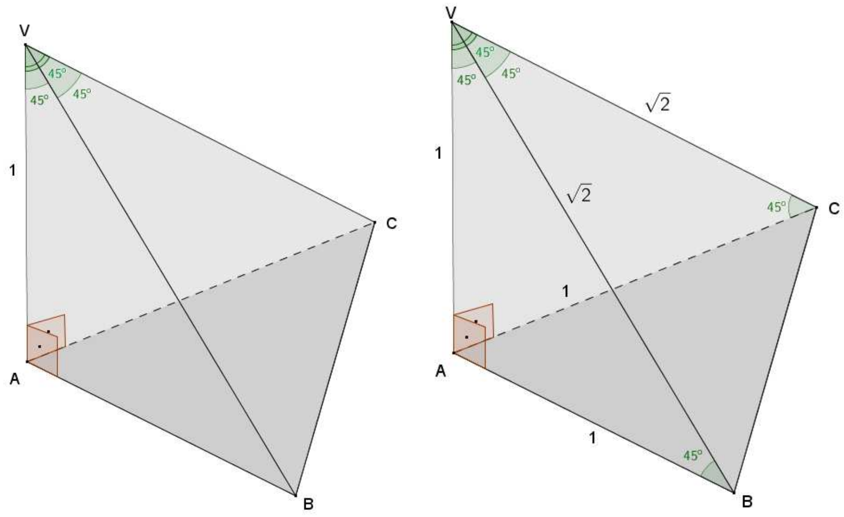
Substituindo (5) em (2), obtemos como medida para a diagonal do pentágono regular

$$\begin{aligned}
d &= \sqrt{2\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)}\,\ell,\\
d &= \sqrt{2\frac{3+\sqrt{5}}{4}}\,\ell,\\
d &= \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{2}\,\ell,\\
d &= \frac{\sqrt{6+\sqrt{20}}}{2}\ell. \qquad (6)
\end{aligned}$$

A medida (6) para d é dada por um radical duplo. Essa medida pode ser reescrita como uma soma de radicais simples?

Problema 3 (Volume da pirâmide - Vestibular do ITA/1990)**.** *Seja uma pirâmide de vértice V e base triangular ABC. O segmento AV, de comprimento unitário, é perpendicular à base e os ângulos das faces laterais, no vértice V, medem 45^o. Calcular o volume da pirâmide $VABC$.*

A Figura 4(a) ilustra a pirâmide do Problema 3.



(a) (b)

Figura 4: Pirâmide do Problema 3: (a) dados iniciais; (b) dados complementares.

O volume da pirâmide $VABC$ é determinado pela terça parte do produto da área A_B da base pela medida h da altura (DOLCE; POMPEO, 2013b), ou seja,

$$V_{VABC} = \frac{1}{3} A_B h.$$

Como o segmento VA é perpendicular ao triângulo ABC, $\overline{VA}$ é a altura da pirâmide. Temos então que calcular a área da base. Utilizando propriedades do triângulo isósceles e o Teorema de Pitágoras (DOLCE; POMPEO, 2013a), concluímos que $\overline{AB} \equiv \overline{AC} = 1uc$ e $\overline{VB} \equiv \overline{VC} = \sqrt{2}uc$, como ilustra a Figura 4(b). Aplicando a Lei dos Cossenos (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005) ao triângulo VBC, temos que

$$\begin{aligned}
BC^2 &= \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{2}\cos 45^o,\\
BC^2 &= 2 + 2 - 4\frac{\sqrt{2}}{2},\\
BC^2 &= 4 - 2\sqrt{2},\\
BC &= \sqrt{4 - 2\sqrt{2}},\\
BC &= \sqrt{4 - \sqrt{8}}uc. \qquad (7)
\end{aligned}$$

Antes de calcularmos a área do triângulo ABC, seria possível escrevermos a medida de $\overline{BC}$ (7), dada por um radical duplo, como uma diferença de radicais simples?

3 Convertendo radicais duplos geometricamente

Descrevemos no Problema 4 um artifício geométrico para converter um radical duplo em uma soma de radicais simples.

Problema 4 (Área do octógono regular)**.** *Calcular a medida da área de um octógono regular de lado de medida a.*

A área A de um polígono regular de n lados de medida a é dada pelo produto do semiperímetro $p = \dfrac{na}{2}$ pela medida do apótema m (DOLCE; POMPEO, 2013a), isto é,

$$A = pm. \tag{8}$$

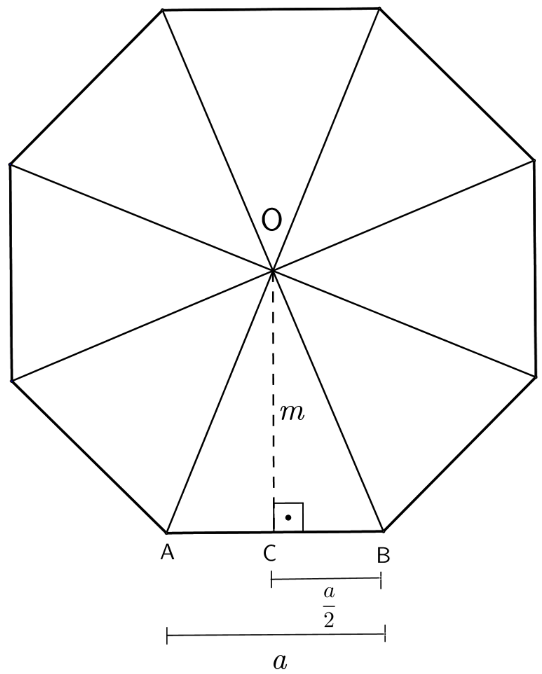


Figura 5: Octógono regular de lado de medida a e apótema de medida m.

Em um octógono regular de lado de medida a e apótema de medida m, como ilustra a Figura 5, temos que $C\hat{O}B = \dfrac{360^o}{16} = 22,5^o$. Assim, podemos calcular a medida do apótema m usando uma razão trigonométrica no triângulo retângulo BCO.

$$\tan 22,5^o = \frac{\frac{a}{2}}{m}$$
$$m = \frac{a}{2\tan 22,5^o} \tag{9}$$

Substituindo (9) em (8), obtemos a área do octógono regular em função da medida a do lado.

$$\begin{aligned} A_{\text{octógono}} &= 4a\frac{a}{2\tan 22,5^o} \\ A_{\text{octógono}} &= \frac{2a^2}{\tan 22,5^o} \end{aligned} \tag{10}$$

Na relação (10), $22,5^o = \dfrac{\pi}{8}$ não é um arco notável. Experimentemos calcular a área do octógono regular de outra maneira, determinando o octógono regular de lado de medida a a partir de um quadrado de lado de medida $a+2x$ do qual foram retirados quatro triângulos retângulos de catetos de medida x e hipotenusa de medida a, como ilustra a Figura 6.

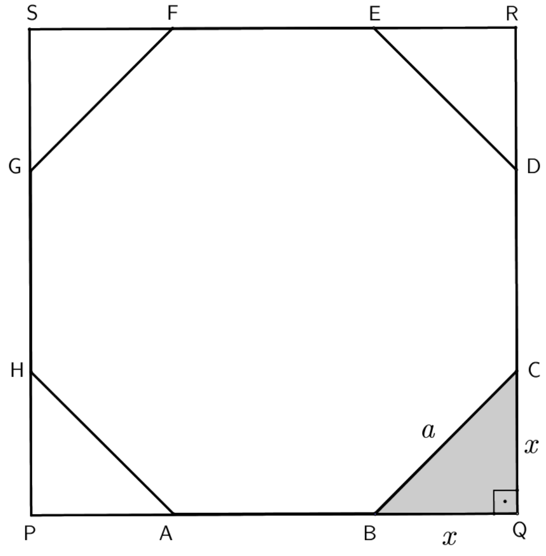


Figura 6: Octógono regular de lado de medida a obtido a partir de um quadrado de lado de medida $a+2x$.

No triângulo retângulo BQC, expressamos a medida x em função da medida a utilizando o Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} a^2 &= x^2 + x^2; \\ x &= \frac{\sqrt{2}}{2}a. \end{aligned} \tag{11}$$

Com a relação (11), podemos expressar a medida do lado do quadrado como

$$a + 2x = a + 2\frac{\sqrt{2}}{2}a = \left(\sqrt{2}+1\right)a. \tag{12}$$

Como a área do octógono regular de lado de medida a equivale à área do quadrado de lado de medida (12) menos a área dos quatro triângulos retângulos de catetos de medida (11), temos que:

$$\begin{aligned} A_{\text{octógono}} &= A_{\text{quadrado}} - 4A_{\text{triângulo}} \\ &= \left[\left(\sqrt{2}+1\right)a\right]^2 - 4\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}a\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ &= 3a^2 + 2\sqrt{2}a^2 - a^2 \\ &= 2\left(\sqrt{2}+1\right)a^2. \end{aligned} \tag{13}$$

A comparação das relações (10) e (13) permite que determinemos o valor de $\tan 22,5^o$.

$$\begin{aligned} \frac{2a^2}{\tan 22,5^o} &= 2\left(\sqrt{2}+1\right)a^2 \\ \tan 22,5^o &= \frac{1}{\sqrt{2}+1} \\ \tan 22,5^o &= \sqrt{2}-1 \end{aligned}$$

No cálculo da área do octógono regular (13) não surgiram radicais duplos. Contudo, podemos empregar esse resultado para escrever um radical duplo como uma soma de radicais simples. Para tanto, devemos decompor o octógono regular em um quadrado, quatro retângulos congruentes e quatro triângulos retângulos congruentes, como na Figura 7.

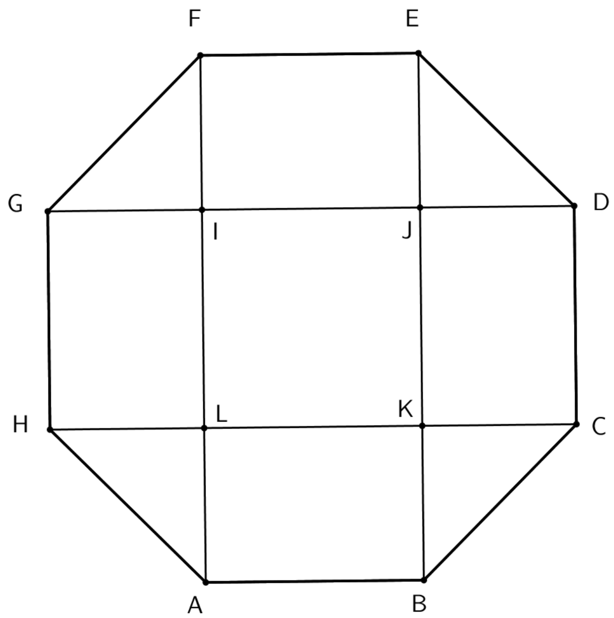


Figura 7: Decomposição do octógono regular de lado de medida a.

NÓS, R. L.; SAITO, O. H.; SANTOS, M. A. dos. Geometria, radicais duplos e a raiz quadrada de números complexos. **C.Q.D.– Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 11, p. 48-64, dez. 2017.
DOI: 10.21167/cqdvol11201723169664rlnohsmas4864 Disponível em: http://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/revista-cqd/

Na Figura 7, $\overline{AB} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{EF} \equiv \overline{GH} \equiv \overline{IJ} \equiv \overline{JK} \equiv \overline{KL} \equiv \overline{IL} = a$ e $\overline{EJ} \equiv \overline{FI} \equiv \overline{AL} \equiv \overline{BK} \equiv \overline{GI} \equiv \overline{DJ} \equiv \overline{HL} \equiv \overline{CK} = x$. Assim:

$$
\begin{aligned}
A_{\text{octógono}} &= A_{\text{quadrado}} + 4A_{\text{retângulo}} + 4A_{\text{triângulo}};\\
2\left(\sqrt{2}+1\right)a^2 &= a^2 + 4ax + 4\frac{x^2}{2};\\
a^2 + 2\sqrt{2}a^2 &= 4ax + 2x^2;
\end{aligned}
$$

$$
2x^2 + 4ax - \left(2\sqrt{2}+1\right)a^2 = 0. \tag{14}
$$

A equação do segundo grau (14) tem duas raízes, dadas por:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-4a \pm \sqrt{16a^2 + 8\left(2\sqrt{2}+1\right)a^2}}{4};\\
x &= \frac{-4a \pm \sqrt{4a^2\left(6+4\sqrt{2}\right)}}{4};\\
x &= \frac{-4a \pm 2a\sqrt{6+4\sqrt{2}}}{4};\\
x &= \frac{-2a \pm a\sqrt{6+4\sqrt{2}}}{2};\\
x &= \frac{-2 \pm \sqrt{6+4\sqrt{2}}}{2}a.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Na igualdade (15), $\dfrac{-2-\sqrt{6+4\sqrt{2}}}{2} < 0$. Como x é medida de um lado, temos que

$$
x = \frac{-2 + \sqrt{6+4\sqrt{2}}}{2}a. \tag{16}
$$

Comparando as igualdades (11) e (16), concluímos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{-2+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}{2}a &= \frac{\sqrt{2}}{2}a;\\
-2 + \sqrt{6+4\sqrt{2}} &= \sqrt{2};\\
\sqrt{6+4\sqrt{2}} &= 2+\sqrt{2};\\
\sqrt{6+4\sqrt{2}} &= \sqrt{4}+\sqrt{2}.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Em (17), temos um radical duplo escrito como uma soma de radicais simples. Precisamos agora determinar as regras que permitem efetuar essa transformação.

4 Escrevendo radicais duplos como radicais simples

Queremos determinar as relações, apresentadas em Saito, Nós e Santos (2017), que possibilitam a transformação

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}, \tag{18}$$

sendo A, B, a, $b \in \mathbb{Q}_{+}^{*}$, com $A^2 > B$ e não sendo B um quadrado perfeito. Elevando os membros da igualdade (18) ao quadrado, obtemos

$$A \pm \sqrt{B} = a + b \pm 2\sqrt{ab}. \tag{19}$$

Comparando os lados da igualdade (19), concluímos que

$$\begin{cases} A = a + b \\ \sqrt{B} = 2\sqrt{ab} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = A \\ ab = \dfrac{B}{4} \end{cases}. \tag{20}$$

As igualdades em (20) mostram que a e b são as raízes da equação quadrática

$$x^2 - Ax + \frac{B}{4} = 0,$$

ou seja,

$$x_1 = a = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

e

$$x_2 = b = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}.$$

Como $a > b$, o lado direito de (18) é um número real positivo. A condição $A^2 > B$, imposta inicialmente, garante que o lado esquerdo de (18) também é um número real positivo. Essas condições eliminam as “raízes estranhas” que podem ser obtidas ao se elevar uma equação como (18) ao quadrado, como discutido em Lima et al (2007).

Assim, podemos reescrever a igualdade (18) como

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}. \tag{21}$$

Logo, o radical duplo pode ser transformado em uma soma (ou diferença) de radicais simples se, em (21), $A^2 - B$ for um quadrado perfeito, com as condições anteriormente impostas a A e B.

4.1 Retornando à solução dos problemas motivadores

1. Problema 1
   Retornando ao Problema 1, verificamos que a medida (1) pode ser reescrita como uma soma de radicais simples, isto porque $A = 2$ e $B = 3$ implicam em $A^2 - B = 1$, sendo que 1 é um quadrado perfeito. Logo, empregando a relação (21), obtemos:

$$\begin{aligned}\sqrt{2+\sqrt{3}} &= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2^2-3}}{2}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{2^2-3}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt{\frac{2-1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

   Assim, a medida (1) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}AD &= \frac{9}{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \\ AD &= \frac{9}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) cm.\end{aligned}$$

2. Problema 2
   Retornando ao Problema 2, constatamos que a medida (6) pode ser reescrita como uma soma de radicais simples, isto porque $A = 6$ e $B = 20$ implicam em $A^2 - B = 16$, sendo que 16 é um quadrado perfeito. Dessa forma, utilizando a relação (21), temos que:

$$\begin{aligned}\sqrt{6+\sqrt{20}} &= \sqrt{\frac{6+\sqrt{6^2-20}}{2}} + \sqrt{\frac{6-\sqrt{6^2-20}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{6+4}{2}} + \sqrt{\frac{6-4}{2}} \\ &= \sqrt{5}+1.\end{aligned}$$

   Então, a medida (6) para a diagonal do pentágono regular de lado ℓ pode ser escrita como

$$d = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\ell,$$

onde $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ é o número de ouro (Stewart, 2009).

3. Problema 3
Retornando ao Problema 3, averiguamos que a medida (7) não pode ser reescrita como uma diferença de radicais simples, uma vez que $A = 4$ e $B = 8$ implicam em $A^2 - B = 8$, sendo que 8 não é um quadrado perfeito.

   Dessa forma, aplicando o Teorema de Heron (DOLCE; POMPEO, 2013a; NÓS; SAITO; OLIVEIRA, 2015, 2016) ao triângulo ABC, obtemos para a área do triângulo ABC e para o volume da pirâmide $VABC$, respectivamente,

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-2}ua, \tag{22}$$

$$V_{VABC} = \frac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2}-2}uv. \tag{23}$$

   As medidas (22) e (23) também são dadas por radicais duplos. Como $A = -2 < 0$, não podemos empregar a transformação (21), uma vez que $A^2 - B = -4$ e $\sqrt{A^2 - B} = \sqrt{-4} = 2i$. Contudo, seria possível utilizarmos a relação (21) para calcular a raiz quadrada de um número complexo?

4. Problema 4
Retornando ao Problema 4, temos que na medida (17) $A = 6$ e $B = 32$. Isto implica em $A^2 - B = 4$, sendo que 4 é um quadrado perfeito. Assim, usando a relação (21), obtemos

$$\begin{aligned}\sqrt{6+4\sqrt{2}} = \sqrt{6+\sqrt{32}} &= \sqrt{\frac{6+\sqrt{6^2-32}}{2}} + \sqrt{\frac{6-\sqrt{6^2-32}}{2}}\\ &= \sqrt{\frac{6+2}{2}} + \sqrt{\frac{6-2}{2}}\\ &= 2+\sqrt{2},\end{aligned}$$

   conversão determinada na Seção 3 através de um artifício geométrico.

5 Calculando a raiz quadrada de um número complexo

Consideremos $w \in \mathbb{C}$, onde $\mathbb{C}$ denota o conjunto dos números complexos (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005; COURANT; ROBBINS, 1996; IEZZI, 2013), tal que $w^2 = z = a \pm bi$, sendo $i = \sqrt{-1}$ a unidade imaginária e $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Assim, utilizando a transformação (21), temos que

$$w = \pm\sqrt{z} = \pm\sqrt{a \pm bi},$$
$$w = \pm\sqrt{a \pm b\sqrt{-1}},$$

$$
\begin{aligned}
w &= \pm\sqrt{a \pm \sqrt{-b^2}},\\
w &= \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-(-b^2)}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-(-b^2)}}{2}}\right),\\
w &= \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right). \qquad (24)
\end{aligned}
$$

Como $\sqrt{a^2+b^2}$ é o módulo do número complexo z (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005; COURANT; ROBBINS, 1996; IEZZI, 2013), denotado por $|z|$, podemos reescrever a igualdade (24) como

$$
w = \pm\sqrt{z} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+|z|}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-|z|}{2}}\right),
$$

$$
\begin{aligned}
w &= \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} \pm \sqrt{\frac{(-1)\left(|z|-a\right)}{2}}\right),\\
w &= \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} \pm \sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\, i\right). \qquad (25)
\end{aligned}
$$

Se $|z|$ for um número racional, o número complexo w (25) terá as partes real e imaginária dadas por radicais simples.

Aplicamos agora a relação (25) para solucionar três problemas, sendo os Problemas 5 e 6 adaptações de problemas propostos em Santos (2014) e Saito, Nós e Santos (2017).

5.1 Problemas aplicados

Problema 5. *Calcular* $\sqrt{15-8i}$.

Sendo $z = 15-8i$, temos $a = 15$ e $b = 8$. Logo:

$$
\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{15^2+8^2} = 17;\\
\sqrt{z} = \sqrt{15-8i} &= \pm\left(\sqrt{\frac{17+15}{2}} - \sqrt{\frac{17-15}{2}} i\right)\\
&= \pm\left(\sqrt{16} - \sqrt{1} i\right)\\
&= \pm(4-i).
\end{aligned}
$$

Problema 6. *Determinar as raízes y_1 e y_2 da equação $y^2+(3+2i)y-(73-79i)=0$.*

$$\begin{aligned}
\Delta &= (3+2i)^2+4(1)(73-79i)\\
&= 9+12i-4+292-316i\\
&= 297-304i\\
z &= 297-304i,\ a=297,\ b=304\\
|z| &= \sqrt{297^2+304^2}=\sqrt{180625}=425\\
\sqrt{z} &= \sqrt{297-304i}=\pm\left(\sqrt{\frac{425+297}{2}}-\sqrt{\frac{425-297}{2}}i\right)\\
&= \pm\left(\sqrt{361}-\sqrt{64}i\right)\\
&= \pm(19-8i)\\
y &= \frac{-(3+2i)\pm(19-8i)}{2}\\
y_1 &= \frac{16-10i}{2}=8-5i\\
y_2 &= \frac{-22+6i}{2}=-11+3i
\end{aligned}$$

Problema 7. *Solucionar a equação $\omega^2-\left(4\sqrt{6}+10i\right)=0$.*

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= 4\sqrt{6}+10i \Rightarrow \omega=\sqrt{4\sqrt{6}+10i}\\
z &= 4\sqrt{6}+10i,\ a=4\sqrt{6},\ b=10\\
|z| &= \sqrt{\left(4\sqrt{6}\right)^2+10^2}=\sqrt{196}=14\\
\sqrt{z} &= \sqrt{4\sqrt{6}+10i}=\pm\left(\sqrt{\frac{14+4\sqrt{6}}{2}}+\sqrt{\frac{14-4\sqrt{6}}{2}}i\right)\\
\sqrt{z} &= \pm\left(\sqrt{7+2\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\sqrt{6}}i\right) \qquad (26)
\end{aligned}$$

Convertendo os radicais duplos $\sqrt{7\pm2\sqrt{6}}=\sqrt{7\pm\sqrt{24}}$:

$$\begin{aligned}
A &= 7 \text{ e } B=24;\\
A^2-B &= 49-24=25;
\end{aligned}$$

25 é um quadrado perfeito;

$$\sqrt{7\pm\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{7^2-24}}{2}} \pm \sqrt{\frac{7-\sqrt{7^2-24}}{2}};$$
$$\sqrt{7\pm\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{7+5}{2}} \pm \sqrt{\frac{7-5}{2}};$$
$$\sqrt{7\pm\sqrt{24}} = \sqrt{6}\pm 1. \tag{27}$$

Substituindo (27) em (26), temos que:

$$\sqrt{z} = \pm\left(\left(\sqrt{6}+1\right)+\left(\sqrt{6}-1\right)i\right);$$
$$\omega_1 = \left(\sqrt{6}+1\right)+\left(\sqrt{6}-1\right)i;$$
$$\omega_2 = -\left(\sqrt{6}+1\right)-\left(\sqrt{6}-1\right)i.$$

6 Conclusões

A partir das relações que possibilitam converter (ou não) um radical duplo em uma soma (ou diferença) de radicais simples, apresentadas em Saito, Nós e Santos (2017), empregamos problemas geométricos para motivar o estudo de radicais duplos. As relações de conversão apresentadas podem simplificar o cálculo de medidas lineares, como nos Problemas 1 e 2, de áreas, como a de alguns polígonos regulares, e de volumes, como do dodecaedro e do icosaedro regulares.

Mostramos também a relação existente entre radicais duplos e a raiz quadrada de um número complexo. No Problema 7, convertemos as raízes complexas cujas partes real e imaginária são radicais duplos. Este problema enfatiza que a conversão também pode simplificar números complexos. Destacamos que a relação que permite extrair raízes quadradas é mais simples do que a Segunda Fórmula de Moivre (IEZZI, 2013), uma vez que não depende do argumento do número complexo.

Para finalizar, ressaltamos que, enquanto professores da Educação Básica, é fundamental associarmos Geometria, Álgebra e Trigonometria, como ilustram os Problemas 1, 2, 3 e 4, assim como os conteúdos abordados em sala de aula, contextualizando-os sempre que possível.

7 Referências

CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria e números complexos**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **What is mathematics?** 2. ed. New York: Oxford University Press, 1996.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar**: geometria plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013a.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar**: geometria espacial: posição e métrica. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013b.

GUIMARÃES, C. S. **Matemática em nível IME/ITA**. São José dos Campos: Vestseller, 2008.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar**: complexos, polinômios, equações. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2007. v. 4.

NÓS, R. L.; SAITO, O. H.; OLIVEIRA, C. A. M. de. Os teoremas de Stewart e de Heron e a demonstração nas aulas de matemática. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 35., 2014, Natal. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics**. São Carlos: SBMAC, 2015. p. 1-7.

NÓS, R. L.; SAITO, O. H.; OLIVEIRA, C. A. de. Um caso particular do problema de Apolonio, os teoremas de Stewart e de Heron e a demonstração nas aulas de matemática. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 6, p. 48-59, 2016.

SAITO, O. H.; NÓS, R. L.; SANTOS, M. A. dos. Radicais duplos e a raiz quadrada de um número complexo. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 36., 2016, Gramado. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics**. São Carlos: SBMAC, 2017. p. 1-7.

SANTOS, M. A. dos. **Dos números complexos aos quatérnions**: desenvolvimento algébrico, interpretação geométrica e aplicações. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - UTFPR, Curitiba, 2014.

SILVA, J. S. e; PAULO, J. D. S. **Compêndio de Álgebra**. Lisboa: Livraria Popular de Francisco Franco, 1969. Tomo II.

STEWART, I. **Almanaque das curiosidades matemáticas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

Artigo recebido em jul. 2017 e aceito em nov. 2017.