Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 11, dez. 2017
Edição Iniciação Científica

Análise de estabilidade e limitação de uma classe de equações diferenciais com retardamento via teorema do ponto fixo de Krasnoselskii

Stability and boundedness analysis of a class of differential equations with delay via the Krasnoselskii fixed point theorem

Raul Lima
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
raul_lyma@hotmail.com

Suzete Maria Silva Afonso
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
smafonso@rc.unesp.br

Resumo

Em vista da dificuldade em determinar funcionais de Lyapunov para o estudo de estabilidade e limitação de soluções de equações diferenciais funcionais com retardamento (EDFRs), Burton e colaboradores, por volta dos anos 2000, começaram os estudos sobre estabilidade e limitação de soluções de EDFRs usando a teoria de ponto fixo. Em comparação à teoria desenvolvida por Aleksandr Lyapunov, as condições exigidas são mais realistas, o que viabiliza a aplicação das equações. Neste trabalho, estudaremos estabilidade e limitação de soluções de EDFRs do tipo $x'(t) = -a(t)x(t-r_1) + b(t)x^{1/3}(t-r_2(t))$, usando o Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii.
Palavras-chave: Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii. Equação Diferencial Funcional com Retardamento. Estabilidade. Limitação.

Abstract

In view of the difficulty in determining Lyapunov functionals for the stability and boundedness study of solutions of retarded functional differential equations (RFDEs), Burton et al., by the 2000s, established some studies on stability and boundedness of solutions of RFDEs using the fixed-point theory. Compared to the theory developed by Aleksandr Lyapunov, the required conditions are more realistic, which makes it possible the applications of the equations. In this work, we will study the stability and boundedness of solutions of RFDEs of the type $x'(t) = -a(t)x(t-r_1) + b(t)x^{1/3}(t-r_2(t))$, using the Krasnoselskii's Fixed Point Theorem.
Keywords: Krasnoselskii's Fixed Point Theorem. Retarded Functional Differential Equations. Stability. Boundedness.

1 Introdução

Funções e funcionais de Lyapunov têm sido usados com sucesso para obter estabilidade e limitação de equações diferenciais funcionais com retardamento. No entanto, existem várias dificuldades encontradas no estudo da estabilidade por meio do método direto de Lyapunov. Recentemente, Burton e seus colaboradores aplicaram a teoria do ponto fixo para investigar a estabilidade e limitação de equações diferenciais e mostraram que algumas dessas dificuldades desaparecem quando se aplica tal teoria, conforme se pode constatar nos trabalhos [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], por exemplo.

Neste trabalho, inspirados em [11] e [15], adotamos o Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii para estudar a estabilidade e limitação da equação

$$x'(t) = -a(t)x(t - r_1(t)) + b(t)x^{1/3}(t - r_2(t)), \tag{1}$$

onde $a, b \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}), r_1(t) \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, com $t - r_1(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$, e $r_2 \in C(\mathbb{R}^+, [0, \gamma])$, com $\gamma > 0$.

Primeiramente exibimos resultados de estabilidade e limitação para um caso especial da equação (1), a saber

$$x'(t) = -a(t)x(t - r_1) + b(t)x^{1/3}(t - r_2(t)), \tag{2}$$

em que $r_1 \geq 0$ é uma constante e $a \in C(\mathbb{R}^+, (0, \infty))$. Os resultados obtidos para a equação (1) generalizam os obtidos para a equação (2).

Este artigo foi escrito com o intuito de divulgar a possibilidade de aplicação da teoria de ponto fixo ao estudo de estabilidade e limitação de soluções de equações diferenciais funcionais com retardamento. É de grande valia informar que este trabalho não possui resultados inéditos, possui apenas uma análise mais detalhada de resultados já existentes na literatura.

2 Definições e resultados preliminares

Definição 1 *Um conjunto L em um espaço métrico (S, ρ) é compacto se toda sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L$ possuir uma subsequência convergente, com limite em L.*

Definição 2 *Seja U um intervalo de $\mathbb{R}$ e considere $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções $f_n : U \to \mathbb{R}^d$, com $d \in \mathbb{N}$. Denote por $|\cdot|$ qualquer norma sobre $\mathbb{R}^d$. Dizemos que*

1. *$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em U se existir uma constante $M > 0$ tal que $|f_n(t)| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $t \in U$.*

2. *$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é equicontínua em U se para todo $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$, tal que*

$$t_1, t_2 \in U, |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |f_n(t_1) - f_n(t_2)| < \varepsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3 (Teorema de Ascoli- Arzelà) *Se $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência uniformemente limitada e equicontínua de funções reais no intervalo $[a, b]$, então existe uma subsequência de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente em $[a, b]$ para uma função contínua.*

Uma prova do Teorema de Ascoli-Arzelà pode ser encontrada em [16], página 165.

Sejam $r > 0$ e $h : [-r, \infty) \to [1, \infty)$ uma função crescente e contínua, tal que $h(-r) = 1$ e $h(s) \to \infty$ quando $s \to \infty$. Considere $(S, |\cdot|_h)$ o espaço de Banach das funções contínuas $\phi : [-r, \infty) \to \mathbb{R}$, em que

$$|\phi|_h = \sup_{t \geq -r} \left| \frac{\phi(t)}{h(t)} \right| < \infty,$$

e $(M, |\cdot|_h)$ o espaço métrico completo das funções $\phi \in S$ tais que $|\phi(t)| \leq 1$ para $-r \leq t < \infty$ e $\phi(t) = \psi(t)$ em $[-r, 0]$.

Através do Teorema 3, podemos provar o próximo resultado.

Lema 4 *Em $(S, |\cdot|_h)$, o conjunto $L = \{f \in M \,|\, |f|_h \leq K_1, |f(u) - f(v)| \leq K_2|u - v|\}$ é compacto.*

O próximo teorema é a ferramenta principal para a obtenção dos resultados de estabilidade e limitação para as equações (1) e (2).

Teorema 5 (Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii ([17], página 31)) *Seja M um subconjunto fechado convexo e não vazio de um espaço de Banach $(S, \|\cdot\|)$. Suponha que A e B sejam aplicações de M em S, tais que:*

(a) $Ax + By \in S$ para quaisquer $x, y \in M$);

(b) A é contínua e AM está contida em um conjunto compacto;

(c) B é uma contração com constante $\alpha < 1$.

Nessas condições, existe um único $y \in M$ tal que $Ay + By = y$.

3 Resultados iniciais

Para a equação (2), temos o seguinte resultado sobre limitação.

Teorema 6 *Suponha que existam constantes $0 < \beta < 1$ e $K > 0$ satisfazendo*

$$\sup_{t \geq 0} \left| \frac{b(t)}{a(t + r_1)} \right| \leq \beta \tag{3}$$

e, para $|t_1 - t_2| \leq 1$,

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} a(u + r_1) du \right| \leq K|t_1 - t_2|, \tag{4}$$

enquanto para $t \geq 0$,

$$2 \sup_{t \geq 0} \int_{t - r_1}^{t} a(u + r_1) du + \beta < 1. \tag{5}$$

Se ψ é uma função inicial contínua com norma suficientemente pequena, então existirá uma solução $x(t, 0, \psi)$ de (2) em $\mathbb{R}$ com $|x(t, 0, \psi)| < 1$.

Demonstração: Seja $\psi : [-r_1, 0] \to \mathbb{R}$ uma função inicial contínua com $|\psi| = \sup_{t\in[-r_1,0]} |\psi(t)| < \Psi$, em que Ψ é uma constante positiva menor do que 1, a ser determinada. Seja $h : [-r, \infty) \to [1, \infty)$ uma função crescente e contínua, tal que $h(-r) = 1$ e $h(s) \to \infty$ quando $s \to \infty$, e $\alpha < 1$ uma constante tal que

$$2\int_{t-r_1}^{t} \frac{a(s+r_1)h(s)}{h(t)} ds \leq \alpha. \tag{6}$$

Por (5), para tal função h, tem-se

$$2\int_{t-r_1}^{t} \frac{a(s+r_1)h(s)}{h(t)} ds \leq 2\int_{t-r_1}^{t} \frac{a(s+r_1)h(t)}{h(t)} ds < 1.$$

Seja $(S, |\cdot|_h)$ o espaço de Banach das funções contínuas $\phi : [-r, \infty) \to \mathbb{R}$, com

$$|\phi|_h \equiv \sup_{t\geq -r} \left| \frac{\phi(t)}{h(t)} \right| < \infty$$

e considere $(M, |\cdot|_h)$ o espaço métrico completo das funções $\phi \in S$ tais que $|\phi(t)| \leq 1$ para $-r \leq t < \infty$ e $\phi(t) = \psi(t)$ em $[-r, 0]$.

Escrevendo (2) como

$$x'(t) = -a(t+r_1)x(t) + \frac{d}{dt}\left[\int_{t-r_1}^{t} a(s+r_1)x(s)ds\right] + b(t)x^{1/3}(t - r_2(t)),$$

usando a fórmula da variação dos parâmetros e integração por partes, obtém-se

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0 e^{-\int_0^t a(s+r_1)ds} + \int_0^t e^{-\int_s^t a(u+r_1)du} \left[\frac{d}{ds}\int_{s-r_1}^{s} a(u+r_1)x(u)du + b(s)x^{1/3}(s-r_2(s))\right] ds \\
&= x_0 e^{-\int_0^t a(s+r_1)ds} + \int_0^t e^{-\int_s^t a(u+r_1)du} \frac{d}{ds}\int_{s-r_1}^{s} a(u+r_1)x(u)duds \\
&+ \int_0^t e^{-\int_s^t a(u+r_1)du} b(s)x^{1/3}(s-r_2(s))ds,
\end{aligned}$$

que equivale a

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0 e^{-\int_0^t a(s+r_1)ds} + \int_{t-r_1}^{t} a(u+r_1)x(u)du - e^{-\int_0^t a(u+r_1)du}\int_{-r_1}^{0} a(u+r_1)x(u)du \\
&- \int_0^t a(u+r_1)e^{-\int_s^t a(u+r_1)du}\int_{s-r_1}^{s} a(u+r_1)x(u)duds \\
&+ \int_0^t e^{-\int_s^t a(u+r_1)du} b(s)x^{1/3}(s-r_2(s))ds,
\end{aligned}$$

onde $x(t) = \psi(t)$ em $[-r, 0]$ e $\psi(0) = x_0$.

Definamos as aplicações $A, B : M \to M$ por

$$(A\phi)(t) \int_0^t e^{-\int_s^t a(u+r_1)du} b(s)\phi^{1/3}(s-r_2(s))ds \tag{7}$$

e

$$(B\phi)(t) = x_0 e^{-\int_0^t a(s+r_1)ds} + \int_{t-r_1}^{t} a(u+r_1)\phi(u)du - e^{-\int_0^t a(u+r_1)du} \int_{-r_1}^{0} a(u+r_1)\phi(u)du \qquad (8)$$
$$- \int_0^t a(u+r_1) e^{-\int_s^t a(u+r_1)du} \int_{s-r_1}^{s} a(u+r_1)\phi(u)duds,$$

para $\phi \in M$.

Mostraremos que $\phi, \eta \in M$ implica $A\phi + B\eta \in M$. Seja $\|\cdot\|$ a norma do supremo em $[-r,\infty)$ de $\phi \in S$, se ϕ é limitada. Assim,

$$\begin{aligned}
|(A\phi)(t) + (B\eta)(t)| &\leq \|\psi\| e^{-\int_0^t a(s+r_1)ds} + \|\eta\| \int_{t-r_1}^{t} a(u+r_1)du \\
&\quad + e^{-\int_0^t a(u+r_1)du} \|\psi\| \int_{-r_1}^{0} a(u+r_1)du + \|\eta\| \sup_{t\geq 0} \int_{t-r_1}^{t} a(u+r_1)du + \|\psi\|^{1/3}\beta \\
&\leq \|\psi\| e^{-\int_0^t a(s+r_1)ds} \left(1 + \int_{-r_1}^{0} a(u+r_1)du\right) + 2\sup_{t\geq 0} \int_{t-r_1}^{t} a(u+r_1)du + \beta \\
&< 1,
\end{aligned}$$

para $\|\psi\|$ suficientemente pequeno.

Agora, mostraremos que AM está contido num conjunto compacto em $(S, |\cdot|_h)$. Pelo Lema 4, é suficiente mostrar que AM é equicontínua. Com efeito, se $\phi \in M$ e $0 \leq t_1 < t_2 < t_1 + 1$, então

$$\begin{aligned}
&|(A\phi)(t_1) - (A\phi)(t_2)| \leq \\
&\leq \left| \int_0^{t_2} b(s) e^{-\int_s^{t_2} a(u+r_1)du} \phi^{1/3}(s - r_2(s))ds \right. \\
&\left. - \int_0^{t_1} b(s) e^{-\int_s^{t_1} a(u+r_1)du} \phi^{1/3}(s - r_2(s))ds \right| \\
&= \left| \int_{t_1}^{t_2} b(s) e^{-\int_s^{t_2} a(u+r_1)du} \phi^{1/3}(s - r_2(s))ds \right. \\
&\left. + \int_0^{t_1} b(s) \left[e^{-\int_s^{t_2} a(u+r_1)du} - e^{-\int_s^{t_1} a(u+r_1)du} \right] \phi^{1/3}(s - r_2(s))ds \right| \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} |b(s)| e^{-\int_s^{t_2} a(u+r_1)du} ds + \int_0^{t_1} |b(s)| \left| e^{-\int_0^{t_2} a(u+r_1)du} - e^{-\int_0^{t_1} a(u+r_1)du} \right| e^{\int_0^s a(u+r_1)} ds \\
&\leq \beta \int_{t_1}^{t_2} a(s+r_1)ds + \left| e^{-\int_0^{t_2} a(u+r_1)du} - e^{-\int_0^{t_1} a(u+r_1)du} \right| \int_0^{t_1} |b(s)| e^{\int_0^s a(u+r_1)du} ds \\
&= \beta K |t_2 - t_1| + \beta \left| e^{-\int_0^{t_2} a(u+r_1)du} - e^{-\int_0^{t_1} a(u+r_1)du} \right| \left[e^{\int_0^{t_1}} a(u+r_1) - 1 \right] \\
&\leq \beta K |t_2 - t_1| + \beta \left| e^{-\int_{t_1}^{t_2} a(u+r_1)du} - 1 \right| \\
&\leq \beta K |t_2 - t_1| + \beta \left| \int_{t_1}^{t_2} a(u+r_1)du \right| \\
&\leq 2\beta K |t_2 - t_1|,
\end{aligned}$$

por (4).

Agora vamos mostrar que $B : M \to M$ é uma contração, isto é, existe $\alpha < 1$ tal que $|(B\phi_1) - (B\phi_2)|_h \leq \alpha|\phi_1 - \phi_2|_h$, para $\phi_1, \phi_2 \in M$. De fato, para todo $t \geq 0$, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{|(B\phi_1)(t) - (B\phi_2(t))|}{h(t)} \leq \int_{t-r_1}^{t} a(u+r_1)\frac{|\phi_1(u) - \phi_2(u)|}{h(t)}du \\
&+ \frac{1}{h(t)}\int_0^t a(s+r_1)e^{-\int_s^t a(u+r_1)du}\int_{s-r_1}^{s} a(u+r_1)|\phi_1(u) - \phi_2(u)|duds \\
&\leq \sup_{t\geq 0}\int_{t-r_1}^{t} a(s+r_1)\frac{h(s)}{h(t)}ds|\phi_1 - \phi_2|_h + |\phi_1 - \phi_2|_h \sup_{t\geq 0}\int_{t-r_1}^{t} a(u+r_1)\frac{h(u)}{h(t)}du \\
&= |\phi_1 - \phi_2|_h \sup_{t\geq 0}\int_{t-r_1}^{t} a(u+r_1)\frac{h(u)}{h(t)}du \\
&\leq \alpha|\phi_1 - \phi_2|_h,
\end{aligned}$$

em que $\alpha = \sup_{t\geq 0}\int_{t-r_1}^{t} a(u+r_1)du < 1$, por (5).

Por fim, mostremos que A é contínua. Seja $\varepsilon > 0$. Devemos encontrar $\delta > 0$ de forma que

$$\phi, \eta \in M, |\phi - \eta| < \delta \Rightarrow |A\phi - A\eta| < \varepsilon\beta.$$

Com efeito, como $x^{1/3}$ é uniformemente contínua em $[-1, 1]$, então dado $\varepsilon > 0$ e $T > 0$ fixado com $4/h(T) < \varepsilon$, existe $\delta > 0$ tal que $|x_1 - x_2| < \delta h(T)$ implica $|x_1^{1/3} - x_2^{1/3}| < \varepsilon/2$. Então, para $|\phi(t) - \eta(t)| < \delta h(t)$ e $t > T$, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{|A\phi(t) - A\eta(t)|}{h(t)} \leq \frac{1}{h(t)}\int_0^t b(s)e^{-\int_s^t a(u+r_1)du}|\phi^{1/3}(s - r_2(s)) - \eta^{1/3}(s - r_2(s))|ds \\
&\leq \frac{1}{h(t)}\left[\int_0^T |b(s)|e^{-\int_s^t a(u+r_1)du}|\phi^{1/3}(s - r_2(s)) - \eta^{1/3}(s - r_2(s))|ds + 2\int_T^t |b(s)|e^{-\int_s^t a(u+r_1)du}ds\right] \\
&\leq \left[\frac{\beta\varepsilon}{2h(t)}\right]\int_0^T a(s+r_1)e^{-\int_s^t a(u+r_1)du}ds + \frac{2\beta}{h(T)} \\
&\leq \frac{\beta\varepsilon}{2} + \frac{2\beta}{h(T)} \\
&\leq \frac{\beta\varepsilon}{2} + \frac{\beta\varepsilon}{2} = \beta\varepsilon.
\end{aligned}$$

Desta maneira, as condições do Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii são satisfeitas e existe um ponto fixo em M da aplicação $A + B$, ou seja, existe uma solução $x(t, 0, \psi)$ de (2) em $\mathbb{R}$ com $|x(t, 0, \psi)| < 1$.

□

Para o próximo resultado de estabilidade, admitiremos que existe $\beta < 1$ tal que

$$\sup_{t\geq 0}\left|\frac{b(t)}{a(t+r_1)}\right| \leq \beta \quad \text{e} \quad \frac{b(t)}{a(t+r_1)} \to 0 \text{ quando } t \to \infty. \tag{9}$$

Teorema 7 *Suponha satisfeitas as condições* (4), (5) *e* (9) *e assuma que* $\int_0^\infty a(s)ds = \infty$. *Se* ψ *é uma função inicial contínua com norma suficientemente pequena, então a equação* (2) *possui uma solução* $x(t,0,\psi)$, *tal que* $x(t,0,\psi) \to 0$ *quando* $t \to \infty$.

Demonstração: Todos os cálculos na demonstração do teorema anterior são satisfeitas para $h(t) = 1$ quando $|\cdot|_h$ é substituída pela norma do supremo $\|\cdot\|$. Defina $g : [0,\infty) \to (0,1]$ por

$$g(t) = \int_0^t a(s+r_1)e^{-\int_s^t a(u+r_1)du} \frac{b(s)}{a(s+r_1)} ds.$$

É possível verificar que $g(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, modificando a demonstração de que a convolução de uma função L^1 $\left[a(s+r_1)e^{-\int_s^t a(u+r_1)du}\right]$ com uma função tendendo a zero $\left[\frac{b(s)}{a(s+r_1)}\right]$ tende a zero.

Vamos adicionar a M a seguinte condição:

$$\phi \in M \Rightarrow \phi(t) \to 0 \text{ quando } t \to \infty.$$

Sejam A e B as aplicações definidas em (7) e (8), respectivamente. Então, $A\phi(t) \leq g(t)$ e $B\phi(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Conforme vimos na demonstração do Teorema 6, temos que AM é equicontínuo e AM está contido num conjunto compacto. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii, existe $y \in M$ com $Ay + By = y$. Como $y \in M$, segue que $y(t) \to 0$, quando $t \to \infty$, e a prova está completa.

□

4 Principais resultados

Vamos agora obter resultados de limitação e estabilidade para a equação (1), que generalizam os resultados apresentados na seção anterior.

Teorema 8 *Seja* $r_1(t)$ *diferenciável e suponha que existam constantes positivas* $\alpha < 1, K_1$ *e* K_2 *e uma função* $g \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *tal que, para* $|t_2 - t_1| \leq 1$, *tem-se*

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} |b(u)|du \right| \leq K_1 |t_2 - t_1| \tag{10}$$

e

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} g(u)du \right| \leq K_2 |t_2 - t_1|, \tag{11}$$

enquanto que para $t \geq 0$ tem-se

$$\begin{aligned} &\int_{t-r_1(t)}^t g(u)du + \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)du} g(s) \int_{s-r_1(s)}^s g(u)duds + \\ &+ \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)du} \left\{ |g(s-r_1(s))(1-r_1'(s)) - a(s)| + |b(s)| \right\} \leq \alpha. \end{aligned} \tag{12}$$

LIMA, R.; AFONSO, S. M. S. Análise de estabilidade e limitação de uma classe de equações diferenciais com retardamento via teorema do ponto fixo de Krasnoselskii. **C.Q.D.– Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 11, p. 11-25, dez. 2017. Edição Iniciação Científica.
DOI: 10.21167/cqdvol11ic201723169664rlsmsa1125 Disponível em: http://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/revista-cqd/

Se ψ é uma função inicial contínua com norma suficientemente pequena, então existe uma solução $x(t,0,\psi)$ de (1) em $\mathbb{R}^+$ com $|x(t,0,\psi)| < 1$.

Demonstração: Seja $\psi : [-r,0] \to \mathbb{R}$ uma função inicial contínua com $|\psi| = \sup_{t\in[-r,0]} |\psi(t)| < \Psi$, onde Ψ é uma constante positiva menor do que 1, a ser determinada. Seja $h : [-r,\infty) \to [1,\infty)$ uma função estritamente crescente e contínua com $h(-r) = 1$, $h(s) \to \infty$ quando $s \to \infty$, tal que

$$\int_{t-r_1(t)}^{t} g(u)\frac{h(u)}{h(t)}du + \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)du} g(s) \int_{s-r_1(s)}^{s} g(u)\frac{h(u)}{h(t)}duds + \tag{13}$$

$$\int_0^t e^{-\int_s^t g(u)du} |g(s-r_1(s))||(1-r_1'(s)) - a(s)| \frac{h(s-r_1(s))}{h(t)} \leq \alpha. \tag{14}$$

Seja $(S, |\cdot|_h)$ o espaço de Banach das funções contínuas $\phi : [-r,\infty) \to \mathbb{R}$, tais que $|\phi|_h = \sup_{t\geq -r} \left|\frac{\phi(t)}{h(t)}\right| < \infty$, e $(M, |\cdot|_h)$ o espaço métrico das funções $\phi \in S$ tais que $|\phi(t)| \leq 1$ para $t \in [-r,\infty)$ e $\phi(t) = \psi(t)$ em $[-r,0]$.

Multiplicando ambos os lados de (1) por $e^{\int_0^t g(s)ds}$ e integrando de 0 a t, obtemos

$$x(t) = x_0 e^{-\int_0^t g(s)ds} + \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)du} g(s)x(s)ds - \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)du} a(s)x(s-r_1(s))ds \tag{15}$$
$$+ \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)du} b(s)x^{1/3}(s-r_2(s))ds.$$

Note que

$$\int_0^t e^{-\int_s^t g(u)du} g(s)x(s)ds = \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)du} d\left(\int_{s-r_s}^{s} g(u)x(u)du\right) ds$$
$$+ \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)du} g(s-r_1(s))x(s-r_1(s))(1-r_1'(s))ds.$$

Usando a integração por partes em (15), temos

$$\begin{aligned}
x(t) = {} & x_0 e^{-\int_0^t g(s)ds} - e^{-\int_0^t g(u)du} \int_{-r_1(0)}^{0} g(u)x(u)du + \int_{t-r_1(t)}^{t} g(u)x(u)du \\
& - \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)du} g(s) \int_{s-r_1(s)}^{s} g(u)x(u)duds \\
& + \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)du} [g(s-r_1(s))(1-r_1'(s)) - a(s)]x(s-r_1(s))ds \\
& + \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)du} b(s)x^{1/3}(s-r_2(s))ds,
\end{aligned}$$

onde $x(t) = \psi(t)$ em $[-r,0]$ e $\psi(0) = x_0$.

Definamos as aplicações $A, B : M \to M$ por

$$(A\phi)(t) = \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)du} b(s)x^{1/3}(s-r_2(s))ds \tag{16}$$

e

$$(B\phi)(t) = x_0 e^{-\int_0^t g(s)ds} - e^{-\int_0^t g(u)du}\int_{-r_1(0)}^{0} g(u)x(u)du + \int_{t-r_1(t)}^{t} g(u)x(u)du \tag{17}$$
$$- \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)du} g(s)\int_{s-r_1(s)}^{s} g(u)x(u)duds$$
$$+ \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)du}[g(s-r_1(s))(1-r_1'(s)) - a(s)]x(s-r_1(s))ds,$$

para $\phi \in M$.

Agora mostraremos que se $\phi, \eta \in M$ então $A\phi + B\eta \in M$. Considere $\|\cdot\|$ a norma do supremo em $[-r,\infty)$ de $\phi \in S$, se ϕ for limitada. Observe que

$$|(A\phi)(t) + (B\eta)(t)| \leq \|\psi\| e^{-\int_0^t g(s)ds}\left(1 + \int_{-r_1(0)}^{0} g(u)du\right) + \|\eta\|\int_{t-r_1(t)}^{t} g(u)du \tag{18}$$
$$+ \|\eta\|\int_0^t e^{-\int_s^t g(u)du} g(s)\int_{s-r_1(s)}^{s} g(u)x(u)duds \tag{19}$$
$$+ \|\eta\|\int_0^t e^{-\int_s^t g(u)du}|g(s-r_1(s))(1-r_1'(s)) - a(s)|ds \tag{20}$$
$$+ \|\phi\|^{1/3}\int_0^t e^{-\int_s^t g(u)du}|b(s)|ds \tag{21}$$
$$\leq \|\psi\| e^{-\int_0^t g(s)ds}\left(1 + \int_{-r_1(0)}^{0} g(u)du\right) + \alpha < 1, \tag{22}$$

desde que $\|\psi\|$ seja suficientemente pequeno.

Na sequência mostraremos que AM é equicontínuo. Se $\phi \in M$ e $0 \leq t_1 < t_2$ com $t_2 - t_1 < 1$, então

$$|(A\phi)(t_2) - (A\phi)(t_1)| = \left|\int_0^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} g(u)du} b(s)\phi^{1/3}(s-r_2(s))ds - \int_0^{t_1} e^{-\int_s^{t_1} g(u)du} b(s)\phi^{1/3}(s-r_2(s)ds)\right|$$
$$= \left|\int_0^{t_1} e^{-\int_s^{t_2} g(u)du} b(s)\phi^{1/3}(s-r_2(s))ds + \int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} g(u)du} b(s)\phi^{1/3}(s-r_2(s)ds\right.$$
$$\left.- \int_0^{t_1} e^{-\int_s^{t_1} g(u)du} b(s)\phi^{1/3}(s-r_2(s))ds\right|$$
$$\leq \left|\int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} g(u)du} b(s)\phi^{1/3}(s-r_2(s)ds\right| + \left|\int_0^{t_1}\left(e^{-\int_s^{t_2} g(u)du} - e^{-\int_s^{t_1} g(u)du}\right) b(s)\phi^{1/3}(s-r_2(s))ds\right|$$
$$\leq \int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} g(u)du}|b(s)|ds + \int_0^{t_1}\left|e^{-\int_s^{t_1} g(u)du} - e^{-\int_s^{t_2} g(u)du}\right||b(s)|ds$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} g(u)du} d\left(\int_{t_1}^{s}|b(v)|dv\right)ds + \int_0^{t_1} e^{\int_0^s g(u)du}\left|e^{-\int_0^{t_2} g(u)du} - e^{-\int_0^{t_1} g(u)du}\right||b(s)|ds$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} g(u)du} d\left(\int_{t_1}^{s}|b(v)|dv\right)ds + \left|e^{-\int_0^{t_2} g(u)du} - e^{-\int_0^{t_1} g(u)du}\right|\int_0^{t_1} e^{\int_0^s g(u)du}|b(s)|ds$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} g(u)du} d\left(\int_{t_1}^{s}|b(v)|dv\right)ds + \left|e^{-\int_0^{t_2} g(u)du} - e^{-\int_0^{t_1} g(u)du}\right| e^{\int_0^{t_1} g(u)du}\int_0^{t_1} e^{-\int_s^{t_1} g(u)du}|b(s)|ds$$

$$\leq \int_{t_1}^{t_2} |b(s)|du \left(1 + \int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} g(u)du} g(s)ds\right) + \alpha \left| e^{-\int_{t_1}^{t_2} g(u)du} - 1 \right|$$
$$\leq 2\int_{t_1}^{t_2} |b(s)|du + \alpha \int_{t_1}^{t_2} g(u)du \leq (2K_1 + \alpha K_2)|t_1 - t_2|.$$

Sendo assim, pelo Lema 4, concluímos que AM está contido num conjunto compacto em $(S, |\cdot|_h)$.

Agora, vamos mostrar que B é uma contração com constante $\alpha < 1$. Com efeito, dadas ϕ_1 e ϕ_2 em M, temos

$$\frac{|(B\phi_1)(t) - (B\phi_2)(t)|}{h(t)} \leq \int_{t-r_1(t)}^{t} g(u) \frac{|\phi_1(u) - \phi_2(u)|}{h(t)} du$$
$$+ \frac{1}{h(t)} \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)du} g(s) \int_{s-r_1(s)}^{s} g(u)|\phi_1(u) - \phi_2(u)|duds$$
$$+ \frac{1}{h(t)} \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)du} |g(s - r_1(s))(1 - r_1'(s)) - a(s)||\phi_1(s - r_1(s)) - \phi_2(s - r_1(s))|ds$$
$$\leq \left\{ \int_{t-r_1(t)}^{t} g(u) \frac{h(u)}{h(t)} du + \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)du} g(s) \int_{s-r_1(s)}^{s} g(u) \frac{h(u)}{h(t)} duds \right.$$
$$\left. + \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)du} |g(s - r_1(s))(1 - r_1'(s)) - a(s)| \frac{h(s - r_1(s))}{h(t)} ds \right\} |\phi_1 - \phi_2|_h$$
$$\leq \alpha |\phi_1 - \phi_2|_h.$$

Por último, vamos mostrar que A é contínua. Tome $\varepsilon > 0$ e $\phi \in M$. Como $x^{1/3}$ é uniformemente contínua em $[-1, 1]$, então para $T > 0$ com $4/h(T) < \varepsilon$, existe $\delta > 0$ tal que $|x_1 - x_2| < \delta h(T)$ implica $|x_1^{1/3} - x_2^{1/3}| < \varepsilon/2$. Assim, para $|\phi(t) - \eta(t)| < \delta h(T)$ e para $t > T$, tem-se

$$\frac{|(A\phi)(t) - (A\eta)(t)|}{h(t)} \leq \frac{1}{h(t)} \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)du} |b(s)||\phi^{1/3}(s - r_2(s)) - \eta^{1/3}(s - r_2(s))|ds$$
$$\leq \frac{1}{h(t)} \left\{ \int_0^T e^{-\int_s^t g(u)du} |b(s)||\phi^{1/3}(s - r_2(s)) - \eta^{1/3}(s - r_2(s))|ds + 2\int_T^t |b(s)| e^{-\int_s^t g(u)du} ds \right\}$$
$$\leq \frac{1}{h(t)} \left\{ \frac{\varepsilon}{2} \int_0^T e^{-\int_s^t g(u)du} |b(s)|ds + 2\alpha \right\}$$
$$\leq \frac{1}{h(t)} \left(\frac{\varepsilon}{2}\alpha + 2\alpha \right) \leq \frac{\varepsilon\alpha}{2h(t)} + \frac{2\alpha}{h(T)} \leq \frac{\varepsilon\alpha}{2} + \frac{2\alpha}{h(T)} < \frac{\varepsilon\alpha}{2} + \frac{\varepsilon\alpha}{2} = \varepsilon\alpha < \varepsilon.$$

As condições do Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii estão satisfeitas e, por conseguinte, existe um ponto fixo em M da aplicação $A + B$, ou seja, existe uma solução $x(t, 0, \psi)$ de (1) em $\mathbb{R}$, tal que $|x(t, 0, \psi)| < 1$.

□

Tomando $r_1(t) = r_1$, em que r_1 é uma constante real e $g(t) = a(t + r_1)$, obtém-se o seguinte resultado.

Corolário 9 *Suponha que* (4) *e* (10) *sejam satisfeitas e a condição* (12) *substituída pela seguinte condição:*

$$\int_{t-r_1}^{t} a(u+r_1)du + \int_0^t e^{-\int_s^t a(u+r_1)du} a(s+r_1) \int_{s-r_1}^{s} a(u+r_1)duds + \int_0^t e^{-\int_s^t a(u+r_1)du} |b(s)| ds \leq \alpha. \tag{23}$$

Se ψ é uma função contínua inicial com norma suficientemente pequena, então existe uma solução $x(t,0,\psi)$ de (2) *em $\mathbb{R}^+$ com $|x(t,0,\psi)| < 1$.*

Observação 10 *Note que*

$$(3)+(4) \Rightarrow (10) \quad e \quad (3)+(5) \Rightarrow (23).$$

Daí, podemos afirmar que o Corolário 9 generaliza o Teorema 6.

Teorema 11 *Suponha que as condições* (10), (11) *e* (12) *estejam satisfeitas e assuma que*

$$\int_0^t e^{-\int_s^t g(u)du} b(s)ds \to 0 \textit{ quando } t \to \infty \tag{24}$$

e

$$\liminf_{t\to\infty} \int_0^t g(s)ds > -\infty. \tag{25}$$

Se ψ é uma função inicial contínua com norma suficientemente pequena, então (1) *tem uma solução $x(t,0,\psi)$, tal que $x(t,0,\psi) \to 0$ quando $t \to \infty$ se, e somente se,*

$$\int_0^t g(s)ds \to \infty \textit{ quando } t \to \infty. \tag{26}$$

Demonstração: Suponhamos que (26) seja válido e considere

$$N = \sup_{t\geq 0}\{e^{-\int_0^t g(s)ds}\}. \tag{27}$$

Todos os cálculos na demonstração do teorema anterior seguem para $h(t) = 1$ quando $|\cdot|_h$ é trocada pela norma do supremo $\|\cdot\|$. Adicionemos a M a seguinte condição:

$$\phi \in M \Rightarrow \phi(t) \to 0 \text{ quando } t \to \infty.$$

Por (24) é possível notar que se $\phi \in M$ então $(A\phi)(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Além disso, é claro que $(B\phi)(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Logo $A\phi + B\eta \in M$, se $\phi, \eta \in M$.

Como AM é equicontínuo (veja a demonstração do Teorema 8), A aplica M em um conjunto compacto de M. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii, existe $x \in M$ tal que $Ax + Bx = x$. Como $x \in M$, $x(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Reciprocamente, suponha que (26) não ocorra. Então, por (25), existe uma sequência $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$ com $n \to \infty$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{t_n} g(u)du = l, \quad \text{para algum } l \in \mathbb{R}.$$

Podemos escolher uma constante $J \in \mathbb{R}^+$, tal que $-J \leq \int_0^{t_n} g(s)ds \leq J$ para $n \geq 1$. Para simplificar os cálculos, defina

$$\omega(s) = |g(s - r_1(s))(1 - r_1'(s)) - a(s)| + |b(s)| + g(s) \int_{s-r_1(s)}^{s} g(u)du, \ \forall s \geq 0.$$

Por (12), tem-se $\int_0^t e^{-\int_s^{t_n} g(u)du} \omega(s)ds \leq \alpha$, de onde segue que

$$\int_0^{t_n} e^{\int_0^s g(u)du} \omega(s)ds \leq \alpha e^{\int_0^{t_n} g(u)du} \leq e^J.$$

A sequência $\left\{ \int_0^{t_n} e^{\int_0^s g(u)du} \omega(s)ds \right\}$ é limitada, então admite subsequência convergente. Vamos assumir que $\lim_{n\to\infty} \int_0^{t_n} e^{\int_0^s g(u)du} \omega(s)ds = \mu$, para algum $\mu \in \mathbb{R}^+$, e escolher $\bar{k} \in \mathbb{Z}^+$ suficientemente grande de modo que $\int_{t_{\bar{k}}}^{t_n} e^{\int_0^s g(u)du} \omega(s)ds < \dfrac{\delta_0}{4N}$ para $n \geq \bar{k}$, onde $\delta_0 > 0$ e $2\delta_0 K e^J + \alpha < 1$.

Agora vamos considerar a solução $x(t) = x(t, t_{\bar{k}}, \psi)$ de (1) com $\psi(t_{\bar{k}}) = \delta_0$ e $|\psi(s)| \leq \delta_0$ para $s \leq t_{\bar{k}}$. Devemos escolher ψ de modo que $|x(t)| \leq 1$ para $t \geq t_{\bar{k}}$ e $\psi(t_{\bar{k}}) - \int_{t_{\bar{k}}-r_1}^{t_{\bar{k}}} g(s)\psi(s)ds \geq \dfrac{1}{2}\delta_0$.

Segue de (16) e (17) que $x(t) = (Ax)(t) + (Bx)(t)$ para $n \geq t_{\bar{k}}$. Observe que

$$\begin{aligned}
|x(t_n) - \int_{t_n - r_1(t_n)}^{t_n} g(s)x(s)ds| &\geq \frac{1}{2}\delta_0 e^{-\int_{t_{\bar{k}}}^{t_n} g(u)du} - \int_{t_{\bar{k}}}^{t_n} e^{-\int_s^{t_n} g(u)du} \omega(s)ds \qquad (28)\\
&= \frac{1}{2}\delta_0 e^{-\int_{t_{\bar{k}}}^{t_n} g(u)du} - e^{-\int_0^{t_n} g(u)du} \int_{t_{\bar{k}}}^{t_n} e^{\int_0^s g(u)du} \omega(s)ds\\
&= e^{-\int_{t_{\bar{k}}}^{t_n} g(u)du} \left(\frac{1}{2}\delta_0 - e^{-\int_0^{t_{\bar{k}}} g(u)du} \int_{t_{\bar{k}}}^{t_n} e^{\int_0^s g(u)du} \omega(s)ds \right)\\
&\geq e^{-\int_{t_{\bar{k}}}^{t_n} g(u)du} \left(\frac{1}{2}\delta_0 - N \int_{t_{\bar{k}}}^{t_n} e^{\int_0^s g(u)du} \omega(s)ds \right)\\
&\geq e^{-\int_{t_{\bar{k}}}^{t_n} g(u)du} \left(\frac{1}{2}\delta_0 - \frac{1}{4}\delta_0 \right)\\
&= \frac{1}{4}\delta_0 e^{-\int_{t_{\bar{k}}}^{t_n} g(u)du} \geq \frac{1}{4}\delta_0 e^{-2J} > 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como a solução $x(t)$ de (1) é tal que $x(t) = x(t, t_{\bar{k}}, \psi) \to 0$ quando $t \to \infty$, visto que $t_n - r_1(t_n) \to \infty$ quando $n \to \infty$ e (12) é válida, temos que

$$x(t_n) - \int_{t_n - r_1(t_n)}^{t_n} g(s)x(s)ds \to 0 \text{ quando } n \to \infty,$$

o que contradiz (28). Portanto, a condição (26) é necessária para que (1) possua uma solução $x(t, 0, \psi) \to 0$ quando $t \to \infty$, o que completa a prova.

$\square$

Para o caso especial em que $b(t) = 0$, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 12 *Seja $r_1(t)$ diferenciável. Suponha que exista uma constante $\alpha \in (0,1)$ e uma função $g \in C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$, tal que para $t \geq 0$ tem-se*

$$\liminf_{t\to\infty} \int_0^t g(s)ds > -\infty \tag{29}$$

e

$$\int_{t-r_1(t)}^t g(u)du + \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)du} g(s) \int_{s-r_1(s)}^s g(u)duds \\ + \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)du} |g(s-r_1(s))(1-r_1'(s)) - a(s)|ds \leq \alpha. \tag{30}$$

Se ψ é uma função inicial contínua com norma suficientemente pequena, então (2) *possui uma solução $x(t,0,\psi) \to 0$ quando $t \to \infty$ se, e somente se,*

$$\int_0^t g(s)ds \to \infty \ \text{ quando } \ t \to \infty. \tag{31}$$

Agora, se $r_1(t) = r_1 \in \mathbb{R}$ e $g(t) = a(t+r_1)$, então obtemos o próximo resultado.

Corolário 13 *Suponha que* (4), (10) *e* (23) *são satisfeitas e assuma que*

$$\int_0^t e^{-\int_s^t a(u+r_1)du} b(s)ds \to 0 \text{ quando } t \to \infty. \tag{32}$$

Se ψ é uma função inicial contínua com norma suficientemente pequena, então (2) *possui uma solução $x(t,0,\psi)$, tal que $x(t,0,\psi) \to 0$ quando $t \to \infty$ se, e somente se, $\int_0^\infty a(s)ds = \infty$.*

Observação 14 *A condição* (9) *implica* (32)*; disto seque que o Corolário 13 generaliza o Teorema 7.*

5 Exemplo

Considere a seguinte equação escalar

$$x'(t) = -\frac{1}{t+0.75}x(t-0.25) + \frac{1}{6.3052t+1}x^{1/3}(t-r_2(t)), \tag{33}$$

onde $r_2 \in C(\mathbb{R}^+,[0,\gamma])$, com $\gamma > 0$.

Claramente, $\sup_{t\geq 0} \left| \frac{\frac{1}{6.3052t+1}}{\frac{1}{(t+0.25)+0.75}} \right| = \sup_{t\geq 0} \frac{t+1}{6.3052t+1} = 1$, já que a função $t \geq 0 \mapsto \frac{t+1}{6.3052t+1}$ é decrescente. Daí segue que a condição (3) não é satisfeita. Então, o Teorema 6 e o Teorema 7 falham para a equação 33. Por outro lado, é fácil verificar que as condições (4) e (10) são satisfeitas para $a(t) = \frac{1}{t+0.75}$ e $b(t) = \frac{t+1}{6.3052t+1}$. Ademais, dado $t \geq 0$, temos:

- $\int_{t-r_1}^t a(u+r_1)du = \int_{t-0.25}^t \frac{1}{s+1}ds = \ln(t+1) - \ln(t+0.75) \leq -\ln(0.75),$

$$\bullet \int_0^t e^{-\int_s^t a(u+r_1)du} a(s+r_1) \int_{s-r_1}^{s} a(u+r_1)duds = \int_0^t e^{-\int_s^t \frac{1}{u+1}du} \frac{1}{s+1} \int_{s-0.25}^{s} \frac{1}{u+1}duds$$
$$\leq -\ln(0.75)$$

e

$$\bullet \int_0^t e^{-\int_s^t a(u+r_1)du} b(s)ds = \int_0^t e^{\ln(\frac{s+1}{t+1})} \frac{1}{6.3052s+1}ds = \frac{1}{t+1}\int_0^t \frac{s+1}{6.3052s+1}ds$$
$$= \frac{1}{1+t}\left(\int_0^t \frac{s}{6.3052s+1}ds + \int_0^t \frac{1}{6.3052s+1}ds\right)$$
$$= \frac{0.1586t}{t+1} + \frac{1-1/6.3052}{6.3052} \times \frac{\ln(t+0.1586)-\ln(0.1586)}{t+1} \to 0,\ t \to \infty.$$

Tomando
$$f(t) = \frac{\ln(t+0.1586)-\ln(0.1586)}{t+1},\ t \in [0,\infty),$$
temos $f'(t) = \frac{1}{(t+1)^2}\left(\frac{t+1}{t+0.1586} - (\ln(t+0.1586)-\ln(0.1586))\right)$ e $f'(0.8414) = 0$, de onde podemos concluir que f assume seu valor máximo em 0.8414, a saber $f(0.8414) = 1$.

Portanto,
$$\int_0^t e^{-\int_s^t \frac{1}{u+1}du} \left|\frac{1}{6.3052s+1}\right| ds \leq 0.1586 + 0.1335 = 0.2921.$$

Defina $\alpha = -2\ln 0.75 + 0.2921 \approx 0.8681 < 1$. Pelo Corolário 13, a equação 33 possui uma solução $x(t,0,\psi)$, tal que $x(t,0,\psi) \to 0$ quando $t \to \infty$, desde que a norma de ψ seja suficientemente pequena.

6 Referências bibliográficas

1. BURTON, T. A. Perron-type stability theorems for neutral equations. **Nonlinear Analysis.**, v. 55, n. 3, p. 285-297, 2003.

2. BURTON, T. A. Stability by fixed point theory or Liapunov theory: a comparison. **Fixed Point Theory**, v. 4, n. 1, p. 15-32, 2003. Disponível em: <http://www.math.ubbcluj.ro/ nodeacj/ download.php?f=031Burton.pdf>. Acesso em: 13 nov. 2017.

3. BURTON, T. A. Fixed points and stability of a nonconvolution equation. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 132, n. 12, p. 3679-3687, 2004.

4. BURTON, T. A. Stability and fixed points: addition of terms. **Dynamic Systems Applications**, v. 13, p. 459-478, 2004. Disponível em: <http://lagrange.math.siu.edu/Burton/ papers.htm>. Acesso em: 13 nov. 2017.

5. BURTON, T. A. Stability by fixed point methods for highly nonlinear delay equations. **Fixed Point Theory**, v. 5, n. 1, p. 3-20, 2004.

6. BURTON, T. A. Fixed points, stability, and exact linearization. **Nonlinear Analysis**, v. 61, n. 5, p. 857-870, 2005.

7. BURTON, T. A. Fixed points, stability, and harmless perturbations. **Fixed Point Theory Applications**, p. 35-46, 2005.

8. BURTON, T. A. Fixed points, Volterra equations, and Becker's resolvent. **Acta Math. Hungar.**, v. 108, n. 3, p. 261-281, 2005.

9. BURTON, T. A.; FURUMOCHI, T. A note on stability by Schauder's theorem. **Funkcial. Ekvac.**, v. 44, n. 1, p. 73-82, 2001.

10. BURTON, T. A.; FURUMOCHI, T. Fixed points and problems in stability theory for ordinary and functional differential equations. **Dynam. Systems Appl.**, v. 10, p. 89-116, 2001.

11. BURTON, T. A.; FURUMOCHI, T. Asymptotic behavior of solutions of functional differential equations by fixed point theorems. **Dynam. Systems Appl.**, v. 11, p. 499-521, 2002.

12. BURTON, T. A.; FURUMOCHI, T. Krasnoselskii's fixed point theorem and stability. **Nonlinear Analysis**, v. 49, n. 4, p. 445-454, 2002.

13. BURTON, T. A.; FURUMOCHI, T. Asymptotic behavior of nonlinear functional differential equations by Schauder's theorem. **Nonlinear Studies**, v. 12, n. 1, p. 73-84, 2005.

14. BURTON, T. A.; ZHANG, B. Fixed points and stability of an integral equation: Nonuniqueness. **Appl. Math. Lett.**, v. 17, n. 7, p. 839-846, 2004.

15. JIN, C; LUO, J. Stability in functional differential equations established using fixed point theory. **Nonlinear Analysis**, v. 68, n. 11, p. 3307-3315, 2008.

16. BURTON, T. A. **Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations**. New York: Dover Publications, INC., 1985.

17. SMART, D. R. **Fixed point theorems**. London: Cambridge Univ. Press, 1980.

18. BURTON, T. A. **Stability by fixed point theory for functional differential equations** . New York: Dover Publications, INC., 2006.

Artigo recebido em ago. 2017 e aceito em nov. 2017.