



Revista Eletrônica  
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664  
Volume 11, dez. 2017

**Arlane Vieira**

Universidade Federal do  
Maranhão  
arlane@ufma.br

**Lauro Mandela**

aluno do curso Interdisciplinar  
em Ciência e Tecnologia da  
Universidade Federal do  
Maranhão  
lauromandela@gmail.com

**Pedro Fernandes**

aluno do curso Interdisciplinar  
em Ciência e Tecnologia da  
Universidade Federal do  
Maranhão  
pedroca\_fsj@hotmail.com

**Vinicius Moura**

aluno do curso Interdisciplinar  
em Ciência e Tecnologia da  
Universidade Federal do  
Maranhão  
silva.v.m@hotmail.com

## Geometria plana, cadeia de Markov e caos

Plane geometry, Markov chain and chaos

### Resumo

Consideramos o problema de inversões geométricas em círculos. Dados  $p$  discos fechados  $D_1, D_2, \dots, D_p$  disjuntos no plano complexo, sua união, denotada por  $X$ , é um espaço métrico compacto, na métrica induzida, e as correspondentes inversões induzem um sistema dinâmico estocástico em  $X$ , modelado por uma cadeia de Markov. Neste artigo, estudamos sua dinâmica topológica e provamos que o conjunto limite das órbitas é um conjunto de Cantor invariante no qual a dinâmica é caótica, no sentido de Devaney, e a entropia topológica é igual a  $\log(p - 1)$  para  $p \geq 2$ .

**Palavras-chave:** Inversões. Órbitas periódicas. Cadeia de Markov. Entropia. Caos.

### Abstract

We consider the problem of geometric inversions on circles. Given  $p$  disjoint closed disks  $D_1, D_2, \dots, D_p$  of the complex plane, their union, denoted by  $X$ , is a compact metric space, with respect to the induced metric, and the corresponding inversions induce a stochastic dynamical system on  $X$ , modeled by a Markov chain. In this paper, we study its topological dynamics and we prove that the limit set of orbits is an invariant Cantor set in which the dynamics is chaotic, in the sense of Devaney, and the topological entropy is equal to  $\log(p - 1)$  for  $p \geq 2$ .

**Keywords:** Inversions. Periodic orbits. Markov Chain. Entropy. Chaos.



# 1 Introdução

Seja  $\Gamma$  um círculo no plano complexo com centro em  $z_0$  e raio  $r > 0$ . A *inversão* em  $\Gamma$  é a função  $I_\Gamma : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  definida por

$$I_\Gamma(z) = z_0 + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{z}_0}, \quad (1)$$

onde  $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  é a esfera de Riemann. Por definição,  $I_\Gamma$  permuta as duas componentes de  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$  e fixa cada ponto de  $\Gamma$  (para mais detalhes, veja [1, p. 124]). Além disso, a imagem do centro  $z_0$  por  $I_\Gamma$  é o ponto  $\infty$ . Uma abordagem geométrica desta função será apresentada no início da Seção 2 deste artigo.

Fixemos um número inteiro  $p \geq 3$ . Para cada  $j = 1, 2, \dots, p$ , denotaremos por  $D_j$  o disco fechado  $\overline{D}(c_j, r_j)$  com centro em  $c_j \in \mathbb{C}$  e raio  $r_j > 0$ . A menos que seja dito o contrário, suporemos que  $D_j \cap D_k = \emptyset$  se  $j \neq k$ . Seja  $X = \cup_j D_j$ . Então,  $X$  é um subespaço métrico compacto e completo de  $\mathbb{C}$ , com a métrica induzida.

Para  $\Gamma_j := \partial D_j$ , escreveremos  $I_j$  ao invés de  $I_{\Gamma_j}$  para simplificar a notação. Em [2, 3], D. Look considerou a função racional

$$f(z) := \frac{1}{n} \left( I_1(z) + \dots + I_p(z) \right)$$

e descreveu alguns aspectos da dinâmica de  $z \mapsto f(\bar{z})$  em  $\widehat{\mathbb{C}}$ , e a estrutura topológica do conjunto de Julia desta função holomorfa (sobre dinâmica complexa, consulte [4]).

Como as inversões  $I_j$  são isomorfismos da esfera de Riemann, a coleção  $z \mapsto I_j(\bar{z})$ , com  $1 \leq j \leq p$ , gera um subgrupo de automorfismos conformes de  $\widehat{\mathbb{C}}$  (um grupo fuchsiano). Existe uma vasta literatura sobre a dinâmica de tais grupos (veja [5], por exemplo, e as referências nela contidas). A função  $I_j$  é chamada de *anti-automorfismo* da esfera de Riemann e, como observamos acima, é a composição da conjugação complexa  $z \mapsto \bar{z}$  com um automorfismo de  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Uma diferença topológica importante entre as funções  $z \mapsto I_j(\bar{z})$  e  $z \mapsto I_j(z)$  é que a primeira preserva orientação enquanto que a segunda inverte orientação.

Neste artigo consideramos a dinâmica estocástica induzida por  $I_1, \dots, I_n$  no subconjunto compacto  $X$ , definida da seguinte forma. Uma *órbita* em  $X$  é uma sequência  $\langle z_j \rangle$  onde  $z_{j+1} = I_{s_{j+1}}(z_j)$ , com  $s_j \in \{1, 2, \dots, p\}$  e  $s_j \neq s_{j+1}$  para cada  $j \geq 1$ . Em particular, se  $z_j \in D_s$  então  $z_{j+1} \notin D_s$ . Com essa definição, dado um ponto inicial  $z_0 \in X$  temos

$$z_j = I_{s_j} \circ I_{s_{j-1}} \circ \dots \circ I_{s_2} \circ I_{s_1}(z_0), \quad j \geq 1.$$

Denotaremos por  $O(X)$  o conjunto de todas as órbitas em  $X$ . Assim, a cada órbita  $\langle z_j \rangle$  associamos uma sequência

$$\langle s_j \rangle \in \Sigma_p := \{1, 2, \dots, p\}^{\mathbb{N}},$$

que será chamada *itinerário* da órbita  $\langle z_j \rangle$ . Isto nos permitirá introduzir uma dinâmica simbólica em  $\Sigma_p$  associada às órbitas em  $X$ . A partir da teoria geral desse tipo de sistema dinâmico, obteremos uma descrição completa da dinâmica topológica das órbitas em  $X$ . Mais especificamente, os principais resultados deste artigo são os seguintes:

**Teorema 1.** *Se  $\langle z_n \rangle$  e  $\langle w_n \rangle$  têm o mesmo itinerário então  $\omega(\langle z_n \rangle) = \omega(\langle w_n \rangle)$ .*

O conjunto  $\omega$ -limite de uma sequência  $\langle z_n \rangle$ , denotado por  $\omega(\langle z_n \rangle)$ , é o conjunto de todos os pontos de acumulação dessa sequência. Em outras palavras,  $z \in \omega(\langle z_n \rangle)$  se, e somente se, existe uma subsequência  $\langle n_k \rangle$  tal que  $z_{n_k} \rightarrow z$  quando  $k \rightarrow \infty$ . O principal argumento na prova do Teorema 1 é a contração de  $I_j$  no exterior do seu disco de inversão.

**Teorema 2.** *Seja  $\langle s_n \rangle$  um itinerário periódico de período  $k > 1$ . Então existe uma única órbita periódica em  $O(X)$  de período  $k$  com itinerário  $\langle s_n \rangle$ .*

**Teorema 3.** *Dado  $p \geq 2$ , o número de órbitas periódicas de período  $n \geq 1$  em  $O(X)$  é igual a*

$$(p-1)^n + (-1)^n(p-1)$$

Em razão do Teorema 1, podemos nos restringir ao estudo da dinâmica nas classes (de equivalência) das órbitas com o mesmo itinerário. Denotaremos esse quociente por  $O(X)/\sim$ .

**Teorema 4.** *Seja  $A = (a_{ij})$  a matriz quadrada de ordem  $p$  definida por  $a_{ij} = 1 - \delta_{ij}$  para  $1 \leq i, j \leq p$ , onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker. Então,  $O(X)/\sim$  é homeomorfo a  $\Sigma_A \subset \Sigma_p$ .*

Denotaremos por  $[x_n]$  a classe da órbita  $\langle x_n \rangle$  em  $O(X)/\sim$ .

**Teorema 5.** *A aplicação  $f : O(X)/\sim \rightarrow O(X)/\sim$  definida por  $f([x_n]) = [x_{n+1}]$  é caótica, no sentido de Devaney, e sua entropia topológica é igual a  $\log(p-1)$ . Em particular,  $f$  tem entropia topológica positiva se, e somente se,  $p \geq 3$ .*

Pode-se verificar que o levantamento  $\langle x_n \rangle \mapsto \langle x_{n+1} \rangle$  de  $f$  ao espaço  $O(X)$  pela aplicação quociente, é uniformemente contínua e, portanto,  $f$  é contínua. De fato, com a métrica em  $O(X)$  definida por (8) (seção 6), temos

$$\rho(\langle x_{n+1} \rangle, \langle y_{n+1} \rangle) = 2\rho(\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle) - \frac{|x_1 - y_1|}{1 + |x_1 - y_1|} \leq 2\rho(\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle)$$

para quaisquer  $\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle \in O(X)$ . Isto prova que este levantamento é de Lipschitz, de onde segue-se a conclusão.

A órbita de um elemento  $[x_n] \in O(X)/\sim$  por  $f$  é o conjunto definido por

$$O_f([x_n]) := \{f^j([x_n]); j \geq 0\}.$$

Em particular, o Teorema 5 mostra que a dinâmica topológica induzida pelas inversões em  $O(X)/\sim$  é tão complicada quanto aquela induzida por  $f$ .

O texto está organizado da seguinte forma. Na Seção 2, apresentamos a definição geométrica de inversões em círculos e provamos o Teorema 1. Na Seção 3 definimos itinerários periódicos e órbitas periódicas, para então demonstrar o Teorema 2, como uma consequência do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e do Teorema 1. Na Seção 4, apresentamos o espaço das palavras com  $p$  símbolos e os principais resultados sobre a Cadeia de Markov topológica associada à matriz  $A$ , do Teorema 4. Em particular, provamos que  $\sigma_A$  é caótica, no sentido de Devaney, e calculamos sua entropia topológica. Na Seção 5, usando recorrências lineares, calculamos o número de órbitas periódicas em  $O(X)$  de um dado período, e provamos o Teorema 3. Na Seção 6, demonstramos o Teorema 4. A prova do Teorema 5 é apresentada na Seção 7.

## 2 Inversões geométricas

Seja  $\Gamma$  a fronteira do disco de centro  $O$  e raio  $r > 0$  no plano complexo. Dado qualquer ponto  $P$  no exterior do disco limitado por  $\Gamma$ , existe um único círculo com diâmetro  $OP$ . Sejam  $A$  e  $B$  a interseção desse círculo com  $\Gamma$ . O ponto  $P'$  é definido como interseção do segmento  $\overline{AB}$  com  $\overline{OP}$ , e é chamado *inverso* de  $P$  em relação  $\Gamma$  (figura 1). Pelas relações métricas no triângulo

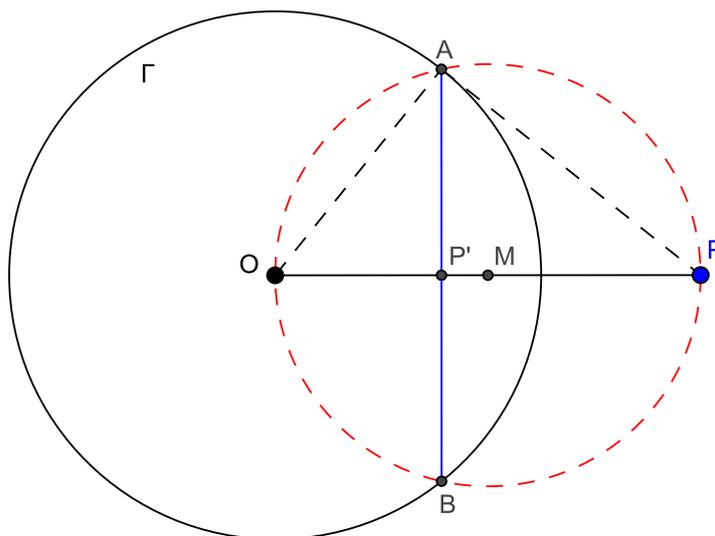


Figura 1: Inversão geométrica

retângulo  $OAP$ , temos que  $OA^2 = OP' \cdot OP$ . A *inversão geométrica* em  $\Gamma$  é a função  $I_\Gamma$  definida por  $I_\Gamma(P) = P'$ , que em notação de variáveis complexas é dada por (1). Em particular, a inversão geométrica é uma função racional *antiholomorfa* de grau 1 na esfera de Riemann.

Dado um disco  $D := D(c, r)$  com centro em  $c$  e raio  $r > 0$ , seja  $C := \partial D$ .

**Lema 6.** *Seja  $D_1 := D(c_1, r_1)$  tal que  $\overline{D_1} \cap \overline{D} = \emptyset$ . Se  $D_2 := I_C(D_1)$  então  $D_2$  é o disco com centro em*

$$c_2 := c + \frac{r^2}{|c_1 - c|^2 - r_1^2}(c_1 - c) \quad (2)$$

e raio

$$r_2 := \frac{r^2 r_1}{|c_1 - c|^2 - r_1^2} \quad (3)$$

*Demonstração.* É um resultado clássico em inversões em círculos que a imagem de qualquer círculo que não passa pelo centro do círculo de inversão também é um círculo. Sejam  $z \notin \overline{D}$  e  $w := I_C(z)$ . Então  $w \in D$  e

$$|z - c| \cdot |w - c| = r^2 \quad (4)$$



Considere agora os pontos  $a$  e  $b$  em  $\partial D_1$ , pertencentes à reta que passa por  $c$  e  $c_1$ , com  $c_1$  entre  $a$  e  $b$ . Como  $|b - c_1| = |c_1 - a| = r_1$ , temos

$$b = c_1 + r_1 \frac{c_1 - c}{|c_1 - c|} \quad \text{e} \quad a = c_1 - r_1 \frac{c_1 - c}{|c_1 - c|}. \quad (5)$$

Sejam  $a' = I_C(a)$  e  $b' = I_C(b)$ . De (4) segue-se que

$$|a - c| \cdot |a' - c| = r^2.$$

Como

$$a - c = (c_1 - c) \left[ 1 - \frac{r_1}{|c_1 - c|} \right],$$

pela relação (5), obtemos  $|a - c| = |c_1 - c| - r_1$  e portanto

$$a' = c + \frac{r^2}{|a - c|} \cdot \frac{c_1 - c}{|c_1 - c|} = c + \frac{r^2}{|c_1 - c| - r_1} \cdot \frac{c_1 - c}{|c_1 - c|}.$$

Analogamente,

$$b' = c + \frac{r^2}{|c_1 - c| + r_1} \cdot \frac{c_1 - c}{|c_1 - c|}.$$

Com isso, o centro de  $D_2$  é dado por

$$c_2 := \frac{a' + b'}{2} = c + \frac{r^2}{|c_1 - c|^2 - r_1^2} (c_1 - c).$$

e o raio, por

$$r_2 := \frac{|a' - b'|}{2} = \frac{r^2 r_1}{|c_1 - c|^2 - r_1^2}.$$

□

**Corolário 7.** *Nas hipóteses do Lema 6, tem-se*

$$\text{área}(D_2) = \left( \frac{r^2}{|c_1 - c|^2 - r_1^2} \right)^2 \text{área}(D_1). \quad (6)$$

*Demonstração do Teorema 1.* Suponha que  $\langle z_n \rangle$  e  $\langle w_n \rangle$  tenham o mesmo itinerário  $\langle s_n \rangle$ . Então  $z_n, w_n \in D_{s_n}$  para todo  $n \geq 1$ . Como  $z_{n+1} = I_{s_{n+1}}(z_n)$  e  $w_{n+1}$  pertencem a  $I_{s_{n+1}}(D_{s_n})$  para todo  $n \geq 1$ , concluímos que

$$z_n, w_n \in R_n := I_{s_n} \circ I_{s_{n-1}} \circ \cdots \circ I_{s_2}(D_{s_1}), \quad n \geq 2.$$

Pelo Lema 6,  $R_n$  é um disco e

$$R_{n+1} = I_{s_{n+1}}(R_n), \quad n \geq 1.$$

Com a notação  $D_{s_n} =: D(c_{s_n}, r_{s_n})$ , e tendo em vista que  $R_{n+1} \subset I_{s_{n+1}}(D_{s_n})$ , segue-se de (6) que

$$\text{área}(R_{n+1}) \leq \left( \frac{r_{s_{n+1}}^2}{|c_{s_n} - c_{s_{n+1}}|^2 - r_{s_n}^2} \right)^2 \text{área}(D_{s_n})$$

Como a sequência  $(r_{s_n})$  é limitada, temos

$$\lambda := \sup_{n \geq 1} \left( \frac{r_{s_{n+1}}^2}{|c_{s_n} - c_{s_{n+1}}|^2 - r_{s_n}^2} \right)^2 < 1,$$

de onde segue-se que

$$\text{área}(R_{n+1}) \leq \lambda^n \text{área}(D_{s_1}),$$

e dessa forma  $\text{diam}(R_n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto,  $\langle z_n \rangle$  e  $\langle w_n \rangle$  têm o mesmo conjunto  $\omega$ -limite.  $\square$

A demonstração do Teorema 1 nos permite concluir, ainda, que a distância (Seção 6) entre  $\langle z_n \rangle$  e  $\langle w_n \rangle$  tende a zero exponencialmente quando  $n \rightarrow \infty$ . Isto é mais geral que a conclusão do Teorema 1.

### 3 Órbitas periódicas

Dizemos que  $\langle x_n \rangle \in O(X)$  é uma *órbita periódica* de período  $k \geq 1$  se  $x_n = x_{k+n}$  para todo  $n \geq 1$ . Da mesma forma, uma sequência  $\langle s_n \rangle \in \Sigma_p$  é chamada *itinerário periódico* de período  $k$  se  $s_n = s_{n+k}$  para todo  $n \geq 1$ . Particularmente não existem órbitas periódicas de período 1 em  $O(X)$  e como consequência, também não existem itinerários periódicos de período 1 em  $\Sigma_p$  associados a alguma órbita.

Para provar o Teorema 2, usaremos o seguinte resultado.

**Lema 8.** *Sejam  $D \subset \mathbb{C}$  um disco fechado e  $f : D \rightarrow D$  uma função contínua. Então existe  $z_0 \in D$  tal que  $f(z_0) = z_0$ .*

*Demonstração.* Seja  $h : D \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$  um homeomorfismo qualquer, onde  $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$  é o disco unitário aberto (com centro na origem e raio 1). Então a função  $g : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$  definida por  $g := h \circ f \circ h^{-1}$  é contínua. Portanto, pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (veja em [6, 2.4.23 Theorem]), existe  $w_0 \in \overline{\mathbb{D}}$  tal que  $g(w_0) = w_0$ . Definindo-se  $z_0 = h^{-1}(w_0)$ , temos

$$f(z_0) = f(h^{-1}(w_0)) = h^{-1}(g(w_0)) = h^{-1}(w_0) = z_0.$$

$\square$

*Demonstração do Teorema 2.* Primeiro demonstraremos a existência de órbitas periódicas com um dado itinerário periódico. Para tanto, fixemos um itinerário  $\langle s_n \rangle \in \Sigma_p$  periódico de período  $k > 1$ . Então,  $s_n = s_{n+k}$  para todo  $n \geq 1$ . Por outro lado, como  $f := I_{s_1} \circ I_{s_k} \circ I_{s_{k-1}} \circ \dots \circ I_{s_3} \circ I_{s_2}$  é contínua em  $D_{s_1}$  e  $f(D_{s_1}) \subseteq D_{s_1}$  (veja figura 2), segue-se do Lema 8 que existe  $x \in D_{s_1}$  tal que  $f(x) = x$ .

Considere a sequência  $\langle x_n \rangle \in X^{\mathbb{N}}$  definida da seguinte forma:  $x_1 := x$  e, por recorrência,  $x_j := I_{s_j}(x_{j-1})$  para  $1 < j \leq k$ . Para  $n > k$  podemos escrever  $n = qk + r$  onde  $q \geq 1$  e  $1 \leq r \leq k$ . Com isso, definimos  $x_n = x_r$ . A sequência  $\langle x_n \rangle$  assim definida é uma órbita e

$$x_{n+k} = x_{(qk+r)+k} = x_{(q+1)k+r} = x_r = x_n,$$

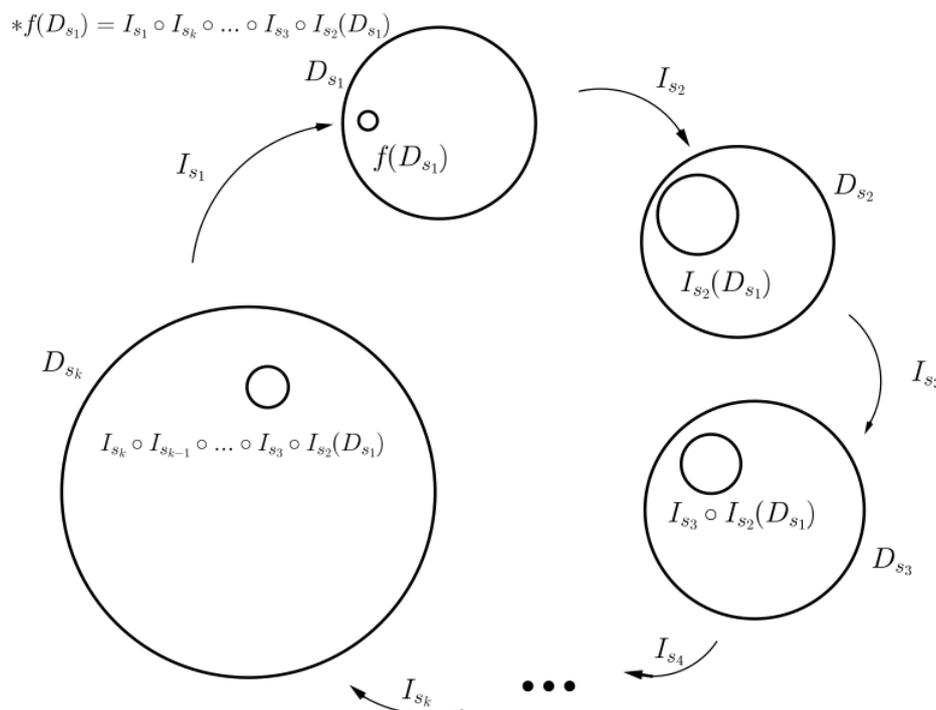


Figura 2:  $f := I_{s_1} \circ I_{s_k} \circ I_{s_{k-1}} \circ \dots \circ I_{s_3} \circ I_{s_2}$

isto é,  $\langle x_n \rangle$  é uma órbita periódica de período  $k$ . Isto prova a existência de órbitas periódicas. Quanto à unicidade, suponha que  $\langle y_n \rangle$  é um órbita periódica de período  $k$  com itinerário  $\langle s_n \rangle$ . Como  $y_{n+k} = y_n$  para todo  $n \geq 1$ , para provar que  $\langle x_n \rangle = \langle y_n \rangle$  é suficiente verificar que  $x_j = y_j$  para  $1 \leq j \leq k$ . Fixemos  $1 \leq j \leq k$ . Então,

$$x_j = x_{nk+j} \quad \text{e} \quad y_j = y_{nk+j}$$

para todo  $n \geq 1$ . Pelo Teorema 1, como  $\langle x_n \rangle$  e  $\langle y_n \rangle$  têm o mesmo itinerário,  $|x_{nk+j} - y_{nk+j}| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Logo,

$$|x_j - y_j| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_j - y_j| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_{nk+j} - y_{nk+j}| = 0,$$

e portanto,  $x_j = y_j$ . □

## 4 Cadeia de Markov Topológica

A distância entre dois pontos  $\langle r_n \rangle$  e  $\langle s_n \rangle$  em  $\Sigma_p$ , onde  $p \geq 2$ , é definida por

$$d(\langle r_n \rangle, \langle s_n \rangle) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|r_n - s_n|}{p^n}.$$

Da definição, se  $r_j = s_j$  para  $1 \leq j \leq k$  então  $d(\langle r_n \rangle, \langle s_n \rangle) \leq p^{-k}$ . Reciprocamente, se  $d(\langle r_n \rangle, \langle s_n \rangle) < p^{-k}$  para algum  $k \geq 1$  inteiro, então  $r_j = s_j$  para  $1 \leq j \leq k$ . Em particular, a bola fechada em  $\Sigma_p$  com centro em  $\langle r_n \rangle$  e raio  $p^{-k}$  é o conjunto

$$\overline{B(\langle r_n \rangle, 1/p^k)} = \{ \langle s_n \rangle \in \Sigma_p; r_j = s_j \text{ para } 1 \leq j \leq k \}.$$

Na literatura, um fechado da forma  $\overline{B(\langle r_n \rangle, 1/p^k)}$  é chamado *cilindro* e denota-se por

$$[r_1, r_2, \dots, r_k] := \{ \langle s_n \rangle \in \Sigma_p; r_j = s_j \text{ para } 1 \leq j \leq k \}.$$

Com essa métrica,  $\Sigma_p$  é um espaço métrico completo, compacto, totalmente desconexo e perfeito, e portanto, um *conjunto de Cantor* (veja [7, pp. 46-47]). Considere a aplicação *deslocamento*  $\sigma : \Sigma_p \rightarrow \Sigma_p$  definida por

$$\sigma(\langle r_n \rangle) = \langle r_{n+1} \rangle = (r_2, r_3, \dots).$$

Sabe-se que  $\sigma$  é uma aplicação contínua sobrejetora e que existe uma órbita de  $\sigma$  densa em  $\Sigma_p$ . Além disso, se  $P_n(\sigma)$  é o número de órbitas periódicas de período  $n$  de  $\sigma$  então  $P_n(\sigma) = p^n$ . E ainda, o conjunto das órbitas periódicas de  $\sigma$  é denso em  $\Sigma_p$ .

Seja  $A = (a_{ij})$  a matriz quadrada de ordem  $p$  tal que  $a_{ii} = 0$  e  $a_{ij} = 1$  para  $1 \leq i, j \leq p$  com  $i \neq j$ . À matriz  $A$ , associamos o subconjunto

$$\Sigma_A := \{ \langle s_n \rangle \in \Sigma_p; a_{s_n s_{n+1}} = 1, \text{ para cada } n \geq 1 \}.$$

Em outras palavras, a matriz  $A$  determina todas as transições admissíveis em uma órbita. O conjunto  $\Sigma_A$  é um subespaço métrico compacto de  $\Sigma_p$ , invariante pelo deslocamento  $\sigma$ . A restrição de  $\sigma$  ao subconjunto  $\Sigma_A$  será denotada por  $\sigma_A$ , e é chamada de *cadeia de Markov topológica* associada à matriz  $A$  ou simplesmente, *subdeslocamento de tipo finito*.

Dizemos que  $\langle s_n \rangle \in \Sigma_A$  é um *ponto periódico* de período  $k \geq 1$  por  $\sigma_A$  se  $\sigma_A^k(\langle s_n \rangle) = \langle s_n \rangle$ , isto é,  $s_n = s_{n+k}$  para todo  $n \geq 1$ .

Para fixar notação, denotaremos os elementos de  $A^n$  por  $a_{ij}^{(n)}$ , para  $1 \leq i, j \leq p$  e  $n \geq 0$ . Para  $p \geq 3$ , a matriz  $A$  é *irreduzível*, ou seja, para cada  $i, j \in \{1, 2, \dots, p\}$  existe  $n := n(i, j) \geq 1$  tal que  $a_{ij}^{(n)} > 0$ . De fato, pode-se verificar que  $a_{ii}^{(2)} = p - 1$  e  $a_{ij}^{(2)} = p - 2$  para  $1 \leq i, j \leq p$  com  $i \neq j$ . Note que isto não ocorre no caso  $p = 2$ . Como  $p > 2$ , esse argumento também prova uma propriedade mais geral: a matriz  $A^n$  é *positiva* para todo  $n \geq 2$ , ou seja, todo elemento dessa matriz é positivo. A conclusão segue da seguinte afirmação: qualquer matriz quadrada de ordem  $p$  positiva multiplicada por  $A$  resulta em uma matriz positiva.

Como  $A$  é irreduzível, sabe-se que o conjunto das órbitas periódicas de  $\sigma_A$  é denso em  $\Sigma_A$  e que  $\sigma_A$  é *topologicamente transitiva*, isto é, existe um ponto em  $\Sigma_A$  com órbita densa. Outra propriedade particularmente importante de  $A$  é a *transitividade*. Uma matriz quadrada é dita *transitiva* se alguma de suas potências for uma matriz positiva. Isto implica que o conjunto das órbitas periódicas de  $\sigma_A$  é denso em  $\Sigma_A$  e que  $\sigma_A$  é *topologicamente misturadora*, isto é, dados dois abertos não-vazios  $U$  e  $V$  em  $\Sigma_A$  existe  $n_0 \geq 0$  inteiro tal que  $U \cap \sigma_A^n(V) \neq \emptyset$  para todo  $n \geq n_0$  (para saber mais, veja [8] ou [9, pp. 50-52]).

Outra consequência da transitividade de  $A$  é que a *entropia topológica* de  $\sigma_A$  é dada por  $h_{\text{top}}(\sigma_A) = \log(\lambda_A)$ , onde  $\lambda_A$  é o maior autovalor da matriz  $A$  ([9, Proposition 3.2.5]). Por um resultado de Bowen [10] (veja também [11]),

$$h_{\text{top}}(\sigma_A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_n(\sigma_A),$$

onde  $P_n(\sigma_A)$  é o número de pontos fixos de  $\sigma_A^n$ . Pelos Teoremas 2 e 3, obtemos o seguinte resultado:

**Corolário 9.** A entropia topológica de  $\sigma_A$  é igual a  $\log(p - 1)$ .

Como  $\sigma_A$  é transitiva e o conjunto dos pontos periódicos é denso em  $\Sigma_A$ , segue de um conhecido resultado de Banks *et al* [12, Theorem], que  $\sigma_A$  tem *sensibilidade às condições iniciais*, isto é, existe  $\delta > 0$  (constante de sensibilidade) tal que, para todo  $\langle s_n \rangle \in \Sigma_A$  e qualquer vizinhança  $N$  de  $\langle s_n \rangle$ , existem  $k \geq 0$  e  $\langle r_n \rangle \in N$  tais que

$$d\left(\sigma_A^k(\langle r_n \rangle), \sigma_A^k(\langle s_n \rangle)\right) \geq \delta.$$

Em geral, estes são os três ingredientes que definem um sistema dinâmico caótico em um espaço métrico, segundo Devaney [13]. Como consequência, esta discussão prova o seguinte resultado:

**Teorema 10.** A aplicação  $\sigma_A : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$  é caótica, no sentido de Devaney.

## 5 O número $P_n(\sigma_A)$

Dada qualquer matriz quadrada real  $M$  de ordem  $p$ , denotaremos por  $L_i(M) \in \mathbb{R}^p$  e  $C_i(M) \in \mathbb{R}^p$  a  $i$ -ésima linha e a  $i$ -ésima coluna da matriz  $M$ , respectivamente. Para demonstrar o Teorema 3, serão necessários dois resultados preliminares.

**Lema 11.** Existem duas seqüências  $\langle x_n \rangle$  e  $\langle y_n \rangle$  de números reais positivos tais que  $a_{ii}^{(n)} = x_n$  e  $a_{ij}^{(n)} = y_n$  para  $1 \leq i, j \leq p$  e  $i \neq j$ . Em particular,

$$x_{n+1} = (p - 1)y_n \quad e \quad y_{n+1} = (p - 2)y_n + x_n, \quad (7)$$

para  $n \geq 1$ .

*Demonstração.* Usaremos indução em  $n$  para construir as seqüências  $\langle x_n \rangle$  e  $\langle y_n \rangle$  com as propriedades acima. Como  $a_{ii} = a_{ii}^{(1)} = 0$  e  $a_{ij} = a_{ij}^{(1)} = 1$  para  $1 \leq i, j \leq p$  e  $i \neq j$ , definimos, para  $n = 1$ ,

$$x_1 := 0 \quad e \quad y_1 := 1.$$

E ainda, já vimos que  $a_{ii}^{(2)} = p - 1$  e  $a_{ij}^{(2)} = p - 2$  para  $1 \leq i, j \leq p$  e  $i \neq j$ , e assim, para  $n = 2$ , definimos

$$x_2 := p - 1 \quad e \quad y_2 := p - 2.$$

Com essa escolha, a identidade (7) está verificada no caso  $n = 1$ . Suponha que  $x_j$  e  $y_j$  estejam definidos para  $1 \leq j \leq n$ . Como  $A^{n+1} = A^n \cdot A$ , temos que

$$a_{ij}^{(n+1)} = L_i(A^n) \cdot C_j(A) = \left(a_{i1}^{(n)}, \dots, a_{ip}^{(n)}\right) \cdot \left(a_{1j}^{(1)}, \dots, a_{pj}^{(1)}\right) = \sum_{m=1}^p a_{im}^{(n)} a_{mj}^{(1)}.$$

Como  $x_1 = 0$  e  $y_1 = 1$ , temos

$$a_{ii}^{(n+1)} = \sum_{m=1}^p a_{im}^{(n)} a_{mi}^{(1)} = (p - 1)y_n y_1 + x_n x_1 = (p - 1)y_n$$



para  $1 \leq i \leq p$  e  $n \geq 1$ , e com isso, definimos

$$x_{n+1} := (p-1)y_n.$$

Agora, se  $1 \leq i, j \leq p$  e  $i \neq j$  então

$$a_{ij}^{(n+1)} = \sum_{m=1}^p a_{im}^{(n)} a_{mj}^{(1)} = (p-2)y_n y_1 + x_n y_1 + y_n x_1 = (p-2)y_n + x_n,$$

e dessa forma, definimos

$$y_{n+1} := (p-2)y_n + x_n.$$

Com isso concluímos a construção de  $\langle x_n \rangle$  e  $\langle y_n \rangle$  com as propriedades desejadas.  $\square$

**Lema 12.** *Sejam  $\langle x_n \rangle$  e  $\langle y_n \rangle$  duas seqüências de números reais positivos definidas recursivamente por*

$$x_{n+1} := (p-1)y_n \quad e \quad y_{n+1} := (p-2)y_n + x_n,$$

para  $n \geq 1$ , onde  $x_1 = 0$  e  $y_1 = 1$ . Então

$$x_n = \frac{(p-1)^n + (-1)^n(p-1)}{p} \quad e \quad y_n = \frac{(p-1)^n - (-1)^n}{p}$$

para cada  $n \geq 1$ .

*Demonstração.* Para cada  $n \geq 1$ , sejam

$$Y_n := \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad e \quad M := \begin{pmatrix} 0 & p-1 \\ 1 & p-2 \end{pmatrix}.$$

Então,  $Y_{n+1} = MY_n$  para cada  $n \geq 1$ , e por indução segue-se que  $Y_{n+1} = M^n Y_1$ , onde  $Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . A matriz  $M$  tem dois autovalores reais e distintos  $-1$  e  $p-1$ . Considere a matriz dos autovetores-coluna de  $M$ :

$$Q := \begin{pmatrix} 1-p & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Então,

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1/p & 1/p \\ 1/p & (p-1)/p \end{pmatrix} \quad e \quad Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & p-1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$M^n = \begin{pmatrix} [(p-1)^n + (-1)^n(p-1)]/p & [(p-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}(p-1)]/p \\ [(p-1)^n + (-1)^{n+1}]/p & [(p-1)^{n+1} + (-1)^n]/p \end{pmatrix}$$

Como  $Y_{n+1} = M^n Y_1$ , obtemos

$$x_{n+1} = \frac{(p-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}(p-1)}{p} \quad e \quad y_{n+1} = \frac{(p-1)^{n+1} + (-1)^n}{p}$$

para todo  $n \geq 1$ .  $\square$

*Demonstração do Teorema 3.* Pelo Teorema 2, é suficiente determinar o número  $P_n(\sigma_A)$  de órbitas periódicas de  $\sigma_A$  de período  $n$ . Por [9, Corollary 1.9.5],

$$P_n(\sigma_A) = \text{traço}(A^n) = \sum_{i=1}^p a_{ii}^{(n)}.$$

Pelos Lemas 11 e 12,

$$a_{ii}^{(n)} = x_n = \frac{(p-1)^n + (-1)^n(p-1)}{p}$$

para todo  $n \geq 1$ , e portanto,

$$P_n(\sigma_A) = px_n = (p-1)^n + (-1)^n(p-1).$$

□

## 6 Órbitas com mesmo itinerário

Em  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  consideremos a distância  $\rho$  definida por

$$\rho(\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \right) \quad (8)$$

Com a distância induzida,  $X^{\mathbb{N}}$  é um espaço métrico compacto e completo [14, pp. 249-250]. Além disso, pode-se verificar que a topologia métrica induzida por  $\rho$  em  $X^{\mathbb{N}}$  coincide com a topologia produto [14, p. 247].

Dada uma sequência  $\langle x_n \rangle \in X^{\mathbb{N}}$ , existe um único  $s_n \in \{1, 2, \dots, p\}$  tal que  $x_n \in D_{s_n}$ , para cada  $n \geq 1$ . Dessa forma, a aplicação  $\Psi : X^{\mathbb{N}} \rightarrow \Sigma_p$  dada por

$$\Psi(\langle x_n \rangle) = \langle s_n \rangle,$$

está bem definida. Não é difícil verificar que  $\Psi$  é sobrejetora, mas não é injetora.

**Lema 13.** *A aplicação  $\Psi$  é contínua.*

Para demonstrar o Lema 13, será necessário um resultado geral sobre continuidade em *espaços produto*. Dado um espaço métrico  $M$ , seja  $\pi_j : M^{\mathbb{N}} \rightarrow M$  a projeção canônica na  $j$ -ésima coordenada, definida por  $\pi_j(\langle y_n \rangle) = y_j$ , para cada  $j \geq 1$ .

**Lema 14.** [14, p. 245] *Uma sequência  $\langle y_n^{(k)} \rangle$  em  $M^{\mathbb{N}}$  converge para  $\langle y_n \rangle \in M^{\mathbb{N}}$  se, e somente se,  $\pi_j(\langle y_n^{(k)} \rangle) = y_j^{(k)} \rightarrow y_j$  quando  $k \rightarrow \infty$ , para cada  $j \geq 1$ .*

*Demonstração do Lema 13.* Seja  $\langle x_n^{(k)} \rangle$  uma sequência em  $X^{\mathbb{N}}$  que converge para  $\langle x_n \rangle \in X^{\mathbb{N}}$ . É preciso provar que  $\Psi(\langle x_n^{(k)} \rangle) \rightarrow \Psi(\langle x_n \rangle)$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Se  $\langle s_n^{(k)} \rangle := \Psi(\langle x_n^{(k)} \rangle)$ , isto é equivalente a provar que  $\langle s_n^{(k)} \rangle \rightarrow \langle s_n \rangle$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Pelo Lema 14, é suficiente provar que  $s_j^{(k)} \rightarrow s_j$  quando  $k \rightarrow \infty$ , para todo  $j \geq 1$ . Por absurdo, suponha que  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_j^{(k)} \neq s_j$  para algum  $j \geq 1$ . Então, existe uma subsequência  $\langle k_m \rangle$  tal que  $s_j^{(k_m)} \neq s_j$  para todo  $m \geq 1$ . Em particular, isto implica que  $x_j^{(k_m)} \notin D_{s_j}$  para todo  $m \geq 1$ , e como  $x_j \in D_{s_j}$ , segue-se que  $\lim_{m \rightarrow \infty} x_j^{(k_m)} \neq x_j$ , e portanto,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_j^{(k)} \neq x_j$ . Novamente pelo Lema 14, temos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle x_n^{(k)} \rangle \neq \langle x_n \rangle$ , uma contradição. □



Dizemos que  $\langle x_n \rangle$  e  $\langle y_n \rangle$  são *equivalentes* em  $X^{\mathbb{N}}$ , e indicamos  $\langle x_n \rangle \sim \langle y_n \rangle$ , se  $\Psi(\langle x_n \rangle) = \Psi(\langle y_n \rangle)$ . Este é um conhecido exemplo de *relação de equivalência*. O conjunto de todas as classes de equivalência será denotado por  $X^{\mathbb{N}}/\sim$ . A aplicação quociente

$$\pi : X^{\mathbb{N}} \longrightarrow X^{\mathbb{N}}/\sim$$

é definida por  $\pi(\langle x_n \rangle) = [x_n]$  (classe de equivalência de  $\langle x_n \rangle$ ), e com a topologia quociente em  $X^{\mathbb{N}}/\sim$ ,  $\pi$  também é contínua. A aplicação  $\Psi$  desce ao quociente e induz uma única aplicação  $\psi : X^{\mathbb{N}}/\sim \rightarrow \Sigma_p$  bijetora e contínua (veja [14, pp. 68-69]) tal que o diagrama abaixo é comutativo, isto é,  $\Psi = \psi \circ \pi$ .

$$\begin{array}{ccc} X^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\Psi} & \Sigma_p \\ \pi \downarrow & \nearrow \psi & \\ X^{\mathbb{N}}/\sim & & \end{array}$$

**Lema 15.** *A aplicação  $\psi$  é um homeomorfismo.*

*Demonstração.* Como  $\psi$  é uma bijeção contínua, é suficiente provar que  $X^{\mathbb{N}}/\sim$  é compacto e  $\Sigma_p$  é Hausdorff ([14, p. 180]). Como  $X^{\mathbb{N}}$  é compacto e  $\pi$  é contínua, segue-se que  $X^{\mathbb{N}}/\sim$  é compacto. Por outro lado,  $\Sigma_p$  é Hausdorff porque é um espaço métrico.  $\square$

*Demonstração do Teorema 4.* Sejam  $\Psi_A := \Psi|_{O(X)}$  e  $\psi_A := \psi|_{O(X)/\sim}$ . Segue-se da definição de  $O(X)$  e  $\Sigma_A$  que  $\Psi_A(O(X)) = \Sigma_A$ , e do Lema 15, que  $\psi_A : O(X)/\sim \rightarrow \Sigma_A$  é um homeomorfismo.  $\square$

## 7 Caos

Seja  $f : M \rightarrow M$  uma função contínua em um espaço métrico  $M$ . Diz-se que  $f$  é *caótica* (no sentido de Devaney) se  $f$  é topologicamente transitiva, tem órbita densa e é sensível às condições iniciais [13].

*Demonstração do Teorema 5.* Como  $\sigma_A$  é caótica, pelo Teorema 10, é suficiente provar que  $f$  e  $\sigma_A$  são topologicamente conjugadas. Para isso, usaremos a notação introduzida na demonstração do Teorema 4. Seja  $[x_n] \in O(X)/\sim$  e defina  $\langle s_n \rangle := \psi_A([x_n])$ . Como  $\psi_A$  é um homeomorfismo de  $O(X)/\sim$  em  $\Sigma_A$  e

$$(\psi_A \circ \sigma_A \circ \psi_A^{-1})([x_n]) = \psi_A(\langle s_{n+1} \rangle) = [x_{n+1}] = f([x_n]),$$

segue-se que o diagrama abaixo é comutativo, e portanto  $f$  e  $\sigma_A$  são topologicamente conjugadas.

$$\begin{array}{ccc} O(X)/\sim & \xrightarrow{f} & O(X)/\sim \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \Sigma_A & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_A \end{array}$$

$\square$



## 8 Conclusão e considerações finais

Neste artigo verificamos e descrevemos simbolicamente o atrator topológico da dinâmica, como equivalente a um conjunto de Cantor. Provamos ainda que a dinâmica neste atrator tem entropia positiva. Uma propriedade importante e já esperada é que os resultados não dependem das disposições no plano complexo (apenas que sejam disjuntos), tampouco do raio de cada um deles. Um aspecto geométrico que abordaremos futuramente é sobre a medida de Hausdorff deste atrator e o formalismo termodinâmico do sistema.

### Agradecimentos

O primeiro autor agradece a hospitalidade do IMPA-RJ no Programa de Pós-Doutorado de Verão 2016, onde surgiram as ideias preliminares deste trabalho. Ainda, os autores agradecem o(s) revisor(es) do SIMMI-2016 pela leitura cuidadosa e por diversas críticas e sugestões, que tornaram o texto mais completo facilitando sua leitura.

### Referências

- [1] NEEDHAM, T. **Visual complex analysis**. Oxford: Clarendon Press, 1999.
- [2] LOOK, D. M. The dynamics of two-circle and three-circle inversion. **Fundamenta Mathematicae**, v. 199, n. 3, p. 227-247, 2008.
- [3] LOOK, D. M. Sierpinski carpets as Julia sets for imaginary 3-circle inversions. **Journal of Difference Equations and Applications**, v. 16, n. 5-6, p. 705-713, 2010.
- [4] MILNOR, J. **Dynamics in one complex variable**. 3. ed. Princeton: Princeton University Press, 2006. (Annals of Mathematics Studies, 160).
- [5] KATOK, S. **Fuchsian groups**. Chicago: University of Chicago Press, 1992.
- [6] AGUILAR, M.; GUITLER, S.; PIETRO, C.; **Algebraic topology from a homotopical viewpoint**. New York: Springer-Verlag, 2002.
- [7] BRUCKS, K.B.; BRUIN, H. **Topics from One-Dimensional Dynamics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. (London Mathematical Society student texts 62).
- [8] KITCHENS, B. Symbolic dynamics, group automorphisms and Markov partitions. In: BRANNER, B.; HJORTH, P. (Ed.). **Real and complex dynamics**. Dordrecht; Boston: Kluwer Academics Publishers, c1995. p. 133-164.
- [9] KATOK, A.; HASSELBLATT, B. **Introduction to the modern theory of dynamical systems**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 54).
- [10] BOWEN, R. Topological entropy and Axiom A. In: SYMPOSIA IN PURE MATHEMATICS, 14., 1970, Providence. **Proceedings...** Providence: American Mathematical Society, 1970, p. 23-42.



- 
- [11] ZUOLING, Z. The topological Markov chain, **Acta Math. Sinica**, English Ser., v. 4, n. 4, p. 330-337, 1988.
- [12] BANKS, J. et al. On Devaney's Definition of Chaos, **The Amer. Math. Monthly**, v. 99, n. 4, p. 332-334, 1992.
- [13] DEVANEY, R. L. **A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment**. New York: Perseus Books Publishing, 1992. p. 99-100.
- [14] LIMA, E. L. **Elementos de topologia geral**. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2009. (Textos Universitários)

---

Artigo recebido em jun. 2017 e aceito em ago. 2017.