



**Revista Eletrônica  
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664  
Volume 10, dez. 2017  
Edição Ermac

**Alfredo Bonini Neto**

Faculdade de Ciências e  
Engenharia - FCE - UNESP  
Tupã  
bonini@tupa.unesp.br

**Jhonatan Cabrera Piazzentin**

Faculdade de Ciências e  
Engenharia - FCE - UNESP  
Tupã  
professorpiazzentin@gmail.com

**Marcio Presumido Junior**

Faculdade de Ciências e  
Engenharia - FCE - UNESP  
Tupã  
presumidojr@gmail.com

**Leandro Souto de Oliveira**

Faculdade de Ciências e  
Engenharia - FCE - UNESP  
Tupã  
leandrosouto182@hotmail.com

## **Estudo de singularidades da matriz Jacobiana no fluxo de carga continuado através de uma técnica de parametrização geométrica**

Study of singularities of the Jacobian matrix in the continuation  
power flow through a geometric parameterization technique

### **Resumo**

O fluxo de carga continuado (FCC) é uma poderosa ferramenta no estudo da estabilidade estática de tensão, utilizado para obter toda curva P-V (potência versus tensão) em sistemas elétricos de potência. Essas curvas são representadas por duas partes, estável (margem de carregamento, estabilidade do sistema) e instável (instabilidade do sistema), ligadas a um ponto em comum, denominado de ponto de máximo carregamento (PMC) ou ponto crítico. Ao tentar obter esse ponto que define a estabilidade da instabilidade, a matriz Jacobiana do fluxo de carga continuado torna-se singular, necessitando de modificações no método para remover essa singularidade e com isso ter uma aproximação do ponto crítico tão boa quanto se queira. A matriz Jacobiana no FCC é definida pelas derivadas parciais das equações não lineares de potência ativa e reativa em relação às variáveis ângulo das tensões nodais e magnitude das tensões nodais. Nesse contexto, este trabalho tem por objetivo estudar e remover essas singularidades utilizando uma técnica de parametrização geométrica via equações da reta.

**Palavras-chave:** Equações de reta. Singularidade. Matriz Jacobiana. Ponto crítico.

### **Abstract**

Continuation power flow (CPF) is a powerful tool in the study of static voltage stability, used to obtain every P-V curve (power versus voltage) in power systems. These curves are represented by two parts, stable (load margin, system stability) and unstable (system instability), linked to a common point called the maximum loading point (MLP) or critical point. In attempting to obtain this point which defines the stability of the instability, the Jacobian matrix of the continuation power flow becomes singular, requiring modifications in the method to remove this singularity and thus having as close a critical point approximation as is desired. The Jacobian matrix in the FCC is defined by the partial derivatives of the nonlinear equations of real and reactive power in relation to the variables angle of the nodal voltages and magnitude of the nodal voltages. In this context, this work aims to study and remove these singularities using a geometric parametrization technique through line equations.

**Keywords:** Line equations. Singularity. Jacobian Matrix. Critical Point.



## 1 Introdução

Hoje em dia, estudos envolvendo estabilidade estática de tensão, vêm ganhando destaque mundial, pois o setor elétrico vem passando por várias transformações (ABBOTT, 2007), decorrente principalmente do aumento da demanda de eletricidade e também devido à crise hídrica que o país vem sofrendo, fazendo com que os níveis dos reservatórios fiquem abaixo da média (OPERADOR NACIONAL DO SISTEMA ELÉTRICO, 2015). Devido a essas transformações, muitos dos sistemas elétricos estão operando próximos de seus limites operacionais, onde qualquer aumento de potência pode levar a uma instabilidade no sistema. Diante disso, visando assegurar uma condição segura de operação para os sistemas elétricos de potência, surgem os métodos de análise da estabilidade estática de tensão que é utilizado neste trabalho e foi inicializado em Bonini Neto e Alves (2008).

Ao estudar a estabilidade estática de tensão é necessário obter o perfil de tensão de todo o sistema, estes perfis são obtidos por meio de uma curva denominada curva P-V, que representa a tensão em função da potência consumida em uma determinada barra (usina ou centro de consumo). Estas curvas são de grande importância, pois permitem o entendimento das condições de operação do sistema para diferentes níveis de carregamentos (BONINI NETO; ALVES, 2010a), (CROW, 2009) e (MONTICELLI, 1983). Outro fator importante relacionado a curva P-V, é o ponto crítico que elas possuem, denominado ponto de máximo carregamento (PMC), que define a região estável da instável no sistema.

No entanto, para obter esse ponto, é necessário remover a singularidade da matriz Jacobiana ( $\mathbf{J}$ ). Em Bonini Neto e Alves (2016) foi analisada várias técnicas existentes na literatura que objetiva a remoção da singularidade da matriz Jacobiana no PMC. Também foi apresentado um algoritmo que permite visualizar geometricamente os valores dos determinantes dessa matriz para sistemas de grande porte.

O primeiro trabalho que teve grande destaque mundial envolvendo o traçado completo da curva P-V sem problemas de singularidade da matriz Jacobiana ( $\mathbf{J}$ ), foi proposto em 1992 por Ajjarapu e Christy (1992).

Desde então, outros trabalhos envolvendo estudos dos pontos críticos em sistemas de potência foram surgindo, como Rosehart e Roman (2004), Han et al. (2011), Bonini Neto e Alves (2010b) e Milano (2010).

Neste contexto, objetivo deste trabalho é utilizar uma técnica de parametrização geométrica diferente da que foi proposta em Bonini Neto e Alves (2016) via equações da reta para estudar os pontos em que as singularidades ocorrem de acordo com as posições (coeficiente angular) de cada reta utilizada. Em Oliveira; Presumido Junior e Bonini Neto (2017) foi utilizado o plano  $\lambda$ -V para o traçado da curva P-V e estudo das singularidades. Já para este trabalho, foi acrescentado o plano  $\lambda$ - $\theta$ . Uma das alternativas de verificar a singularidade da matriz  $\mathbf{J}$  é através da inversão do sinal do determinante no PMC, ou seja, o determinante é nulo exatamente no PMC, podendo ser verificado por meio do gráfico dos valores numéricos do determinante em função do carregamento.

## 2 Metodologia

Para este trabalho, os limites de geração de potência reativa foram desconsiderados. Neste caso, a matriz  $\mathbf{J}$  torna-se singular em pontos de máximo carregamento representados por Bifurcações Sela-Nó. Caso os limites fossem considerados, o ponto de máximo carregamento também poderia acontecer em Bifurcações Induzidas por Limites, as quais não são caracterizadas pela matriz Jacobiana singular, o que não foi estudado neste trabalho. As equações convencionais do fluxo de carga continuado (FCC) são:

$\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}, \lambda) = \mathbf{0}$ , ou

$$\Delta \mathbf{P} = \lambda \mathbf{P}^{\text{esp}} - \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}) = \lambda (\mathbf{P}_g^{\text{esp}} - \mathbf{P}_c^{\text{esp}}) - \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}) = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\Delta \mathbf{Q} = \lambda \mathbf{Q}^{\text{esp}} - \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}) = \left( \mathbf{Q}_g - \lambda \mathbf{Q}_c^{\text{esp}} \right) - \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}) = \mathbf{0}$$

sendo

$$\mathbf{P}_k(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}) = V_k \sum_{m \in \mathcal{K}} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \quad (2)$$

$$\mathbf{Q}_k(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}) = V_k \sum_{m \in \mathcal{K}} V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km})$$

onde  $\lambda$  representa o fator de carregamento do sistema,  $\boldsymbol{\theta}$  e  $\mathbf{V}$  são os respectivos vetores de ângulo de fase e magnitude de tensão nodal;  $\mathbf{P}^{\text{esp}}$  é o vetor da diferença entre os vetores de potência ativa, gerada ( $\mathbf{P}_g^{\text{esp}}$ ) e consumida ( $\mathbf{P}_c^{\text{esp}}$ ), especificada para as barras de carga ( $PQ$ ) e geração ( $PV$ ); e  $\mathbf{Q}_c^{\text{esp}}$  é o vetor de potência reativa consumida especificada para as barras  $PQ$ . Os elementos  $G_{km}$  e  $B_{km}$  são as matrizes condutância e susceptância nodal (MONTICELLI, 1983).

A Equação (1) assume que o carregamento da rede é proporcional ao do caso base e considera o fator de potência constante.  $\mathbf{P}^{\text{esp}}$  e  $\mathbf{Q}^{\text{esp}}$  também pode ser definido como sendo igual a  $(\mathbf{k}_{Pg} \mathbf{P}_g^{\text{esp}} + \mathbf{k}_{Pc} \mathbf{P}_c^{\text{esp}})$  e  $\mathbf{k}_{Qc} \mathbf{Q}_c^{\text{esp}}$ , respectivamente. Os vetores  $\mathbf{k}_{Pg}$ ,  $\mathbf{k}_{Pc}$  e  $\mathbf{k}_{Qc}$  são parâmetros fixos usados para caracterizar um específico cenário de carga.

A resolução do sistema de equações (1) pelo método de Newton é feita através da linearização da função  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ , em que  $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = [\Delta \mathbf{P}, \Delta \mathbf{Q}]' = [G_1, G_2, \dots]'$  e  $\mathbf{x} = [\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}]$ , para  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^i$  considerando os dois primeiros termos da série de Taylor:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}^i + \Delta \mathbf{x}^i) \cong \mathbf{G}(\mathbf{x}^i) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^i) \Delta \mathbf{x}^i \quad (3)$$

sendo a matriz jacobiana  $\mathbf{J}$  dada por:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1} & \frac{\partial G_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial G_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial G_n}{\partial x_1} & \frac{\partial G_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial G_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (4)$$

O vetor de correção  $\Delta \mathbf{x}$  é calculado impondo-se que:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}^i) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^i) \Delta \mathbf{x}^i = \mathbf{0} \quad (5)$$

e na forma matricial representa:

$$\begin{bmatrix} G_1(x_1^i, x_2^i) \\ G_2(x_1^i, x_2^i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1} & \frac{\partial G_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}^{(i)} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(i)} \\ \Delta x_2^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

A nova solução  $\mathbf{x}^{(i+1)}$  é:

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \Delta \mathbf{x}^i \quad (7)$$

e

$$\Delta \mathbf{x}^i = -[\mathbf{J}(\mathbf{x}^i)]^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{x}^i) \quad (8)$$

Através de sucessivas soluções de (1), o traçado da curva P-V pode ser obtido via técnicas de parametrização geométrica. Adotando  $\lambda$  como parâmetro, obtém-se valores próximo ao PMC. A partir do caso base ( $\lambda = 1$ ), seu valor é aumentado gradualmente até um valor para o qual nenhuma solução seja obtida, ou seja, para qual o processo iterativo do fluxo de carga não convirja ou diverja, Figura 1. No entanto, a divergência do FCC é uma consequência da singularidade da matriz Jacobiana ( $\mathbf{J}$ ) de (1) no PMC e, portanto, seu valor não pode ser determinado com precisão. A fim de eliminar as dificuldades numéricas resultantes da singularidade de  $\mathbf{J}$  e permitir a determinação do PMC, foram propostas diferentes posições de retas para o FCC. Como o sistema (1) apresenta uma variável a mais ( $\lambda$ ) do que equação, é necessário acrescentar mais uma equação. Logo, a partir da Equação (1) acrescenta-se uma equação da reta à equação do FCC acarretando em (9).

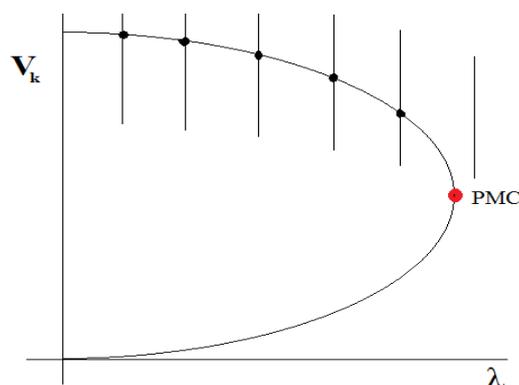


Figura 1: Curva P-V e retas utilizando o fator de carregamento  $\lambda$  como parâmetro.

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{P} = \lambda \mathbf{P}^{\text{esp}} - \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}) = \mathbf{0} \\ \Delta \mathbf{Q} = \lambda \mathbf{Q}^{\text{esp}} - \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{W}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}, \lambda, \alpha) = \alpha(\lambda - \lambda^0) - (V_k - V_k^0) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

em que  $\alpha$  representa o coeficiente angular da reta e  $\lambda^0$  e  $V_k^0$ , representam as coordenadas iniciais da reta para abscissa e ordenada respectivamente, Figura 2. O  $k$  representa a barra utilizada para obter a curva P-V. Devido a inclusão da equação  $\mathbf{W}$  ao sistema de equações básicas do FC, a matriz Jacobiana modificada ( $\mathbf{J}_m$ ) da metodologia utilizada neste trabalho é apresentada pela Equação (10) a seguir.

$$\mathbf{J}_m = \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{P}^{\text{esp}} \\ \mathbf{Q}^{\text{esp}} \\ 0_k & -1_k & \alpha \end{bmatrix} \quad (10)$$

em que  $\mathbf{J}$  é a matriz jacobiana convencional,  $\mathbf{P}^{\text{esp}}$ ,  $\mathbf{Q}^{\text{esp}}$  e  $\alpha$  representam as derivadas parciais de  $\Delta \mathbf{P}$ ,  $\Delta \mathbf{Q}$  e  $\mathbf{W}$  em relação a  $\lambda$  respectivamente.  $0_k$  representa um vetor nulo (derivadas

parciais de  $W$  em relação a  $\theta$ ) e  $1_k$  representa um vetor nulo (derivadas parciais de  $W$  em relação a  $V$ ), exceto na coluna  $k$  que representa a barra utilizada para obter a curva P-V ( $\dots, 0, 0, \dots, 1, \dots, 0, \dots$ ). O sinal de menos na equação (10) foi obtido devido a expansão em série de Taylor do sistema de equações (9).

O sistema utilizado para obtenção dos resultados foi um sistema de três barras encontrado em Monticelli (1983).

A priori, não se conhece a curva P-V a ser obtida. Neste caso, obtém-se o ponto “P” denominado caso base com  $\lambda = 1$  por meio do FCC e escolhe um valor inicial para o ponto “O”. Uma vez encontrados os pontos “P” e “O”, obtém-se o valor de  $\alpha$  por meio da Equação 11. A partir dessa reta, as singularidades foram encontradas ou removidas através de variações de  $V_k$  ( $V_k + \text{passo}$ ), ou seja, para cada valor do passo dado, um novo ponto de intersecção da reta com a curva trajetória de soluções é encontrado, obtendo assim a curva P-V que a priori não se conhecia.

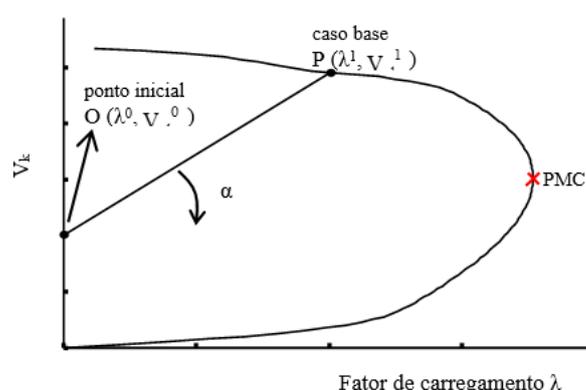


Figura 2: Reta inicial que passa por um ponto inicial da reta  $O(\lambda^0, V^0)$  e o de caso base  $P(\lambda^1, V^1)$  na curva P-V.

$$\alpha = \left( v_k^1 - v_k^0 \right) / \left( \lambda^1 - \lambda^0 \right) \quad (11)$$

O sistema estudado e as curvas P-V da barra 2 e 3 são mostrados na Figura 3(a) e (b) respectivamente e os dados das barras e linhas de transmissão são mostrados nas Tabelas 1 e 2 segundo Monticelli (1983). Qualquer outro sistema (pequeno ou grande porte) poderia ser utilizado normalmente.

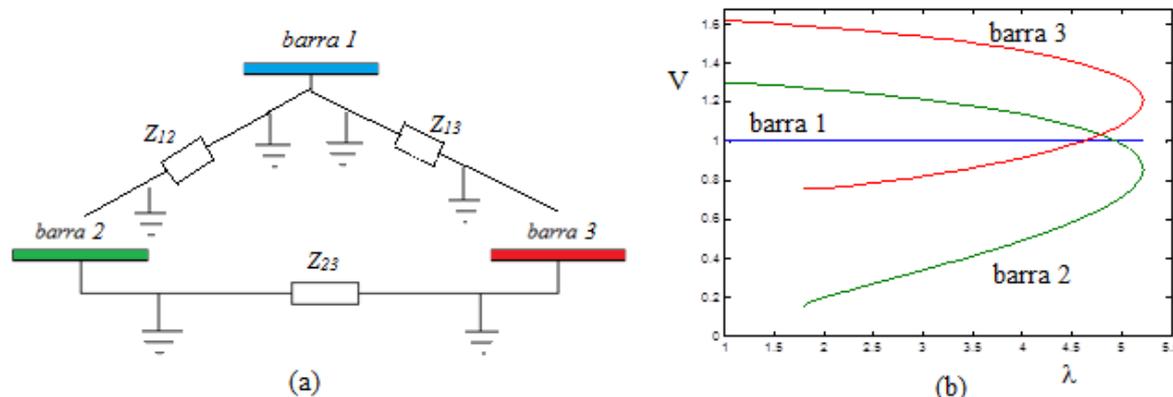


Figura 3: (a) Sistema estudado de três barras, (b) curvas P-V do sistema estudado.

Tabela 1: Dados das barras em p.u.

Barra	Tipo	P	Q	V	$\theta$
1	V $\theta$ (referência)	---	---	1,0	0,0
2	PQ (carga)	-0,05	-0,02	---	---
3	PV (geração)	-0,15	---	0,98	---

Tabela 2: Dados das linhas de transmissão em p.u.

Linha	r	x	$b^{sh}$
1-2	0,1	1	0,01
1-3	0,2	2	0,02
2-3	0,1	1	0,01

Outra alternativa para obter toda a curva P-V é utilizar o plano  $\lambda$ - $\theta$ , ou seja, como parâmetro, Figura 4. Neste caso o sistema de equações (9) passa a ser:

$$\begin{cases} \Delta P = \lambda P^{esp} - P(\theta, V) = 0 \\ \Delta Q = \lambda Q^{esp} - Q(\theta, V) = 0 \\ W(\theta, V, \lambda, \alpha) = \alpha(\lambda - \lambda^0) - (\theta_k - \theta_k^0) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

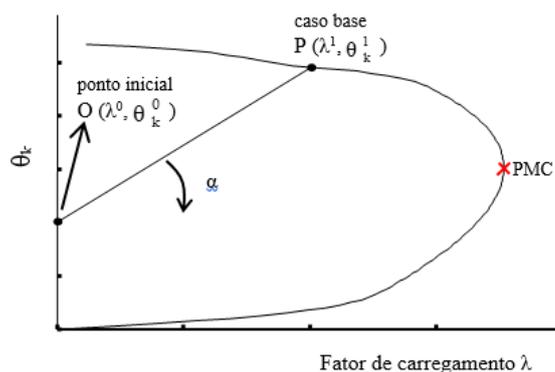


Figura 4: Retas iniciais que passam por um ponto inicial da curva  $O(\lambda^0, \theta^0)$  e o de caso base  $P(\lambda^1, \theta^1)$  na curva  $\lambda$ - $\theta$ .

A matriz  $\mathbf{J}$  da metodologia utilizada no plano  $\lambda$ - $\theta$  é apresentada pela Equação (13) a seguir.

$$\mathbf{J}_m = \begin{bmatrix} & & P^{esp} \\ & -\mathbf{J} & Q^{esp} \\ -1_k & 0_k & \alpha \end{bmatrix} \quad (13)$$

As curvas  $\lambda$ - $\theta$  da barra 2 e 3 são mostrados na Figura 5.

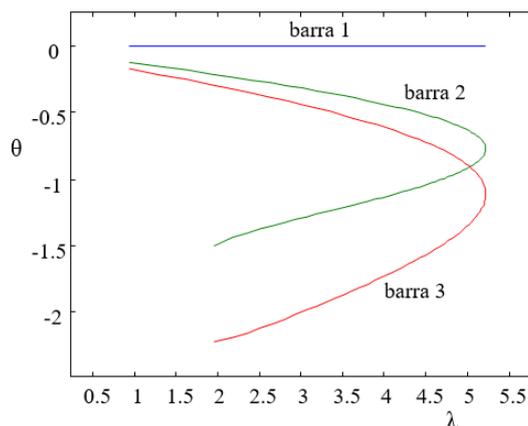


Figura 5: Curvas  $\lambda$ - $\theta$  da barra 2 e 3 do sistema estudado

### 3 Resultados

Para todos os testes o valor da tensão  $V_k^1$  do caso base (ponto “P”) com  $\lambda = 1$  foi de 1,299 para a barra 2 e 1,616 para a barra 3. O passo adotado neste trabalho para obter as soluções do FCC (curva P-V) foi de 0,01 no plano  $\lambda$ -V e 0,03 no plano  $\lambda$ - $\theta$ . A Figura 5(a) apresenta resultados do traçado da curva P-V para a barra de carga 2 do sistema estudado na Figura 3, com  $V_2^0 = 0,7$ . Na Figura 5(b) é apresentado a região do PMC ampliada para melhor visualização do problema de tangência e conseqüentemente da singularidade da matriz  $\mathbf{J}$ . Observa-se que a matriz  $\mathbf{J}$  não é singular no PMC (ponto “a”) e sim no ponto “b” devido a inclinação inicial da reta que foi de 0,599 acarretando numa reta tangente neste ponto e conforme o gráfico dos determinantes da matriz  $\mathbf{J}$  na Figura 4(c). A Tabela 3 apresenta os valores do fator de carregamento  $\lambda$  e de  $|\mathbf{J}|$  para os pontos “a” e “b” da Figura 5.

Mudando a inclinação inicial da reta, a singularidade também muda de ponto, conforme apresentado na Figura 5. Foi utilizado  $V_2^0 = 1,4$  para mostrar essas mudanças. O valor do coeficiente angular foi de -0,1001. Observa-se na Figura 6(a) que houve problemas de singularidade da matriz  $\mathbf{J}$  bem antes do PMC, ponto “c”, conforme o gráfico de  $|\mathbf{J}|$  apresentado na Figura 6(b).

No caso em que  $V_2^0 = 1,299 = V_k^1$ , ou seja, coeficiente angular  $\alpha = 0$ , não houve problemas de singularidade da matriz  $\mathbf{J}$  em nenhuma região da curva P-V. Conforme apresentado na Figura 7(a), pode-se observar que para cada passo adotado, há uma intersecção da reta com a curva trajetória de soluções (curva P-V). O gráfico dos determinantes apresentado na figura 7(b) reforçam esses resultados.

A Figura 8 apresenta resultados para a barra de geração 3 do sistema de três barras estudado neste trabalho. Resultados similares à barra 2 são apresentados para a barra 3. A Figura 8(a) mostra o desempenho do método com  $V_3^0 = 1,4$  e  $V_3^1 = 1,616$  acarretando em  $\alpha = 0,216$ . A singularidade ocorreu após o PMC (ponto “a”) no ponto “b” com valor de 4,9634 para  $\lambda$ . O gráfico dos determinantes de  $\mathbf{J}$  é mostrado na Figura 8(b). A Tabela 4 apresenta os valores do fator de carregamento  $\lambda$  e de  $|\mathbf{J}|$  para os pontos “a” e “b” da Figura 8.

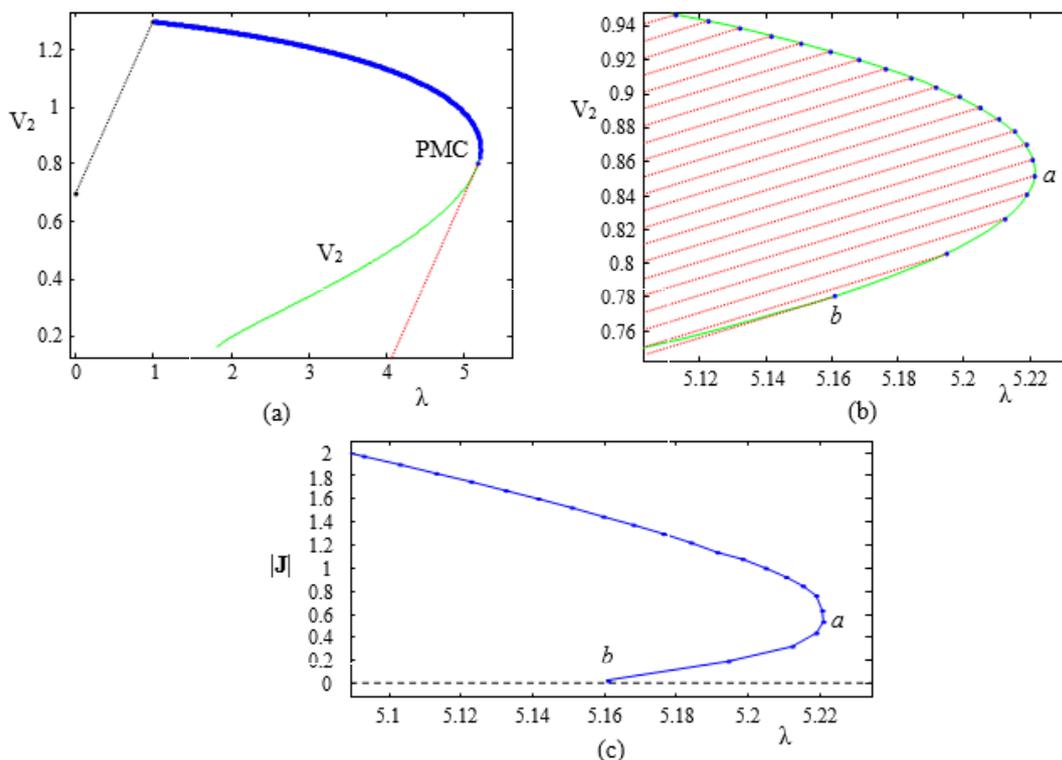


Figura 5: (a) Desempenho do método com  $\alpha = 0,599$ , (b) região do PMC ampliada, (c) gráfico dos determinantes de  $\mathbf{J}$ ,  $|\mathbf{J}|$ .

Tabela 3: Valores do fator de carregamento  $\lambda$  e  $|\mathbf{J}|$  para a barra 2.

	$\lambda$	$ \mathbf{J} $
	5,2204	0,6313
<i>a</i>	5,2209	0,5361
	5,2187	0,4346
	5,2120	0,3226
	5,1944	0,1898
<i>b</i>	5,1602	0,0083

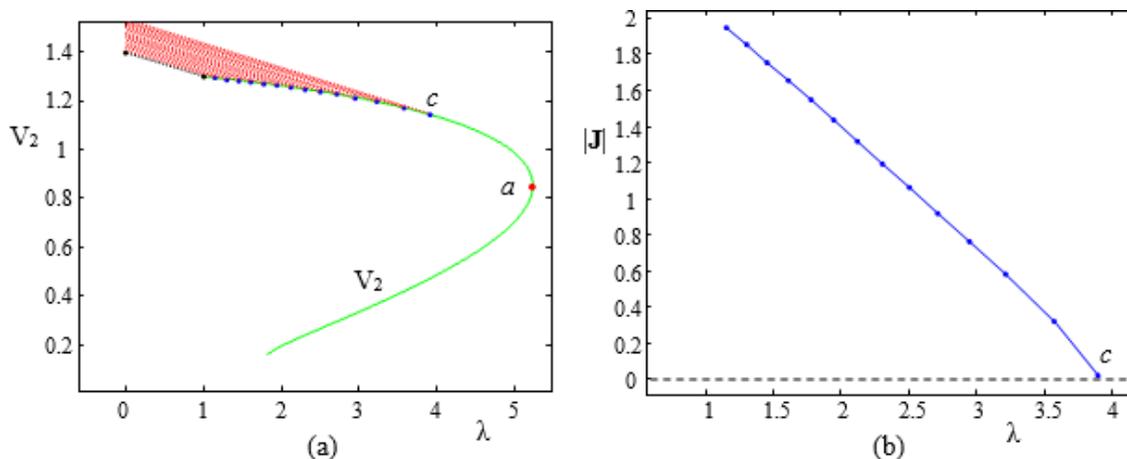


Figura 6: (a) Desempenho do método com  $\alpha = -0,1001$ , (b) gráfico dos determinantes de  $\mathbf{J}$  em função de  $\lambda$ .

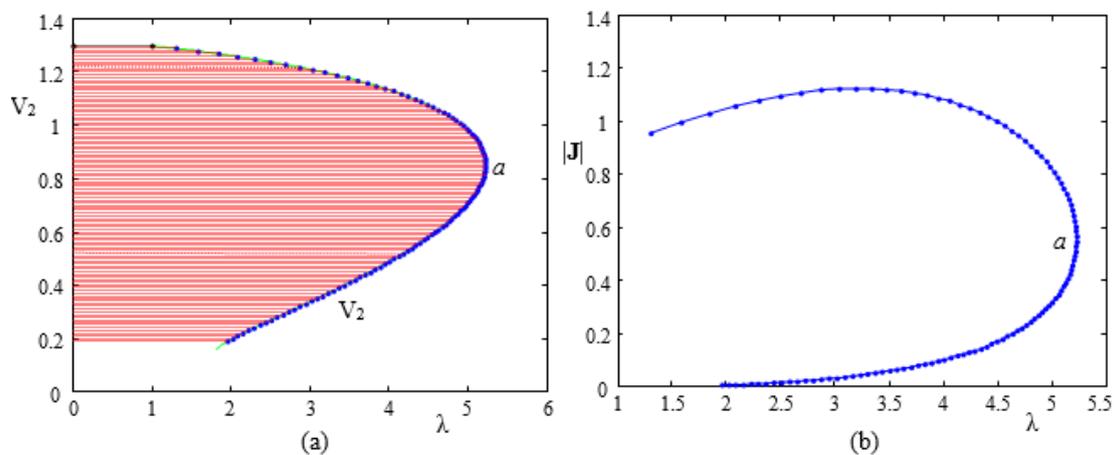


Figura 7: (a) Desempenho do método com  $\alpha = 0,0$ , (b) gráfico dos determinantes de  $\mathbf{J}$  em função de  $\lambda$ .

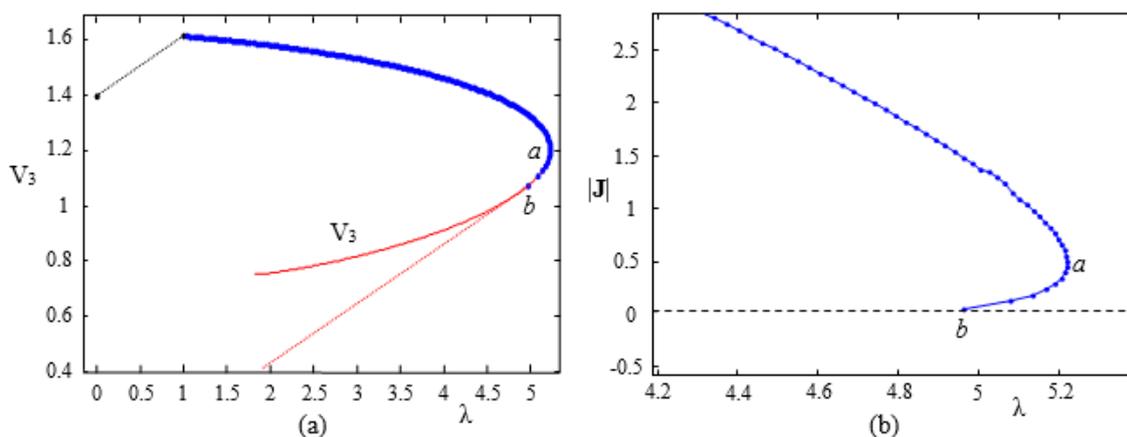


Figura 8: (a) Desempenho do método com  $\alpha = 0,216$ , (b) gráfico dos determinantes de  $\mathbf{J}$  em função de  $\lambda$ .

Tabela 4: Valores do fator de carregamento  $\lambda$  e  $|\mathbf{J}|$  para a barra 3.

	$\lambda$	$ \mathbf{J} $
$a$	5,2210	0,5014
	5,2199	0,4488
	5,2153	0,3963
	5,2062	0,3438
	5,1914	0,2909
	5,1687	0,2375
	5,1341	0,1830
	5,0788	0,1261
$b$	4,9634	0,0179

Já, utilizando o sistema de equações apresentado em (12), os resultados são apresentados a seguir. A Figura 9(a) apresenta resultados do traçado da curva  $\lambda$ - $\theta$  para a barra de carga 2 do sistema estudado na Figura 5, com  $\theta_2^0 = -0,2$  e passo de 0,03. Observa-se que a matriz  $\mathbf{J}$  não é singular no PMC (ponto “a”) e sim no ponto “b” devido a inclinação inicial da reta que foi de 0,0757 acarretando numa reta tangente neste ponto e conforme o gráfico dos determinantes da matriz  $\mathbf{J}$  na Figura 9(b). A Tabela 5 apresenta os valores do fator de carregamento  $\lambda$  e de  $|\mathbf{J}|$  parametrizado por  $\theta_2$  e FCC convencional para os pontos “a” e “b” da Figura 9, nota-se a comprovação da singularidade no ponto “a” para o FCC convencional e singularidade no ponto “b” para o FCC parametrizado por  $\theta_2$ .

Utilizando o  $\theta_3$  como parâmetro e com a mesma inclinação da reta de 0,0757, não houve singularidade de  $\mathbf{J}$  no decorrer de toda curva  $\lambda$ - $\theta$ .

Como foi mostrado anteriormente, a singularidade da matriz  $\mathbf{J}$  é diferente para cada parâmetro utilizado e também depende do valor da inclinação inicial da reta. Se for utilizado uma inclinação de  $0^\circ$  para a reta, não haverá singularidade se o parâmetro for o  $\theta_2$  ou o  $\theta_3$  em nenhum ponto da curva.

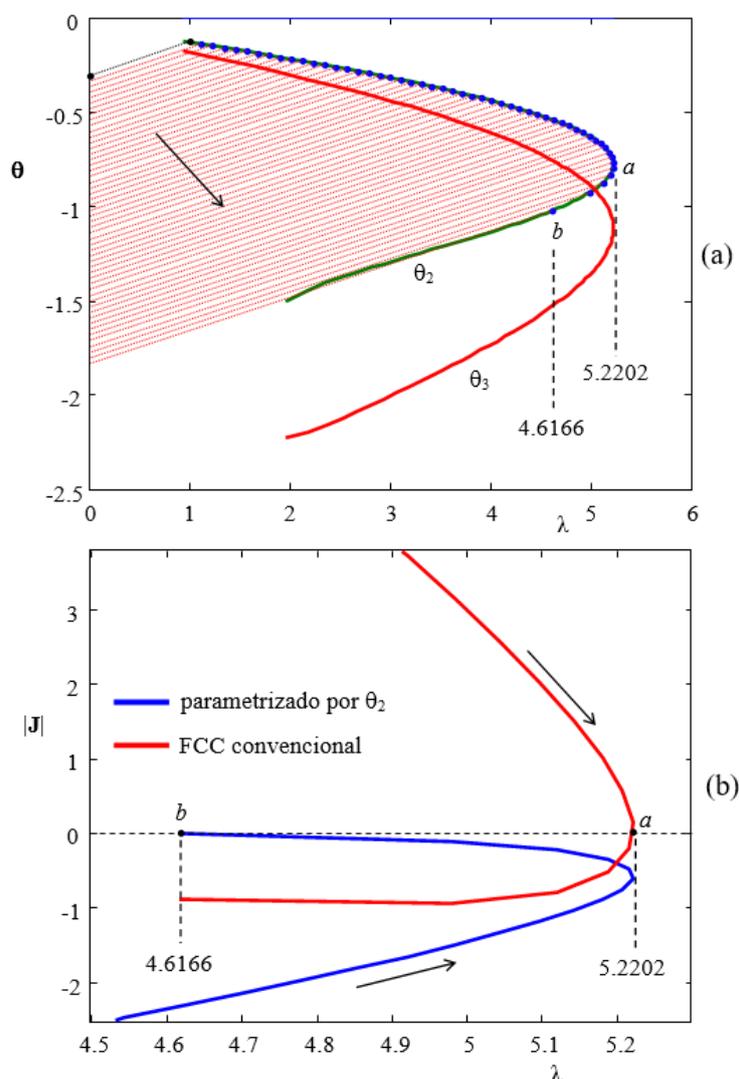


Figura 9: (a) Desempenho do método com  $\alpha = 0,0757$  na barra 2, (b) gráfico dos determinantes de  $\mathbf{J}$ ,  $|\mathbf{J}|$ , parametrizado por  $\theta_2$  e FCC convencional.



Tabela 5: Valores do fator de carregamento  $\lambda$  e  $|\mathbf{J}|$  parametrizado por  $\theta_2$  e FCC convencional para a barra 2.

$\lambda$	$ \mathbf{J} $ parametrizado por $\theta_2$	$ \mathbf{J} $ do FCC convencional
5,1424	-1,0664	1,5174
5,1798	-0,9206	1,0290
5,2067	-0,7793	0,5758
<i>a</i> 5,2203	-0,6432	* 0,1627
5,2162	-0,5129	-0,2039
5,1873	-0,1892	-0,5156
5,1190	-0,0512	-0,7933
4,9795	-0,0018	-0,9330
<i>b</i> 4,6166	* -0,0002	-0,8773

\* ponto de singularidade

## 4 Conclusão

Neste trabalho foi apresentado estudos de singularidade para o FCC em um sistema de três barras. Foi possível verificar que dependendo da posição da reta (do valor do coeficiente angular da reta), a singularidade da matriz Jacobiana pode ser removida, ou seja, com uma simples mudança na inclinação da reta foi possível resolver problemas que antes era considerado um grande desafio em estudos de fluxo de carga continuado, principalmente quando comparado com o FCC convencional. Outro fator importante é a utilização do plano  $\lambda$ - $\theta$  para obtenção das curvas P-V, uma vez que este amplia as variáveis a serem escolhidas como parâmetro.

## 5 Referências

ABBOTT, M. Electricity reform and gains from the reallocation of resources. **The Electricity Journal**, v. 20, n. 7, p. 72-78, 2007.

AJJARAPU, V.; CHRISTY C. The continuation power flow: a tool for steady state voltage stability analysis. **IEEE Trans. on Power Systems**, v. 7, n. 1, p. 416-423, 1992.

BONINI NETO, A.; ALVES, D. A. Improved geometric parameterization techniques for continuation power flow. **IET Generation, Transmission & Distribution**, v. 4, n. 12, p. 1349-1359, 2010a.

BONINI NETO, A.; ALVES, D. A. Singularities analysis of the jacobian matrix modified in the continuation power flow: mathematical modeling. **IEEE Latin America Transactions**, v. 14, n. 12, p. 4750-4756, 2016.

BONINI NETO, A.; ALVES, D. A. Técnica de parametrização geométrica para o fluxo de carga continuado baseado nas variáveis tensão nodal e fator de carregamento. **Controle & Automação**, v. 19, n. 3, p. 350-366, 2008.

BONINI NETO, A.; ALVES, D. A. Técnicas de parametrização global para o fluxo de carga continuado. **Controle & Automação**, v. 21, n. 4, p. 323-337, 2010b.

CROW, M. **Computational methods for electric power systems**. 2nd. ed. Boca Raton: CRC, 2009.

BONINI NETO, A. et al. Estudo de singularidades da matriz Jacobiana no fluxo de carga continuado através de uma técnica de parametrização geométrica. **C.Q.D.- Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 10, p. 251-262, dez. 2017. Edição Ermac.  
DOI: 10.21167/cqdvol10ermac201723169664abnjcprmpjls0251262 - Disponível em: <http://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/revista-cqd/>



---

HAN, F. C. et al. A new method for identifying bifurcation points in steady-state voltage stability analysis. In: ASIA-PACIFIC POWER AND ENERGY ENGINEERING CONFERENCE, 2011, Wuhan. [Anais]. Wuhan: IEEE, 2011.

MILANO, F. **Power system modelling and scripting**. New York: Springer, 2010.

MONTICELLI, A. J. **Fluxo de carga em redes de energia elétrica**. São Paulo: E. Blucher, 1983.

OLIVEIRA, L. S.; PRESUMIDO JUNIOR, M.; BONINI NETO, A. Estudo de singularidades da matriz jacobiana no fluxo de carga continuado através de uma técnica de parametrização geométrica. In: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 2017, Bauru. **Caderno de trabalhos completos e resumos**. Bauru: Unesp, Faculdade de Ciências, 2017. p. 139-146. Disponível em: < [http://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/ermac/caderno-ermac\\_2017.pdf](http://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/ermac/caderno-ermac_2017.pdf)>. Acesso em: 9 out. 2017.

OPERADOR NACIONAL DO SISTEMA ELÉTRICO. **Plano anual da operação energética - PEN 2011**: relatório executivo. Rio de Janeiro, 2011. Disponível em: <[http://www.ons.org.br/AcervoDigitalDocumentosEPublicacoes/PEN2011\\_SumarioExecutivo.pdf](http://www.ons.org.br/AcervoDigitalDocumentosEPublicacoes/PEN2011_SumarioExecutivo.pdf)>. Acesso em: 29 set. 2015.

ROSEHART, W.; ROMAN, C. Static stability optimization with complementarity models. In: BULK POWER SYSTEM DYNAMICS AND CONTROL SYMPOSIUM, 6., 2004, Cortina d'Ampezzo. [Anais...] Cortina D'Ampezzo: IEEE, 2004.

---

Artigo recebido em jun. 2017 e aceito em nov. 2017.