Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 10, dez. 2017
Edição Ermac

Clayton Eugenio Santos de Paula
UNESP – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
clayton_espbts@hotmail.com

Tatiana Miguel Rodrigues de Souza
UNESP – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
tatimi@fc.unesp.br

Uma abordagem da geometria fractal para o ensino médio

An approach to fractal geometry for high school

Resumo

Este trabalho visa abordar o estudo da Geometria Fractal no Ensino Médio como forma de auxílio nas aulas de matemática. A Geometria Fractal apresentada por meio de figuras, construções lúdicas e aplicações no cotidiano, torna-se um exemplo de matemática aplicada que pode ser utilizada durante as aulas e propiciar inúmeros benefícios aos alunos na aprendizagem da matemática, por despertar a curiosidade. Benoit Mandelbrot, precursor nos estudos desses objetos, percebeu que tentar explicar alguns fenômenos naturais utilizando a geometria clássica era inadequado, daí a necessidade de se criar uma nova geometria a fim de contemplar essas formas geométricas complexas. Veremos suas principais características, definição e aplicações e a sua importância para o ensino da matemática.

Palavras-chave: Geometria fractal. Ensino. Mandelbrot

Abstract

This work aims to approach the study of Fractal Geometry in High School as a way to aid in mathematics classes. Fractal geometry presented through figures, play constructions and everyday applications, becomes an example of applied mathematics that can be used during classes and provide numerous benefits to students in learning mathematics by arousing curiosity. Benoit Mandelbrot, a precursor in the study of these objects, realized that trying to explain some natural phenomena using classical geometry was inadequate, hence the need to create a new geometry in order to contemplate these complex geometric forms. We will see its main characteristics, definition and applications and their importance for the teaching of mathematics.

Keywords: Fractal geometry. Education. Mandelbrot.

1 Introdução

Não é novidade para ninguém que a matemática é considerada por muitos a vilã entre as matérias do currículo básico, por ser considerada uma ciência difícil. E um dos motivos se deve como essa disciplina tem sido abordada nas escolas, de uma maneira desestimulante. Seja pelo extenso currículo a ser cumprido, falta de estrutura e condições para propor atividades diferenciadas, alunos indisciplinados e um salário indigno que faz com que o professor busque mais aulas para conseguir uma condição salarial capaz de suprir suas necessidades, o que acarreta uma falta de tempo para preparar suas aulas com aplicações, atividades práticas e motivadoras em sala de aula.

> É indiscutível que, para a maioria das pessoas, a matemática é uma disciplina de grande importância. Um número considerável de pessoas acredita que a disciplina é útil no cotidiano. Porém, é comum ouvir, seja de estudantes, seja de profissionais de diversas áreas, que a sua relação com a matemática não é ou não foi harmônica e prazerosa. (SOARES, 2003, p. 21).

Conforme consta nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), é importante destacar que a matemática deverá ser vista pelo aluno como um conhecimento que pode favorecer o desenvolvimento de seu raciocínio, de sua sensibilidade expressiva, estética e de sua imaginação e com isso compreender cada vez mais o mundo que o cerca. E é necessário que os professores promovam uma visão da matemática como uma ciência em evolução, não algo pronto e definitivo, levando o aluno a construir e se apropriar do conhecimento que servirá para transformar sua realidade.

Por este motivo, o trabalho tem como objetivo levar o estudo da Geometria Fractal para alunos do Ensino Médio, pois em meio a tanta desmotivação no ensino e aprendizagem da matemática, a utilização dos fractais pode tornar a matemática mais instigante e mais real dentro da sala de aula, despertando o interesse, a curiosidade e criatividade dos alunos devido ao forte apelo estético.

2 O mundo dos fractais

À primeira vista, o mundo natural parece aleatório, caótico. Mas na realidade existe todo um esquema desde as pétalas de uma flor, até um curso sinuoso de um rio. Há uma geometria no mundo que nos rodeia. E essa geometria é chamada de Geometria Fractal. A Geometria Fractal é o estudo das propriedades e comportamentos dos fractais. Oferece um método para analisar e descrever objetos e formas naturais, contrapondo-se com as limitações da geometria clássica. Suas aplicações estão relacionadas a outras ciências, como por exemplo, a biologia (lei de crescimento), ciência da computação (Meio-tom digital), entre outras.

O termo Fractal, foi denominado pelo matemático Benoit Mandelbrot, que tem nacionalidade francesa, mas que nasceu na Polônia, um dos precursores nos estudos desses objetos, baseando-se no latim, do adjetivo *fractus*, cujo verbo *frangere* significa quebrar, criar fragmentos. Foi Mandelbrot que iniciou os estudos sobre esses objetos ao perceber que muitos fenômenos e formas encontradas na natureza não poderiam ser explicados nos moldes da Geometria Euclidiana, sendo assim necessária uma nova teoria que abrangesse essas diferentes formas geométricas.

Por ser difícil a conversão da definição matemática para a linguagem ordinária devido à falta de termos adequados à sua tradução, não há uma definição formal de fractal, mas houve algumas tentativas. Inicialmente, Mandelbrot definiu fractal utilizando conceitos de dimensão. Dizia que: "um fractal, é por definição, um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica." (BARBOSA, 2002, p. 18), mas o próprio Mandelbrot ficou descontente com esta definição, além de ter recebido muitas críticas a respeito da mesma. Para J. Feder (BARBOSA, 2002, p. 18): "um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos". Proposta de definição que contemplava alguns objetos físicos, excluídos na definição de Mandelbrot. Já para K. J. Falconer (BARBOSA, 2002, p. 18): “Um conjunto F é fractal se, por exemplo:

- F possui alguma forma de “auto-similaridade” ainda que aproximada ou estatística;
- A dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que a sua dimensão topológica;
- O conjunto F pode ser expresso através de um procedimento recursivo ou iterativo.”

Os fractais são caracterizados por algumas propriedades:

- Autossimilaridade: Ao tomar um trecho do fractal, percebe-se que tal trecho é semelhante ao fractal, apenas com uma redução na escala, do tamanho original. Esta característica permanece em qualquer nível de construção do fractal;
- Formas geométricas complexas e irregulares;
- Dimensão não inteira;
- Fascinante aspecto artístico.

Um fractal é um padrão geométrico em que cada pequena parte da estrutura se assemelha com o todo. Não podemos ver um fractal porque é uma figura limite, mas as etapas de sua construção podem dar uma ideia da figura toda. (SALLUM, 2005, p. 1)

Segundo Niedermeyer, Koefender e Roos (2009, p. 8), alguns motivos para trabalhar fractais na escola são:

• Trabalhar conteúdos a partir de exemplos encontrados na natureza estimula a criatividade, o raciocínio lógico, motiva o educando e o auxilia na compreensão de conteúdos e conceitos matemáticos;

• Deixar de usar somente quadro, giz e livro didático, em detrimento do uso de recursos audiovisuais (computador, projeção audiovisual, lâminas), faz com que o educando se concentre mais e visualize melhor as situações apresentadas;

• A Geometria Fractal pode ser trabalhada em qualquer nível de ensino, pois ela vai de uma simples dobradura de papel até os entes matemáticos modernos que envolvem números complexos, modelagem, etc.

Para Sallum,

> A introdução de fractais no Ensino Médio, além de satisfazer a curiosidade de quantos já ouviram falar neles, propicia a oportunidade de trabalhar com processos iterativos, escrever fórmulas gerais, criar algoritmos, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente, introduzir uma idéia intuitiva do conceito de limite e é um excelente tópico para aplicação de progressões geométricas e estímulo ao uso de tabelas. (SALLUM, 2005, p. 1)

E segundo Barbosa, o uso da Geometria Fractal na sala de aula traz:

> Conexões com várias ciências; deficiências da Geometria Euclidiana para o estudo de formas da natureza, desde que é, em geral apenas apropriada para formas do mundo oriundas do humano, como construções de casas, prédios, pontes, estradas, máquinas etc.; os objetos naturais são com frequência mais complicados e exigem uma geometria mais rica, que os modela com fractais, possibilitando desenvolver projetos educacionais sobre temas transversais voltados para a compreensão de fenômenos que ocorram nos diversos ambientes; difusão e acesso aos computadores e a tecnologia da informática nos vários níveis de escolarização; existência do belo nos fractais e possibilidade do despertar e desenvolver o senso estético com o estudo e arte aplicada à construção de fractais, entendendo-se arte como toda ação que envolve simultaneamente emoção, habilidade e criatividade; sensação de surpresa diante da ordem na desordem. (BARBOSA, 2002, p. 19).

Utilizando a Geometria Fractal os alunos podem aprender conteúdos como: contagem, perímetros, áreas, volumes, relações entre figuras geométricas, estudo entre relações de grandezas, exponenciais, logaritmos, sequências, figuras tridimensionais, funções, limites, podem analisar algoritmos e progressão aritmética e geométrica, entre outros.

Por meio da Geometria Fractal é possível integrar as ferramentas matemáticas essenciais à formação adequada dos alunos, além de mostrar que a matemática é uma ciência que possui amplas e diversas aplicações no cotidiano.

3 Metodologia

Olhando ao nosso redor, podemos perceber o quanto a Geometria se faz presente, seja de forma natural ou nas construções humanas. A palavra Geometria vem do grego e significa medir a terra (*geo* = terra + *metria* = medida). Segundo relatos de diversos autores a Geometria surgiu no antigo Egito, no vale do Rio Nilo, no qual as cheias obrigavam os faraós a nomear funcionários com o objetivo de restabelecer fronteiras entre as diversas propriedades que eram atingidas pelas inundações. Esta Geometria foi nomeada Euclidiana em homenagem ao seu precursor, Euclides, que aperfeiçoou a Geometria em sua maior parte nos moldes atuais.

Para Euclides o mundo só poderia ser representado assim:

- Ponto (dimensão 0): Na matemática, alguns objetos matemáticos são abstratos, ou seja, são imagináveis. Como por exemplo, o ponto. Não podemos pegar um ponto, pois ele não tem dimensão, nem comprimento, nem largura e nem altura;

- Reta (dimensão 1): A reta não tem largura e nem altura, mas seu comprimento é infinito;

Figura 1- Representação da reta

- Plano (dimensão 2): O plano apresenta duas dimensões, comprimento e altura, mas não possui profundidade. Sabemos que o plano é infinito, mas sua representação usual é:

Figura 2- Representação usual do plano

- Espaço (dimensão 3): O espaço tem três dimensões, comprimento, altura e profundidade, estende-se até o infinito em todas as três dimensões.

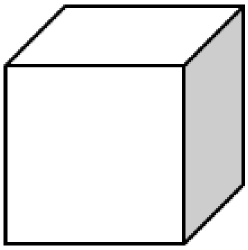

Figura 3- Representação usual do espaço

Porém, a maioria dos objetos na natureza não é formada por linhas e ou curvas, quadrados ou triângulos, mas por figuras geométricas bem mais complexas. Mandelbrot no início dos anos 80 chamou de Fractais.

Os fractais além de possuírem uma autossimilaridade (uma das propriedades mais importante), formas geométricas complexas e muitas vezes irregulares, alguns também possuem uma dimensão não inteira.

3.1 Usando logaritmo para determinar a dimensão fractal

Um segmento de reta, um quadrado e um cubo, que possuem respectivamente dimensões um, dois e três, podem ser repartidos em objetos autossimilares, ou seja, possuem a propriedade de autossimilaridade.

1- Um segmento de reta, podemos dividir em duas partes iguais:

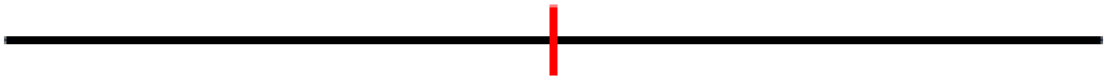

Figura 4- Divisão do segmento

2- Um quadrado, podemos dividir cada lado em duas partes, obtendo assim quatro novos quadrados congruentes:

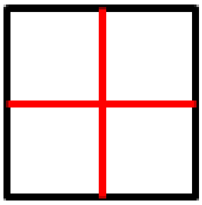

Figura 5- Divisão do quadrado

3- Um cubo, podemos dividir cada lado em duas partes iguais, formando assim, oito novos cubos:

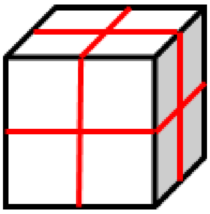

Figura 6- Divisão do cubo

Organizando essas informações em um quadro temos:

Figura	**Dimensão**	**Quantidade de peças**
Segmento de reta	1	2
Quadrado	2	4
Cubo	3	8

Quadro 1- Dimensão e quantidades de peças das figuras 4, 5 e 6

Observa-se que a quantidade de peças aumenta em uma proporção igual a 2, o que podemos chamar de "**fator de aumento"** igual a 2 para cada lado. Para cada figura podemos escrever a quantidade de peças como uma potência de base 2, onde a dimensão é o expoente.

Figura	**Dimensão**	**Quantidade de peças**
Segmento de reta	1	$2 = 2^1$
Quadrado	2	$4 = 2^2$

Cubo	3	$8 = 2^3$
Fator de aumento 2	d	$n = 2^d$

Quadro 2- Formularizando quantidade de peças com fator de aumento 2

Em geral, o número de peças é dado por: $n = m^d$, onde n é o número de peças, m é o **fator de aumento** e d a **dimensão**.

4- Ao pegarmos o Triângulo de Sierpinski, um fractal que parte inicialmente de um triângulo equilátero e que em seguida toma-se os pontos médios de cada lado do triângulo e a partir deles constrói-se quatro triângulos equiláteros, retirando o triângulo central, como na figura a seguir.

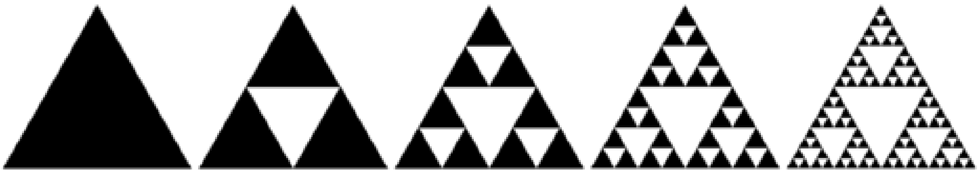

Figura 7- Triângulo de Sierpinski – Primeiras iterações
Fonte: GOOGLE imagens

A princípio temos um triângulo e após a primeira iteração temos três triângulos com lados medindo metade do lado do triângulo inicial. Logo, o fator de aumento é 2 e o número de peças é 3.

Dessa forma: $3 = 2^d$.

Temos $2 = 2^1$ e $4 = 2^2$, assim a dimensão do Triângulo de Sierpinski estaria entre 1 e 2.

$3 = 2^d$

Aplicando a propriedade de logaritmo de uma potência: $\boldsymbol{\log_a b^k = k \,.\, \log_a b}$, obtemos:

$\log 3 = \log 2^d \Rightarrow \log 3 = d \,.\, \log 2 \Rightarrow d = \frac{\log 3}{\log 2} \Rightarrow d \sim 1{,}6$

Logo a dimensão do Triângulo de Sierpinski é, aproximadamente, 1,6, uma dimensão não inteira.

5- A Curva de Koch, um fractal constituído a partir de um segmento de reta, no qual divide-se esse segmento em três parte iguais e retira-se a parte do meio, substituindo-a por um triângulo equilátero sem base, como na figura a seguir.

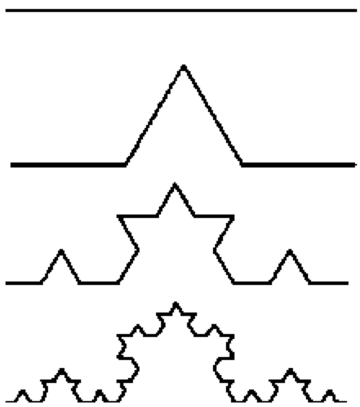

Figura 8- Curva de Koch – Primeiras iterações
Fonte: GOOGLE imagens

No nível inicial, temos um segmento de reta, no nível seguinte, 4 segmentos, com uma medida igual a 1/3 da medida do segmento inicial. Logo, o número de peças é 4 e o fator de aumento é 3.

Dessa forma: $4 = 3^{\mathrm{d}}$.

Aplicando a propriedade de logaritmo de uma potência, obtemos:

$$\log 4 = \log 3^{d} \Rightarrow \log 4 = d \,.\log 3 \Rightarrow d = \frac{\log 4}{\log 3} \Rightarrow d \sim 1{,}3$$

Logo a dimensão da Curva de Koch é, aproximadamente, 1,3, uma dimensão não inteira.

3.2 Usando progressão geométrica no processo iterativo dos fractais

Todos os fractais são formados por iteração, no qual podemos formar uma sequência numérica.

3.2.1 Conjunto de Cantor

O Conjunto de Cantor também conhecido como "Poeira de Cantor" é o primeiro objeto reconhecido como Fractal. Foi desenvolvido pelo matemático Georg Cantor (1845-1918) e é um subconjunto infinito de pontos no intervalo unitário [0,1].

Para a construção do Conjunto de Cantor:

1- Considere um segmento de reta unitário;
2- Divida esse segmento em três partes iguais e retire a parte central;
3- Aos segmentos restantes, aplica-se o passo 2 sucessivamente.

Figura 9- Conjunto de Cantor
Fonte: GOOGLE imagens

No nível 0 consideremos o intervalo fechado [0,1]. No nível 1, teremos dois intervalos: [0,1/3] e [2/3,1]. No nível 2 teremos quatro intervalos: [0,1/9], [2/9,3/9], [6/9,7/9] e [8/9,1]. E no nível 3 teremos oito intervalos: [0,1/27], [2/27,1/9], [2/9,7/27], [8/27,1/3], [2/3,19/27], [20/27,7/9], [8/9,25/27] e [26/27,1] e assim sucessivamente.

Iterações	Quantidade de segmentos
Nível 0	1
Nível 1	2
Nível 2	4
Nível 3	8
...	...

Quadro 3- Conjunto de Cantor - Iterações

Tomando os números (2, 4, 8,...) que compõe as quantidades de segmentos do Conjunto de Cantor em cada iteração temos uma sequência numérica não nula, na qual é constante o quociente da divisão de cada termo (a partir do segundo) pelo termo anterior, ou seja, uma Progressão Geométrica (PG) de razão 2, onde para saber a quantidade de segmentos que o fractal Conjunto de Cantor terá em n iteração (nível n) é preciso apenas aplicar a fórmula do termo geral da PG: $a_n = a_1 . q^{n-1}$, onde a_n é o termo geral, n é o número de termos, a_1 é o primeiro termo e q a razão.

3.2.2 Curva de Koch

A Curva de Koch (figura 8) foi criada pelo matemático Helge Von Koch (1870-1924). Esse fractal mais tarde originou a "Ilha de Koch" ou "Floco de Neve de Koch". Ambas as figuras se baseiam no mesmo processo de construção, com a diferença de que a Curva de Koch tem como figura inicial um segmento de reta, e a Ilha de Koch, um triângulo equilátero que é composto por três desses segmentos.

Para construção da Curva de Koch:

1- Considere um segmento de reta;
2- Divida esse segmento em três partes iguais, e na parte do meio substituímos por um triângulo equilátero sem um dos lados;
3- Aos segmentos restantes, aplica-se o passo 2 sucessivamente.

Iterações	Quantidade de segmentos
Nível 0	1
Nível 1	4
Nível 2	16
Nível 3	64
...	...

Quadro 4- Curva de Koch - Iterações

A sequência (4, 16, 64...) é uma Progressão Geométrica (PG) de razão 4, onde para saber a quantidade de segmentos que o fractal Curva de Koch terá em n iteração (nível n) é preciso apenas aplicar a fórmula do termo geral da PG: $a_n = a_1 . q^{n-1}$.

3.2.3 Triângulo de Sierpinski

O Triângulo de Sierpinski (figura 7) é uma figura geométrica que foi objeto de estudo do matemático Waclaw Sierpinski (1882-1969).

Para construção do Triângulo de Sierpinski:

1- Considere um triângulo equilátero;
2- Encontre o ponto médio de cada de cada lado desse triângulo, uma esses pontos e elimine o triângulo formado pela união desses pontos;
3- Aos triângulos restantes, aplica-se o passo 2 sucessivamente.

Iterações	Quantidade de triângulos
Nível 0	1
Nível 1	3
Nível 2	9
Nível 3	27
Nível 4	81
...	...

Quadro 5- Triângulo de Sierpinski - Iterações

Analogamente, ao que foi feito ao Conjunto de Cantor e à Curva de Koch, aplicamos o mesmo raciocínio ao fractal Triânglo de Sierpinski, no caso para a sequência (3, 9, 27, 81...).

3.3 Construção cartão fractal tridimensional

A construção tridimensional do cartão Triângulo de Sierpinski é uma forma descontraída e interessante de sintetizar o que foi visto sobre os fractais, pois enquanto os alunos fazem a construção, eles se divertem e relacionam com o conteúdo matemático de uma forma prazerosa. O material necessário para a construção é: papel cartão, papel A4, régua, tesoura, lápis e borracha.

Segue o passo a passo para a construção desse cartão:

1- Dobre no maior comprimento, ao meio e para cima, uma folha de papel A4. Considere o retângulo que se forma com medida de base **b** e de altura **a**;

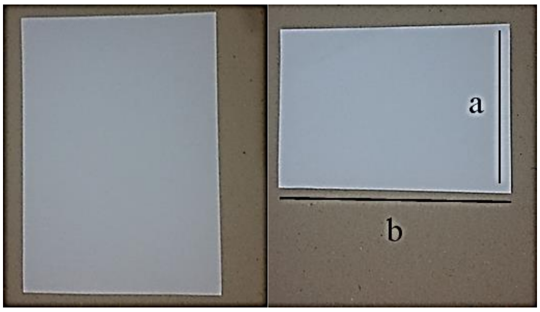

Figura 10- 1º passo construção do cartão Triângulo de Sierpinski

2- Marque o ponto central da base b, obtendo dois retângulos 1 e 2;

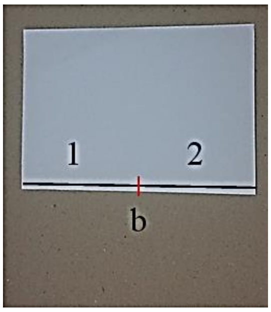

Figura 11- 2º passo construção do cartão Triângulo de Sierpinski

3- Faça um corte vertical nessa marcação com altura c = a/2;

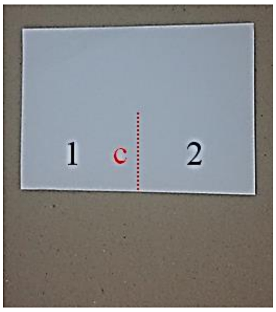

Figura 12- 3º passo construção do cartão Triângulo de Sierpinski

4- Dobre o retângulo 2 para cima, fazendo um vinco na dobra;

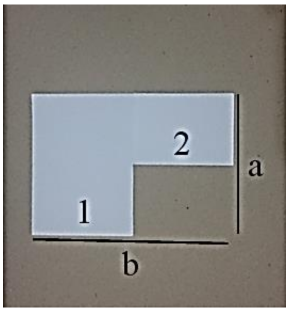

Figura 13- 4º passo construção do cartão Triângulo de Sierpinski – 1ª iteração

5- Repita o 2º e o 3º passo nos dois retângulos, fazendo um corte de altura e = c/2 nos triângulos 1 e 2. Renumere-os da direita para esquerda como 1, 2, 3 e 4;

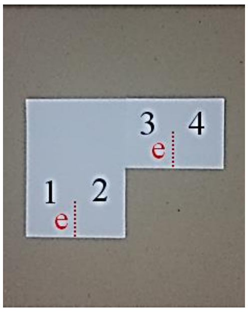

Figura 14- 5º passo construção do cartão Triângulo de Sierpinski

6- Dobre os retângulos 2 e 4 para cima, fazendo um vinco na dobra;

Figura 15- 6º passo construção do cartão Triângulo de Sierpinski – 2ª iteração

7- Repita o 2º e o 3º passo nos quatro retângulos, fazendo um corte de altura f = e/2 nos triângulos 1, 2, 3 e 4 e renumere;

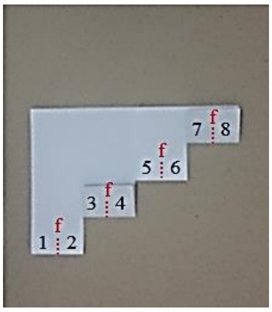

Figura 16- 7º passo construção do cartão Triângulo de Sierpinski

8- Dobre os retângulos 2, 4, 6 e 8 para cima, fazendo um vinco na dobra;

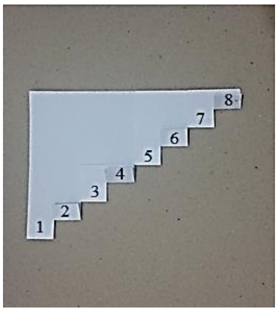

Figura 17- 8º passo construção do cartão Triângulo de Sierpinski – 3ª iteração

9- Volte todos os retângulos para a posição inicial, folha dobrada ao meio, e dobre-os para "dentro da folha". Gire a folha de 90º no sentido horário e abra o papel A4 até um ângulo de 90º para obter uma figura espacial que contém paralelepípedos, denominada "Triângulo de Sierpinski";

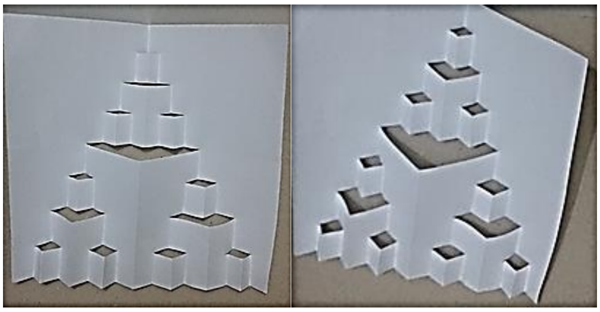

Figura 18- 9º passo construção do cartão Triângulo de Sierpinski

10- Cole o Triângulo de Sierpinski em um papel cartão com medidas maiores ou iguais a uma folha de papel A4.

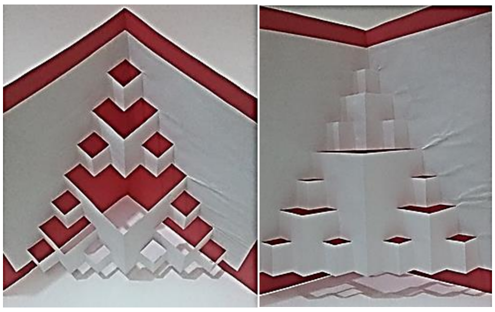

Figura 19- Cartão Triângulo de Sierpinski

4 Conclusão

A aula sobre fractais foi aplicada numa escola pública para duas turmas do 3º ano do Ensino Médio. Antes e depois da aplicação da aula, fora entregue aos alunos um questionário, cujo objetivo era verificar o quanto eles conheciam sobre o assunto e o que acharam da aula.

No primeiro questionário (antes de aplicar a aula) era perguntado se eles já tinham ouvido falar sobre fractais e o que achavam que fosse um fractal. Dos 29 alunos, 93% não tinham ouvido falar e os restantes que já ouviram falar sobre fractais, porém não souberam explicar.

O que nos mostra que embora ao nosso redor estejamos cercados por esses objetos, o assunto não é conhecido.

Já no segundo questionário (após o término da aula) os alunos foram questionados com base no que foi visto sobre fractais, se eles gostariam que a Geometria Fractal fosse ensinada nas escolas. E, por unanimidade, todos responderam positivamente. Dentre as justificativas, é um assunto legal e interessante, desenvolve a criatividade, envolve outros conteúdos.

Após terem um contato com esses objetos e de descobrirem suas aplicações no cotidiano e a relação com diversos conteúdos matemáticos, os alunos se mostraram mais interessados e motivados com relação à matemática. Pois, o estudo dos fractais faz-se interessante como uma forma mais precisa de representação do nosso mundo, permitindo trabalhar a matemática de uma maneira mais instigante, inventiva e assim despertar a curiosidade e estimular a criatividade dos alunos.

5 Referências

ALVES, C. M. F. S. J. **Fractais: conceitos básicos, representações gráficas e aplicações ao ensino não universitário**. 2007. 324 f. Dissertação (Mestrado em Matemática para o Ensino) – Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, 2007.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a geometria fractal para a sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BARNSLEY, M. **Fractals everywhere**. San Diego: Academic Press, Inc., 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>. Acesso em: 03 jun. 2017.

FILLIPIN, G. G. **Estudo da geometria fractal e aplicações em sala de aula.** 2009. 51 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2009.

NIEDERMEYER, C. I.; KOEFENDER, C.; ROOS, L. T. W. Geometria fractal e ensino de matemática. In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2009, Ijuí. **Anais...** Ijuí: UNISC, 2009.

SALLUM, E. M. Fractais no ensino médio. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 57, p. 1-8, 2005.

SOARES, F. G. E. P. **As atitudes de alunos do ensino básico em relação à matemática e o papel do professor**. 2003. 200 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Católica Dom Bosco, Campo Grande, 2003.

Artigo recebido em jul. 2017 e aceito em nov. 2017.