Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 10, dez. 2017
Edição Ermac
Iniciação Científica

Análise da ordem de acurácia do erro em soluções numéricas da equação de Poisson

Analysis of the order of accuracy of the error in numerical solutions of the Poisson equation

Rafael de Lima Sterza
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
rlsterza@gmail.com

Beatriz Liara Carreira
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
bia.liara36@hotmail.com

Letícia Braga Berlandi
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
leticiaberlandi@gmail.com

Analice Costacurta Brandi
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
analice@fct.unesp.br

Resumo

As equações elípticas são equações diferenciais parciais e estão relacionadas com problemas de equilíbrio que não dependem, em geral, do tempo. A necessidade de obtenção de soluções aproximadas para problemas desse tipo impulsionou o estudo e a aplicação de métodos numéricos, dessa forma, este trabalho consiste na apresentação de métodos para estimar o erro de soluções numéricas avaliando a ordem de acurácia através da ordem efetiva e a utilização de diferentes tipos de normas matriciais para a verificação do código computacional. Existem diversos métodos numéricos capazes de encontrar aproximação para a solução de uma equação elíptica, em especial, para a equação de Poisson bidimensional. Porém, a finalidade deste trabalho é explorar um método capaz de obter aproximações mais precisas e com baixo custo computacional, conhecido como método de diferenças finitas compactas, e verificar que o emprego da ordem efetiva pode ser diferente da ordem do método em si.
Palavras-chave: Equação de Poisson. Ordem efetiva. Método de diferenças finitas compactas. Métodos numéricos e aplicações.

Abstract

Elliptic equations are partial differential equations and they are related to equilibrium problems that do not depend in general on time. The need to obtain approximate solutions for problems of this kind has led to the study and application of numerical methods. In this way, this work consists of the presentation of methods to estimate the error of numerical solutions by evaluating the order of accuracy through the effective order and the use of different types of matrix standards for the verification of computational code. There are several numerical methods capable of finding an approximation for the solution of an elliptic equation, especially for the two-dimensional Poisson equation. However the purpose of this work is to explore a method capable of obtaining more accurate and low computational cost approaches, known as the compact finite difference method, and to verify that the use of the effective order may be different from the order of the method itself.
Keywords: Poisson equation. Effective order. Compact finite difference method. Numerical methods and applications.

1 Introdução

As equações diferenciais elípticas estão relacionadas com problemas de equilíbrio que não dependem, em geral, do tempo. Como exemplos de equações elípticas têm-se problemas de vibração em membranas, problemas de difusão, entre outros (FORTUNA, 2012). A equação de Poisson representa um problema estacionário e com a necessidade de obtenção de soluções aproximadas para problemas desse tipo impulsionou o estudo de novas técnicas, dentre elas, o método de diferenças finitas compactas. Os esforços para calcular uma solução mais precisa tem dirigido a atenção dos pesquisadores para o desenvolvimento do método de diferenças finitas compactas que é um método conhecido por ter propriedades de alta ordem de precisão e baixo custo computacional, quando comparado com outros métodos numéricos (OKORO; OWOLOKO, 2010).

É comum a utilização de normas vetoriais em procedimentos de verificação numérica onde se estima, basicamente, o erro numérico envolvido e sua ordem de acurácia. A determinação da ordem de acurácia é importante para confirmação da ordem teórica do modelo numérico utilizado e para a estimativa da ordem de acurácia quando o resultado teórico é desconhecido. Ao se investigar a ordem de acurácia, para um número fixo de variáveis e intervalo de discretização, a escolha da norma a ser empregada pode acarretar diferentes resultados, e isso pode levar a interpretações equivocadas (MARTINS at al, 2013). Neste contexto, o objetivo deste trabalho é avaliar o uso de diferentes tipos de normas na verificação do código computacional na solução da equação de Poisson bidimensional resolvida numericamente pelo método de diferenças finitas compactas e, além disso, verificar a ordem de acurácia do método através da ordem efetiva.

2 Formulação matemática

Uma das principais equações elípticas que representam os problemas de equilíbrio é a equação de Poisson dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y). \tag{1}$$

Uma característica dos problemas modelados por equações diferenciais parciais elípticas é que toda região Ω seja imediatamente afetada por qualquer mudança no valor da variável dependente em um ponto do interior do domínio ou na fronteira $\partial\Omega$. Isso é equivalente a afirmar que as propriedades físicas de problemas elípticos se propagam em todas as direções dentro da região Ω, afetando os pontos interiores, e por este motivo suas condições de contorno normalmente são especificadas ao longo de toda fronteira (FORTUNA, 2012).

A solução numérica de uma equação diferencial parcial necessita de condições auxiliares adequadas. A determinação dessas condições auxiliares é facilitada introduzindo-se o conceito de características. Em problemas com duas variáveis independentes x e y, por exemplo, características reais, se existirem, são curvas no plano $x-y$, pelas quais, informações se propagam (FORTUNA, 2012). As condições de contorno usualmente especificam os valores da função ou os valores de sua derivada normal ao longo do contorno $\partial\Omega$, ou uma mistura de ambos, que são, respectivamente, as condições de Dirichlet (u é conhecida em $\partial\Omega$), de Neumann ($\frac{\partial u}{\partial n}$ é conhecida em $\partial\Omega$) e Robin ($\alpha u = \beta \frac{\partial u}{\partial n}$ conhecida em $\partial\Omega$). Em particular, considera-se neste trabalho uma região quadrada $\Omega = \{(x,y) : a \leq x \leq b; a \leq y \leq b\}$ com condição de contorno $u(x,y) = g(x,y)$ em $\partial\Omega$.

3 Formulação numérica

O problema em estudo é formulado por uma equação diferencial parcial do tipo estacionária e por condições auxiliares específicas. Considerando o fato de que nem sempre existe solução analítica, faz-se necessária a resolução do problema de modo numérico. Para tanto, o método de diferenças finitas compactas é adotado para a discretização do domínio e das derivadas parciais do problema.

Um problema envolvendo uma equação diferencial pode ser resolvido por três tipos de abordagem. A abordagem analítica fica restrita a problemas simples e lineares. Problemas complexos tornam-se difíceis ou até mesmo impossíveis de se resolver analiticamente, por conta da insuficiência dos métodos existentes. A abordagem experimental é capaz de produzir resultados mais realísticos, em contrapartida possui limitações de ordem espacial, pois requer estrututas que suportem o experimento, dependendo na maioia das vezes, de processos operacionais caros e longos. Enquanto isso, a abordagem computacional é capaz de solucionar equações com alto nível de complexidade, não havendo restrições a geometrias e processos complicados. É sempre necessário um cuidado especial na construção da modelagem, para que de fato, ela seja uma equação que represente o fenômeno estudado. Erros de truncamento são inerentes ao processo, mas técnicas de convergência e estabilidade são incorporadas, garantindo a validade dos resultados.

A primeira etapa para resolução de qualquer método numérico envolvendo equações diferenciais parciais é discretizar a região onde se procura a solução. Para a discretização define-se uma malha, que é um conjunto finito de pontos pertencentes ao domínio, chamados nós da malha (CUMINATO; MENEGUETTE JUNIOR, 2013).

3.1 Método de diferenças finitas compactas

Considerando uma malha retangular com espaçamento h e k nas direções x e y, respectivamente, então tem-se que

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} - \frac{h^2}{12}\left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{i,j} - \frac{h^4}{360}\left.\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right|_{i,j} + O(h^6), \tag{2}$$

e

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{i,j} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{k^2} - \frac{k^2}{12}\left.\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right|_{i,j} - \frac{k^4}{360}\left.\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right|_{i,j} + O(k^6). \tag{3}$$

Considerando o fato que u é a solução da equação (1), tem-se que

$$\left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{i,j} = -\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} - \left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}\right|_{i,j}, \tag{4}$$

da mesma forma

$$\left.\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right|_{i,j} = -\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} - \left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}\right|_{i,j}. \tag{5}$$

Ao substituir as equações (4) e (5) nas equações (2) e (3), respectivamente, e utilizando uma aproximação por diferenças finitas centradas na segunda derivada de f, obtém-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} - \frac{h^2}{12}\Big(- \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}\Big)_{i,j} - \frac{h^4}{360}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\Big|_{i,j} + O(h^6), \quad (6)$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{i,j} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{k^2} - \frac{k^2}{12}\Big(- \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}\Big)_{i,j} - \frac{k^4}{360}\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\Big|_{i,j} + O(k^6). \quad (7)$$

Perceba que é necessário uma aproximação para o termo $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}\Big|_{i,j}$, que pode ser dado por

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}\Big|_{i,j} = \frac{4u_{i,j}}{h^2k^2} - 2\Big(\frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}}{h^2k^2}\Big) + \frac{u_{i-1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j+1}}{h^2k^2}. \quad (8)$$

Substituindo a equação (8), nas equações (6) e (7), somando as equações resultantes e em seguida, substituindo-a na equação (1), obtém-se

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{k^2} + \Big(\frac{h^2+k^2}{12}\Big)\Big[\frac{4u_{i,j}}{h^2k^2} - 2\Big(\frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}}{h^2k^2}\Big) +$$

$$+ \frac{u_{i-1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j+1}}{h^2k^2}\Big] = \frac{1}{12}(f_{i-1,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1} - 4f_{i,j}). \quad (9)$$

Fazendo $h = k$, então a equação (9) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{1}{6}(u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}) + \frac{2}{3}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) - \frac{10}{3}u_{i,j} =$$

$$= -\frac{h^2}{12}(f_{i-1,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1} + 8f_{i,j}). \quad (10)$$

A equação (10) representa o esquema de diferenças finitas compactas, com erro de truncamento local dado por

$$\tau_{i,j} = -\frac{h^4}{360}\Big(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\Big|_{i,j} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\Big|_{i,j}\Big) + O(h^6),$$

em que o termo dominante do erro é h^4, então isso significa que a equação (10) é o esquema de diferenças finitas compactas de 4ª ordem. Para o método de diferenças finitas compactas de 6ª ordem, trabalha-se apenas para $h = k$. Inicialmente reescreve-se a equação (1)

$$-(\delta_x^2 u_{i,j} + \delta_y^2 u_{i,j} + \tau_{i,j}) = f_{i,j}, \quad (11)$$

onde δ_x^2 e δ_y^2 representa o operador de aproximação por diferenças finitas, ou seja, as equações (2) e (3), respectivamente. Na equação (11), trabalha-se com o termo $\tau_{i,j}$

$$\tau_{i,j} = -\frac{h^2}{12}\Big(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_{i,j} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\Big|_{i,j}\Big) - \frac{h^4}{360}\Big(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\Big|_{i,j} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\Big|_{i,j}\Big) + O(h^6). \quad (12)$$

Substituindo as equações (4) e (5) na equação (12) e utilizando a equação (8), tem-se que

$$\tau_{i,j} = \frac{h^2}{12}[\nabla^2 f_{i,j} + 2(\delta_x^2\delta_y^2 u_{i,j})] - \frac{h^4}{360}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\Big|_{i,j} + 5\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\partial y^2}\Big|_{i,j} + 5\frac{\partial^6 u}{\partial x^2\partial y^4}\Big|_{i,j} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\Big|_{i,j}\right) + O(h^6). \tag{13}$$

A expressão compacta de 6ª ordem requer mais uma aproximação, que pode ser obtida através da equação (1), então

$$\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} = -\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \frac{\partial^6 u}{\partial x^4\partial y^2}, \qquad \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} = -\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \frac{\partial^6 u}{\partial x^2\partial y^4}$$
$$\text{e} \qquad \frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2} = -\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\partial y^2} - \frac{\partial^6 u}{\partial x^2\partial y^4}. \tag{14}$$

Substituindo as equações (14) na equação (13) e fazendo as manipulações algébricas necessárias, obtém-se

$$\tau_{i,j} = \frac{h^2}{12}[\nabla^2 f_{i,j} + 2(\delta_x^2\delta_y^2 u_{i,j})] + \frac{h^4}{360}(\nabla^4 f_{i,j} + 4\delta_x^2\delta_y^2 f_{i,j}) + O(h^6). \tag{15}$$

Substituindo a equação (15) na equação (11), obtém-se o método de diferenças finitas compactas de 6ª ordem dada por

$$-\frac{10}{3}u_{i,j} + \frac{2}{3}A + \frac{1}{6}B == -\frac{h^2}{12}C + \frac{h^6}{360}(\nabla^4 f_{i,j} + 4\delta_x^2\delta_y^2 f_{i,j}), \tag{16}$$

onde

$$\begin{aligned}
A &= u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1},\\
B &= u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j+1},\\
C &= f_{i-1,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1} + 8f_{i,j},\\
\delta_x^2\delta_y^2 f_{i,j} &= \frac{4f_{i,j}}{h^4} - 2\left(\frac{f_{i-1,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1}}{h^4}\right) + \frac{f_{i-1,j-1} + f_{i-1,j+1} + f_{i+1,j-1} + f_{i+1,j+1}}{h^4}.
\end{aligned}$$

3.2 Norma matricial

Por definição, uma norma matricial em $\mathbb{R}^{n\times n}$ é uma função que para cada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ associa a cada matriz um número real não negativo que satisfaz as propriedades, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
i)&\quad \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0,\\
ii)&\quad \|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|,\\
iii)&\quad \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|,\\
iv)&\quad \|AB\| \leq \|A\| + \|B\|.
\end{aligned}$$

Neste trabalho, as normas matriciais utilizadas são

1. Norma Linha: $$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \tag{17}$$

2. Norma Coluna: $$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \tag{18}$$

3. Norma Euclidiana: $$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij})^2}. \tag{19}$$

As normas do erro numérico foram utilizadas para a verificação do código computacional.

3.3 Ordem de acurácia

O erro numérico de um problema pode ser calculado como a diferença entre a solução analítica u e a sua solução numérica U, entretanto ao se considerar o emprego de um método de discretização em um domínio de cálculo Ω, o erro de discretização pode ser considerado a principal fonte do erro numérico (MARTINS at al., 2013), o erro numérico E, pode ser representado por (MARCHI; SILVA, 2002)

$$E = u - U = c_1 h^{P_1} + c_2 h^{P_2} + c_3 h^{P_3} + c_4 h^{P_4} + ... \tag{20}$$

onde os coeficientes c_i, $i = 1, 2, ...$ são números reais obtidos em função da variável dependente do problema unidimensional e de suas derivadas, mas não depende de h, que é o espaçamento da malha.

As verdadeiras ordens (P_v) são definidas como os expoentes de h dos termos não nulos na equação do erro de truncamento (20) e seguem a relação $1 \le P_1 < P_2 < P_3 ...$ e são números inteiros positivos. Em geral, constituem uma progressão aritmética, ou seja, a diferença entre ordens sucessivas é uma constante. Normalmente, o número de ordens verdadeiras é infinito porque a equação (20), é constituída por uma quantidade infinita de termos não nulos (MARCHI; SILVA, 2002).

O menor expoente P_1 é denominado ordem assintótica e, muitas vezes, é tratada na literatura por ordem do erro ou ordem de acurácia e denotada por P. Quando $h \to 0$ na equação (20), $c_1 h^{P_1}$ é a principal componente do erro numérico, dessa forma, toma-se $P = P_1$.

Para problemas bidimensionais, a equação (20) será reescrita considerando os eixos x e y, $h_x = h_y = h$, $P_x = P_y = P$, obtendo assim (MARCHI; SILVA, 2005)

$$E = u - U = c_x h^{P_x} + c_y h^{P_y} = (c_x + c_y) h^P = d_{x,y} h^P. \tag{21}$$

Dessa forma, P pode ser calculado através da ordem efetiva P_E. A ordem efetiva é definida como a inclinação local da curva do erro de discretização da solução numérica versus o tamanho h dos elementos da malha num gráfico em escala logarítmica. Então, a ordem efetiva P_E pode ser calculada por

$$P_E = \frac{\ln\left[\frac{E(U_2)}{E(U_1)}\right]}{\ln(q)}, \tag{22}$$

onde U_1 e U_2 são soluções numéricas obtidas em malhas fina e grossa, respectivamente e q é a razão $q = \frac{h_2}{h_1}$ (OLIVEIRA, 2010).

4 Resultados numéricos

Considerando a equação de Poisson bidimensional,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}y\right), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq 1, \tag{23}$$

com condições do tipo Dirichlet e a solução analítica da equação (23) é dada por

$$u(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}y\right).$$

As Tabelas 1 e 2 apresentam os resultados numéricos para cinco diferentes refinamentos da malha do problema simulado, em que $\|E\|_\infty, \|E\|_1$ e $\|E\|_2$ representam as normas linha, coluna e Euclidiana, respectivamente, do erro numérico. E, ainda, P_E representa a ordem efetiva do método numérico avaliado.

Tabela 1: Representação das normas e da ordem efetiva para diferentes tipos de espaçamento h utilizando o método compacto de 4ª ordem.

h	$\|E\|_\infty$	$\|E\|_1$	$\|E\|_2$	P_E
0.25	2.7372e-05	2.7372e-05	2.4086e-05	-
0.125	3.7834e-06	3.7834e-06	3.0540e-06	3.8735
0.0625	4.7980e-07	4.7980e-07	3.8259e-07	3.9976
0.0313	6.0292e-08	6.0292e-08	4.7846e-08	3.9943
0.0156	7.5453e-09	7.5453e-09	5.9815e-09	3.9994

Nota-se na Tabela 1 que a ordem efetiva P_E do método está próxima à verdadeira ordem do método numérico utilizado que é de 4ª ordem. E, além disso, analisando as normas da matriz do erro numérico, quando se faz o refinamento da malha a norma tende a diminuir ainda mais, garantindo a eficiência do método, já que esses valores então entre 10^{-5} e 10^{-9}. Agora, os resultados numéricos simulados utilizando o método de diferenças finitas compactas de 6ª ordem são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2: Representação das normas e da ordem efetiva para diferentes tipos de espaçamento h utilizando o método compacto de 6ª ordem.

h	$\|E\|_\infty$	$\|E\|_1$	$\|E\|_2$	P_E
0.25	2.5917e-07	2.5917e-07	2.2806e-07	-
0.125	8.7494e-09	8.7494e-09	7.0626e-09	5.9072
0.0625	2.7579e-10	2.7579e-10	2.1992e-10	6.0059
0.0313	8.6555e-12	8.6555e-12	6.8695e-12	5.9961
0.0156	2.4769e-13	2.4609e-13	1.9353e-13	5.8746

Pode-se observar que os resultados apresentados na Tabela 2 são equivalente ao método de 4ª ordem. Os valores da ordem efetiva condizem com o valor da ordem verdadeira, que neste caso é 6, e, além disso, os valores dos resultados das normas são pequenos, já que estão entre 10^{-7} e 10^{-13}, garantindo a eficiência do método numérico estudado.

5 Conclusão

Este trabalho apresentou uma análise do procedimento numérico empregado na obtenção de resultados numéricos para a solução da equação de Poisson bidimensional. A análise foi realizada através do estudo dos erros numéricos considerando as normas - norma linha, norma coluna e norma Euclidiana - e pela obtenção da ordem efetiva que foi comparada com a verdadeira ordem do método.

Neste contexto, concluiu-se que o código computacional utilizado neste trabalho foi coerente e apresentou bons resultados, pois com o refinamento da malha, as normas dos erros numéricos tenderam a diminuir e a ordem efetiva ficou próxima da verdadeira ordem dos métodos estudados.

6 Agradecimentos

Agradecemos à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pelo apoio financeiro no desenvolvimento deste trabalho, processo nº 2016/17849-7.

7 Referências bibliográficas

CUMINATO, J.A.; MENEGUETTE Jr., M. **Discretização de equações diferenciais parciais**: técnicas de diferenças finitas. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

FORTUNA, A. O. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos:** conceitos básicos e aplicações. 2. ed. São Paulo: EDUSP, 2012.

MARCHI, C. H.; SILVA, A. F. C. Multidimensional discretization error estimation for convergent apparent order. **Journal of the Brazilian Soc. of Mech. Sc. and Eng**, v. 27, n. 4, p. 432-439, 2005.

MARCHI, C. H.; SILVA, A. F. C. Unidimensional numerical solution error estimation for convergent apparent order. **Numerical Heat Transfer, Part B**, v. 42, n. 2, p. 167-188, 2002.

MARTINS, M. A. et al. Efeito do tipo de norma sobre a ordem de acurácia do erro de soluções numéricas em CFD. In: Congresso de Matemática Aplicada e Computacional, 2013. Bauru. **Anais...** Bauru: Unesp, 2013. p. 99-103.

OKORO, F. M.; OWOLOKO, A. E. Compact finite difference schemes for Poisson equation using direct solver. **Journal of Mathematics and Technology**, v. 1, n. 3, p. 130-138, 2010.

OLIVEIRA, F. **Efeito das malhas anisotrópicas bidimensionais sobre o desempenho do método Multigrid geométrico.** 2010. 204f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - PGMEC-UFPR, Curitiba, 2010.

STERZA, R. L. et al. Análise da ordem de acurácia do erro em soluções numéricas da equação de Poisson. In: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 4., 2017, Bauru. **Caderno de trabalhos completos e resumos.** Bauru: Unesp, Faculdade de Ciências, 2017, p. 33-39.

Artigo recebido em jun. 2017 e aceito em nov. 2017.