Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 10, dez. 2017
Edição Ermac

Soluções periódicas dos modelos de moscas-varejeiras de Nicholson com retardo

Periodic solutions of delayed Nicholson's blowflies models

Carolinne Stefane de Souza
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho"
ssouza.carolinne@gmail.com

Suzete Maria Silva Afonso
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho"
smafonso@rc.unesp.br

Resumo

Neste trabalho, estudaremos as equações diferenciais funcionais com retardo usadas no modelo de moscas-varejeiras de Nicholson, onde o retardo é constante. Devido às mudanças no ambiente, torna-se irreal supormos que o retardo é constante e, por este motivo, também analisaremos o modelo de moscas-varejeiras modificado de Nicholson, onde o retardo não é necessariamente constante. Dentre os dois modelos, o modelo modificado é considerado o mais próximo do mundo real.

Usando o Teorema da Continuação de Mawhin e a Teoria do Grau Coincidente, obteremos condições suficientes para garantir a existência de soluções periódicas positivas para o modelo de moscas-varejeiras de Nicholson modificado. Ao considerar o retardo constante, vemos que o primeiro modelo citado é um caso particular do modelo modificado, o que possibilita a obtenção de condições suficientes para a existência de soluções periódicas positivas para o primeiro modelo.

Palavras-chave: Solução Periódica. Modelo de Moscas-varejeiras de Nicholson. Teorema da Continuação de Mawhin.

Abstract

In this work, we will study the delayed differential functional equations used in the periodic Nicholson's blowflies model, where the delay is constant. Due to environmental changes, it becomes unreal to suppose the delay is constant, because of this reason also, we will analyse the modified periodic Nicholson's blowflies model, where the delay is not necessarily constant. Between both models, the modified model is considered the nearest to the real world.

Using the Mawhin's Continuation Theorem and the Coincidence Degree Theory, we will obtain sufficient conditions to guarantee the existence of positive periodic solutions of the modified periodic Nicholson's blowflies model. Considering the delay constant, we see that the first model is a particular case of the modified model, that provides the achievement of sufficient conditions to existence of positive periodic solutions to the first model.

Keywords: Periodic Solution. Nicholson's Blowflies Model. Mawhin's Continuation Theorem.

1 Introdução

Modelos mais realistas e interessantes de crescimento de uma única ou múltiplas espécies devem levar em conta o ambiente e os efeitos do tempo com retardo. A equação

$$M'(t) = -\delta(t)M(t) + R(t)M(t - m\omega)\exp[-a(t)M(t - m\omega)] \tag{1}$$

foi introduzida por Nicholson para modelar uma população de moscas de laboratório, na qual é assumido que os parâmetros biológicos e ambientais são periódicos com um período comum.

Na equação (1), $a(t)$ é uma função constante positiva, m é um número inteiro positivo, $m\omega$ é o retardo, $\delta(t)$ e $R(t)$ são funções periódicas positivas de período ω. As funções R e δ denotam o máximo per capita da produção diária de ovos e o máximo per capita da taxa de mortalidade diária adulta, respectivamente. Em [1], Saker e Agarwal provaram que a equação (1) possui solução $\omega-$periódica se

$$\min_{t\in[0,\omega]} R(t) > \max_{t\in[0,\omega]} \delta(t). \tag{2}$$

Com as constantes mudanças no ambiente, torna-se irreal assumir que o retardo é uma constante e muito menos um múltiplo do período. Portanto, ao invés de assumirmos que o retardo é uma constante, $m\omega$, considerá-lo-emos como funções $\omega-$periódicas, σ e τ. Sendo assim, estudaremos o seguinte modelo de moscas-varejeiras modificado de Nicholson

$$M'(t) = -\delta(t)M(t) + R(t)M(t - \sigma(t))\exp[-a(t)M(t - \tau(t))], \tag{3}$$

em que

(a) $\delta, R, \sigma, \tau : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$ são funções contínuas e ω-periódicas, com $\omega > 0$;

(b) $a : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$ é uma função contínua e ω-periódica;

(c) $\int_0^\omega \delta(t)dt > 0$;

(d) $\int_0^\omega R(t)dt > 0$.

O nosso propósito é obter algumas condições suficientes para garantir a existência de soluções periódicas positivas da equação (3) através do Teorema da Continuação de Mawhin e da Teoria do Grau Coincidente.

Neste artigo exploramos o trabalho [2] de Chen. Aqui, nós acrescentamos a demonstração da existência de solução periódica para o caso em que o retardo é um múltiplo do período e exemplos para concluir o artigo de Chen.

2 Notações

Os seguintes símbolos serão usados na sequência.

1. $\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$.

2. $\mathbb{R}^+ := (0, \infty)$.

3. $A - B = \{x \in A; x \notin B\}$.

4. $|.|$ denota o módulo de um número real.

5. $C(A,B)$ é o espaço vetorial das funções contínuas $\varphi : A \to B$.

6. $C^n(A,B)$ é o espaço vetorial das funções n vezes diferenciáveis $\varphi : A \to B$ tais que $\varphi^{(n)} : A \to B$ é contínua.

7. $\|x\| = \max\{|x(t)|; t \in [0,\omega]\}$.

8. $\overline{\Omega}$ denota o fecho do conjunto Ω.

9. $\operatorname{int}\Omega$ denota o interior do conjunto Ω.

10. $\partial\Omega$ denota a fronteira do conjunto Ω.

11. $C^+ = \{\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^+); \varphi(t+\omega) = \varphi(t), t \in \mathbb{R}\}$.

12. $\mathbb{N}_\omega = \{\varphi \in C^+; \varphi = m\omega,$ para algum $m \in \mathbb{N}\}$.

13. $M_f = \max\{f(t); t \in [0,\omega]\}$.

14. $m_f = \min\{f(t); t \in [0,\omega]\}$.

15. $\overline{f} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f(t)dt$.

3 Existência de soluções periódicas

Vamos considerar a equação (3) com as hipóteses (a), (b), (c) e (d) satisfeitas. Uma solução $x \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ da equação (3) será dita uma solução $\omega-$periódica se $x(t+\omega) = x(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Para todo $t \in \mathbb{R}$, vamos assumir que

(H_1) $\overline{R} > \overline{\delta}\exp(2\omega\overline{\delta})$ se $\sigma \in C^+ - \mathbb{N}_\omega$.

(H_2) $\overline{R} > \overline{\delta}$ se $\sigma \in \mathbb{N}_\omega$.

Os principais resultados deste trabalho são os seguintes teoremas.

Teorema 1. *Se a hipótese* (H_1) *está satisfeita, então a equação* (3) *tem pelo menos uma solução* ω*-periódica em* $\mathbb{R}$.

Teorema 2. *Se a hipótese* (H_2) *está satisfeita, então a equação* (3) *tem pelo menos uma solução* ω*-periódica em* $\mathbb{R}$.

Na sequência apresentaremos conceitos importantes para as demonstrações dos Teoremas 1 e 2.

Sejam X e Z espaços de Banach. Um operador linear $L : \operatorname{dom}L \subset X \longrightarrow Z$ é dito *operador de Fredholm* se estão satisfeitas as seguintes condições:

$i)$ $\operatorname{Ker}L$ possui dimensão finita ($\dim\operatorname{Ker}L < \infty$);

$ii)$ $\operatorname{Im}L$ possui codimensão finita ($\operatorname{codim}\operatorname{Im}L < \infty$);

$iii)$ $\operatorname{Im}L$ é um conjunto fechado ($\operatorname{Im}L = \overline{\operatorname{Im}L}$).

Quando $\dim \operatorname{Ker} L = \operatorname{codim} \operatorname{Im} L$, L é dito um *operador de Fredholm de índice zero*.

Lema 3. *Se L for um operador de Fredholm de índice zero, então existirão projeções contínuas $P : X \longrightarrow X$ e $Q : Z \longrightarrow Z$ tais que*

$$Ker\ L = Im\ P \qquad e \qquad Im\ L = Ker\ Q.$$

Demonstração. Seja $\{v_1, ..., v_n\} \subset \operatorname{Ker} L$ uma base para $\operatorname{Ker} L$. Considere os operadores lineares contínuos $\varphi_i : \operatorname{Ker} L \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $\varphi_i(v_j) = \delta_{i,j}$, $i, j \in \{1, ..., n\}$, em que

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Para cada $i = 1, ..., n$, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe um operador linear contínuo $\Phi_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que estende φ_i.

Defina $P : X \longrightarrow X$ por $Px = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x) v_i$.

Claramente, o operador P é uma projeção contínua e $\operatorname{Im} P \subset \operatorname{Ker} L$. Resta-nos mostrar que $\operatorname{Ker} L \subset \operatorname{Im} P$ para concluirmos que $\operatorname{Ker} L = \operatorname{Im} P$. Com efeito, tomemos $x \in \operatorname{Ker} L$. Então, existem $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n$, tais que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Para $j \in \{1, ..., n\}$, temos

$$\Phi_j(x) = \Phi_j\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Phi_j(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_j(v_i) = \alpha_j.$$

Portanto, $x = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x) v_i \in \operatorname{Im} P$.

Mostremos agora que o operador Q citado acima existe. Como $\dim \operatorname{Coker} L$ é finita, temos $Z = \operatorname{Im} L \oplus N$, onde N é um subespaço vetorial fechado de Z com dimensão finita.

Seja $\{w_1, ..., w_n\} \subset N$ uma base para N e defina os operadores lineares contínuos $\psi_i : N \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $\psi_i(w_j) = \delta_{i,j}$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, para cada $i \in \{1, ...n\}$, existe um operador linear contínuo $\Psi_i : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ que estende ψ_i.

Defina a projeção contínua $Q : Z \longrightarrow Z$ por $Q(z) = \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(z) w_i$.

De forma análoga ao que foi provado acima, obtemos $\operatorname{Im} Q = N$. Para completarmos a prova, basta demonstrarmos que $Z = \operatorname{Ker} Q \oplus \operatorname{Im} Q$.

Primeiramente, note que $\operatorname{Im} Q \cap \operatorname{Ker} Q = \{0\}$, pois como $x \in \operatorname{Ker} Q$, temos $Qx = 0$. Por outro lado, como $x \in \operatorname{Im} Q$, existe $y \in Z$ tal que $Qy = x$. Logo,

$$0 = Qx = Q^2 y = Qy = x.$$

Além disso, dado $z \in Z$, temos

$$z = Qz - (Qz - z) \in \operatorname{Im} Q + \operatorname{Ker} Q,$$

ou seja, $Z = \operatorname{Ker} Q \oplus \operatorname{Im} Q$. □

Consequentemente, a restrição L_P do operador L ao conjunto $\operatorname{dom} L \cap \operatorname{Ker} P$ é invertível, com inversa $K_P : \operatorname{Im} L \longrightarrow \operatorname{dom} L \cap \operatorname{Ker} P$.

Denotaremos por $K_{P,Q} : Z \longrightarrow \text{dom} L \cap \text{Ker} P$ a inversa generalizada de L definida por $K_{P,Q} = K_P(I-Q)$.

Dados Ω um subconjunto aberto e limitado de X e um operador $N : \overline{\Omega} \longrightarrow Z$, diremos que N é um *operador* $L-$*compacto* se $QN(\overline{\Omega})$ é limitado e o operador $K_{P,Q}N$ é compacto.

Para provarmos os Teoremas 1 e 2, necessitaremos do seguinte Teorema de Continuação de Mawhin, cuja demonstração pode ser encontrada em [3].

Lema 4 (Teorema de Continuação de Mawhin)**.** *Sejam X, Z espaços de Banach e Ω um subconjunto aberto e limitado de X. Considere a equação*

$$Lx = \lambda N(x),$$

em que $L : domL \subset X \longrightarrow Z$ é um operador de Fredholm de índice zero, $\lambda \in [0,1]$ e N é um operador definido em $\overline{\Omega}$ com valores em Z.

Sejam $P : X \longrightarrow X$ e $Q : Z \longrightarrow Z$ projeções contínuas tais que $ImP = KerL$ e $KerQ = ImL$.

Suponha que o operador $N : \overline{\Omega} \longrightarrow Z$ seja $L-$compacto em $\overline{\Omega}$. Suponha, também, que as seguintes condições sejam satisfeitas:

$i)$ *para $\lambda \in (0,1)$ e $x \in \partial\Omega \cap domL$, tem-se $Lx \neq \lambda N(x)$;*

$ii)$ *para $x \in \partial\Omega \cap KerL$, tem-se $QN(x) \neq 0$;*

$iii)$ $deg\,(QN, \Omega \cap KerL, 0) \neq 0$.

Nestas condições, a equação $Lx = N(x)$ possuirá pelo menos uma solução em $\overline{\Omega} \cap domL$.

Para saber mais a respeito do grau coincidente e suas propriedades, sugerimos que o leitor consulte a referência [3]. Nesta referência pode ser encontrada umas das propriedades essenciais para o nosso trabalho: a Invariância do Grau por Homotopia.

Visando utilizar o Lema 4 para demonstrar os Teoremas 1 e 2, encontraremos uma equação a operadores $Lx = Nx$, onde L é um operador de Fredholm de índice zero e N é um operador L-compacto, ambos definidos e tomando valores em espaços adequados de funções, de forma que da existência de solução para tal equação seja possível concluir que a equação (3) possui pelo menos uma solução ω-periódica em $\mathbb{R}$.

Primeiramente, note que quando $\sigma \in \mathbb{N}_\omega$ a equação (3) se reduz a

$$M'(t) = -\delta(t)M(t) + R(t)M(t - m\omega)\exp[-a(t)M(t - \tau(t))]. \tag{4}$$

Então uma função é solução $\omega-$periódica de (4) se, e somente se, é solução $\omega-$periódica de

$$M'(t) = -\delta(t)M(t) + R(t)M(t)\exp[-a(t)M(t - \tau(t))]. \tag{5}$$

Sejam $\tau = max\{\sigma(t); t \in [0,\omega]\}$ e $\varphi \in C([-\tau,0],\mathbb{R}^+)$ com $\varphi(0) > 0$. Assim, como na demonstração de [4, Teorema 2.1], é possível mostrar que toda solução $M(t)$ da equação (3) satisfaz $M(t) > 0$ para $t \geq 0$. Logo, podemos tomar $M(t) = \exp[x(t)]$ para $t \geq 0$ e, portanto, as equações (3) e (5) podem ser reescritas como

$$x'(t) = -\delta(t) + R(t)\exp[x(t - \sigma(t)) - x(t) - a(t)\exp[x(t - \tau(t))]] \tag{6}$$

e

$$x'(t) = -\delta(t) + R(t)\exp[-a(t)\exp[x(t - \tau(t))]], \tag{7}$$

respectivamente.

Sejam

$$Z = X = \{x \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}); x(t+\omega) = x(t), t \in \mathbb{R}\}$$

espaços de Banach com a norma $\|.\|$.

Defina $\operatorname{dom} L = \{x \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}); x(t+\omega) = x(t), t \in \mathbb{R}\}$ e

$$Lx = x', \quad \text{para } x \in \operatorname{dom} L.$$

Claramente $\operatorname{dom} L \subset X$.

Definamos, agora,

$$N_1(x(t)) = -\delta(t) + R(t)\exp[x(t-\sigma(t)) - x(t) - a(t)\exp[x(t-\tau(t))]]$$

e

$$N_2(x(t)) = -\delta(t) + R(t)\exp[-a(t)\exp[x(t-\tau(t))]].$$

Considere as seguintes projeções contínuas:

$$Px(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} x(t)dt \text{ e } Qz(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} z(t)dt, \text{ para } x \in X, z \in Z, t \in \mathbb{R}.$$

Proposição 5. *L é um operador de Fredholm de índice zero.*

Demonstração. Faremos a prova deste resultado em três etapas.

(I) É fácil verificar que $\operatorname{Im} L = \{z \in Z; \int_0^{\omega} z(t)dt = 0\}$. Vamos, então, provar que $\operatorname{Im} L$ é um conjunto fechado. Pois bem, se $y \in \overline{\operatorname{Im} L}$, então existe uma sequência $(y_n) \subset \operatorname{Im} L$ tal que

$$\int_0^{\omega} y_n(t)dt = 0 \quad \text{e} \quad y_n \longrightarrow y.$$

Como a convergência $y_n \longrightarrow y$ é uniforme, temos que

$$\int_0^{\omega} y_n(t)dt \to \int_0^{\omega} y(t)dt,$$

de onde segue que $\int_0^{\omega} y(t)dt = 0$ e $y \in \operatorname{Im} L$. Por conseguinte, o conjunto $\operatorname{Im} L$ é fechado.

(II) Se $x \in \operatorname{Ker} L$, então $x' = 0$, ou seja, $x'(t) = 0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Deste modo, $x(t) = c_1$, para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, x é uma função constante. Portanto,

$$\dim \operatorname{Ker} L = \dim \mathbb{R} = 1.$$

(III) Da forma como a projeção Q foi definida, vemos que $\operatorname{Im} Q \simeq \mathbb{R}$. Então,

$$\dim \operatorname{Im} Q = \dim \mathbb{R} = 1.$$

Note que $\operatorname{Im} Q \cap \operatorname{Ker} Q = \{0\}$. Assim,

$$Z = \operatorname{Im} Q \oplus \operatorname{Ker} Q. \tag{8}$$

Vimos em (I) que $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im} L$. Daí,

$$\dim \operatorname{Ker} Q = \dim \operatorname{Im} L. \tag{9}$$

Das igualdades (8) e (9), obtemos

$$\operatorname{codim} \operatorname{Im} L = \dim \operatorname{Im} Q = 1.$$

De (I), (II) e (III), segue que L é um operador de Fredholm de índice zero. $\square$

Fixe $\lambda \in (0,1)$ e considere as equações

$$Lx = \lambda N_1(x) \tag{10}$$

e

$$Lx = \lambda N_2(x), \tag{11}$$

que são, respectivamente, equivalentes a

$$x'(t) = -\lambda\delta(t) + \lambda R(t)\exp[x(t-\sigma(t)) - x(t) - a(t)\exp[x(t-\tau(t))]] \tag{12}$$

e

$$x'(t) = -\lambda\delta(t) + \lambda R(t)\exp[-a(t)\exp[x(t-\tau(t))]]. \tag{13}$$

Proposição 6. *Se a condição $(H1)$ está satisfeita, então existe uma constante positiva A_0, que não depende de λ, tal que se $x \in \operatorname{dom} L$ satisfaz* (12) *então* $\|x\| < A_0$.

Demonstração. Se $x \in \operatorname{dom} L$ é uma solução da equação (12), então

$$\frac{1}{\lambda}x'(t) + \delta(t) = R(t)\exp\left[x(t-\sigma(t)) - x(t) - a(t)\exp[x(t-\tau(t))]\right].$$

Integrando ambos os membros da equação acima em relação a t de 0 a ω, obtemos

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^\omega x'(t)dt + \int_0^\omega \delta(t)dt = \int_0^\omega R(t)\exp\left[x(t-\sigma(t)) - x(t) - a(t)\exp[x(t-\tau(t))]\right]dt,$$

de onde segue que

$$\omega\overline{\delta} = \int_0^\omega R(t)\exp\left[x(t-\sigma(t)) - x(t) - a(t)\exp[x(t-\tau(t))]\right]dt. \tag{14}$$

Das equações (10) e (14) temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\omega |x'(t)|dt &= \lambda\int_0^\omega |-\delta(t) + R(t)\exp\left[x(t-\sigma(t)) - x(t) - a(t)\exp[x(t-\tau(t))]\right]|dt \leq \\
&\leq \int_0^\omega \left|-\delta(t) + R(t)\exp\left[x(t-\sigma(t)) - x(t) - a(t)\exp[x(t-\tau(t))]\right]\right|dt \leq \\
&\leq \int_0^\omega |\delta(t)|dt + \int_0^\omega \left|R(t)\exp\left[x(t-\sigma(t)) - x(t) - a(t)\exp[x(t-\tau(t))]\right]\right|dt = \\
&= \omega\frac{1}{\omega}\int_0^\omega \delta(t)dt + \int_0^\omega R(t)\exp\left[x(t-\sigma(t)) - x(t) - a(t)\exp[x(t-\tau(t))]\right]dt = 2\omega\overline{\delta} := \alpha_1.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\int_0^\omega |x'(t)|dt \leq \alpha_1. \tag{15}$$

Como $x \in X$ é contínua, existem $\xi, \eta \in [0,\omega]$ tais que

$$x(\xi) = m_x \quad \text{e} \quad x(\eta) = M_x. \tag{16}$$

Portanto,

$$\overline{\delta}\omega \geq \overline{R}\omega\exp\left[x(\xi) - x(\eta) - M_a\exp[x(\eta)]\right],$$

de onde segue que

$$x(\xi) \leq \ln\left(\frac{\overline{\delta}}{\overline{\overline{R}}}\exp\left[x(\eta) + M_a \exp[x(\eta)]\right]\right). \tag{17}$$

Como

$$x(t) - x(\xi) \leq \int_0^{\omega} |x'(s)|ds,$$

das equações (15) e (17) temos

$$x(t) \leq x(\xi) + \int_0^{\omega} |x'(t)|dt \leq \ln\left(\frac{\overline{\delta}}{\overline{\overline{R}}}\exp\left[x(\eta) + M_a \exp[x(\eta)]\right]\right) + \alpha_1, \text{ para } t \in [0, \omega].$$

Em particular,

$$x(\eta) \leq \ln\left(\frac{\overline{\delta}}{\overline{\overline{R}}}\exp\left[x(\eta) + M_a \exp[x(\eta)]\right]\right) + \alpha_1,$$

de onde segue que

$$x(\eta) \geq \ln\left(\frac{1}{M_a}\left[\ln\left(\frac{\overline{R}}{\overline{\overline{\delta}}}\right) - \alpha_1\right]\right), \tag{18}$$

desde que $\overline{R} > \overline{\delta}\exp(\alpha_1)$.

Como

$$\int_0^{\omega} |x'(s)|ds \leq x(t) - x(\eta),$$

das equações (15) e (18) obtemos

$$x(t) \geq x(\eta) - \int_0^{\omega} |x'(t)|dt \geq \ln\left(\frac{1}{M_a}\left[\ln\left(\frac{\overline{R}}{\overline{\overline{\delta}}}\right) - \alpha_1\right]\right) - \alpha_1 := A_1. \tag{19}$$

Similarmente, temos

$$x(t) \leq x(\xi) + \int_0^{\omega} |x'(t)|dt \leq \ln\left(\frac{1}{m_a}\left[\ln\left(\frac{\overline{R}}{\overline{\overline{\delta}}}\right) + \alpha_1\right]\right) + \alpha_1 := A_2. \tag{20}$$

Seja $A_0 > \max\{|A_1|, |A_2|\}$. Por (19) e (20), concluímos que se $x \in \operatorname{dom} L$ satisfaz (12) então $\|x\| < A_0$. □

Proposição 7. *Se a condição* $(H2)$ *está satisfeita, então existe uma constante positiva* B_0*, que não depende de* λ*, tal que se* $x \in$ *dom*L *satisfaz* (13) *então* $\|x\| < B_0$.

Demonstração. Se $x \in \operatorname{dom} L$ é uma solução da equação (13), então

$$\frac{1}{\lambda}x'(t) + \delta(t) = R(t)\exp[-a(t)\exp[x(t - \tau(t))]].$$

Integrando ambos os membros da equação acima em relação a t de 0 a ω, temos

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^{\omega} x'(t)dt + \int_0^{\omega} \delta(t)dt = \int_0^{\omega} R(t)\exp[-a(t)\exp[x(t - \tau(t))]]dt,$$

de onde se obtém

$$\omega\overline{\delta} = \int_0^{\omega} R(t)\exp[-a(t)\exp[x(t - \tau(t))]]. \tag{21}$$

Das equações (11) e (21) temos

$$\int_0^\omega |x'(t)|dt = \lambda \int_0^\omega |-\delta(t)+R(t)\exp[-a(t)\exp[x(t-\tau(t))]]|dt \leq$$

$$\leq \int_0^\omega |-\delta(t)+R(t)\exp[-a(t)\exp[x(t-\tau(t))]]|dt \leq$$

$$\leq \int_0^\omega |\delta(t)|dt + \int_0^\omega |R(t)\exp[-a(t)\exp[x(t-\tau(t))]]|\,dt =$$

$$= \omega\frac{1}{\omega}\int_0^\omega \delta(t)dt + \int_0^\omega R(t)\exp[-a(t)\exp[x(t-\tau(t))]]dt = 2\omega\overline{\delta} := \alpha_2.$$

Ou seja,

$$\int_0^\omega |x'(t)|dt \leq \alpha_2. \tag{22}$$

Como $x \in X$ é contínua, existem $\xi, \eta \in [0,\omega]$ tais que

$$x(\xi) = m_x \text{ e } x(\eta) = M_x. \tag{23}$$

Por (21), temos que

$$\omega\overline{\delta} \leq \omega\overline{R}\exp[-m_a\exp[x(\xi)]].$$

Assim,

$$x(\xi) \leq \ln\left[\frac{1}{m_a}\ln\left(\frac{\overline{R}}{\overline{\overline{\delta}}}\right)\right], \tag{24}$$

desde que $\overline{R} > \overline{\delta}$.

Segue das equações (22) e (24) que

$$x(t) \leq x(\xi) + \int_0^\omega |x'(t)|dt \leq \ln\left[\frac{1}{m_a}\ln\left(\frac{\overline{R}}{\overline{\overline{\delta}}}\right)\right] + \alpha_2 := B_2. \tag{25}$$

Por outro lado, também por (21), temos

$$\omega\overline{\delta} \geq \omega\overline{R}\exp[-M_a\exp[x(\eta)]].$$

Assim,

$$x(\eta) \geq \ln\left[\frac{1}{M_a}\ln\left(\frac{\overline{R}}{\overline{\overline{\delta}}}\right)\right]. \tag{26}$$

Das equações (22) e (26) obtemos

$$x(t) \geq x(\eta) - \int_0^\omega |x'(t)|dt \geq \ln\left[\frac{1}{M_a}\ln\left(\frac{\overline{R}}{\overline{\overline{\delta}}}\right)\right] - \alpha_2 := B_1. \tag{27}$$

Seja $B_0 > \max\{|B_1|, |B_2|\}$. Por (25) e (27), concluímos que se $x \in \operatorname{dom} L$ satisfaz (13) então $\|x\| < B_0$. □

Nas próximas linhas, obteremos dois conjuntos abertos e limitados $\Omega_1, \Omega_2 \subset X$ tais que os operadores N_1 e N_2 são L-compactos em $\overline{\Omega_1}$ e $\overline{\Omega_2}$, respectivamente, e as condições (i) (ii) e (iii) do Lema 4 estão satisfeitas.

Defina

$$\Omega_1 = \{x \in X;\ \|x\| < A_0\} \tag{28}$$

e

$$\Omega_2 = \{x \in X;\ \|x\| < B_0\}. \tag{29}$$

Proposição 8. *O operador N_1 é $L-$compacto em $\overline{\Omega_1}$.*

Demonstração. Se $x \in \overline{\Omega_1}$ então $\|x\| \leq A_0$ e

$$|Q(N_1(x(t)))| = \left| \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} N_1(x(t)dt \right| =$$

$$= \frac{1}{\omega} \left| -\int_0^{\omega} \delta(t)dt + \int_0^{\omega} R(t) \exp\left[x(t-\sigma(t)) - x(t) - a(t)\exp[x(t-\tau(t))]\right] dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} |\delta(t)|dt + \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} |R(t) \exp\left[x(t-\sigma(t)) - x(t) - a(t)\exp[x(t-\tau(t))]\right]| dt \leq$$

$$\leq M_{|\delta|} + M_R \exp[2A_0 + M_a \exp(A_0)].$$

Portanto, o conjunto $QN_1(\overline{\Omega_1})$ é limitado.

Denotando por $K_P : \operatorname{Im} L \longrightarrow \operatorname{dom} L \cap \operatorname{Ker} P$ a inversa do operador L restrito a $\operatorname{dom} L \cap \operatorname{Ker} P$, temos

$$K_p(y(s)) = -\frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} \int_0^{t} y(s)dsdt + \int_0^{t} y(s)ds.$$

Com o auxílio do Teorema de Arzelà-Ascoli, é possível provar que $K_{P,Q}N_1 = K_P(I-Q)N_1$ é um operador compacto. A prova deste fato foi omitida aqui por ser extensa. Para realizá-la, basta lembrar do conceito de operador compacto e verificar que as hipóteses do Teorema de Arzelà-Ascoli são satisfeitas.

Logo, N_1 é um operador $L-$compacto em $\overline{\Omega_1}$. □

Proposição 9. *O operador N_2 é $L-$compacto em $\overline{\Omega_2}$.*

Demonstração. Se $x \in \overline{\Omega}_2$ então $\|x\| \leq B_0$ e

$$|QN_2(x(t))| = \left| \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} N_2(x(t))dt \right| = \frac{1}{\omega} \left| -\int_0^{\omega} \delta(t)dt + \int_0^{\omega} R(t) \exp[-a(t)\exp[x(t-\tau(t))]]dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} |\delta(t)|dt + \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} |R(t) \exp[-a(t)\exp[x(t-\tau(t))]]| dt \leq M_{|\delta|} + M_R \exp[M_a \exp(B_0)].$$

Portanto, o conjunto $QN_2(\overline{\Omega_2})$ é limitado.

Denotando por $K_P : \operatorname{Im} L \longrightarrow \operatorname{dom} L \cap \operatorname{Ker} P$ a inversa do operador L restrito a $\operatorname{dom} L \cap \operatorname{Ker} P$, temos

$$K_p(y(s)) = -\frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} \int_0^{t} y(s)dsdt + \int_0^{t} y(s)ds.$$

Através do Teorema de Arzelà-Ascoli, é possível mostrar que $K_{P,Q}N_2 = K_P(I-Q)N_2$ é um operador compacto. Como na demonstração da Proposição 8, omitiremos esta parte da demonstração.

Portanto, N_2 é um operador $L-$compacto em $\overline{\Omega_2}$. □

Proposição 10. *Se a condição (H_1) estiver satisfeita, então se cumprirão as condições seguintes:*

$i)$ para $\lambda \in (0,1)$ e $x \in \partial\Omega_1 \cap \operatorname{dom} L$, tem-se $Lx \neq \lambda N_1(x)$;

$ii)$ para $x \in \partial\Omega_1 \cap \operatorname{Ker} L$, tem-se $QN_1(x) \neq 0$;

$iii)$ $\deg(QN_1, \Omega_1 \cap \operatorname{Ker} L, 0) \neq 0$.

Demonstração. $i)$ Se $Lx = \lambda N_1(x)$, pela Proposição 6, temos

$$-A_0 < -|A_1| \leq A_1 < x(t) < A_2 \leq |A_2| < A_0.$$

Portanto,

$$\|x\| < A_0 \Rightarrow x \in \Omega_1 = \operatorname{int}\Omega_1$$

e, consequentemente, $x \notin \partial\Omega_1 \cap \operatorname{dom} L$.

$ii)$ Seja $x \in \partial\Omega_1 \cap \operatorname{Ker} L \simeq \partial\Omega_1 \cap \mathbb{R}$. Então, x é uma função constante e, como $\|x\| = A_0$, temos $x(t) = \pm A_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Se $QN_1(x) = 0$, teríamos

$$-\overline{\delta} + \overline{R\exp[-a(t)\exp(x)]} = 0.$$

Como $\exp[-M_a\exp(x)] \leq \overline{\exp[-a(t)\exp(x)]} \leq \exp[-m_a\exp(x)]$, concluiríamos que

$$\ln\left[\frac{1}{M_a}\ln\left(\frac{\overline{R}}{\overline{\overline{\delta}}}\right)\right] \leq x \leq \ln\left[\frac{1}{m_a}\ln\left(\frac{\overline{R}}{\overline{\overline{\delta}}}\right)\right],$$

ou seja,

$$-A_0 < A_1 < x < A_2 < A_0.$$

Portanto, $x \in \Omega_1$. Sendo assim, se $x \in \partial\Omega_1 \cap \operatorname{Ker} L$, então $QN_1(x) \neq 0$.

$iii)$ Considere a homotopia

$$H_1(x,\mu) = -\mu x + \frac{1-\mu}{\omega}\int_0^{\omega} QN_1(x)ds =$$

$$= -\mu x + \frac{1-\mu}{\omega}\int_0^{\omega}\{-\delta(t) + R(t)\exp[x(t-\sigma(t)) - x(t) - a(t)\exp(x(t-\tau(t)))]\}, \quad \mu \in [0,1].$$

Para $x \in \partial\Omega_1 \cap \operatorname{Ker} L$, temos $x = \pm A_0$. Então,

$$QN_1(-A_0) > 0 \text{ e } QN_1(A_0) < 0. \tag{30}$$

De fato, se $QN_1(A_0) > 0$, teríamos

$$0 < -\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\delta(t)dt + \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}R(t)\exp[-a(t)\exp(A_0)]\,dt,$$

ou seja,

$$\omega\overline{\delta} < \omega\overline{R}\exp[-m_a\exp(A_0)]$$

e, portanto,

$$A_0 < \ln\left[\frac{1}{m_a}\ln\left(\frac{\overline{R}}{\overline{\overline{\delta}}}\right)\right] < A_2,$$

contradizendo a escolha de A_0.

Analogamente, obtemos $QN_1(-A_0) < 0$.

Então, para $x \in \partial\Omega_1 \cap \mathrm{Ker}\, L$ e $\mu \in [0,1]$, da condição (30) temos

$$xH_1(x,\mu) = -\mu x^2 + \frac{1-\mu}{\omega}\int_0^{\omega} xQN_1(x)ds < 0,$$

de onde podemos inferir que $0 \notin H_1((\partial\Omega_1 \cap \mathrm{Ker}\, L) \times [0,1])$. Usando a propriedade da invariância do grau por homotopia, concluímos que

$$\deg\left(QN_1(x), \Omega_1 \cap \mathrm{Ker}\, L, 0\right) = \deg\left(-x, \Omega_1 \cap \mathrm{Ker}\, L, 0\right) \neq 0.$$

□

Proposição 11. *Se a condição (H_2) estiver satisfeita, então se cumprirão as condições seguintes:*

$i)$ *para $\lambda \in (0,1)$ e $x \in \partial\Omega_2 \cap dom\, L$, tem-se $Lx \neq \lambda N_2(x)$;*

$ii)$ *para $x \in \partial\Omega_2 \cap Ker\, L$, tem-se $QN_2(x) \neq 0$;*

$iii)$ *$deg\left(QN_2, \Omega_2 \cap Ker\, L, 0\right) \neq 0$.*

Demonstração. $i)$ Se $Lx = N_2(x)$, pela Proposição 7, temos

$$-B_0 < -|B_1| \leq B_1 < x(t) < B_2 \leq |B_2| < B_0.$$

Portanto,

$$\|x\| < B_0 \Rightarrow x \in \Omega_2 = \mathrm{int}\,\Omega_2,$$

de onde segue que $x \notin \partial\Omega_2 \cap \mathrm{dom}\, L$.

$ii)$ Seja $x \in \partial\Omega_2 \cap \mathrm{Ker}\, L \simeq \partial\Omega_2 \cap \mathbb{R}$. Então, x é uma função constante e, como $\|x\| = B_0$, temos $x(t) = \pm B_0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Se $QN_2(x) = 0$, teríamos

$$-\overline{\delta} + \overline{R\exp[-a(t)\exp(x)]} = 0.$$

Como $\exp[-M_a \exp(x)] \leq \overline{\exp[-a(t)\exp(x)]} \leq \exp[-m_a \exp(x)]$, obteríamos

$$\ln\left[\frac{1}{M_a}\ln\left(\frac{\overline{R}}{\overline{\overline{\delta}}}\right)\right] \leq x \leq \ln\left[\frac{1}{m_a}\ln\left(\frac{\overline{R}}{\overline{\overline{\delta}}}\right)\right],$$

ou seja,

$$-B_0 < B_1 < x < B_2 < B_0.$$

Portanto, $x \in \Omega_2$. Logo, se $x \in \partial\Omega_2 \cap \mathrm{Ker}\, L$, temos que $QN_2(x) \neq 0$.

$iii)$ Considere a homotopia

$$H_2(x,\mu) = -\mu x + \frac{1-\mu}{\omega}\int_0^{\omega} QN_2(x)dt =$$

$$= -\mu x + \frac{1-\mu}{\omega}\int_0^{\omega} \{-\delta(t) + R(t)\exp[-a(t)\exp(x(t-\tau(t)))]\}\, dt, \qquad \mu \in [0,1].$$

Para $x \in \partial\Omega_2 \cap \operatorname{Ker} L$, temos $x = \pm B_0$. Então,

$$QN_2(-B_0) > 0 \text{ e } QN_2(B_0) < 0. \tag{31}$$

Com efeito, se $QN_2(-B_0) < 0$, teríamos

$$0 > -\int_0^\omega \delta(t)dt + \int_0^\omega R(t)\exp[-a(t)\exp(-B_0)]dt,$$

ou seja,

$$\omega\overline{\delta} > \omega\overline{R}\exp[-M_a\exp(-B_0)],$$

obtendo

$$B_1 < \ln\left[\frac{1}{M_a}\ln\left(\frac{\overline{R}}{\overline{\delta}}\right)\right] < -B_0,$$

o que contradiz a escolha de B_0.

Similarmente, obtemos $QN(B_0) < 0$.

Então, para $x \in \partial\Omega_2 \cap \operatorname{Ker} L$ e $\mu \in [0,1]$, da condição (31) temos

$$xH_2(x,\mu) = -\mu x^2 + \frac{1-\mu}{\omega}\int_0^\omega xQN_2(x)ds < 0,$$

de onde podemos concluir que $0 \notin H_2((\partial\Omega_2 \cap \operatorname{Ker} L) \times [0,1])$. Usando a propriedade da invariância do grau por homotopia, obtemos

$$\deg(QN_2(x), \Omega_2 \cap \operatorname{Ker} L, 0) = \deg(-x, \Omega_2 \cap \operatorname{Ker} L, 0) \neq 0.$$

□

Neste momento, estamos em condições de demonstrar os Teoremas 1 e 2, que são os resultados principais deste trabalho.

Demonstração. (do Teorema 1) Suponha que a condição (H_1) esteja satisfeita. Pelas Proposições 5, 6, 8 e 10, as hipóteses do Lema 4 estão satisfeitas. Portanto, a equação (6) tem pelo menos uma solução $\omega-$periódica em $\operatorname{dom} L \cap \overline{\Omega_1}$, a qual denotaremos por y_1.

Deste modo, $M(t) = \exp[y_1(t)]$ é uma solução $\omega-$periódica da equação (3) em $\mathbb{R}$.

□

Demonstração. (do Teorema 2) Suponhamos que a condição (H_2) esteja satisfeita. Pelas Proposições 5, 7, 9 e 11, as hipóteses do Lema 4 estão satisfeitas. Portanto, a equação (7) tem pelo menos uma solução $\omega-$periódica em $\operatorname{dom} L \cap \overline{\Omega_2}$, a qual denotaremos por y_2.

Então, $M(t) = \exp[y_2(t)]$ é uma solução $\omega-$periódica da equação (5) em $\mathbb{R}$ e, consequentemente, $\exp[y_2(t)]$ é uma solução $\omega-$ periódica da equação (4) em $\mathbb{R}$. □

Observação 12. *Vemos que a equação* (1) *é um caso particular da equação* (3) *com* $\sigma = \tau = m\omega$, *para algum* $m \in \mathbb{N}$. *A condição* (2) *é muito restritiva, uma vez que*

$$\overline{R} \geq \min_{t\in[0,\omega]} R(t) > \max_{t\in[0,\omega]} \delta(t) \geq \overline{\delta}.$$

Portanto, o Teorema 2 estende a condição exigida por Saker e Agarwal.

4 Exemplos

Exemplo 13. *Considere o seguinte modelo de moscas-varejeiras de Nicholson:*

$$\begin{aligned} M'(t) &= -\frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{\cos(t)}{10}\right)M(t)+ \\ &+\frac{\exp(1,9)}{10}\left(0,9-\frac{\mathrm{sen}\,(\mathrm{t})}{10}\right)M\left(t-1-\frac{|\mathrm{sen}\,(\mathrm{t})|}{10}\right)\exp\left[-M\left(t-\frac{|\cos(t)|}{10}\right)\right] \end{aligned} \quad (32)$$

Na equação (32)*, temos que*

$$\delta(t)=\frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\cos(t)\right), R(t)=\frac{\exp(1,9)}{10}\left(0,9-\frac{1}{10}\mathrm{sen}\,(\mathrm{t})\right),$$

$$\sigma(t)=1+\frac{1}{10}|\mathrm{sen}\,(\mathrm{t})|,\ \tau(\mathrm{t})=\frac{1}{10}|\cos(\mathrm{t})|\ \text{ e }\ \mathrm{a(t)}\equiv 1$$

satifazem as hipóteses (a), (b), (c) e (d).

Temos também

$$\overline{\delta}=0,11, \overline{R}\approx 0,60173, \overline{|\delta|}=0,15, \overline{R}>\overline{\delta}\exp[2\pi(\overline{|\delta|}+\overline{\delta})]\ \ e\ \ \sigma\notin\mathbb{N}_{2\pi}.$$

Neste caso, pelo Teorema 1, a equação (32) *possui pelo menos uma solução* $2\pi-$*periódica.*

Exemplo 14. *Considere, agora, o modelo de moscas varejeiras de Nicholson a seguir:*

$$M'(t)=-(1+\cos(t))M(t)+\exp(2)(1+\mathrm{sen}\,(\mathrm{t}))\mathrm{M}(\mathrm{t}-4\pi)\exp[-3\mathrm{M}(\mathrm{t}-1-|\cos(\mathrm{t})|)]. \quad (33)$$

Note que as funções

$$\delta(t)=1+\cos(t), R(t)=\exp(2)(1+\mathrm{sen}\,(\mathrm{t})), \sigma(\mathrm{t})=4\pi, \tau(\mathrm{t})=1+|\cos(\mathrm{t})|\ \text{ e a(t)}\equiv 3$$

satifazem as hipóteses (a), (b), (c) e (d).

Ademais,

$$\overline{\delta}=1, \overline{R}=\exp(2), \overline{R}>\overline{\delta}\ \ e\ \ \sigma\in\mathbb{N}_{2\pi}.$$

Portanto, pelo Teorema 2, a equação (33) *possui pelo menos uma solução* $2\pi-$*periódica.*

5 Referências bibliográficas

1. SAKER, S. H.; AGARWAL, S. Oscillation and global attractivity in a periodic Nicholson's blowflies model. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 35, n. 7-8, p. 719-731, 2002.

2. CHEN, Y. Periodic solutions of delayed periodic Nicholson's blowflies models. **Canadian Appl. Math. Quartely**, v. 11, n. 1, p. 23-28, 2003.

3. GAINES, R. E.; MAWHIN, J. L. **Coincidence degree and nonlinear differential equations**. Berlin: Springer, 1977. (Lecture notes in mathematics; 568).

4. HIEN, L. V. Global asymptotic behaviour of positive solutions to a non-autonomous Nicholson's blowflies model with delays. **Journal of Biological Dynamics**, v. 8, n. 1, p. 135-144, 2014.

5. CHEN, Y. Periodic solutions of a delayed periodic logistic equation. **Appl. Math. Letters**, v. 16, n. 7, p. 1047-1051, 2003.

6. FREEDMAN H. I.; WU, J. Periodic solutions of single species models with periodic delay. **SIAM J. Math Anal.**, v. 23, n. 3, p. 689-701, 1992.

7. LI, Y.; KUANG, Y. Periodic solutions of periodic delay Lotka-Volterra equations and systems. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 255, n. 1, p. 260-280, 2001.

8. LONG, F.; YANG, M. Positive periodic solutions of delayed Nicholson's blowflies model with a linear harvesting term. **Eletronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations**, n. 41, p. 1-11, 2011.

9. SO, J. W. H.; YU, J. S. On the stability and uniform persistence of a discrete model of Nicholson's blowflies. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 193, n. 1, p. 233-244, 1995.

10. ZHAO, C. J.; DEBNATH, L.; WANG, K. Positive periodic solutions of a delayed model in population. **Appl. Math. Letters**, v. 16, n. 4, p. 561-565, 2003.

Artigo recebido em abr. 2017 e aceito em out. 2017.