Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 9, jul. 2017

Ricardo da Silva Santos
Instituto Federal do Espírito Santo - Campus Itapina
ricardo.santos@ifes.edu.br

Ole Peter Smith
Universidade Federal de Goiás
ole@ufg.br

Equações diferenciais lineares com coeficientes constantes e derivação da equação característica

Linear Autonomous equations and Derivation of Polynomial Characteristics

Resumo

Neste artigo, estudaremos as Equações Diferenciais Ordinárias Lineares com Coeficientes Constantes (EDL-CC) através das propriedades complexas de um Operador Linear apropriado. Inicialmente serão apresentados os conceitos básicos de Álgebra Linear para Equações Diferenciais. Na sequência, a Exponencial Complexa é explorada com o objetivo de aplicarmos o "Método Operador" no estudo de EDL-CC homogêneas e não-homogêneas.
Palavras-chave: Equação característica, Equações Diferenciais Ordinárias, Derivação.

Abstract

In this paper, we will study the Linear Ordinary Differential Equations with Constant Coefficients through Of the complex properties of an appropriate Linear Operator. The basic concepts of Linear Algebra for Differential Equations. Next, the Complex Exponential is explored with the objective of applying the " Operator Method " in the Linear Ordinary Differential Equations with Constant Coefficients study Homogeneous and nonhomogeneous.
Keywords: Characteristic equation, ordinary differential equations, Derivation.

1 Introdução

O tópico Equações Diferenciais Lineares com Coeficientes Constantes é vastamente abordado na literatura matemática. Sejam $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ e $x(t)$ uma função n-vezes diferenciável em um intervalo I, e considere $q(t)$ uma função definida em I uma Equação Diferencial Ordinária Linear (EDL) é uma equação da forma.

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = q(t), t \in I. \tag{1}$$

Seja $C^n(I)$ o conjunto das funções derivadas de ordem n no intervalo I. Definimos o operador $\widehat{L} : C^n(I) \to C^0(I)$ por:

$$\widehat{L}x = \left(a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 \right) x. \tag{2}$$

Notamos que o operador $\widehat{L}$ é uma transformação linear, ou seja:

$$\begin{array}{rcl} \widehat{L}(x+y) & = & \widehat{L}x + \widehat{L}y, \\ \widehat{L}(\alpha x) & = & \alpha \widehat{L}x. \end{array} \tag{3}$$

Na busca de soluções da equação (27), consideramos a Equação Diferencial Homogênea:

$$\widehat{L}x = 0, t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

O conjunto das soluções da equações homogênea, S_0, forma um subespaço vetorial. Sejam $s_1, s_2, \ldots, s_n$ os elementos de S_0, então o conjunto $S_1 = \{s_i + x_{q(t)} \mid 1 \le i \le n\}$ formam o conjunto solução completa da equação onde $x_{q(t)}$ é uma solução particular da equação (27).

Em conseqüência a solução completa da equação

$$\widehat{L}x = \gamma_1 q_1(t) + \gamma_2 q_2(t) \tag{5}$$

pode ser encontrado por superposição de soluções particulares:

2 Polinômio característico

Pela propriedade básica da função exponencial, obtemos:

$$\frac{d^n e^{\lambda t}}{dt^n} = \lambda^n e^{\lambda t}, \tag{6}$$

Teorema 1. *Por todo $\lambda \in \mathbb{C}$ vale a equação caraterística:*

$$\widehat{L}e^{\lambda t} = P(\lambda) e^{\lambda t}. \tag{7}$$

Demonstração. De 6 temos que:

$$\widehat{L}e^{\lambda t} = \left(a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 \right) e^{\lambda t}. \tag{8}$$

□

Definamos portanto, $P(\lambda)$ o Polinômio Característico onde:

$$P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0. \tag{9}$$

Em consequência:

Teorema 2. *Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ temos que:*

$$\widehat{L}t^p e^{\lambda t} = \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} P^{(q)}(\lambda)\, t^{p-q} e^{\lambda t}$$

Demonstração. Derivando $\widehat{L}(t^p e^{(\lambda t)})$ em respeito de λ e utilizando que $\widehat{L}$ não depende de λ:

$$\widehat{L}(t^p e^{(\lambda t)}) = \widehat{L}\left(\frac{d^p}{d\lambda^p} e^{(\lambda t)}\right) = \frac{d^p}{d\lambda^p}\widehat{L}(e^{\lambda t}) =$$

$$\frac{d^p}{d\lambda^p}P(\lambda)e^{\lambda t} = \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} P^{(q)}(\lambda)\, t^{p-q} e^{(\lambda t)}.$$

□

Corolário 1. *Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é uma raíz ρ-ésima do polinômio característico, as ρ funções $\varphi_\lambda^p(t) = t^p e^{\lambda t}$, $p < \rho$ todas são soluções da equação homogênea (4).*

Demonstração. Por λ ser raíz ρ-ésima, temos: $P(\lambda) = P'(\lambda) = \cdots = P^{(\rho-1)}(\lambda) = 0$. Então, por $p < \rho$:

$$\widehat{L}t^p e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} P^{(k)}(\lambda)\, t^{p-k} e^{\lambda t} = 0.$$

□

Corolário 2. *Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é uma raíz ρ-ésima do polinômio característico, temos que:*

$$\widehat{L}t^\rho e^{\lambda t} = P^{(\rho)}(\lambda)\, e^{\lambda t}. \tag{10}$$

Demonstração. Segue diretamente da Teorema 2. □

Corolário 3. *Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é uma raíz ρ-ésima do polinômio característico, vale por $q > 0$:*

$$\widehat{L}t^{\rho+q} e^{\lambda t} = \sum_{k=\rho}^{\rho+q} \binom{\rho+q}{k} P^{(k)}(\lambda)\, t^{\rho+q-k} e^{\lambda t}. \tag{11}$$

Demonstração. Segue diretamente da Teorema 2. □

3 O método complexo

Os resultados no Teorema 1 e 2 também tem validade no caso complexa, e ainda sabemos que:

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t}\left(\cos\beta t + i\sin\beta t\right), \tag{12}$$

onde $\lambda = \alpha + i\beta$, ou seja, $\alpha = Re(\lambda)$ e $\beta = Im(\lambda)$. Por uma equação da forma:

$$\widehat{L}(e^{\lambda}t) = e^{\alpha t}\left(a_1\cos\beta t + a_2\sin\beta t\right). \tag{13}$$

consideramos a equação 'conjugada':

$$\widehat{L}(e^{\lambda}t) = e^{\alpha t}\left(a_1\sin\beta t - a_2\cos\beta t\right). \tag{14}$$

Portanto,

$$\widehat{L}(e^{\lambda}t) = (a_1 - ia_2)e^{(\alpha+i\beta)t}. \tag{15}$$

Encontramos uma solução particular da equação complexa, $z_p(t)$, usando o método estipulado nas secções anteriores, resolvendo simultaneamente a equação original e a sua equação conjugada:

$$x_p(t) = Re(z_p(t)) \qquad\qquad y_p(t) = Im(z_p(t)) \tag{16}$$

4 A equação homogênea

Se λ é uma raíz (possivelmente complexa) do polinômio caraterístico com multiplicidade ρ, o conjunto:

$$\mathscr{S}_{\lambda}^{\rho} = \left\{(c_0 + c_1 t + \ldots + c_{\rho-1}t^{\rho-1})e^{\lambda t} \;\;|\;\; (c_o,\ldots,c_{\rho-1}) \in \mathbb{R}^{\rho}\right\} \tag{17}$$

é contido no espaço solucional da equação homogênea, $\mathscr{S}_0$. De fato:

$$\mathscr{S} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathscr{S}_{\lambda_i}^{\rho_i}. \tag{18}$$

onde os $\lambda_i,\ i = 1,\ldots,k$ são os raízes do polinômio caraterístico com respectivas multiplicadades ρ_i, $\sum_{i=1}^{k}\rho_i = n$.

5 A equação não homogênea

Consideramos uma equação, possivelmente complexa, da forma:

$$\widehat{L}x = q(t)e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{r} q_k t^k e^{\lambda t}. \tag{19}$$

Se λ é uma raíz ρ-ésima, supondo uma solução particular da equação (19) da forma:

$$\varphi_p(t) = t^\rho \sum_{l=0}^{r} Q_l t^l e^{\lambda t} = \sum_{l=0}^{r} Q_l t^{l+\rho} e^{\lambda t}. \tag{20}$$

Obtemos:

$$\widehat{L} t^{l+\rho} e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{l+\rho} \binom{l+\rho}{k} P^{(k)}(\lambda) t^{l+\rho-k} e^{\lambda t} = \sum_{k=\rho}^{l+\rho} \binom{l+\rho}{k} P^{(k)}(\lambda) t^{l+\rho-k} e^{\lambda t} =$$

$$\sum_{k=0}^{l} \binom{l+\rho}{k+\rho} P^{(k+\rho)}(\lambda) t^{l-k} e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{l} \binom{l+\rho}{l-k+\rho} P^{(l-k+\rho)}(\lambda) t^{k} e^{\lambda t}.$$

Assim:

$$\widehat{L}\varphi_p(t) = \sum_{l=0}^{r} Q_l \sum_{k=0}^{l} \binom{l+\rho}{l-k+\rho} P^{(l-k+\rho)}(\lambda) t^{k} e^{\lambda t} =$$

$$\sum_{k=0}^{r} \sum_{l=k}^{r} Q_l \binom{l+\rho}{l-k+\rho} P^{(l-k+\rho)}(\lambda) t^{k} e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{r} t^k \sum_{l=k}^{r} Q_l \binom{l+\rho}{l-k+\rho} P^{(l-k+\rho)}(\lambda) e^{\lambda t}.$$

Igualando esta equação ao lado direito, $q(t)e^{\lambda t}$, obtemos:

$$q_k = \sum_{l=k}^{r} Q_l \binom{l+\rho}{l-k+\rho} P^{(l-k+\rho)}(\lambda). \tag{21}$$

O que mostra, que $\varphi_p(t)$ é de fato solução de equação (19) - e fornece uma equação permitindo encontrar de forma recursiva (substituições retro-ativas) as incógnitas, Q_l. Observamos ainda que: $P^{(i)}(\lambda) = 0$ por $i > n$.

Por simplicidade introduzimos:

$$\alpha_{k,l} = \binom{l+\rho}{l-k+\rho} P^{(l-k+\rho)}(\lambda). \tag{22}$$

Assim a equação (21) se reduz à:

$$q_k = \sum_{l=k}^{r} \alpha_{k,l} Q_l. \tag{23}$$

Substituindo $i = r-k$:

$$q_{r-i} = \sum_{l=r-i}^{r} \alpha_{r-i,l} Q_l = \sum_{l=r-i-1}^{r} \alpha_{r-i,l} Q_l + \alpha_{r-i,r-i} Q_{r-i}.$$

Supondo que $\alpha_{r-k,r-k} \neq 0$,obtemos por Q_{r-k}:

$$Q_{r-i} = \frac{q_{r-i} - \sum\limits_{l=r-i-1}^{r} \alpha_{r-i,l} Q_l}{\alpha_{r-i,r-i}}. \tag{24}$$

- válido por $i = 0, \ldots, r$.

6 Exemplos

Vamos utilizar o método apresentado neste trabalho, para resolver de forma prática, algumas equações diferenciais.

6.1 Exemplo 1

Consideramos a equação:

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = e^x.$$

Primeiro encontremos a solução da equação homogênea correspodente, temos que a equação caracteristica é:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4. \tag{25}$$

Assim, $P(\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$ (raiz simples), ou $\lambda = 2$ (raiz dupla).

Logo a solução completa da EDO homogênea é:

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + c_3 x e^{2x}.$$

Procuremos uma solução particular $y_p = Ae^x$.

Sabemos que:

$$\widehat{L} e^{\lambda x} = P(\lambda) e^{\lambda x}.$$

Então, pela Linearidade do Diferencial:

$$\widehat{L} A e^x = A \widehat{L} e^x = AP(1) e^x.$$

Mas $P(1) = 2$.

Então,

$$\widehat{L} A e^x = 2Ae^x.$$

Mas queremos que

$$\widehat{L} A e^x = e^x.$$

Então temos que:

$$2Ae^x = e^x \Longrightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Portanto, uma solução particular é

$$y_p = \frac{1}{2}e^x.$$

Então, pelo teorema da suposição de soluções a solução completa do sistema não homogêneo é:

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + c_3xe^{3x} + \frac{1}{2}e^x.$$

6.2 Exemplo 2

Tomemos a seguinte EDO:

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = e^{-x}.$$

como $\lambda = -1$ é solução de multiplicidade 1 do Polinômio Característico, procuremos uma solução particular da forma $y_p = Axe^{\lambda x}$.

Mas temos que:

$$\widehat{L}Axe^{\lambda x} = A\widehat{L}xe^{\lambda x}.$$

Então:

$$A\widehat{L}xe^{\lambda x} = A(P(\lambda)xe^{\lambda x} + P'(\lambda)e^{\lambda x}).$$

Tomando $\lambda = -1$, temos que $P(\lambda) = 0$ e $P'(\lambda) = 3\lambda^2 - 6\lambda = 3(-1)^2 - 6(-1) = 9$.

Daí:

$$A\widehat{L}xe^{\lambda x} = 9Ae^{-x}.$$

Mas queremos que $\widehat{L}Axe^{\lambda x}$, seja igual à e^{-x}, então igualando temos:

$$9Ae^{-x} = e^{-x} \Longrightarrow A = \frac{1}{9}.$$

Portanto uma solução particular é:

$$y_p = \frac{1}{9}xe^{-x}.$$

6.3 Exemplo 3

Para finalizar, mostraremos um exemplo no qual a resolução através do modelo atual de resolução seria trabalhoso, porém utilizando o método de derivação do Equação Característica os cálculos são drasticamente reduzidos.

Suponha que queremos encontrar a solução geral da seguinte EDO:

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{d^3y}{dx^3} + 14\frac{d^2y}{dx^2} - 20\frac{dy}{dx} + 25y = e^x \cos 2x. \tag{26}$$

Sabemos que:

$$e^x \cos 2x = Re(e^{(1+2i)x}).$$

Ainda temos que $\lambda = 1+2i$ é raiz dupla, então tomemos:

$$y_p = Ax^2 e^{(1+2i)x}.$$

Mas sabemos a propriedade do diferencial, temos:

$$\widehat{L}Ax^2e^{\lambda x} = A(P''(\lambda) + 2xP'(\lambda) + Px^2(\lambda))e^{\lambda x}).$$

Mas como,

$$P'(1+2i) = P(1+2i) = 0$$

e

$$P''(1+2i) = 12(1+2i)^2 - 24(1+2i) + 28 = -32.$$

Logo,

$$\widehat{L}Ax^2e^{\lambda x} = -32Ae^{(1+2i)x}.$$

Daí, igualando temos que:

$$-32Ae^{(1+2i)x} = e^{(1+2i)x} \Longrightarrow A = -\frac{1}{32}.$$

Então temos que a solução da EDO complexa é

$$y_{p^*} = -\frac{x^2e^{(1+2i)x}}{32} = -\frac{x^2e^x(\cos 2x + i\sin 2x)}{32}.$$

Portanto, a solução particular é:

$$y_p = -\frac{x^2e^x\cos 2x}{32}.$$

7 Conclusão

Neste trabalho é apresentado um novo método para resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, ou de outra maneira, equações do tipo,

$$a_n\frac{d^nx}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = q(t), t \in I. \tag{27}$$

.

Para isso apresentamos resultados onde o principal é que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ temos que,

$$\widehat{L}t^p e^{\lambda t} = \sum_{q=0}^{p} \left(\begin{array}{c} p \\ q \end{array} \right) P^{(q)}(\lambda) t^{p-q} e^{\lambda t}$$

Utilizando desse resultado é mostrado alguns exemplos de como pode ser resolvido equações utilizando esse novo método .

Referências

[1] ARNOLD, V. I. **Ordinary differential equations**. Cambridge: MIT Press, 1973.

[2] ÁVILA, G. **Variáveis complexas e aplicações**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000.

[3] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

[4] EDWARDS, C. H.; PENNEY, D. E. **Equações diferenciais elementares com problemas de contorno**. Rio de Janeiro: Editora PHB, 2006.

[5] POOLE, D. **Álgebra linear**. São Paulo: Editora Thompson, 2006.

[6] SANTOS, R. S. **Equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes e derivação da equação característica**. 2015. 49 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)- Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2015.

[7] STEWART, J. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Editora Thomson, 2005.

[8] ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações diferenciais**. São Paulo: Editora Pearson, 2005. 2 v.