Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 9, jul. 2017

Considerações sobre as derivadas de Gâteaux e Fréchet

Considerations on the derivatives of Gâteaux and Fréchet

Rogério de Aguiar
Departamento de Matemática,
Universidade do Estado de
Santa Catarina - Joinville - SC
rogerville2001@gmail.com

Elisandra Bar de Figueiredo
Departamento de Matemática,
Universidade do Estado de
Santa Catarina - Joinville - SC
elis.b.figueiredo@gmail.com

Geovane Augusto Haveroth
Aluno de Doutorado do
Programa de Pós-Graduação em
Matemática Aplicada da
Unicamp - Campinas - SP
geovaneah@gmail.com

Resumo

Em matemática, é interessante investigar as conexões que existem entre temas abordados em diferentes contextos. Em relação à derivada de Fréchet surge a questão: que conexões podem ser estabelecidas entre a derivada de Fréchet e o cálculo variacional? Por meio de pesquisa bibliográfica, expomos neste trabalho a definição de derivada direcional e da primeira variação segundo Lagrange. Apresentamos também algumas considerações sobre as derivadas de Gâteaux e Fréchet e introduzimos a diferenciabilidade estrita e sua relação com a derivada de Fréchet. Para mostrar as conexões existentes entre as derivadas apresentadas, exploramos alguns exemplos de cálculo de derivadas de Gâteaux e Fréchet e como uma aplicação expomos a solução do problema de mínimos quadrados e calculamos a derivada de Fréchet de dois funcionais integrais, um oriundo do método variacional aplicado a um problema de contorno linear e outro de um funcional que surge em problemas de cálculo variacional.
Palavras-chave: Derivada de Gâteaux. Derivada de Fréchet. Cálculo variacional.

Abstract

In mathematics, investigating existing connections between topics approached from different contexts is interesting. In relation to Fréchet's derivative, this question arises: what connections can be established between Fréchet's derivative and variational calculus? By means of bibliographical research, in this work we present the definition of directional derivative and the first variation according to Lagrange. We also present some considerations about the derivatives of Gâteaux and Fréchet and we introduce the strict differentiability and its relation to the derivative of Fréchet. In order to show the existing connections between the presented derivatives, we explore some examples of calculations of Gâteaux and Fréchet derivatives and, as an application, we expose the solution of the problem of least squares and we calculate the derivative of Fréchet of two integral functionals, one coming from the variational method applied to a linear contour problem and another from a functional one that arises in variational calculus problems.
Keywords: Gâteaux derivative. Fréchet derivative. Variational calculus.

1 Introdução

Quando os alunos podem conectar ideias matemáticas de determinado assunto é de se esperar que eles obtenham uma melhor compreensão deste. Eles podem ver as conexões matemáticas na interação rica entre os temas matemáticos, em contextos que relacionam a matemática com outros assuntos e em seus próprios interesses e experiências. Por meio do estabelecimento da inter-relação de conceitos matemáticos, os alunos não só aprendem matemática, eles também aprendem sobre a utilidade da matemática. Ao estabelecer as conexões os alunos descobrem que esta não é apenas um conjunto de conceitos, teorias ou padrões distintos, mesmo que seja muitas vezes apresentada de forma desconexa. A matemática é um amplo campo de estudos e podemos visualizá-la como um todo sendo necessário estabelecer conexões seja entre disciplinas diferentes, entre conteúdos diferentes ou também entre níveis de ensino diferentes. Para enfatizar as conexões os professores devem conhecer as necessidades de seus alunos, bem como a matemática que os alunos estudam em disciplinas anteriores procurando fazer conexões do assunto atual com assuntos já vistos ou com outras disciplinas.

A derivada de Fréchet marcou um grande avanço na matemática permitindo-se resolver vários problemas de maximização e minimização. A seguir apresentamos uma breve biografia dos matemáticos Fréchet e Gâteaux para situar historicamente o surgimento das derivadas que levam os seus nomes. René Maurice Fréchet foi um matemático francês que nasceu em 02 de setembro de 1878 em Maligny, Yonne, Bourgone na França e faleceu em 04 de junho de 1973 em Paris, França. Segundo J. J. O'Connor e E. F. Robertson:

> Maurice Fréchet entrou para o ensino secundário no Lycée Buffon em Paris onde aprendeu matemática com Hadamard que lecinou nesta escola no período de 1890 a 1893 antes de ser nomeado professor na Universidade de Bordeaux em 1894. Hadamard imediatamente viu o potencial matemático de seu jovem aluno e o orientou individualmente. Essa orientação continuou depois que Hadamard se mudou para Bordéus, pois ele escrevia a Fréchet lhe colocando problemas matemáticos os quais corrigia com severas críticas caso houvesse algum erro. Fréchet foi extremamente grato pelo encorajamento e orientação que ele estava recebendo, mas ele admitiu muito mais tarde que sentia um medo contínuo de não ser capaz de resolver os problemas que lhe eram propostos [...] Fréchet escreveu uma excelente dissertação de doutoramento intitulada "Sur quelques points du calcul fonctionnel" que foi apresentada em 2 de abril de 1906. Nela introduziu o conceito de espaço métrico, embora não tivesse inventado o nome "espaço métrico" que é devido a Hausdorff. A tese dizia respeito a "operações funcionais" e "cálculo funcional" e foi desenvolvida a partir de ideias de Hadamard e Volterra. A importância de sua tese é que nela ele desenvolveu sistemas de análise axiomática fornecendo uma abstração de diferentes objetos estudados na análise de forma semelhante à teoria de grupos fornecendo uma abstração de sistemas algébricos. (O'CONNOR E ROBERTSON, 2005, tradução livre).

René Eugène Gâteaux também foi um matemático francês que nasceu em 5 de maio de 1889 e morreu em 03 de outubro de 2014. Gâteaux foi contemporâneo de René Maurice Fréchet, Jacques Salomon Hadamard (1865 - 1963), Paul Lévi (1886-1971), Vito Volterra (1860-1940) e Émile Borel (1871-1956). Em 14 de fevereiro de 1914, Gâteaux fez uma palestra no seminário de

Volterra abordando o funcional e suas derivadas, este seria um dos últimos contatos que Gâteaux teria com a matemática. Segundo Laurent Mazliak[1],

> René Eugène Gâteaux nasceu em 5 de maio de 1889 em Vitry-le-François, no departamento de Marne, a 200 km a leste de Paris. Vitry-le-François é a subprefeitura deste departamento, uma cidade de alguma importância industrial e militar, como atesta a sua história [...] Gâteaux foi retirado da reserva e entrou como tenente do 269º Regimento de Infantaria, membro da 70ª divisão de infantaria. A 70ª divisão foi conduzida entre 28 de Setembro de 1914 e 2 de Outubro 1914 de Nancy para Lens, uma distância de quase 300 km. Esta divisão recebeu a ordem para defender o leste de Lens e Arras. Em 3 de outubro, o regimento de Gâteaux estava em Rouvroy, uma pequena aldeia, a 10 km a sudeste de Lens e foi morto a 01:00 hora da manhã enquanto tentava impedir que os alemães entrassem na aldeia. (MAZLIAK, 2007, tradução livre).

Em 1887 Volterra apresenta a primeira versão da diferencial em seu trabalho "Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni" que é uma extensão dos métodos infinitesimais criados por Leibniz e baseado nos métodos de cálculo de variações. Hadamard, em seu artigo "Sur le dérivées des fonctions de lignes" de 1889, aponta casos em que a derivada de Volterra apresenta problemas e mostra esses problemas a Fréchet e Gâteaux, que eram seus alunos. Em vistas dos problemas verificados Hadamard apresenta outra definição, que é melhorada por Fréchet. Essa versão melhorada é criticada por Paul Lévy em 1922, que apresenta um contraexemplo em seu trabalho "Leçons d'analyse functionnelle". Este por sua vez propõe uma nova definição que é rebatida por Fréchet. Em seu trabalho de 1937, Fréchet enuncia uma definição de diferencial para uma função de várias variáveis que estende para a análise funcional as propriedades operatórias da diferencial proposta por Hadamard em 1923. Em seguida Fréchet estende sua definição para espaços vetoriais normados, sendo esta a definição que utilizamos hoje em dia (RECALDE e ARBOLEDA, 2000).

Quando se trabalha com problemas em espaços normados que necessitam de derivada, é comum utilizar a derivada de Fréchet, como por exemplo nos problemas do cálculo variacional. Os métodos variacionais utilizam derivadas para resolver problemas na teoria das equações diferenciais. A ideia central consiste em substituir a busca de solução da equação diferencial, pela busca de um ponto de mínimo (ou de máximo) de um funcional associado à equação. Para determinar um ponto crítico de um funcional, uma das ferramentas utilizadas é a derivada de Fréchet. Neste trabalho temos como objetivo apresentar as derivadas de Fréchet e Gâteaux e trabalhar com alguns exemplos de aplicações dessas derivadas para que fiquem claras as conexões existentes. Apresentamos explicitamente a solução do problemas de mínimos quadrados em $\mathbb{R}^n$ e calculamos a derivada de Fréchet de dois funcionais lineares que surgem do cálculo variacional[2].

[1]Laurent Mazliak, Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires et Institut de Mathématiques (Histoire des Sciences Mathématiques), Université Paris VI, France.

[2]Não faz parte do escopo deste trabalho a obtenção de tais funcionais nem a resolução de problemas de minimização em espaços normados.

2 Conceitos iniciais

Nesta seção introduziremos o conceito de derivadas em espaços normados apresentando as derivadas de Fréchet e a de Gâteaux, seguindo como o que está exposto nos capítulos 3 e 4 do livro Differential Analysis de Thomas Muirhead Flett (FLETT, 1980), principal referência deste trabalho, e também o que está exposto no capítulo 2 do livro Variational methods in Mathematical Physics de Philippe Blanchard e Erwin Brüning (BLANCHARD; BRUNING, 1992).

Definição 1 *Seja X um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma norma em X é uma função $||.||$: $X \to \mathbb{R}^+$ que satisfaz*

1. $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
2. $||\lambda x|| = |\lambda|||x||$ *para todo* $x \in X$ *e todo* $\lambda \in \mathbb{K}$;
3. $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ *para quaisquer* $x, y \in X$.

Um espaço normado é um espaço vetorial X munido da norma $||.||$.

Observação 2 *Em espaços normados, $h \to 0$ se, e somente se, $||h-0|| \to 0$.*

Sejam X, Y espaços normados reais e U um subconjunto aberto de X, $x_0 \in U$ e $F : U \subseteq X \to Y$ uma aplicação.

Definição 3 *O limite*

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{F(x_0 + \lambda h) - F(x_0)}{\lambda},$$

se existe, é denominado derivada de F no ponto x_0 segundo a direção h e denotado por $F'(x_0;h)$.

Definição 4 *Suponhamos que para todo $h \in X$ a derivada $F'(x_0;h)$ segundo a direção h existe. A aplicação $\delta_+ F(x_0;\cdot) : X \to Y$ definida por*

$$\delta_+ F(x_0;h) = F'(x_0;h)$$

é chamada primeira variação da aplicação F no ponto x_0 (se diz então que a função F possui uma primeira variação no ponto x_0).

Observação 5 *Se para todo $h \in X$ existe o limite*

$$\delta F(x_0;h) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{F(x_0 + \lambda h) - F(x_0)}{\lambda},$$

então a aplicação $h \to \delta F(x_0;h)$ é chamada primeira variação segundo Lagrange da aplicação F no ponto x_0.

Definição 6 *Suponhamos que F possui no ponto x_0 uma primeira variação e que exista um operador linear $L : X \to Y$ tal que*

$$\delta_+ F(x_0;h) = L(h).$$

Então o operador L é chamado derivada de Gâteaux da aplicação F no ponto x_0, e se denota por $F'_G(x_0)$. Assim $F'_G(x_0)$ é uma transformação linear de X em Y, tal que para cada $h \in X$ tem-se a relação

$$F(x_0 + \lambda h) = F(x_0) + \lambda F'_G(x_0)(h) + o(\lambda),$$

em que $\dfrac{o(\lambda)}{\lambda} \to 0$ *quando* $\lambda \to 0^+$.

Definição 7 *Suponhamos que numa vizinhança do ponto x_0 a aplicação F satisfaça*

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)-L(h)}{||h||_X} = 0,$$

em que L é uma transformação linear contínua de X em Y, então F é dita Fréchet diferenciável, L é chamada a diferencial de Fréchet de F em x_0 e denotada por $dF(x_0)$.

Definição 8 *A aplicação F é chamada estritamente diferenciável no ponto x_0, se existe uma transformação $L : X \to Y$ linear e contínua tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que para todos os x_1, x_2 verificando as desigualdades $||x_1 - x_0||_X < \delta$ e $||x_2 - x_0||_X < \delta$ tem-se*

$$||F(x_1) - F(x_2) - L(x_1 - x_2)||_Y \leq \varepsilon ||x_1 - x_2||_X.$$

Para uma melhor compreensão das definições enunciadas nessa seção iremos apresentar na próxima seção alguns resultados e exemplos.

3 Resultados e exemplos

Nesta seção trazemos resultados sobre a derivada de Fréchet e exemplos para explorar algumas de suas propriedades. Novamente nos baseamos nas referências já citadas anteriormente sendo que algumas demonstrações foram feitas pelos autores deste trabalho.

Proposição 9 *Se F é Fréchet diferenciável no ponto interior x_0, então a derivada $F'(x_0)$ é única.*

Demonstração: Suponhamos que existam transformações lineares e contínuas $L_1(h)$ e $L_2(h)$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)-L_1(h)}{||h||} - \frac{F(x_0+h)-F(x_0)-L_2(h)}{||h||} = 0,$$

o que equivale a

$$\lim_{h\to 0} \frac{L_1(h)-L_2(h)}{||h||} = 0.$$

Fixemos $v \neq 0$ e tomemos $h = tv$. Assim obtemos

$$\lim_{t\to 0} \frac{t(L_1(v)-L_2(v))}{t||v||} = 0,$$

implicando em

$$\frac{L_1(v)-L_2(v)}{||v||} = 0 \quad \Rightarrow \quad L_1(v) = L_2(v) \quad \forall v \in X.$$

Portanto, $L_1 = L_2$. ■

Proposição 10 *Se $F : D \subseteq X \to Y$ é uma aplicação constante, então F é Fréchet diferenciável em cada ponto interior a de D e $dF(a)$ é uma função nula de X em Y.*

Demonstração: Temos que F é uma aplicação constante, isto é, existe $b \in Y$ tal que $F(x) = b$ para todo $x \in D$. Pela Definição 1 obtemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(a+h)-F(a)-L(h)}{||h||} = \lim_{h\to 0} \frac{b-b-L(h)}{||h||} = \lim_{h\to 0} \frac{-L(h)}{||h||}.$$

Tomando $L(h) = 0$ temos $\lim_{h\to 0} \dfrac{-L(h)}{||h||} = 0$. Como L é única, ela deve ser a derivada de Fréchet de F. ■

Proposição 11 *Se $F : D \subset X \to Y$ é uma aplicação linear, então F Fréchet diferenciável em cada ponto interior a de D e $dF = F$.*

Demonstração: Pela definição da diferenciabilidade de Fréchet segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{F(a+h)-F(a)-L(h)}{||h||} &= \lim_{h\to 0} \frac{F(a)+F(h)-F(a)-L(h)}{||h||} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{F(h)-L(h)}{||h||},
\end{aligned}$$

e tomando $L(h) = F(h)$ temos

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(a+h)-F(a)-L(h)}{||h||} = \lim_{h\to 0} \frac{F(h)-F(h)}{||h||} = 0.$$

Como L é única, então a derivada de Fréchet dF é F. ■

Proposição 12 *Se F é Fréchet diferenciável no ponto interior x_0, então F é contínua em x_0.*

Demonstração: Sabemos que se F é Fréchet diferenciável em um ponto interior x_0, então

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)-L(h)}{||h||} = 0,$$

ou, equivalentemente

$$F(x_0+h) = F(x_0)+L(h)+o(||h||), \tag{1}$$

em que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{o(||h||)}{||h||} = 0$. Reescrevendo a Equação (1) temos

$$F(x_0+h) = F(x_0)+L(h)+\frac{o(||h||)}{||h||}||h||.$$

Aplicando o limite em ambos os lados, obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} F(x_0+h) &= \lim_{h\to 0}\left[F(x_0)+L(h)+\frac{o(||h||)}{||h||}||h||\right] \\
&= F(x_0)+\lim_{h\to 0} L(h)+\lim_{h\to 0}\left[\frac{o(||h||)}{||h||}||h||\right] \\
&= F(x_0)+L(0)+\lim_{h\to 0}\frac{o(||h||)}{||h||}\lim_{h\to 0}||h|| \\
&= F(x_0)+0+0.0 \\
&= F(x_0).
\end{aligned}$$

Portanto, F é contínua em x_0. ■

Proposição 13 *Se F é estritamente diferenciável, então F é contínua na vizinhança de x_0.*

Demonstração: Sabemos que se F é Fréchet estritamente diferenciável em um ponto interior x_0, então existe um operador linear $L : X \to Y$ tal que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo x_1 e x_2 verificando $\|x_1 - x_0\| < \delta$ e $\|x_2 - x_0\| < \delta$ tem-se que

$$\|F(x_1) - F(x_2) - L(x_1 - x_2)\| \leq \varepsilon \|x_1 - x_2\|.$$

Seja $V = B\left(x_0, \frac{\delta}{2}\right) = \left\{x \in X \,|\, \|x - x_0\| < \frac{\delta}{2}\right\}$ uma vizinhança de x_0. Seja x_n uma sequência em X tal $\lim x_n = a$, com $a \in V$. Para $\delta > 0$, existe n_0 tal que para $n > n_0$ tem-se $\|x_n - x_0\| < \delta$. Portanto,

$$\begin{aligned} \|F(x_n) - F(a)\| &\leq \|L(x_n - a)\| + \|F(x_n) - F(a) - L(x_n - a)\| \\ &< \|L\| \|x_n - a\| + \varepsilon \|x_n - a\| < (\|L\| + \varepsilon) \|x_n - a\|. \end{aligned}$$

Como $\lim x_n = a$ tem-se pela desigualdade acima que $\lim F(x_n) = F(a)$. Logo, F é contínua em $a \in B(x_0, \frac{\delta}{2})$, sendo $B(x_0, \frac{\delta}{2})$ é uma vizinhança de x_0. ■

Proposição 14 *Se existirem as derivadas descritas nas definições 3 a 8 acima, então temos a seguinte cadeia de implicações*

Definição 8 $\Longrightarrow$ *Definição* 7 $\Longrightarrow$ *Definição* 6 $\Longrightarrow$ *Definição* 4 $\Longrightarrow$ *Definição* 3

A veracidade das implicações pode ser comprovada diretamente a partir das definições. Veremos a seguir que não podemos ter, em geral, as implicações inversas.

Exemplo 15 *Considere a aplicação $F_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por*

$$F_1(x,y) = \begin{cases} 1, & se \;\; x > 0, y > 0 \\ x^2, & se \;\; x \leq 0, \forall y \\ -xy, & se \;\; x \geq 0, y \leq 0 \end{cases}.$$

Seja $x_0 = (0,0)$ e $h_1 = (1,0)$, obtemos

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{F_1(x_0 + \lambda h) - F_1(x_0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{F_1(\lambda, 0) - F_1(0,0)}{\lambda} = 0.$$

Por outro lado, ainda para $x_0 = (0,0)$ e agora na direção $h_2 = (1,1)$, temos

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{F_1(x_0 + \lambda h) - F_1(x_0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{F_1(\lambda, \lambda) - F_1(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{1}{\lambda} = +\infty.$$

Logo, existe $F_1'(x_0, h_1)$, mas não existe $F_1'(x_0, h_2)$. Assim, F_1 não possui uma primeira variação no ponto x_0. Portanto, 3 $\not\Rightarrow$ 4.

Exemplo 16 *Considere $F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F_2 = |x|$. É fácil ver que $\delta_+ F_2(0; h) = |h|$. Portanto, F_2 possui primeira variação em $x_0 = 0$ e claramente $\delta_+ F_2(0, h)$ é não linear. Assim, 4 $\not\Rightarrow$ 6.*

Observação 17 *Este mesmo exemplo mostra que a continuidade num ponto não implica na diferenciabilidade segundo Gâteaux e tão pouco na Fréchet diferenciabilidade.*

Exemplo 18 *Considere* $F_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$F_3(x_1,x_2) = \begin{cases} 1, \ se \ \ x_1 = x_2^2 \ \ e \ \ x_2 > 0 \\ 0, \ nos \ outros \ casos \end{cases}.$$

Então, F_3 *é diferenciável segundo Gâteaux no ponto* $(0,0)$.

De fato, temos

$$\begin{aligned} F_3'((0,0),(h_1,h_2)) &= \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{F_3((0,0)+\lambda(h_1,h_2)) - F_3(0,0)}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{F_3(\lambda h_1,\lambda h_2)}{\lambda} = 0, \end{aligned}$$

pois se acontecesse, $F_3(\lambda h_1,\lambda h_2) = 1$, teríamos necessariamente $h_1 = \lambda h_2^2$, $h_2 > 0$ com λ constante, visto que h_1 está fixado. O que é uma contradição, pois λ está tendendo a zero, ou seja, está variando. Assim, F_3 é Gâteaux diferenciável no ponto $(0,0)$ e $(F_3)'_G(0,0) = 0$. É claro que F_3 é descontínua no ponto $(0,0)$, logo F_3 não é Fréchet diferenciável em $(0,0)$. Portanto, $6 \not\Rightarrow 7$.

Exemplo 19 *Considere* $F_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$F_4(x) = \begin{cases} x^2, \ se \ \ x \ é \ racional \\ 0, \ se \ \ x \ é \ irracional \end{cases}.$$

No ponto $x_0 = 0$*,* F_4 *é diferenciável segundo Fréchet, mas não é estritamente diferenciável, pois ela é descontínua para* $x_0 \neq 0$*. De fato,*

$$\begin{aligned} F_4'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{F_4(0+h) - F_4(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{F_4(h)}{h} \\ &= \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2}{h}, \ \ h \ racional \\ \lim\limits_{h\to 0} 0, \ \ h \ irracional \end{cases}, \end{aligned}$$

logo, $F_4'(0) = 0$.

Por outro lado, seja $x_0 \neq 0$, $x_0 \in \ \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e seja $x_n \in \mathbb{Q}$ tal que $x_n \to x_0$. Então, $F_4(x_n) = {x_n}^2$ donde $F_4(x_n) \to {x_0}^2 \neq 0$. Assim, $x_n \to x_0$, mas $F_4(x_n) \nrightarrow F_4(x_0)$.

Seja agora $x_0 \neq 0$, $x_0 \in \mathbb{Q}$, e tome $x_n = \dfrac{\pi}{n} + x_0$. Então, $x_n \to x_0$, mas $F_4(x_n) = 0$. Assim, $F_4(x_n) \to 0 \neq {x_0}^2$. Portanto se $x_0 \neq 0$, F_4 não é contínua em x_0. Logo, $7 \not\Rightarrow 8$.

Observação 20 *Apresentamos aqui algumas particularidades das derivadas de Fréchet e Gâteaux sendo que omitimos algumas demonstrações que podem ser encontradas nas referências anteriormente citadas.*

a) O funcional F é Fréchet diferenciável (ou Gâteaux diferenciável) se for diferenciável em todos os pontos de U .

b) Se F é diferenciável a Fréchet, então F é diferenciável a Gâteaux *c) A derivada $F'(x_0)$, de Gâteaux, de Fréchet, ou a derivada estrita, é por definição uma aplicação linear de X em Y.*

d) Se $X = \mathbb{R}^n$ e $Y = \mathbb{R}^m$, com $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ sendo os espaços vetoriais reais com a norma euclidiana, então a derivada de Fréchet é a derivada usual estudada nas disciplinas de cálculo diferencial dos cursos de matemática e áreas afins.

e) Flett (1980) afirma que não há uma notação padrão e terminologia para a derivada de Gâteaux, ou variação de Gâteaux como aparece am algumas obras. As notações mais comuns para a derivada de Gâteaux são $\delta F(a;h)$ e $VF(a;h)$.

f) A linearidade da diferencial de Fréchet segue diretamente da Definição 7 e podemos escrever:

$$\begin{aligned} d(cF)(a) &= cdF(a), \\ d(F+G)(a) &= dF(a) + dG(a). \end{aligned}$$

g) Se D é um conjunto aberto em X, uma função F sendo Fréchet diferenciável em cada ponto de D será dita Fréchet diferenciável em D. Também diremos que F é de classe C^1 em um conjunto aberto $D \subseteq X$ se dF é contínua em D.

h) Se F é Fréchet diferenciável em a, então F é Fréchet diferenciável em a quando as normas em X e Y são substituídas por normas equivalentes. Em particular, se X e Y são de dimensão infinita, a propriedade de diferenciabilidade Fréchet é independente da escolha das normas em X e Y.

3.1 Exemplos da derivada de Fréchet

Apresentaremos a seguir alguns exemplos envolvendo o cálculo da derivada de Fréchet que na próxima seção utilizaremos para encontrar a solução de um problema de mínimos quadrados.

Exemplo 21 *Se $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma aplicação definida por $G(x) = \langle Ax, b \rangle$, em que A é uma matriz $n \times n$, $x, b \in \mathbb{R}^n$ e $\langle ., . \rangle$ é o produto escalar canônico de $\mathbb{R}^n$, então $G'(a)(h) = \langle Ah, b \rangle$.*

De acordo com a Definição 7 temos

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{G(a+h) - G(a) - L(h)}{||h||} &= \lim_{h\to 0} \frac{\langle A(a+h), b\rangle - \langle Aa, b\rangle - L(h)}{||h||} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\langle Aa + Ah, b\rangle - \langle Aa, b\rangle - L(h)}{||h||} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\langle Aa, b\rangle + \langle Ah, b\rangle - \langle Aa, b\rangle - L(h)}{||h||} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\langle Ah, b\rangle - L(h)}{||h||}. \end{aligned}$$

Tomando $G'(a)(h) = L(h) = \langle Ah, b \rangle$ segue que

$$\lim_{h\to 0} \frac{G(a+h) - G(a) - L(h)}{\cdot \quad ||h||} = \lim_{h\to 0} \frac{\langle Ah, b\rangle - \langle Ah, b\rangle}{||h||} = 0.$$

Exemplo 22 *Se $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma aplicação definida por $H(x) = \langle Ax, Ax\rangle$, sendo A uma matriz $n \times n$, então $H'(a)(h) = 2\langle Aa, Ah\rangle$.*

De acordo com a Definição 7 verificamos que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{H(a+h)-H(a)-L(h)}{||h||} &= \lim_{h\to 0}\frac{\langle A(a+h),A(a+h)\rangle - \langle Aa,Aa\rangle - L(h)}{||h||}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\langle Aa+Ah,Aa+Ah\rangle - \langle Aa,Aa\rangle - L(h)}{||h||}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\langle Aa,Aa\rangle + \langle Ah,Ah\rangle}{||h||} + \right.\\
&\left.\frac{\langle Ah,Aa\rangle + \langle Aa,Ah\rangle - \langle Aa,Aa\rangle - L(h)}{||h||}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\langle Ah,Ah\rangle + 2\langle Aa,Ah\rangle - L(h)}{||h||}.
\end{aligned}$$

Tomando $H'(a)(h) = L(h) = 2\langle Aa, Ah\rangle$ segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{H(a+h)-H(a)-L(h)}{||h||} &= \lim_{h\to 0}\frac{\langle Ah,Ah\rangle + 2\langle Aa,Ah\rangle - 2\langle Aa,Ah\rangle}{||h||}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\langle Ah,Ah\rangle}{||h||}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{||Ah||^2}{||h||} = 0.
\end{aligned}$$

Note que a última igualdade se obtém do fato de que se $||h|| = \sqrt{\langle h,h\rangle}$, então a norma de A induzida pela norma euclidiana $||.||$ é dada por $||A|| = \max\limits_{x\neq 0}\dfrac{||Ax||}{||x||}$. A norma $||A||$ definida desta maneira é de fato uma norma em $\mathbb{R}^{n\times n}$ e satisfaz

$$\begin{aligned}
||A|| &> 0 \text{ se } A \neq 0\\
||\alpha A|| &= \alpha ||A||\\
||A+B|| &\leq ||A|| + ||B||\\
||AB|| &\leq ||A||.||B||, \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}.
\end{aligned}$$

Além disso, vale a seguinte relação $||Ax|| \leq ||A||||x||$. Donde,

$$0 \leq \frac{||Ah||^2}{||h||} = \frac{\langle Ah,Ah\rangle}{||h||} = \frac{\langle A^TAh,h\rangle}{||h||} \leq \frac{||A^TAh||.||h||}{||h||} = ||A^TAh|| \leq ||A^TA||.||h||.$$

Assim,

$$0 \leq \lim_{h\to 0}\frac{||Ah||^2}{||h||} \leq \lim_{h\to 0}||A^TA||.||h|| = 0,$$

que implica em $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{||Ah||^2}{||h||} = 0$.

Exemplo 23 *Se $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma aplicação definida por $G(x) = \langle Ax, x\rangle$, em que A é uma matriz $n \times n$, então $G'(a)(h) = \langle Aa, h\rangle + \langle a, Ah\rangle$.*

Temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{G(a+h) - G(a) - L(h)}{||h||} &= \lim_{h\to 0} \frac{\langle A(a+h), a+h\rangle - \langle Aa, a\rangle - L(h)}{||h||} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\langle Aa + Ah, a+h\rangle - \langle Aa, a\rangle - L(h)}{||h||} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\langle Aa, h\rangle + \langle Ah, a\rangle - \langle Ah, h\rangle - L(h)}{||h||}.
\end{aligned}$$

Tomando $G'(a)(h) = L(h) = \langle Aa, h\rangle + \langle Ah, a\rangle$ obtemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{G(a+h) - G(a) - L(h)}{||h||} = \lim_{h\to 0} \frac{\langle Ah, h\rangle}{||h||} = 0,$$

esta última igualdade segue de:

$$0 \leq \frac{\langle Ah, h\rangle^2}{||h||^2} \leq \frac{\langle Ah, Ah\rangle \langle h, h\rangle}{||h||^2} \leq \langle Ah, h\rangle \leq ||A||^2 ||h||^2.$$

Observação 24 *Salientamos ainda os seguintes tópicos:*

a) Seja $\varphi : X \times Z \to Y$ bilinear e contínua (note que φ ser bilinear é equivalente a existir uma constante $k > 0$ tal que $\|\varphi(x,z)\|_Y \leq k\|x\|_X \|z\|_Z$, para todo $(x,z) \in X \times Z$). Então, existe $\varphi'(x_0, z_0)$, para todo $(x_0, z_0) \in X \times Z$ e $\varphi'(x_0, z_0)(h_1, h_2) = \varphi(x_0, h_2) + \varphi(h_1, z_0)$. Em particular, o produto interno em qualquer espaço de Hilbert é derivável a Fréchet.

b) Se H é um espaço de Hilbert real com produto interno $\langle ., .\rangle$, $A : H \to H$ é linear e contínua e $\varphi : H \to \mathbb{R}$ está definida por $\varphi(x) = \langle Ax, x\rangle$, então existe $\varphi'(x_0)$, para todo $x_0 \in H$ e $\varphi'(x_0)(h) = \langle Ax_0, h\rangle + \langle x_0, Ah\rangle$. Em particular, se $A = I$, então $\varphi(x) = \|x\|^2$ e $\varphi'(x_0)(h) = 2\langle x_0, h\rangle$, para todo $x_0, h \in H$.

c) Se $\varphi : D \to \mathbb{R}$, em que D é um subconjunto aberto de algum espaço de Hilbert H, é derivável em $x_0 \in D$ então o Teorema de Representação de Riesz garante a existência de um único elemento $\triangledown \varphi(x_0) \in H$, tal que $\varphi'(x_0)(h) = \langle \triangledown \varphi(x_0), h\rangle$, para todo $h \in H$. A notação $\triangledown \varphi(x_0)$ é chamada de gradiente de φ em x_0.

d) Se F é uma função de um conjunto aberto $U \subset X$ em Y cuja diferencial de Gâteaux $F'_G(x_0)$ está definida em uma vizinhança de x_0 e é contínua em x_0, então F é Fréchet diferenciável em x_0 (FLETT, 1980, p.257).

De acordo com as definições apresentadas na seção anterior, toda função F Fréchet diferenciável, também é Gâteaux diferenciável. Assim, todos as derivadas dos exemplos apresentados nesta seção também são exemplos de derivadas de Gâteaux.

4 Aplicações da derivada de Fréchet

Nesta seção apresentamos a solução de um problema de mínimos quadrados em $\mathbb{R}^n$, uma aplicação da derivada de Fréchet a um problema de contorno linear e o cálculo da derivada de Fréchet de um funcional integral que surge de alguns problemas de otimização.

Exemplo 25 *Considere o sistema $Ax = b$ em que $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $m > n$. Supondo que o posto de A é n, determine a solução de quadrados mínimos do sistema $Ax = b$. Assim, basta avaliar $\min_{x\in\mathbb{R}^n} ||Ax-b||_2^2$, em que $||.||_2$ consiste da norma Euclidiana e integra uma importante classe de norma vetorial dita p-norma e definida por $||b||_p = (\sum_{i=1}^m |b_i|^p)^{1/p}$ para $1 \leq p < \infty$.*

Considerando $\phi(x) = \frac{1}{2}||Ax-b||_2^2$, então basta calcular $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \phi(x)$.

Temos que

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\langle Ax-b, Ax-b\rangle \quad = \quad \frac{1}{2}\left[\langle Ax,Ax\rangle - 2\langle Ax,b\rangle + \langle b,b\rangle\right].$$

Logo, da Proposição 10 e dos Exemplos 21 e 22 segue que

$$\begin{aligned}
\phi'(x)(h) &= \frac{1}{2}\left[2\langle Ax,Ah\rangle - 2\langle Ah,b\rangle + 0\right] \\
&= \langle Ax,Ah\rangle - \langle Ah,b\rangle \\
&= \langle A^T Ax,h\rangle - \langle h,A^T b\rangle \\
&= \langle A^T Ax,h\rangle - \langle A^T b,h\rangle \\
&= \langle A^T Ax - A^T b,h\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\phi'(x)(h) = 0 \quad &\Rightarrow \quad A^T Ax - A^T b = 0 \\
&\Rightarrow \quad A^T Ax = A^T b \\
&\Rightarrow \quad x = (A^T A)^{-1} A^T b.
\end{aligned}$$

Como posto $A^T A$ = posto A = n, existe $(A^T A)^{-1}$ e assim $x = (A^T A)^{-1} A^T b$ é ponto de mínimo global, pois ϕ é convexa. A equação $A^T Ax - A^T b = 0$ é conhecida nos cursos de ciências exatas como sistema de equações normais.

Exemplo 26 *Considere o seguinte problema de contorno linear:*

$$-(p(t)u')' + q(t)u = f, em[a,b] \text{ com a condição que } u(a) = u(b) = 0, \tag{2}$$

e as funções p, q e f que satisfazem:

$$\begin{aligned}
p \in C^1[a,b] \text{ e } p(t) > 0, \forall t \in [a,b], \\
q \in C[a,b] \text{ e } q(t) \geq 0, \forall t \in [a,b], \\
f \in C[a,b],
\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}
C[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua em}[a,b]\}, \\
C^1[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f' \text{é contínua em}, [a,b]\}, \\
C_0^1[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} | f' \text{é contínua em [a,b] e } f(a) = f(b) = 0\}.
\end{aligned}$$

Uma solução clássica do problema 2 é uma função $u \in C^2[a,b]$ que satisfaça a Equação (2) e se anule nos extremos do intervalo $[a,b]$. Uma solução fraca do problema (2) é uma função $u \in C_0^1[a,b]$ que satisfaz a seguinte equação

$$\int_a^b p(t)u'(t)v'(t)dt + \int_a^b q(t)u(t)v(t)dt = \int_a^b f(t)v(t)dt, \forall v \in C_0^1[a,b]. \tag{3}$$

Em geral é mais fácil encontrar uma solução fraca do que uma solução clássica. Se o problema possuir solução clássica, então a solução fraca será a solução clássica. O método variacional consiste em determinar uma solução fraca do problema (2) e por meio de uma "regularização" provar que esta solução fraca é de fato a solução clássica. Portanto, a ideia é encontrar uma função $u \in C_0^1[a,b]$ que satisfaça (3).

Considere o seguinte funcional $\varphi : C_0^1[a,b] \to \mathbb{R}$ dado por

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\int_a^b p(t)(v'(t))^2dt + \frac{1}{2}\int_a^b q(t)v^2(t)dt - \int_a^b f(t)v(t)dt \ , \forall v \in C_0^1[a,b]. \tag{4}$$

Para efeito de simplificação de notação, de agora em diante representaremos a integral $\int_a^b g(t)dt$ por $\int gdt$. Sejam $u_0, v \in C_0^1[a,b]$ e $h \neq 0 \in \mathbb{R}$ temos que

$$\varphi'(u_0)v = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(u_0+hv) - \varphi(u-0)}{h} = \int pu_0'v'dt + \int qu_0vdt - \int fvdt. \tag{5}$$

Note que $\varphi'(u_0)$ é a primeira variação segundo Lagrange da aplicação φ no ponto u_0 (conforme observação 2). É fácil ver que $\varphi'(u_0)$ é linear, logo $\varphi'(u_0)$ é a derivada de Gâteaux de φ no ponto u_0. Se u_0 for mínimo do funcional φ então $\varphi'(u_0)v = 0$, para todo $v \in C_0^1[a,b]$. Portanto, se u_0 é um ponto de mínimo, então u_0 será uma solução fraca do problema (3), sendo assim a busca de uma solução fraca se reduz a busca de um mínimo para o funcional (4). Considere o espaço $C_0^1[a,b]$ munido da seguinte norma

$$\|u\| = \left(\int (u')^2\right)^{\frac{1}{2}} dt, \forall u \in C_0^1[a,b]. \tag{6}$$

Seja $v_n \longrightarrow v \,\text{em}\, C_0^1[a,b]$, isto é,$\|v_n - v\| \longrightarrow 0$. Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Wirtinger prova-se que:

$$\left|\int f(v_n - v)dt\right| \leqslant c\left(\int f^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int |v_n' - v'|^2dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant ck_1\|v_n - v\|, \tag{7}$$

$$\left|\int qu_0(v_n - v)dt\right| \leqslant \widehat{q}c\left(\int {u_0}^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int |v_n' - v'|^2dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \widehat{q}ck_2\|v_n - v\|, \tag{8}$$

$$\left|\int pu_0(v_n' - v')dt\right| \leqslant \widehat{p}\left(\int {u_0}^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int |v_n' - v'|^2dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \widehat{p}k_3\|v_n - v\|. \tag{9}$$

Estas desigualdades mostram que $\varphi'(u_0)(v_n) \longrightarrow \varphi'(u_0)(v)$, ou seja, $\varphi'(u_0)$ é contínua. Pela observação 5, item d), $\varphi'(u_0)$ é a derivada de Fréchet em u_0. O espaço $C_0^1[a,b]$ não é o espaço adequado para a formulação do problema (2) pois a bola aberta não é compacta neste espaço (já que este espaço não é completo). O espaço adequado para a formulação do problema é o espaço de Sobolev $H_0^1[a,b]$ munido da topologia fraca com a introdução da derivada fraca.

Usando resultados de análise funcional prova-se que nestas condições o funcional φ possui um ponto de mínimo que será a solução do problema de contorno linear. Maiores detalhes podem ser encontrados nos trabalhos de Figueiredo (1988) e Maldonado (2013). Nossa intenção neste exemplo foi calcular a derivada de Fréchet de um funcional integral proveniente de um problema de contorno linear, no próximo exemplo iremos calcular a derivada de Fréchet de um funcional integral mais geral que ocorre com frequência em problemas de cálculo variacional.

Exemplo 27 *Vamos agora considerar o espaço* $C[a,b]$ *munido da norma* $\|x\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|$, *e seja* $f : [a,b]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua tal que* $\dfrac{\partial f}{\partial x} : [a,b]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *seja contínua. Definimos o funcional* $\Phi : C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *por*

$$\Phi(x) = \int_a^b f(t,x(t))dt. \tag{10}$$

Este tipo de funcional surge de alguns problemas de cálculo de variações e, como é de praxe nestes tipos de problemas, se faz necessário o cálculo da derivada de Fréchet do funcional (10).

Proposição 28 *O funcional* $\Phi(x) = \int_a^b f(t,x(t))dt$ *é derivável Fréchet e sua derivada* $\Phi'(x_0) : C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é definida por*

$$\Phi'(x_0)h = \int_a^b \frac{\partial f(t,x_0(t))}{\partial x} h(t)dt. \tag{11}$$

Demonstração: Seja $x_0 \in C[a,b]$ e considere a função $g(t) = \left|\dfrac{\partial f(t,x_0(t))}{\partial x}\right|$. Como x_0 é contínua e $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ também é contínua, temos que a função g é contínua. Portanto, a função g possui máximo no intervalo $[a,b]$. Deste fato decorre que

$$|\Phi'(x_0)(h)| \leq \left|\int_a^b \frac{\partial f(t,x_0(t))}{\partial x} h(t)dt\right| \leq \int_a^b \left|\frac{\partial f(t,x_0(t))}{\partial x}\right| |h(t)|dt \leq M(b-a)\|h\|_\infty,$$

em que $M = \max_{x\in[a,b]} \left|\dfrac{\partial f(t,x_0(t))}{\partial x}\right|$.

Logo, $\Phi'(x_0)$ é contínua e, claramente, é linear. Agora resta-nos provar que $\Phi'(x_0)$ satisfaz a condição 1. Para isto vamos precisar do seguinte resultado: Se $g \in C^1[x,y]$, então

$$g(y) - g(x) = \int_0^1 g'(ty + (1-tx))(y-x)dt, \tag{12}$$

o que segue do fato que

$$\frac{d}{dt}[g(ty+(1-t)x)] = g'(ty+(1-tx))(y-x)dt. \tag{13}$$

Devemos mostrar que

$$\frac{|\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0) - \Phi'(x_0)(h)|}{\|h\|_\infty} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \|h\|_\infty \longrightarrow 0, \tag{14}$$

em que $\|\cdot\|_\infty$ está defininida no Exemplo 27.
De fato,

$$\begin{aligned}\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)-\Phi'(x_0)(h) &= \int_a^b \left[f(t,x+h(t))-f(t,x_0(t))-\frac{\partial f(t,x_0(t))}{\partial x}\right]dt \\ = \int_a^b \left[\int_0^1 \frac{\partial f(t,rx_0(t)+rh(t)+(1+r)x_0(t))}{\partial x}h(t)dr - \frac{\partial f(t,x_0(t))}{\partial x}h(t)\right]dt \\ = \int_a^b \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial f(t,x_0(t)+rh(t))}{\partial x}-\frac{\partial f(t,x_0(t))}{\partial x}\right)dr\right]h(t)dt.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}|\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)-\Phi'(x_0)(h)| &\leq \|h\|_\infty \int_a^b\int_0^1 \left|\frac{\partial f(t,x_0(t)+rh(t))}{\partial x}-\frac{\partial f(t,x_0(t))}{\partial x}\right| drdt \\ \Rightarrow \frac{|\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)-\Phi'(x_0)(h)|}{\|h\|_\infty} &\leq \int_a^b\int_0^1 \left|\frac{\partial f(t,x_0(t)+rh(t))}{\partial x}-\frac{\partial f(t,x_0(t))}{\partial x}\right| drdt.\end{aligned}$$

Como

$$\|x_0(t)+rh(t)-x_0(t)\|_\infty = \|rh(t)\|_\infty = |r|\|h(t)\|_\infty,$$

temos que $x_0(t)+rh(t)\longrightarrow x_0(t)$ na norma $\|.\|_\infty$ independente do valor de r. E, ainda $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é contínua no compacto $I=[a,b]$, então é uniformemente contínua na norma $\|.\|_\infty$ logo

$$\frac{\partial f(t,x_0(t)+rh(t))}{\partial x}\longrightarrow \frac{\partial f(t,x_0(t))}{\partial x},$$

na norma $\|.\|_\infty$. ■

Concluímos então que

$$\begin{aligned}&\lim_{\|h(t)\|_\infty\longrightarrow 0}\frac{|\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)-\Phi'(x_0)(h)|}{\|h\|_\infty}\leq \\ &\leq \lim_{\|h(t)\|_\infty\longrightarrow 0}\int_a^b\int_0^1 \left|\frac{\partial f(t,x_0(t)+rh(t))}{\partial x}-\frac{\partial f(t,x_0(t))}{\partial x}\right| drdt \\ &\leq \lim_{\|h(t)\|_\infty\longrightarrow 0}\left\|\frac{\partial f(t,x_0(t)+rh(t))}{\partial x}-\frac{\partial f(t,x_0(t))}{\partial x}\right\|_\infty [b-a]\leq 0.\end{aligned}$$

Logo, $\Phi'(x_0)$ satisfaz a condição (1) e portanto $\Phi'(x_0)$ é de fato a derivada de Fréchet de Φ em x_0.

5 Conclusão

Nesta breve explanação sobre as derivadas de Fréchet e de Gâteaux procuramos encadear o conteúdo com o intuito de elucidar alguns detalhes vistos em diferentes literaturas. Isto auxilia o estudante com pouca familiaridade a fazer as devidas conexões e assimilações relacionadas ao assunto. Também apresentamos um pequeno apanhado histórico sobre os matemáticos Fréchet e Gâteaux para situar historicamente o surgimento da derivada de Fréchet. O que nos chamou a atenção foi o pouco tempo de vida que teve o matemático Gâteaux que viveu apenas 25 anos. Junto com as definições e contra-exemplos fornecemos também o cálculo da derivada de Fréchet de funcionais oriundos do cálculo matricial e do cálculo variacional. Mesmo não sendo inéditos os assuntos discutidos, essa abordagem fornece as conexões entre conteúdos que estão dispersos e pode ser uma boa fonte de pesquisa para alunos que estão iniciando o estudo da derivada de Fréchet, de controle ótimo e de cálculo de variações. Conexão significa “relação lógica”, especialmente entre coisas similares, contíguas, sequenciais, ou que pertencem a uma mesma classe ou categoria também significa “aquilo que conecta, ou que serve para conectar, ligar, comunicar”. Podemos entender conexão em matemática como sendo uma relação causal ou relação lógica entre dois objetos matemáticos que mantém entre si uma dependência conceitual. Acreditamos que as relações e conexões em matemática podem ser boas ferramentas para motivar e facilitar a aprendizagem de matemática em nível avançado.

6 Agradecimentos

Agradecemos a Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina (FAPESC) pelo incentivo e apoio financeiro ao Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Sistemas Aplicados ao Ensino (PEMSA). Agradecemos também a UDESC pelo apoio financeiro aos bolsistas de iniciação cientifica, por meio dos programas PIBIC, PROBIC e PIVIC.

7 Referências

BLANCHARD, P.; BRUNING, E. **Variational methods in mathematical physics**. Berlin: Springer-Verlag, 1992.

BUSINSKAS, A. M. **Conversations about connections**: how secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections. 2008. 183 f. Tese (Doutorado em Filosofia)-Faculty of Education, Simon Fraser University, Burnaby, 2008.

FLETT. T. M. **Differential analysis**: differentiation, differential equations and differential inequalities. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

FIGUEIREDO, D. G. Métodos variacionais em equações diferenciais. **Matemática Universitária**, Campinas, n. 7, p. 21-47, jun. 1988.

MALDONADO, A. D. **Integral de Lebesgue, espaços de Sobolev e aplicações**. 2013. 76 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Matemática)-Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

MAZLIAK L. **Renè Eugène Gâteaux**. MacTutor History of Mathematics. 2007. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Gateaux.html>. Acesso em: 14 fev. 2017.

MILOTA, J.; DRÁBEK, P. **Lectures on nonlinear analysis**. Plzen: Vydavatelský servis, 2004.

O’CONNOR, J. J.; ROBERTSON E. F. **René Maurice Fréchet**. MacTutor History of Mathematics Archive. 2005. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/

Frechet.html>. Acesso em: 14 fev. 2017.

RECALDE, L. C.; ARBOLEDA, L. C. Heurística y formalismo: La diferencial de Fréchet e según el enfoque de Lakatos. **Matemáticas: Enseñanza Universitária**, Colombia, v. VIII, n. 1, 2, p. 141-157, nov. 2000.

WATKINS, D. S. **Fundamentals of matrix computations**. 2. ed. New York: Wiley-Interscience, 2002.