



**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 9, jul. 2017

Jorge Corrêa de Araújo

Prof. Associado do
Departamento de Matemática.
FFP-UERJ
jcaraujo_55@yahoo.com.br

Rosa García Márquez

Profa. Associada do
Departamento de Matemática.
FFP-UERJ
rosagm@uerj.br

Equação de Riccati na descrição do movimento de um veículo por meio de uma propulsão hidráulica

Riccati's equation in the description of the movement of a
vehicle by means of a hydraulic propulsion

Resumo

Nesse artigo é analisado o movimento retilíneo de um veículo adquirido pela ação de um jato de água propelido por uma catapulta hidráulica em um tempo finito onde o parâmetro é a velocidade do jato. O jato de água é considerado contínuo e constante até que o veículo atinja a velocidade máxima, e imediatamente após o móvel ter atingido essa velocidade. A equação da quantidade de movimento sobre o móvel, visto como um volume de controle reduz-se a uma equação diferencial de Riccati, cuja solução analítica é obtida. Cessando a propulsão hidráulica imediatamente após o veículo atingir a velocidade terminal, o movimento subsequente até a parada é descrito por uma equação diferencial de Bernoulli. Simulações numéricas são realizadas com a finalidade de mostrar o perfil desses dois movimentos.

Palavras-chave: Catapulta hidráulica. Quantidade de movimento. Equação de Bernoulli.

Abstract

In this paper is analyzed the rectilinear movement of a van obtained by the action of a jet of water propelled by a hydraulic catapult in a finite time where the parameter is the velocity of the jet. The water jet is considered continuous and constant until the vehicle reaches full speed, and immediately after the vehicle has reached the maximum speed, the water jet stops. The equation of the amount of motion on the van, as a control volume is reduced to a differential equation of Riccati, whose analytical solution is obtained. Upon cessation of hydraulic propulsion immediately after the vehicle reaches terminal velocity, the subsequent movement until the stopped is now described by Bernoulli's differential equation. Numerical simulations are performed with the purpose of to shown the profile of these two movements.

Keywords: Hydraulic catapult. Amount of movement. Bernoulli's Equation.



1 Introdução

Em muitos problemas de engenharia, a ênfase é dada em forças que atuam sobre um sistema ou um volume de controle (VC), como na mecânica de fluidos. Na mecânica de partícula o objetivo é acompanhar elementos de massa identificáveis onde pode ser aplicada, por exemplo, a segunda lei de Newton (FOX, 2011, p. 9). Esse tipo de abordagem é conhecido como método lagrangiano. Uma das desvantagens desse método é dar origem a equações diferenciais parciais de difícil tratamento. Desse modo, o uso de volume de controle, é utilizado quando não estamos interessados no comportamento particular do campo de velocidade de um escoamento, mas sim nos efeitos desse campo sobre um ou mais dispositivos, como o volume de controle. Tal método de abordagem é conhecido como descrição euliana. Em geral, os campos de escoamento são tridimensionais, mas com frequência uma abordagem utilizando um menor número de dimensões é às vezes assumida visando à simplificação do problema em análise.

Segundo Richard Meyer (2007, p. 15), rigorosamente os movimentos bidimensionais de um fluido não são realistas e representam apenas uma possibilidade de retratar a realidade. Por outro lado, Fox, Mc Donald e Pritchard (2011, p. 25) afirmam que muitos problemas encontrados na engenharia, mesmo uma análise unidimensional é adequada para fornecer soluções aproximadas, com a precisão requerida.

Entre as inúmeras aplicações da mecânica dos fluidos na engenharia estão os motores baseados em sistemas de propulsão com hidrojato e que tem sido utilizado em testes com lanchas pequenas obtendo bons resultados técnicos e econômicos.

Neste trabalho usaremos a abordagem euliana para a análise bidimensional no plano xy de um veículo movido com aceleração retilínea, na direção do eixo x , partindo do repouso, e sendo propelido por um jato de água contínuo oriundo de uma catapulta hidráulica. O movimento é descrito por um modelo matemático constituído por duas equações diferenciais não lineares independentes, a saber, uma equação de Riccati (ARAUJO, 2016, p. 95) e outra de Bernoulli (BOYCE, 1999, p. 40).

2 Materiais e métodos

Um veículo com massa M , em repouso é propelido por uma catapulta hidráulica, de onde sai um jato de água com velocidade V . O veículo tem uma superfície côncava na sua traseira por onde a água entra atingindo essa superfície de seção reta de área constante A e sendo defletido de 180° saindo na direção horizontal conforme mostra a Fig. 1.

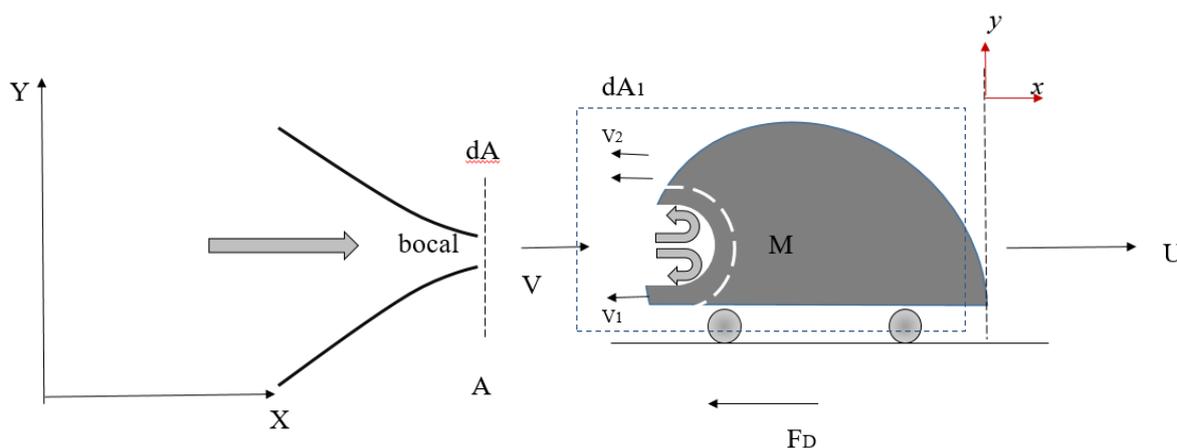


Figura 1: Diagrama do sistema catapulta hidráulica e do veículo em movimento (volume de controle VC no retângulo pontilhado)

É admitida uma força de arrasto aerodinâmico, F_D , proporcional ao quadrado da velocidade do carrinho dada por

$$F_D = kU^2 \quad (1)$$

onde k ($N \cdot s^2 / m^2$) e $U = U(t)$ (m/s) é a velocidade do veículo. A massa do veículo será designada por M (kg) e a velocidade do jato por V (m/s). A área do bocal da catapulta é A (m^2) igual às áreas das seções retas de entrada e de saída da superfície do carrinho. Uma força de resistência, F_r , ao movimento proporcional a velocidade do veículo será também considerada e dada por

$$F_r = k_r U \quad (2)$$

onde k_r ($N \cdot s / m$). Vamos admitir também que o escoamento é uniforme nas seções de entrada e saída do escoamento no carrinho e a densidade da água sendo constante e denotada por ρ (kg/m^3).

Na Fig. (1) o sistema XYZ é inercial, enquanto o sistema xyz fixado no volume de controle (VC) está em aceleração retilínea. A velocidade V (do jato) e U (do veículo) são relativas ao sistema estacionário, enquanto as velocidades V_1 e V_2 (da água no veículo de entrada e saída) são relativas ao sistema xyz em movimento. Tais velocidades podem ser relacionadas pela equação do movimento relativo

$$V_{1,2} = |\vec{V}_1| = |\vec{V}_2| = V - U \quad (3)$$

A equação que trata da descrição da quantidade de movimento para um VC (volume de controle) na direção x é dada por Eq.(4) (FOX, 2011, p. 132)

$$F_{S_x} + F_{B_x} - \int_{VC} a_{rf_x} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} u_{xyz} \rho dV + \int_{SC} u_{xyz_x} \rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A} \quad (4)$$

onde SC corresponde à superfície de controle, isto é, o local do carrinho onde se dá o escoamento. F_{S_x} é a resultante das forças de superfície na direção x que atuam no VC, enquanto F_{B_x} é a componente na direção x da força gravitacional que age no mesmo. O termo a_{rf_x} é a



componente da aceleração retilínea do referencial xyz (não inercial) em relação ao referencial estacionário XYZ .

O primeiro termo do lado direito da Eq. (4) é a taxa de variação da quantidade de movimento dentro do VC (integral de volume) enquanto o segundo termo (integral de área) é a taxa líquida da quantidade de movimento que está saindo da superfície de controle (SC) na direção normal a mesma.

Como as únicas forças de superfície atuando sobre o VC são a força de arrasto F_D e a força de resistência F_r , das Eq. (1) e (2) tem-se

$$F_{Sx} = -F_D - F_r \quad (5)$$

A componente gravitacional é nula na direção x , portanto

$$F_{Bx} = 0 \quad (6)$$

Aqui será assumido que a massa de água em contato com o veículo é desprezível. Como a aceleração a_{rf_x} é relativa ao referencial XYZ , e a integração da expressão do lado esquerdo da eq (4) é sobre o VC, então esse termo pode ser retirado da integral, e desse modo, tem-se

$$\int_{VC} a_{rf_x} \rho dV = a_{rf_x} \int_{VC} \rho dV = a_{rf_x} \cdot M \quad (7)$$

A quantidade de movimento da água na direção x dentro do volume de controle, e medida em relação ao mesmo, não deve variar significativamente com o tempo, pois a velocidade de entrada e saída do fluido é constante em cada ponto desses bocais. Daí, em uma hipótese simplificadora podemos considerar

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{SC} u_{xyz} \rho dV \approx 0 \quad (8)$$

Das equações (4, 6, 7 e 8) tem-se

$$-a_{rf_x} \cdot M_{VC} - F_D - F_r = \int_{SC} u_{xyz} \rho \vec{V}_{xyz} d\vec{A} \quad (9)$$

Da Eq. (3) e do fato das velocidades serem uniformes nas seções tem-se

$$u_{xyz} = V_1 = V_2 = V - U \quad (10)$$

Os vetores \vec{V}_1 e $d\vec{A}_1$ são paralelos com sentidos opostos, enquanto os vetores \vec{V}_2 e $d\vec{A}_2$ são paralelos com o mesmo sentido. Como ρ é constante, a integral do lado direito da Eq. (10) reduz-se a

$$\int_{SC} u_{xyz} \rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A} = \int_{SC} V_1 (\rho \vec{V}_1 \cdot d\vec{A}) + \int_{SC} V_2 (\rho \vec{V}_2 \cdot d\vec{A}) \quad (11)$$

Os parêntesis dos integrandos do lado direito da Eq. (11) são o produto interno de vetores multiplicados pelo escalar densidade, daí

$$\int_{SC} u_{xyz} \rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A} = \rho V_1^2 \int_{A_1} dA + \rho V_2^2 \int_{A_2} dA = -2\rho V_{1,2}^2 A \quad (12)$$

Das equações (10) e (12) tem-se



$$\int_{SC} u_{xyz} \rho \vec{V}_{xyz} \cdot d\vec{A} = -2\rho(V-U)^2 A \quad (13)$$

Combinando as equações (9) e (12) obtém-se

$$a_{rf_x} \cdot M + kU^2 + k_r U = 2\rho(V-U)^2 A \quad (14)$$

Desde que a_{rf_x} é a componente horizontal do VC em relação a XYZ tem-se que

$$a_{rf_x} = \frac{dU}{dt} \quad (15)$$

Das equações (15) e (16) obtém-se a equação diferencial não linear

$$\frac{dU}{dt} = \frac{2\rho(V-U)^2 A - kU^2 - k_r U}{M} \quad (16)$$

A Eq. (16) pode ser reescrita na forma

$$\frac{dU}{dt} = \frac{2\rho V^2 A}{M} - \frac{4\rho VA + k_r}{M} U + \frac{2\rho A - k}{M} U^2 \quad (17)$$

A equação (17) é uma equação diferencial ordinária de Riccati (ARAÚJO, 2016, p. 95). Será mostrado que a curva descrita por este movimento é assintótica à solução particular U_p da Eq. (17). Considerando a condição inicial do repouso $U(0) = 0$ e que o jato de água cessa, quando o veículo atinge a velocidade máxima, isto é, imediatamente após o tempo t_m , então a descrição desse primeiro movimento do carrinho, isto é, partindo do repouso até atingir a velocidade terminal pode ser tratado como um problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = c_1 + b_1 U + a_1 U^2, & \text{para } 0 \leq t \leq t_m, \\ U(0) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

onde

$$a_1 = \frac{2\rho A - k}{M}, \quad b_1 = \frac{-(4\rho AV + k_r)}{M} \quad \text{e} \quad c_1 = \frac{2\rho AV^2}{M} \quad (19)$$

Para determinar a solução da Eq. (18)₁ é necessário conhecer uma solução particular desta equação, a qual será denotada por U_p . Mediante a mudança de variável $U(t) = U_p(t) + W(t)$ a Eq. (18)₁ se transforma em uma equação de Bernoulli, de onde pode ser obtida a função de $W(t)$, obtendo assim a solução analítica do PVI dado pela Eq. (18).

Uma solução particular constante U_p da equação de Riccati pode ser obtida ao substituir U por U_p na Eq. (18)₁ e igualando-a a zero, isto é, $c_1 + b_1 U_p + a_1 U_p^2 = 0$, tem-se

$$U_p = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1}}{2a_1} \quad (20)$$

Para que a equação (20) tenha uma velocidade positiva afim de não originar contradição física para o problema é preciso que $a_1 < 0$, isto é



$$2\rho A < k \quad (21)$$

Daí a solução particular U_p é dada por

$$U_p = \frac{4\rho AV + k_r - \sqrt{8\rho AV(kV + k_r) + k_r^2}}{2(2\rho A - k)} \quad (22)$$

Fazendo a substituição

$$U = U_p + W \quad (23)$$

na equação (18)₁, obtém-se a equação de Bernoulli, dada por

$$\frac{dW}{dt} - (2a_1U_p + b_1)W = a_1W^2 \quad (24)$$

Fazendo

$$Z = W^{-1} \quad (25)$$

A Eq. (24) se transforma em uma equação diferencial linear de primeira ordem da forma

$$\frac{dZ}{dt} + (2a_1U_p + b_1)Z = -a_1 \quad (26)$$

e desse modo, a Eq. (26) pode ser resolvida usando o método do fator integrante (ARAÚJO, 2016, p.81), obtendo

$$Z(t) = \frac{C - \int a_1 e^{(2a_1U_p + b_1)t} dt}{e^{(2a_1U_p + b_1)t}} \quad (27)$$

Integrando e simplificando a Eq. (27) temos que

$$Z(t) = Ce^{-(2a_1U_p + b_1)t} - \frac{a_1}{2a_1U_p + b_1} \quad (28)$$

onde C é uma constante arbitrária. Combinando as equações (23, 25 e 28) a solução geral da Eq. (18)₁ é da forma

$$U(t) = U_p(t) + \frac{1}{Z(t)} \quad (29)$$

Das equações (25), (28) e (29) a solução geral da velocidade do veículo $U(t)$ pode ser posta na forma explícita, e é da forma

$$U(t) = \frac{2a_1U_p + b_1}{C(2a_1U_p + b_1)e^{-(2a_1U_p + b_1)t} - a_1} + U_p \quad (30)$$

Ao considerar a condição inicial do movimento do veículo partindo do repouso $U(0) = 0$

na Eq. (30) temos

$$U(0) = \frac{2a_1U_p + b_1}{C(2a_1U_p + b_1) - a_1} + U_p \quad (31)$$

E igualando a zero obtém-se o valor da constante C, dada por

$$C = \frac{-(a_1U_p + b_1)}{(2a_1U_p + b_1)U_p} \quad (32)$$

Substituindo o valor de C obtido pela Eq. (32) na Eq. (30), temos a solução do PVI (18)

$$U(t) = U_p - \frac{U_p(2a_1U_p + b_1)}{(a_1U_p + b_1)e^{-(2a_1U_p + b_1)t} + a_1U_p} \quad (33)$$

Onde os coeficientes de U(t) são dados na Eq.(19). Como $b_1 < 0$ e foi suposto que $a_1 < 0$ (Eq. (19-21), então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(U_p - \frac{U_p(2a_1U_p + b_1)}{(a_1U_p + b_1)e^{-(2a_1U_p + b_1)t} + a_1U_p} \right) = U_p \quad (34)$$

Portanto, a velocidade máxima atingida é dada por U_p conforme a Eq. (22).

Denotemos por t_m , o tempo em que o jato de água cessa ao atingir a velocidade máxima, e por \bar{t}_m o tempo real para que o veículo atinja 99% da velocidade máxima, isto é $U(\bar{t}_m) = 0.99 U_p$. O valor de \bar{t}_m pode ser determinado da Eq. (33), sendo dado explicitamente por

$$\bar{t}_m = -\frac{\ln\left(\frac{199a_1U_p + 100b_1}{a_1U_p + b_1}\right)}{2a_1U_p + b_1} \quad (35)$$

Uma vez obtido o tempo aproximado \bar{t}_m , podemos considerar o segundo problema de valor inicial fazendo $V=0$ na Eq. (17) para descrever o segundo movimento do veículo, isto é, do ponto (\bar{t}_m, U_p) até o ponto $(t_f, 0)$. Resulta, portanto a seguinte equação

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = b_2U + a_1U^2, & \bar{t}_m < t \\ U(\bar{t}_m) = 0.99U_p \end{cases} \quad (36)$$

onde

$$a_1 = \frac{2\rho A - k}{M}, \quad b_2 = \frac{-k_r}{M} \quad (37)$$

A Eq. (36) é uma equação de Bernoulli, cuja solução para $t \in]\bar{t}_m, \infty[$ é dada por

$$U(t) = \frac{b_2}{Cb_2e^{-b_2t} - a_1} \quad (38)$$

Considerando a condição inicial $U(\bar{t}_m) = 0.99U_p$ temos a solução

$$U(t) = \frac{99b_2U_p}{(99a_1U_p + 100b_2)e^{-b_2(t-\bar{t}_m)} - 99a_1U_p} \quad (39)$$

Observa-se que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{b_2U_p}{(99a_1U_p + 100b_2)e^{-b_2(t-\bar{t}_m)} - 99a_1U_p} \right) = 0$$

Não há como obter o tempo em que a velocidade se anule, de forma analítica ou numérica a partir da Eq. (39), pois trata-se de uma equação transcendental. Nesse sentido, usaremos o tempo \bar{t}_f para que $U(\bar{t}_f) = 0.1$. Assim, da Eq. (39) o tempo \bar{t}_f é dado por

$$\bar{t}_f = -\frac{\ln \left(\frac{99U_p(a_1 + 10b_2)}{99a_1U_p + 100b_2} - b_2\bar{t}_m \right)}{b_2} \quad (40)$$

Portanto, a velocidade do veículo nos dois períodos do movimento é dada por uma função definida por duas sentenças, a saber

$$U(t) = \begin{cases} U_p - \frac{U_p(2a_1U_p + b_1)}{(a_1U_p + b_1)e^{-(2a_1U_p + b_1)t} + a_1U_p}; & 0 \leq t < \bar{t}_m \\ \frac{99b_2U_p}{(99a_1U_p + 100b_2)e^{-b_2(t-\bar{t}_m)} - 99a_1U_p}; & \bar{t}_m \leq t < \bar{t}_f \end{cases} \quad (41)$$

Obtida a velocidade, $U(t)$, é possível determinar o deslocamento do veículo na direção do eixo x .

A equação que rege a distância percorrida (aproximada) pelo veículo desde o repouso até parar pode ser dada através da integral em t da Eq. (41)

$$X(t) = \begin{cases} \bar{t}_m U_p - \int_0^{\bar{t}_m} \frac{U_p(2a_1U_p + b_1)}{(a_1U_p + b_1)e^{-(2a_1U_p + b_1)t} + a_1U_p} dt \\ \int_{\bar{t}_m}^{\bar{t}_f} \frac{b_2U_p}{(a_1U_p + b_2)e^{-b_2(t-\bar{t}_m)} - a_1U_p} dt \end{cases} \quad (42)$$

3. Resultados e discussões

Simulações numéricas foram realizadas com a finalidade de mostrar o comportamento dos parâmetros de velocidade máxima do móvel, U_p (m/s), o tempo que o móvel gasta para atingir 99% da velocidade máxima partindo do repouso, \bar{t}_m (s), o tempo total gasto no percurso, \bar{t}_f (s), a distância percorrida pelo móvel do repouso até atingir a velocidade máxima, X_1 (m), a distância

percorrida pelo móvel do ponto (X_1) até parar, e finalmente, a distância total percorrida pelo móvel desde o repouso até parar, X (m).

Os parâmetros $M = 80 \text{ kg}$, $\rho = 999 \text{ kg/m}^3$, $V = 35 \text{ m/s}$ e $A = 0.001 \text{ m}^2$ são fixados, enquanto os parâmetros da força de arrasto e da resistência ao movimento foram variados. A Tabela 1 mostra os resultados das simulações realizadas com o uso do sistema algébrico computacional *Maple*, e nota-se claramente que o efeito do arrasto aerodinâmico nas simulações é o principal responsável pela diminuição da velocidade do veículo.

Tabela 1: Variação dos parâmetros do movimento k_r (N.s/m) e k (N.s²/m²)

| Simulações | k | k_r | U_p (m/s) | \bar{t}_m (s) | t_f (s) | X_1 (m) | X_2 (m) | X (m)* |
|----------------|-----|-------|-------------|-----------------|-----------|-----------|-----------|----------|
| 1 ^a | 4 | 4 | 14.2053 | 1.8956 | 60.1101 | 20.8797 | 81.3355 | 102.2152 |
| 2 ^a | 4 | 8 | 13.9270 | 1.8666 | 36.4475 | 20.1665 | 58.6721 | 78.8386 |
| 3 ^a | 8 | 4 | 11.4979 | 1.3860 | 40.9799 | 12.2258 | 36.7211 | 48.9469 |
| 4 ^a | 8 | 8 | 11.3369 | 1.3740 | 26.8745 | 11.9568 | 28.9304 | 40.8872 |

* $X = X_1 + X_2$

A Fig.2 revela o perfil dos movimentos das simulações que foram efetuadas utilizando os dados dos coeficientes k e k_r . É possível observar que as curvas com $k=8$ e $k_r = 4$ e $k_r = 8$ não tem alterações relevantes no perfil, o que parece indicar, que o parâmetro de resistência k_r não contribui significativamente para o decréscimo do movimento.

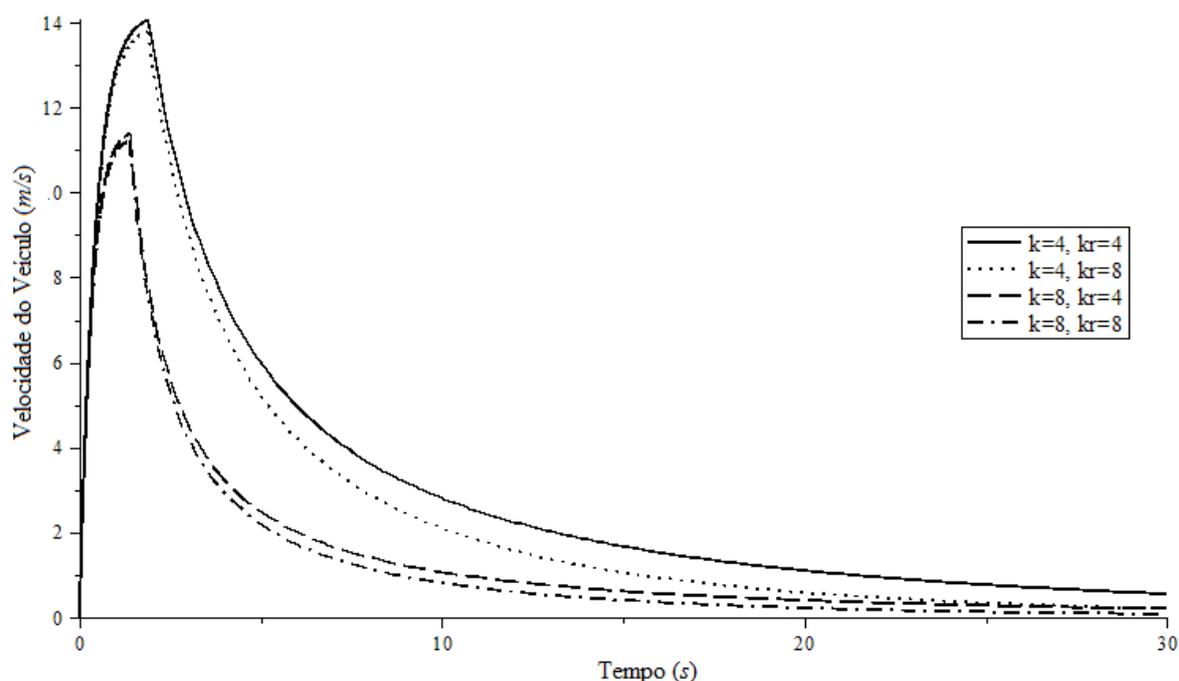


Figura 2: Perfil da Velocidade do veículo em relação ao tempo com diferentes parâmetros k e k_r



4 Conclusões

O problema proposto que, acreditamos ser de interesse em engenharia, em especial, para pequenos veículos movidos por sistemas de propulsão a jato de água, pode ser representado com boa aproximação por uma equação diferencial de Riccati (na primeira parte do movimento) e como uma equação de Bernoulli (na segunda parte do movimento), e desse modo, o movimento do móvel pode ser estudado em detalhes. A análise das simulações mostra que a força de arrasto parece contribuir de forma predominante para a diminuição da velocidade do veículo.

Bibliografia

- ARAÚJO, J. C.; MÁRQUEZ, R. G.; HUAROTO, Y. A. R. **Equações diferenciais ordinárias: teoria básica e aplicações com o uso do Maple**. Joinville: Ed. Clube de Autores, 2016.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.
- FOX, R.; PRITCHARD, P. J.; MCDONALD, A. T. **Introdução à mecânica dos fluidos**. 7. ed. Tradução e revisão técnica de Ricardo Koury e Luiz Machado. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2011.
- RICHARD, E. M. **Introduction to mathematical fluid dynamics**. Mineola: Dover Publications, Inc., 2007.
- STREETER, V. L.; WYLIE, E. B. **Mecânica dos fluidos**. Traduzido por Milton Gonçalves Sanches. São Paulo: Editora McGraw-Hill, 1982.