Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 9, jul. 2017

A fórmula de Binet como modelo de generalização e extensão da sequência de Fibonacci a outros conceitos matemáticos*

The Binet formula as generalization model and extension of the Fibonacci sequence to other mathematical concepts

Arlem Atanazio dos Santos[1]
Secretaria de Educação do Estado do Ceará/Seduc-Ce
arlem_mat@yahoo.com.br

Francisco Regis Vieira Alves[2]
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará/IFCE
fregis@ifce.edu.br

Resumo

Neste artigo apresentamos uma discussão sobre alguns modelos de generalização e extensão de um tópico bastante conhecido do contexto histórico matemático, a sequência de Fibonacci. Assim, partindo do problema clássico dos coelhos imortais estabelecemos alguns de seus modelos de generalização, implícitos e explícitos, com destaque, para a fórmula de Binet; modelo que permite a discussão sobre a extensão da sequência de Fibonacci ao campo dos inteiros, através da obtenção da sequência com índices negativos; bem como sua relação com outros conceitos matemáticos, tais como, a sequência de Lucas, as Matrizes, o triângulo de Pascal e a Trigonometria, com suas respectivas generalizações e extensões a índices negativos. Desse modo, trazemos uma abordagem da sequência de Fibonacci, que suscita elementos, não somente, históricos, mais essencialmente matemáticos.
Palavras-chave: Sequência de Fibonacci. Generalizações. Extensões.

Abstract

In this paper we present a discussion about some models of generalization and extension of a well known topic of the historical mathematical context, the Fibonacci sequence. Thus, starting from the classic problem of immortal rabbits, we established some of their models of generalization, implicit and explicit, with emphasis, for the formula of Binet; model that allows the discussion about the extension of the Fibonacci sequence to the field of the integers, by obtaining the sequence with negative indices; as well as its relation to other mathematical concepts, such as the Lucas sequence, the Matrices, the Pascal triangle and the Trigonometry, with their respective generalizations and extensions at negative indices. Thus, we bring an approach to the Fibonacci sequence, which raises not only historical, but essentially mathematical elements.
Keywords: Fibonacci sequence. Generalizations. Extensions.

---

* Pesquisa realizada como parte integrante da Dissertação de Mestrado Acadêmico do Programa de Pós- Graduação em Ensino de Ciências e Matemática-PGECM, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará-IFCE, sob orientação do Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves.

[1] Professor de Matemática da Secretária de Educação do Estado do Ceará-SEDUC-CE e Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática-PGECM/IFCE.

[2] Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática-PGECM/IFCE. Docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. ENCIMA/UFC.

1 Introdução

Trataremos neste estudo, da sequência de Fibonacci, sequência esta, que tem sua origem discutida a partir da resolução do problema dos coelhos imortais, proposto por Fibonacci, em 1202, em sua obra *Liber Abacc*i. Problema descrito como: *um homem põe um casal de coelhos dentro de um cercado. Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, se a natureza desses coelhos é tal que a cada mês um casal gera um novo casal, que se torna produtivo a partir do segundo mês?* Sobre tal contexto, suscitaremos alguns modelos matemáticos que evidenciam o processo de generalização e extensão, da sequência Fibonacci; além da possibilidade de sua relação, com outros conceitos matemáticos.

2 A fórmula de Binet como modelo de generalização da sequência de Fibonacci

Continuando, sobre os aspectos matemáticos relativos à sequência de Fibonacci, Lando (2003) destaca, que esta pode ser definida por $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, tendo como dois primeiros termos $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$. E que, ao partirmos da lei de recorrência, estabelecida, podemos obter facilmente a seguinte sequência $(1;1;2;3;5;8;13;21;34;55;89;144;233;377;.....)$. Sendo que ao começarmos com f_2, cada elemento desta sequência é a soma dos dois anteriores.

Notemos que, dos argumentos suscitados, a obtenção de um elemento qualquer da sequência de Fibonacci será conseguida, mediante, o estabelecimento dos seus dois elementos anteriores e a utilização da lei de recorrência. Assim, se quisermos obter valores elevados da sequência, como por exemplo, o f_{100}, pelo destacado, teremos que conhecer f_{98} e f_{99}. E que, pela dinâmica estabelecida, teríamos que conhecer os anteriores a f_{98}, e assim sucessivamente, caracterizando a recursividade.

No entanto, devemos nos questionar sobre a possibilidade de termos um modelo, não mais recursivo, e que nos possibilite a obtenção, digamos direta, dos termos da sequência de Fibonacci. Sobre o modelo de generalização discutido, destacamos que:

Huntley (1985, p. 63) argumenta que a "ligação entre a divisão áurea e a série de Fibonacci pode ser vista de um novo ângulo considerando o termo geral da série. Trata-se da fórmula de Binet". Burton (2007) afirma que esta fórmula é obtida considerando-se $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, raízes da equação quadrática $x^2 - x - 1 = 0$. Grimaldi (2012) relata que entre as muitas propriedades satisfeitas por α e β, que podemos indicar: $\alpha^2 = \alpha + 1$; $\alpha\beta = -1$; $\alpha - \beta = \sqrt{5}$; $\alpha^{-1} = -\beta$; $\alpha^2 + \beta^2 = 3$; $\beta^2 = \beta + 1$; $\beta^{-1} = -\alpha$; $\alpha + \beta = 1$ e $\alpha^2 - \beta^2 = \sqrt{5}$. Sendo a fórmula de Binet, expressa pelo seguinte resultado:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, n = 0,1,2,3,\ldots$$

Sobre esta formulação, Lívio (2002, p. 108) destaca que "num primeiro momento, essa formidável e desconcertante fórmula, desde que não parece óbvio, que a partir da substituição de seus índices, a mesma produz números inteiros". Além disso, Huntley (1985, p. 63) argumenta que "não são necessários cálculos demorados para demonstrar que esta formula produz os primeiros termos inteiros da série". Burton (2007) ressalta que esta fórmula é obtida considerando-se $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, raízes da equação quadrática $x^2 - x - 1 = 0$.

Dando continuidade, como as raízes desta equação devem satisfazer a $\alpha^2 = \alpha + 1$ e $\beta^2 = \beta + 1$. Se fizermos a primeira destas relações multiplicada por α^n, e a segunda por β^n, teremos: $\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n$ (i) e $\beta^{n+2} = \beta^{n+1} + \beta^n$ (ii). E ao subtrairmos a segunda equação da primeira, e dividirmos ambas por $\alpha - \beta$, encontramos:

$\frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ (iii). Se colocarmos $H_n = (\alpha^n - \beta^n) / \alpha - \beta$. A equação anterior pode ser representada de forma mais concisa como: $H_{n+2} = H_{n+1} + H_n, n \geq 1$.

Notemos que, anteriormente, apresentamos alguns resultados relativos à α e β, tais como: $\alpha + \beta = 1$, $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ e $\alpha\beta = -1$. Consequentemente, obtemos: $H_1 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} = 1$, $H_2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = \alpha + \beta = 1$ e $H_3 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}{\alpha - \beta} = 2$. Com isto, os resultados $H_1, H_2, H_{3,} \ldots\ldots$, representam a Sequência de Fibonacci, com $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, onde $n \geq 1$.

Com isto, vimos que a fórmula de Binet apresenta a possibilidade de obtenção dos termos inteiros da sequência de Fibonacci, de maneira explícita, sem utilizarmos a ideia da recursividade, sendo assim, um modelo de generalização da sequência de Fibonacci. Na seção seguinte, continuaremos tratando da fórmula de Binet, discutindo suas relações com as sequências recorrentes.

3 Sequências recursivas lineares e a fórmula de Binet

Vejamos agora, outros tipos de demonstrações da fórmula de Binet, nesse sentido, utilizaremos a noção de sequências lineares recursivas homogêneas. Koshy (2011) discute a seguinte equação $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$, com $c_1, c_2, c_3 + \ldots + c_k \in IR, c_k \neq 0$. O autor explica o significado de "linear", na medida em que, todos os termos no lado direito comparecem, apenas, potências de grau um, dos termos antecedentes $a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_{n-k}$. Parker (1964, p. 67) comenta que "da teoria das equações homogêneas de diferenças lineares assegura que uma solução mais geral pode ser expressa por $f(n) = c_1 x^n + c_2 x^n$, c_1 e c_2 são constantes arbitrárias".

Demonstraremos os argumentos de Koshy (2011) e de Parker (1964), sobre a obtenção da solução geral de uma sequência linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes. Nesse sentido, utilizaremos os argumentos de Lima et al. (1998) sobre como determinar a solução geral de uma relação recorrente de segunda ordem, sendo a sequência de Fibonacci um exemplo de aplicação de tal modelo matemático.

Assim, iniciaremos apresentando que Lima et al. (1998) define este tipo sequência da seguinte da forma: $x_{n+2} + p.x_{n+1} + q.x_n = 0$, com p e q constantes, e $q \neq 0$. Note que, caso tenhamos $q = 0$ a recorrência torna-se de primeira ordem. Lembrando ainda que a "cada recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, da forma

$x_{n+2}+p.x_{n+1}+q.x_n=0$, associaremos uma equação do segundo grau, $r^2+pr+q=0$, denominada de equação característica." (LIMA et al.,1998, p. 74).

Antes de continuarmos, justificaremos a associação existente, entre a relação de recorrência e uma equação do segundo grau da forma $r^2-r-1=0$ (*equação característica*).

Desse modo, se tivéssemos a equação $x_{n+2}+p.x_{n+1}+q.x_n=0$, com q=0. Teríamos $x_{n+2}=-p.x_{n+1}$, tornando-se uma relação de recorrência de primeira ordem, que tem como solução geral uma (progressão geométrica) da forma $x_n=r^n$. Logo, uma ideia inicial considerável será observar se alguma progressão geométrica da forma $x_n=r^n$, satisfaz a equação $x_{n+2}+p.x_{n+1}+q.x_n=0$. Assim, se $r^{n+2}+pr^{n+1}+qr^n=0$ então $r^n(r^2+pr+q)=0,\forall n$ resultando em $r^2+pr+q=0$ (*equação característica da recorrência*). Sendo as soluções de $r^2+pr+q=0$, soluções da relação de recorrência.

Outra questão, evidenciada por Lima et al. (1998) é de como obter uma solução geral para uma recorrência linear de segunda ordem, homogênea, com coeficientes constantes do tipo $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$. Nesse sentido, Lima et al. (1998, p. 74-75) apresenta dois teoremas que respondem a questão levantada, teoremas que enunciamos e demonstramos a seguir:

Teorema 1**:** Se as raízes de $r^2+pr+q=0$, são r_1 e r_2, então $a_n=C_1r_1^n+C_2r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2}+p.x_{n+1}+q.x_n=0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

Demonstração: Admitindo que $a_n=C_1r_1^n+C_2r_2^n$ seja solução geral de $x_{n+2}+p.x_{n+1}+q.x_n=0$, com r_1 e r_2 raízes. Daí temos que:

$$C_1r_1^{n+2}+C_2r_2^{n+2}+p\left(C_1r_1^{n+1}+C_2r_2^{n+1}\right)+q\left(C_1r_1^n+C_2r_2^n\right)=0.Logo,$$
$$se\quad C_1r_1^n\left(r_1^2+pr_1+p\right)+C_2r_2^n\left(r_2^2+pr_2+p\right)=0\quad então\quad C_1r_1^n\left(0\right)+C_2r_2^n\left(0\right)=0,(cqd)$$

Teorema 2**:** Se as raízes de $r^2+pr+q=0$ são r_1 e r_2, com $r_1\neq r_2$, então todas as soluções de recorrência $x_{n+2}+p.x_{n+1}+q.x_n=0$, são da forma $a_n=C_1r_1^n+C_2r_2^n$, C_1 e C_2 constantes.

Demonstração: Seja y_n uma solução de $x_{n+2}+p.x_{n+1}+q.x_n=0$, temos que $C_1r_1^n+C_2r_2^n=y_n$. Tomando dois casos particulares y_1 e y_2. Devemos provar que $\forall n\geq 0$, teremos $C_1r_1^n+C_2r_2^n=y_n$, onde C_1 e C_2, são soluções do sistema $\begin{cases}C_1r_1^n+C_2r_2^n=y_1\\C_1r_1^n+C_2r_2^n=y_2\end{cases}$.

Demonstraremos o Teorema 2, por indução. Com isto:

I) assumiremos inicialmente que a expressão é válida para $n=1$ e $n=2$. Logo, temos que obter C_1 e C_2, na resolução do sistema a seguir. Resolvendo temos que:

$$\text{Se }\begin{cases}C_1r_1^n+C_2r_2^n=y_1\\C_1r_1^n+C_2r_2^n=y_2\end{cases}\text{então }C_1=\frac{r_2^2y_1-r_2y_2}{r_1r_2(r_2-r_1)}\text{ e }C_2=\frac{r_1y_2-r_1^2y_1}{r_1r_2(r_2-r_1)}.$$

Quando tivermos $r_1\neq r_2, r_1\neq 0$ e $r_2\neq 0$. O sistema pode ser classificado como Sistema Possível e Determinado, caracterizando a solução para $n=1$ e $n=2$. Dando prosseguimento:

II) Suponhamos que a expressão seja válida para n e $n+1$, devemos mostrar que a mesma é válida para $n+2$. Nesse sentido, partiremos da igualdade $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n=0$ (i), e como

x_{n+1} e x_n são soluções de (i), estas assumem as seguintes formas: $x_{n+1} = C_1 r_1^{\,n+1} + C_2 r_2^{\,n+1}$ e $x_n = C_1 r_1^{\,n} + C_2 r_2^{\,n}$. Ao substituirmos, esses resultados em (i), encontramos:

$$
\begin{aligned}
& x_{n+2} + p(C_1 r_1^{\,n+1} + C_2 r_2^{\,n+1}) + q(C_1 r_1^{\,n} + C_2 r_2^{\,n}) = 0 \\
& x_{n+2} + qC_1 r_1^{\,n} + pC_1 r_1^{\,n+1} + qC_2 r_2^{\,n} + pC_2 r_2^{\,n+1} = 0 \\
& x_{n+2} + C_1 r_1^{\,n}(q + pr_1 + ?) + C_2 r_2^{\,n}(q + pr_2 + ?) = 0 \\
& x_{n+2} + C_1 r_1^{\,n}(q + pr_1 + r_1^{\,2}) + C_2 r_2^{\,n}(q + pr_2 + r_2^{\,2}) = C_1 r_1^{\,n+2} + C_2 r_2^{\,n+2}
\end{aligned}
$$

Do resultado anterior, como r_1 e r_2 são raízes, temos que: $x_{n+2} = C_1 r_1^{\,n+2} + C_2 r_2^{\,n+2}$ (cqd). A partir dos teoremas caracterizados temos condições de obter soluções gerais de equações recorrentes lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes. Fundamentados nos resultados dos Teoremas 1 e 2, discutidos anteriormente, a seguir apresentamos outra demonstração da Fórmula de Binet. Vejamos:

Demonstração: Sabemos que a relação de recorrência de Fibonacci é definida por: $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$, com $n \geq 0$ e $f_0 = f_1 = 1$, e que esta terá como equação característica $r^2 = r + 1$, com raízes $r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Então $f_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ (i). Para determinarmos os valores de C1 e C2, devemos utilizar as condições $f_0 = f_1 = 1$, a partir daí, obtemos o sistema:

$$
\begin{cases}
C_1 + C_2 = 1 \\
C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1
\end{cases}
$$

, resolvendo o sistema, temos: $C_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ e $C_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$.

Logo, retomando o resultado $f_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ e ao substituirmos neste C_1 e C_2, encontramos a *fórmula de Binet*, a seguir:

$$
f_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right], n \in N
$$

Assim, destacamos a relação existente entre sequências recorrentes lineares e a fórmula de Binet, trazendo a demonstração do modelo de Binet, a partir dos fundamentos das sequências recorrentes lineares homogêneas, no caso, de segunda ordem. Prosseguindo, na discussão, destacaremos outro modelo de generalização e de extensão da sequência de Fibonacci, a outro campo numérico, no caso, os inteiros.

4 A fórmula de Binet estendida a índices inteiros

No estudo de Alfred (1965) o autor apresenta a possibilidade de obtenção através da recursividade, de valores com índices negativos para a sequência de Fibonacci. Perspectiva expressa na Figura 1, a seguir:

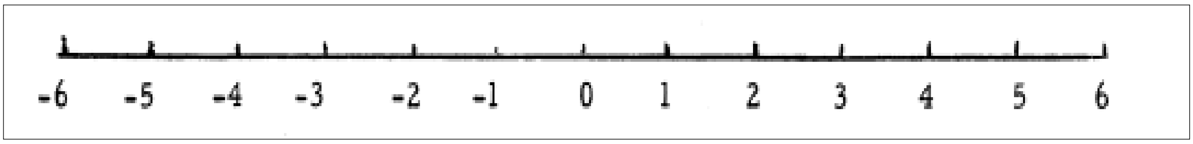

Figura 1 - Possibilidade de extensão da sequência de Fibonacci a valores com índices negativos.
Fonte: Alfred (1965, p. 2).

Possibilidade evidenciada, também, por Hoggat (1969), Zeckendorf (1972), Vorobiov (1974), Dunlap (1997), Alves e Borges Neto (2011). E que os autores caracterizam pela seguinte propriedade $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$. Em Hoggat (1969), o autor discute a demonstração de tal propriedade, a partir da fórmula de Binet. Nesse sentido, para demonstrá-la, simplesmente, escreve:

$f_{-n} = \dfrac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} = \dfrac{\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^n - \left(\dfrac{1}{\beta}\right)^n}{\alpha - \beta}$. Em seguida, observa que $\alpha\beta = -1$. Donde encontra: $f_{-n} = \dfrac{(-\beta)^n - (-\alpha)^n}{\alpha - \beta} = (-1)^{n+1}\left(\dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)$. Com isto, temos $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$ *(cqd).*

Caracterizando assim, o modelo de generalização e extensão da sequencia de Fibonacci, a índices negativos, ampliando seu domínio aos inteiros. A seguir, apresentaremos algumas relações da sequência de Fibonacci, com outra modelo recorrente, a sequência de Lucas.

5 A fórmula de Binet para os números de Lucas

Hoggat (1969) argumenta que a sequência de Lucas é nomeada assim, em homenagem ao matemático francês do século dezenove François Eduard Anatole Lucas (1841-1891). Conway e Guy (1999) relatam que os números de Lucas L_n, relacionam-se com os números de Fibonacci de várias maneiras, tendo sua mesma lei de recorrência, contudo, com termos iniciais diferentes. Sobre tal fato, Koshy (2011) ressalta que ao usarmos a relação de recorrência $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n \geq 3$, tomando as seguintes condições iniciais $L_1 = 1$ e $L_2 = 2$, temos como resultado: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47,.... (*Sequência de Lucas*).

Como estabelecemos, a sequência de Fibonacci relaciona-se intrinsicamente, com a de Lucas. Nesse sentido, Parker (1964, p. 67) apresenta um modelo geral de obtenção dos números de Lucas a partir do modelo de Fibonacci, vejamos:

Inicialmente, o autor parte da forma generalizada da equação de recorrência $F(n) = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n$, com c_1 e c_2 constantes quaisquer, admitindo as seguintes condições iniciais $F(0) = 2, F(1) = 1$. Daí, podemos obter o sistema: $\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 = 1 \end{cases}$, aonde considera $x_1 = \alpha = {}^{1+\sqrt{5}}\!/_{2}, x_2 = \beta = {}^{1-\sqrt{5}}\!/_{2}$ então $x_1 - x_2 = \sqrt{5}$ e $x_1 + x_2 = 1$. Ora, fazendo as contas, vemos $c_1 x_1 + (2 - c_1) x_2 = 1$ então $c_1 x_1 + 2x_2 - c_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow c_1(x_1 - x_2) = 1 - 2x_2$. Segue que: $c_1 = \dfrac{1 - 2x_2}{(x_1 - x_2)} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$ e, para o outro valor, devemos encontrar $c_2 = 1$, como assim indicam Parker (1964, p. 67). Por fim, Parker estabelece:

$F(n)=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Resultado, que também pode ser expresso como: $L_n=\alpha^n+\beta^n, n=1,2,3,.....$(*Fórmula de Binet para a sequência de Lucas*).

Na Figura 2 a seguir, Hoggat (1969) traz os resultados dos números de Fibonacci e Lucas. Podemos, a partir desse quadro comparativo, estabelecermos algumas relações preliminares entre estes números, discussão que mostraremos, a seguir:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	...
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...
1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	...
L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}	...

Figura 2- Comparativo de resultados entre os números de Fibonacci e Lucas.
Fonte: Hoggat (1969, p. 27).

Prosseguindo, notemos na figura que ao fazermos: $F_1+F_3=L_2$, $F_2+F_4=L_3$, este resultado de modo geral é dado por: $L_n=F_{n-1}+F_{n+1}, n>1$ (*lei de recorrência dos números de Lucas*).

Demostraremos este resultado, utilizando a fórmula de Binet. Assim, faremos: $F_{n-1}=\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}$ e $F_{n-1}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$, e ao somarmos os resultados, temos:

$$\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}+\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{-1}.\alpha^n-\beta^{-1}.\beta^n+\alpha.\alpha^n-\beta.\beta^n}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{\alpha^n(\alpha^{-1}+\alpha)-\beta^n.(\beta^{-1}+\beta)}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^n(\alpha-\beta)+\beta^n.(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}=\alpha^n+\beta^n=L_n(c.q.d)$$

Ainda nessa perspectiva, de discussão de propriedades relativas aos números de Fibonacci e Lucas, em Hoggat (1969, p. 27) o autor apresentada a possibilidade de relacionarmos F_n e L_n em temos de α^n e β^n. Sendo a reciproca dessa propriedade verdadeira.

Assim, utilizaremos $\alpha-\beta=\sqrt{5}$ e reescreveremos as formas de Binet para Fibonacci e Lucas das seguintes formas: se $F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ então $\alpha^n-\beta^n=\sqrt{5}F_n(i)$ e $L_n=\alpha^n+\beta^n(ii)$. Ao adicionarmos (i) e (ii), temos: se $\begin{cases}\alpha^n-\beta^n=\sqrt{5}F_n\\ \alpha^n+\beta^n=L_n\end{cases}$ então $2\alpha^n=\sqrt{5}F_n+L_n$, logo $\alpha^n=\frac{\sqrt{5}F_n+L_n}{2}$. E ao subtrairmos (i) e (ii), temos: se $\begin{cases}\alpha^n-\beta^n=\sqrt{5}F_n\\ \alpha^n+\beta^n=L_n\end{cases}$ então $-2\beta^n=\sqrt{5}F_n-L_n$, logo $\beta^n=\frac{L_n-\sqrt{5}F_n}{2}$.

Na Figura 3 a seguir, Hoggat (1969) apresenta resultados dos números de Fibonacci e Lucas, com valores de inteiros de n, ou seja, apresenta a possibilidade de termos os números de Lucas estendidos aos inteiros, propriedade já discutida para os números de Fibonacci.

...	F_{-4}	F_{-3}	F_{-2}	F_{-1}	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	...
...	−3	2	−1	1	0	1	1	2	3	...
...	7	−4	3	−1	2	1	3	4	7	...
...	L_{-4}	L_{-3}	L_{-2}	L_{-1}	L_0	L_1	L_2	L_3	L_4	...

Figura 3- Possibilidade de extensão dos números de Lucas a índices inteiros.
Fonte: Hoggat (1969, p. 28).

Dos argumentos anteriores, caracterizamos a existência do seguinte resultado $L_{-n} = (-1)^n.L_n$. Demonstrarmos esse resultado, fundamentados nos argumentos de Hoggat (1969) que para demonstrar a propriedade de Fibonacci, muda a variável na fórmula de Binet de n para –n, e procede do seguinte modo:

$$L_{-n} = \alpha^{-n} + \beta^{-n} = \frac{1}{\alpha^n} + \frac{1}{\beta^n} = \frac{\beta^n + \alpha^n}{\alpha^n \beta^n} = \frac{\alpha^n + \beta^n}{(-1)^n} = (-1)^n(\alpha^n + \beta^n) = (-1)^n.L_n\,(c.q.d)$$

Como estamos mostrando, os números de Lucas relacionam-se diretamente com os números de Fibonacci através de propriedades comuns. Dando continuidade, apresentaremos e demonstraremos outras identidades da sequência de Fibonacci, destacando agora, sua relação com as matrizes.

6 A fórmula de Binet Matricial

Os estudos de Alfred (1965), Hoggat (1969), Koshy (2011), Stakhov (2009) e Grimaldi (2012), apresentam uma discussão que relaciona as matrizes com os números de Fibonacci. Assim, iniciamos nossa apresentação caracterizando, que os autores caracterizam como a matriz $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Sendo esta, uma matriz de segunda ordem que tem como elementos $a_{11} = 1, a_{12} = 1, a_{21} = 1, a_{22} = 0$, os números de Fibonacci. Como destaca Grimaldi (2012 p. 113) “propriedades desta matriz foram investigados em 1960 por Charles H. King em sua tese de mestrado no State College San Jose, na Califórnia”. Seguindo um raciocínio comum, aos estudos citados. Faremos a multiplicação entre as matrizes:

Iniciando com $Q.Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, encontramos $Q^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; continuando faremos, $Q^2Q^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, encontrando $Q^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; seguindo faremos $Q^3Q^1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, obtendo $Q^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Seguindo o procedimento, podemos conjecturar o resultado $Q^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$. Nesse sentido, enunciamos:

Teorema 3 **:** Para um dado número inteiro n, a enésima potência da matriz Q é dado por: $Q^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$, sendo f_{n+1}, f_n, f_{n-1}, números de Fibonacci.

Demonstraremos o Teorema 3, utilizando o princípio da indução matemática. Iniciamos com $n=1$, $Q^1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_2 & f_1\\ f_1 & f_0\end{pmatrix}$. Para $n=k$, temos: $Q^k=\begin{pmatrix}f_{k+1} & f_k\\ f_k & f_{k-1}\end{pmatrix}$. Para $n=k+1, Q^{k+1}=Q^kQ=\begin{pmatrix}f_{k+1}+f_k & f_{k+1}\\ f_k+f_{k-1} & f_k\end{pmatrix}.=\begin{pmatrix}f_{k+2} & f_{k+1}\\ f_{k+1} & f_k\end{pmatrix}(c.q.d)$. Como existe uma relação intrínseca entre a teoria das matrizes e o estudo dos determinantes, o próximo teorema, nos informa o determinante da matriz Q^n.

Teorema 4 **:** Para um dado inteiro n, temos: $det(Q)^n=(-1)^n$.

Demonstração: do estudo dos determinantes sabemos $det(Q^n)=(det\,Q)^n$, e como $\det Q=|Q|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1$, concluímos que: $det(Q)^n=(-1)^n$.

Tomando por referência o Teorema 4, podemos demonstrar a seguinte identidade de Fibonacci, a fórmula de Cassini. Como destaca Stakhov "é uma das mais importantes identidades dos números de Fibonacci. Esta é chamada a fórmula de Cassini em homenagem ao famoso astrônomo francês Giovanni Domenico Cassini (1625-1712), que descobriu a formula pela primeira vez" (STAKHOV, 2009, p. 323).

$$f_{n-1}.f_{n+1}-f_n^{\ 2}=(-1)^n \ \ (\textit{Fórmula de Cassini})$$

Demonstraremos, o resultado anterior, a partir dos argumentos estabelecidos no Teorema 4. Assim, temos que: $det\,Q^n=\begin{vmatrix}f_{n+1} & f_n\\ f_n & f_{n-1}\end{vmatrix}=f_{n-1}.f_{n+1}-f_n^{\ 2}=(-1)^n, n\geq 1 \ \ (c.q.d).$

Dando prosseguimento, tomaremos como referência os argumentos de Hoggat (1969, p. 66-67), sobre o estudo da álgebra das matrizes, destacando que "na álgebra das matrizes é de grande interesse técnico o polinômio característico", que Hoggat (1969), caracteriza como: Dada a matriz Q, seu polinômio característico é definido por: $P(x)=det(Q-xI)$. Assim, ao desenvolvermos tal resultado, encontramos:

$$P(x)=\det(Q-xI)=\left|\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}-x\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}a-x & b\\ c & d-x\end{pmatrix}\right|=$$

$$=x^2-(a+d)x+(ad-bc).Se\ \ P(x)=0, temos: x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0.$$

Do resultado anterior, notemos que o termo constante na equação característica $x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0$, no caso, $(ad-bc)$ é o determinante da matriz Q, e o termo de coeficiente $-(a+d)$ ou $(a+d)$ se for negativo; informa-nos a soma dos elementos da diagonal principal da matriz Q, que é chamado de traço da matriz. A partir, dos argumentos sobre polinômio característico, podemos apresentar e demonstrar o teorema a seguir, e seu corolário presentes no estudo de Koshy (2011, p. 365). Sendo:

Teorema 5 **:** As raízes características de Q^n, são α^n e β^n.

Demonstração: Utilizaremos a noção de polinômio característico para obtermos as raízes de Q^n. Calculemos inicialmente:

$$det(Q-xI)=\begin{vmatrix} f_{n+1}-x & f_n \\ f_n & f_{n-1}-x \end{vmatrix}=(f_{n+1}-x).(f_{n-1}-x)-f_n^{\ 2}=x^2-(f_{n+1}+f_{n-1})x+(f_{n+1}.f_{n-1}-f_n^{\ 2}),$$

como $f_{n+1}+f_{n-1}=L_n$ e $f_{n+1}.f_{n-1}-f_n^{\ 2}=(-1)^n$.Concluímos: $\det(Q-xI)=x^2-L_nx+(-1)^n(i)$.

Retomando de (i), para obtermos as raízes faremos: $det(Q-xI)=0$, e ao resolvermos a equação $x^2-L_nx+(-1)^n=0$,obtemos: $x=\frac{L_n\pm\sqrt{L_n-4(-1)^n}}{2}$, e ao usarmos a identidade, $L_n-4(-1)^n=5.f_n^{\ 2}$, temos: $\alpha^n=\frac{L_n+\sqrt{5}.f_n}{2}$ e $\beta^n=\frac{L_n+\sqrt{5}.f_n}{2}(c.q.d)$. O resultado anterior possui uma consequência imediata, que se expressa no seguinte, resultado:

Corolário: As raízes características de Q são α e β.

Na demonstração, desta assertiva, utilizaremos os argumentos de Koshy (2011), que adota o valor $n=1$, na equação característica $x^2-L_nx+(-1)^n=0$, obtendo a equação $x^2-x-1=0$ (*equação característica das sequências recorrentes lineares homogêneas de segunda ordem)*, já caracterizado em seções anteriores.

Nesse sentido, Hoggat (1969) e Koshy (2011) argumentam sobre o seguinte resultado, que *as raízes características da equação característica são raízes características da equação da matriz Q*. Resultado que ilustra o conhecido Teorema de Cayley-Hamilton, que afirma que *cada matriz satisfaz sua equação característica*, teorema que admitiremos sem prova, encontrado em Hoggat (1969, p. 67) e Koshy (2011, p. 366).

Fundamentado no Teorema de Cayley-Hamilton, Koshy (2011) enuncia o seguinte resultado: que a matriz Q satisfaz a sua equação característica $Q^2-Q-I=0$. Fato que pode ser facilmente verificado, como faremos a seguir:

Demonstração: Partiremos de $Q^2-Q-I=0$, que escreveremos como: $Q^2-Q=I$ (i); sendo, $Q=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. Ao substituirmos em (i), os resultados anteriores, encontramos: $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$(ii). Desenvolvendo (ii), temos: se $\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ então $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}(c.q.d)$. Em Stakhov (2009) encontramos uma tabela que nos informa as matrizes de Fibonacci, para n inteiro, expresso na Figura 4, a seguir.

n	0	1	2	3	4	5
Q^n	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}8&5\\5&3\end{pmatrix}$
Q^{-n}	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&2\\2&-3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&-3\\-3&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3&5\\5&-8\end{pmatrix}$

Figura 4 - Matrizes de Fibonacci para os inteiros.
Fonte: Stakhov (2009, p. 323).

Assim, vemos a possibilidade de obtermos uma fórmula explícita para as matrizes de Fibonacci: Q^n e Q^{-n}, com $n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,etc.$ A fim de demonstrarmos, o que podemos chamar de formula de Binet matricial. Iniciaremos apresentando o seguinte teorema, de Koshy (2011, p. 348).

Teorema 6: Se Q denota a Q matriz. Demonstre que $Q^n = f_n Q + f_{n-1} I$, onde I denota a matriz identidade 2x2.

A fim de comprovarmos tal assertiva, utilizaremos os argumentos de Keskin e Demirtürk (2010), que enuncia e demostra o seguinte resultado:

Lema: Sendo X uma matriz quadrada, que satisfaz $X^2 = X + I$. Então vale que $X^n = f_n X + f_{n-1} I$, para todo n inteiro.

Demonstração: Para $n = 0$ o resultado é imediato. Vejamos que, por indução sobre $n \in IN$. E observar que: $X^{n+1} = \left(f_n X + f_{n-1} I \right) X = f_n X^2 + f_{n-1} X = f_n (X + I) + f_{n-1} X =$ $(f_n + f_{n-1}) X + f_n I = f_{n+1} X + f_n I \therefore X^{n+1} = f_{n+1} X + f_n I$ (c.q.d).

Demonstrados nos resultados anteriores, obteremos a fórmula de Binet em termos matriciais. Nesse sentido, tomaremos o modelo de resolução de uma equação de recorrência de segunda ordem, proposto por Lima et al (1998) e discutido no Teorema 2. Assim, como $Q^2 - Q - I = 0$, é a equação característica da matriz Q, de raízes α e β, temos que todas as soluções de $Q^n = f_n Q + f_{n-1} I$, são da forma $Q^n = \alpha^n Q_1 + \beta^n Q_2$.

Demonstração: Assumiremos inicialmente que $Q^n = \alpha^n Q_1 + \beta^n Q_2, n \geq 0$ (I), fazendo em (I), $n = 0$ e $n = 1$, teremos: $\begin{cases} Q_1 + Q_2 = I \\ \alpha Q_1 + \beta Q_2 = Q \end{cases}$, resolvendo o sistema, temos: $Q_1 = \dfrac{Q - \beta I}{\alpha - \beta}$ e $Q_2 = \dfrac{Q - \alpha I}{\beta - \alpha}$. E ao substituirmos, Q_1 e Q_2, em $Q^n = \alpha^n Q_1 + \beta^n Q_2, n \geq 0$, encontramos: $Q^n = \alpha^n \left(\dfrac{Q - \beta I}{\alpha - \beta} \right) + \beta^n \left(\dfrac{Q - \alpha I}{\beta - \alpha} \right), n \geq 0$ (ii), com $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Resolvendo em (ii), $Q - \beta I$ e $Q - \alpha I$, encontramos: $Q - \beta I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \beta & b \\ c & d - \beta \end{pmatrix} (iii)$ e $Q - \alpha I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \alpha & b \\ c & d - \alpha \end{pmatrix} (iv)$. E ao substituirmos os resultados (iii) e (iv) anteriores, em (ii) temos: $Q^n = \dfrac{\alpha^n}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} a - \beta & b \\ c & d - \beta \end{pmatrix} - \dfrac{\beta^n}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} a - \alpha & b \\ c & d - \alpha \end{pmatrix}, n \geq 0$ (v). Continuando o desenvolvimento de (v), encontramos: $Q^n = \begin{pmatrix} a(\alpha^n - \beta^n) + \alpha\beta^n - \beta\alpha^n & b(\alpha^n - \beta^n) \\ c(\alpha^n - \beta^n) & d(\alpha^n - \beta^n) + \alpha\beta^n - \beta\alpha^n \end{pmatrix}, n \geq 0$ (vi). E ao considerarmos em (vi), a condição: $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Encontraremos em (vi), o seguinte resultado: $Q^n = \begin{pmatrix} (\alpha^n - \beta^n) + \alpha\beta^n - \beta\alpha^n & (\alpha^n - \beta^n) \\ (\alpha^n - \beta^n) & (\alpha\beta^n - \beta\alpha^n) \end{pmatrix}, n \geq 0$ (*Fórmula de Binet matricial*).

Seguindo o raciocínio, semelhante ao de Hoggat (1969, p. 28) que para estender os números de Fibonacci com índices negativos, considera a fórmula de Binet na forma f_{-n} ,com $n \geq 0$. Isto é, realiza apenas a mudança da variável n por –n em Binet. Utilizando esse percurso faremos: $Q^{-n} = \begin{pmatrix} (\alpha^{-n} - \beta^{-n}) + \alpha\beta^{-n} - \beta\alpha^{-n} & (\alpha^{-n} - \beta^{-n}) \\ (\alpha^{-n} - \beta^{-n}) & (\alpha\beta^{-n} - \beta\alpha^{-n}) \end{pmatrix}, n \geq 0$. Obtendo assim, a *Fórmula de Binet matricial com índices negativos*, que pode ser ainda representada por:

$$Q^{-n} = \frac{1}{(\alpha - \beta)} \begin{pmatrix} (-1)^n \left[(\beta^n - \alpha^n) + \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} \right] & (-1)^{n+1}(\alpha^n - \beta^n) \\ (-1)^{n+1}(\alpha^n - \beta^n) & (-1)^n(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) \end{pmatrix}, n \geq 0.$$

Na seção atual, apresentamos algumas relações entre a sequência de Fibonacci e as Matrizes, estabelecendo algumas propriedades de generalização e extensão relativas a estes conceitos. Nessa perspectiva, destacaremos a seguir, outras relações conceituais da sequência de Fibonacci, agora com o triângulo de Pascal.

7 O modelo binomial de generalização da sequência de Fibonacci

Dando continuidade, em Huntley (1985), Koshy (2011), Hoggat (1969), Posamentier e Lehmann (2007) encontramos uma discussão que relaciona os números de Fibonacci e o triângulo de Pascal. Os autores destacam a seguinte propriedade: *Se ao somarmos os elementos das diagonais do triângulo de Pascal, obteremos como resultado os números de Fibonacci*. Tal propriedade é observada na Figura 5, a seguir:

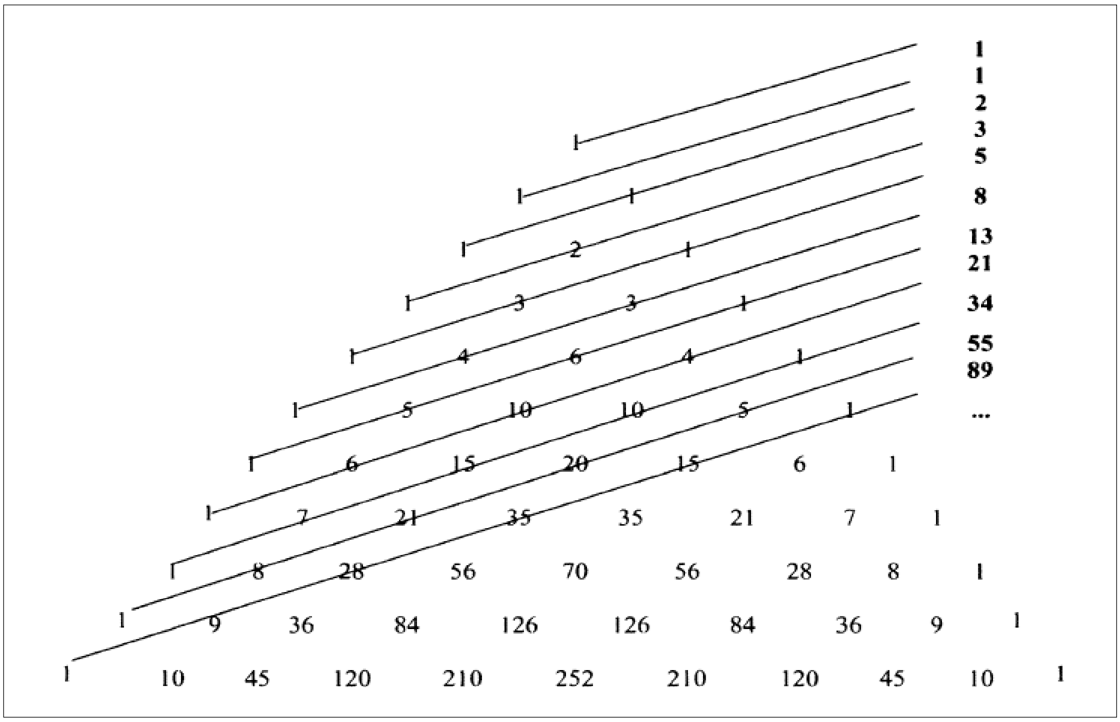

Figura 5- Relação entre os números de Fibonacci e o triângulo de Pascal.
Fonte: Posamentier e Lehmann (2007, p. 91).

Notemos que a lista de números obtidos no canto superior direito da figura acima, são os números de Fibonacci. Sendo que, tais resultados, foram obtidos pela soma dos elementos de cada diagonal do triângulo de Pascal. Com isto, podemos listar os seguintes resultados:

$f_1 = 1,\quad f_2 = 1,\quad f_3 = 1 + 1 = 2,\quad f_4 = 1 + 2 = 3,\quad f_5 = 1 + 3 + 1 = 5,\quad f_6 = 1 + 4 + 3 = 8,$

$f_7 = 1 + 5 + 6 + 1 = 13,\quad etc.$

Prosseguindo tomaremos alguns dos resultados anteriores, expressos em termos de numeros binomiais, sendo organizados, da seguinte maneira:

$$\binom{0}{0}=1=f_1$$
$$\binom{1}{0}=1=f_2$$
$$\binom{2}{0}+\binom{1}{0}=2=f_3$$
$$\binom{3}{0}+\binom{1}{0}=3=f_4$$
$$\binom{4}{0}+\binom{3}{1}+\binom{2}{2}=5=f_5$$
$$\binom{5}{0}+\binom{4}{1}+\binom{3}{2}=8=f_6$$
....

Continuando, o raciocínio empregado, podemos conjecturar o seguinte resultado: $\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+.....+\binom{n-i}{i}=\sum_{i=0}^{[n/2]}\binom{n-i}{i}, n\geq 0$ e $0\leq i\leq \frac{n}{2}$. Vale destacar, que em Hoggat (1969, p. 50) encontramos, esse resultado, expresso da seguinte forma: $f_{n+1}=\sum_{i=0}^{[n/2]}\binom{n-i}{i}, n\geq 0$, e em Alfred (1965), na forma: $f_k=\sum_{k=1}^{[(k+1)/2]}\binom{n-k}{k-1}$. Os resultados expressos nos informam os *números de Fibonacci em termos binomiais*, e que Koshy (2011, p. 155) atribui esta propriedade a E. Lucas em 1876.

Vale ressaltar, que demonstraremos o resultado, apresentado por Hoggat (1969, p. 50), que também é encontrado em Koshy (2011, p. 155), expresso no seguinte teorema.

***Teorema 7*:** $f_{n+1}=\sum_{i=0}^{[n/2]}\binom{n-i}{i}, n\geq 0$ (*números de Fibonacci binomiais*).

Na demonstração do teorema descrito, utilizaremos o princípio da indução matemática. Nesse sentido, calculamos inicialmente os valores para n=0 e n=1, obtendo os resultados de f_1 e f_2. Para n=0, $f_1=\sum_{i=0}^{0}\binom{0-i}{i}=\binom{0}{0}=1$. Para n=1, $f_2=\sum_{i=0}^{0,5}\binom{1-i}{i}=\binom{1}{0}=1$. Continuando, admitiremos que a propriedade é válida para n=k, isto é, $f_{k+1}=\sum_{i=0}^{[k/2]}\binom{k-i}{i}$(i) (hipótese de indução). Agora, devemos mostrar que a mesma é válida para n=k+1. Assim, faremos: $f_{(k+1)+1}=\sum_{i=0}^{[(k+1)/2]}\binom{(k+1)-i}{i}$(ii). Dando prosseguimento, utilizaremos a relação de Stifel: $\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}$. Ademais, antes de aplicarmos Stifel na parte binomial, reescrevemos esta como, $\binom{(k+1)-i}{i}=\binom{(k-i)+1}{i}$, e por Stifel, obtemos: $\binom{(k-i)+1}{i}=\binom{k-i}{i}+\binom{k-i}{i-1}$. Aplicando o resultado em (ii), temos: $f_{(k+1)+1}=\sum_{i=0}^{[(k+1)/2]}\binom{(k-i)+1}{i}=\sum_{i=0}^{[(k+1)/2]}\binom{k-i}{i}+\sum_{i=0}^{[(k+1)/2]}\binom{k-i}{i-1}$

Analisando agora $\sum_{i=0}^{[(k+1)/2]}\binom{k-i}{i}$(iii), no resultado anterior, notemos que ao aplicarmos as condições de existência de um número binomial, em $\binom{k-i}{i}, com \ \ (k-i)\in N \ \ e \ \ i\in N \ \ e \ \ 0\le i\le k-i$. Podemos estabelecer as seguintes condições: $0\le i\le k-i \rightarrow i\le k-i \rightarrow 2i\le k \rightarrow i\le \frac{k}{2}$. Logo, $0\le i\le \frac{k}{2}\le \frac{k+1}{2}$. Assim, determinamos a hipótese de indução, caracterizada por: $f_{(k+1)+1}=\sum_{i=0}^{[(k+1)/2]}\binom{k-i}{i}=\sum_{i=0}^{[k/2]}\binom{k-i}{i}=f_{k+1}$.

Continuando, analisaremos $\sum_{i=0}^{[(k+1)/2]}\binom{k-i}{i-1}$ (iv). Faremos inicialmente, a seguinte mudança de variável $i-1=p$, e como $0\le i\le \frac{k+1}{2}$, encontramos $0-1\le i-1\le \frac{k+1}{2}-1$ então $-1\le i-1\le \frac{k-1}{2}$, e como $i-1=p$, temos $0\le p\le \frac{k-1}{2}$, com $i\ge 0$. Concluindo obtemos: $\sum_{i=0}^{[(k+1)/2]}\binom{k-i}{i-1}$, como $\sum_{i=0}^{[(k+1)/2]}\binom{k-i}{i-1}=\sum_{p=0}^{[(k-1)/2]}\binom{(k-1)+p}{p}=f_{(k-1)+1}$. Da análise dos resultados das manipulações algébricas em (ii), (iii) e (iv), obtemos o seguinte resultado $f_{(k+1)+1}=f_{(k+1)}+f_{(k-1)+1}$, ou seja, $f_{k+2}=f_{k+1}+f_k, com \ \ k\ge 1$ (*Lei de recorrência da sequência de Fibonacci*).

Finalizando, essa discussão sobre Fibonacci e os números binomiais, no triângulo de pascal, destacaremos uma propriedade de Koshy (2011, p. 158) que nos permitirá a obtenção de uma fórmula de extensão dos números de Fibonacci em termos binomiais a índices negativos. Nesse sentido, apresentamos o seguinte resultado: $(-1)f_n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}.(-1)^i f_i$.

Para demonstrarmos o resultado anterior, utilizaremos o raciocínio empregado em Koshy (2011, p. 158) que parte do lado direito da igualdade, obtendo o lado esquerdo. Nesse sentido, faremos:

$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i.f_i=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i\frac{\alpha^i-\beta}{\alpha-\beta}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-\alpha)^i-\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-\beta)^i\right]$(I). Agora, ao rescrevermos de (I), os somatórios $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-\alpha)^i=(1-\alpha)^n$ e $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-\beta)^i=(1-\beta)^n$. E, ao substituirmos seus resultados em (I), temos:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i.f_i=\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-\alpha)^i-\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-\beta)^i\right]=\left[\frac{(1-\alpha)^n-(1-\beta)^n}{\alpha-\beta}\right]=\frac{\beta^n-\alpha^n}{\alpha-\beta}=\frac{-\alpha^n+\beta^n}{\alpha-\beta}=$$

$$=\frac{-(\alpha^n-\beta^n)}{\alpha-\beta}=-f_n(c.q.d)$$

Continuando, em seções anteriores, destacamos o seguinte resultado $f_{-n}=(-1)^{n+1}\cdot f_n$ que nos permite a obtenção dos números de Fibonacci com índices negativos. Notemos, que ao combinarmos essa relação, com o resultado demonstrado, anteriormente, obtemos:

$f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n$ (I) e $(-1) f_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} .(-1)^i f_i$ (II), e ao substituirmos (II) em (I), encontramos a seguinte relação: $f_{-n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} .(-1)^{n+i} f_i$, que nos informa os *números de Fibonacci com índices negativos em termos binomiais.*

Portanto, nesta seção trouxemos a discussão de algumas propriedades de Fibonacci, discutidas a partir, de sua relação com o triângulo de Pascal, estendida também, aos números binomiais. Dando continuidade, apresentaremos outra relação conceitual dos números de Fibonacci, agora com a trigonometria.

8 A fórmula de Binet trigonométrica

Huntley (1985, p. 49) apresenta uma relação entre a função (φ) e a trigonometria, argumentando que observarmos esta relação ao solucionarmos a seguinte equação: $sen(2\theta) = \cos(3\theta)$. E como, o seno de um ângulo é igual ao seu complemento, teríamos: $2\theta + 3\theta = \frac{\pi}{2}, com \theta = \frac{\pi}{10}$.Huntley (1985) sugere que a equação $sen(2\theta) = \cos(3\theta)$, pode ser reduzida a $4sen^2(\theta) + 2sen(\theta) - 1 = 0$. Grimaldi (2012, p. 65) resolve a equação anterior, proposta por Huntley (1985), obtendo a *fórmula trigonométrica de Binet*, argumentos que apresentaremos a seguir:

A fim de demonstrarmos tal modelo de Binet, tomaremos inicialmente algumas identidades trigonométricas de referência, sendo estas:

$$sen(2\theta) = 2sen(\theta)cos(\theta) \quad (i)$$
$$cos(2\theta) = 2cos^2(\theta) - 1 \quad (ii)$$
$$cos(3\theta) = 4cos^3(\theta) - 3cos(\theta) \quad (iii)$$

Dando seguimento, já sabemos que: $2\theta + 3\theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{\pi}{10}$, e que devemos resolver a equação $sen(2\theta) = cos(3\theta)$. Nesse sentido, ao utilizarmos as identidades (i) e (iii). Encontramos $sen(2\theta) = cos(3\theta) \rightarrow 2sen(\theta)cos(\theta) = 4cos^3(\theta) - 3cos(\theta)$. E ao dividirmos, o resultado por $cos(\theta) \neq 0$, teremos:

$2sen(\theta) = 4cos^2(\theta) - 3 \rightarrow 2sen(\theta) = 4(1 - sen^2(\theta)) - 3 = -4sen^2(\theta) + 1$. Logo, obtemos a equação $4sen^2(\theta) + 2sen(\theta) - 1 = 0$ (iv), proposta por Huntley (1985). Ao resolvermos a equação (iv), encontramos as seguintes soluções, $sen(\theta) = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$, como $\theta = \frac{\pi}{10} = 18^0$, temos: $sen(18^0) > 0 \rightarrow sen(\theta) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$. Podemos, reescrever o resultado anterior, da seguinte maneira, $sen(\theta) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{-1}{2}\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-1}{2}(\beta)$, como $\alpha.\beta = -1$, obtemos: $sen(\theta) = \frac{-1}{2}(\beta) = \frac{1}{2\alpha}$ (iv). Dando continuidade, como $5\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{5}$, e ao utilizarmos

$2\theta=\frac{\pi}{5}$, na identidade (ii), obtemos: $cos(\frac{\pi}{5})=2cos^2(\theta)-1=2(1-sen^2(\theta))-1=$

$$=1-2(\frac{1}{2\alpha})^2=\frac{2\alpha^2-1}{2\alpha^2}=\frac{(2\alpha^2-1)\beta^2}{2\alpha^2\beta^2}=\frac{2\alpha^2\beta^2-\beta^2}{2\alpha^2\beta^2}=\frac{2-\beta^2}{2}=\frac{2-(\beta+1)}{2}=\frac{1-\beta}{2}=\frac{\alpha}{2}$$

Do resultado anterior, obtemos: $cos(\frac{\pi}{5})=\frac{\alpha}{2}\rightarrow\alpha=2cos(\frac{\pi}{5})$. Utilizando a identidade $cos(3\theta)=4cos^3(\theta)-3cos(\theta)$; e fazendo, $cos(\frac{3\pi}{5})=4cos^3(\frac{\pi}{5})-3cos(\frac{\pi}{5})$, temos:

$$cos(\frac{3\pi}{5})=4(\frac{\alpha}{2})^3-3(\frac{\alpha}{2})=\frac{1}{2}\alpha^3-\frac{3}{2}\alpha=\frac{\alpha(\alpha^2-3)}{2}\overset{-\beta^2=\alpha^2-3}{=}\frac{\alpha(-\beta)^2}{2}=\frac{\alpha\beta(-\beta)}{2}=\frac{\beta}{2}$$

Assim, temos: $\alpha=2cos(\frac{\pi}{5})$ e $\beta=2cos(\frac{3\pi}{5})$. Ao substituirmos os resultados, em Binet, obteremos a fórmula de Binet trigonométrica, que segundo Grimaldi (2012) esta fórmula para f_n, foi estabelecida por W. Hope-Jones em 1921.

$$f_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}=\frac{(2cos(\frac{\pi}{5}))^n-(2cos(\frac{3\pi}{5}))^n}{\sqrt{5}}=\frac{(2)^n}{\sqrt{5}}\left[cos^n(\frac{\pi}{5})-cos^n(\frac{3\pi}{5})\right],n\geq 0$$

Dando continuidade, a partir da discussão realizada evidenciamos algumas relações conceituais que podem ser estabelecidos através da generalização de alguns modelos de Fibonacci relacionados a outros conceitos matemáticos. Resultados listados na tabela abaixo.

Tabela 1- Modelos relativos à generalização da sequência de Fibonacci

Conceito matemático	Modelo matemático
1-Sequência recorrente de Fibonacci.	$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n, n\geq 0$
2-Fórmula de Binet.	$Fn=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, n=0,1,2,3,...$
3-Fórmula de extensão de Binet aos inteiros.	$f_{-n}=(-1)^{n+1}\cdot f_n$
4-Fórmula de Binet para a sequência de Lucas.	$L_n=\alpha^n+\beta^n, n=1,2,3,.....$
5-Fórmula de extensão dos números de Lucas aos inteiros.	$L_{-n}=(-1)^n.L_n$
6-Fórmula de Binet Matricial.	$Q^n=\begin{pmatrix}(\alpha^n-\beta^n)+\alpha\beta^n-\beta\alpha^n & (\alpha^n-\beta^n)\\(\alpha^n-\beta^n) & (\alpha\beta^n-\beta\alpha^n)\end{pmatrix}, n\geq 0$
7-Fórmula de Binet matricial com índices negativos.	$Q^{-n}=\frac{1}{(\alpha-\beta)}\begin{pmatrix}(-1)^n\left[(\beta^n-\alpha^n)+\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right] & (-1)^{n+1}(\alpha^n-\beta^n)\\(-1)^{n+1}(\alpha^n-\beta^n) & (-1)^n(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})\end{pmatrix}, n\geq 0$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 1- Modelos relativos à generalização da sequência de Fibonacci (continuação)

8-Números de Fibonacci em termos binomiais.	$f_{n+1} = \sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n-i}{i}, n \geq 0$
9-Fórmula de extensão em termos binomiais.	$f_{-n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.(-1)^{n+i} f_i$
10-Fórmula de Binet trigonométrica.	$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{(2)^n}{\sqrt{5}} \left[cos^n(\frac{\pi}{5}) - cos^n(\frac{3\pi}{5}) \right], n \geq 0$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Portanto, discutimos até agora, a fundamentação dos conceitos e relações do processo de generalização da sequência de Fibonacci, com destaque, para a fórmula de Binet, como modelo de generalização e evolução epistemológica do conceito.

9 Conclusão

Vimos que a partir da resolução do problema dos coelhos e obtenção da sequência de Fibonacci podemos estabelecer alguns de seus modelos implícitos e explícitos, com destaque, para a fórmula de Binet. Além disso, mostramos a possiblidade de extensão desses modelos a outros campos numéricos, no caso, os inteiros; bem como a relação da sequência, com outros conceitos matemáticos, como os modelos recorrentes e generalizados de Lucas, Matricial e Binomial.

Nesse sentido, apresentamos uma abordagem de estudo, que suscita uma discussão, que vai além do contexto histórico, do problema dos coelhos imortais, que nos permitiu buscarmos elementos matemáticos relativos à sequência de Fibonacci, e de estabelecermos um percurso do processo de generalização do modelo de Fibonacci, com destaque para as formas: recorrente, de Binet, Matricial, Binomial e trigonométrico, numa discussão, sobre sua extensão e evolução conceitual, semelhante, a (ALVES; BORGES NETO, 2010, 2011) e (ALVES, 2013, 2015a, 2015b, 2016a, 2016b).

Desse modo, esperamos que a abordagem dada à sequência de Fibonacci destacando seus modelos de generalização e extensões a outros conceitos matemáticos. Seja um modelo ao estudo de outros tópicos deixados pela história da Matemática. No sentido, de enfatizar os aspectos matemáticos relacionados a tais fatos. Permitindo também a organização de situações de ensino, com tais resultados, perspectiva de estudo e ensino defendida por (SANTOS; ALVES, 2016).

10 Referências

ALFRED, B. U. **An introduction to Fibonacci discovery**. Santa Clara: The Fibonacci Association, 1965. Disponível em: < http://www.fq.math.ca/Books/Complete/discovery.pdf>. Acesso em: 25 set. 2015.

ALVES, F. R. V. Descobrindo definições matemáticas no contexto de investigação histórica: o caso da sequência generalizada de Fibonacci. **Boletim GEPEM**, v. 68, p. 112-117, 2016a. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=article&op=view&path%5B%5D=2225>. Acesso em: 10 ago. 2016.

______. Engenharia didática para a generalização da noção de sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura**. Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 61-93, 2016b. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/20879/pdf>. Acesso em: 16 jul. 2016.

______. Sequência generalizada de Fibonacci e relações com o número áureo. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 2, n. 6, p. 30-36, 2015a. Disponível em: <http://seer.uece.br/?journal=BOCEHM&page=article&op=view&path%5B%5D=1440&path%5B%5D=1321>. Acesso em: 03 fev. 2016.

______. Sobre a evolução histórica do modelo de Fibonacci: a classe das funções hiperbólicas - FHF. **VIDYA Revista Eletrônica**, Santa Maria, v. 35, n. 1, p. 133-146, jan./jun. 2015b. Disponível em: <http://periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/article/view/584/547>. Acesso em: 20 out. 2015.

______. Uma discussão de artigos envolvendo propriedades da sequência de Fibonacci apoiada na tecnologia. In: Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática, 6., 2013, São Carlos. **Anais...** São Carlos: UFSCar, 2013. Disponível em: <http://htem2013.dm.ufscar.br/anais/artigoscompletos/artigocompleto_OC_T5_36_fco_regis_v_ALVES.pdf>. Acesso em: 28 jun. 2015.

ALVES, F. R. V.; BORGES NETO, H. A existência de sequência de Fibonacci no campo dos inteiros: uma atividade de investigação apoiada nos pressupostos da Sequência Fedathi. **BOLETIM GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 59, p. 135-140, jul./dez. 2011. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=article&op=view&path%5B%5D=647>. Acesso em: 28 jun. 2015.

______. Sequências de Fibonacci e de Lucas: uma aplicação da sequência Fedathi. In: Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática, 5., 2010, Recife. **Anais...** Recife: UFPE, 2010.

BURTON, D. M. **Elementary number theory**. 6. ed. Boston: McGrill Hill Higher Education, 2007.

CONWAY, J. H.; GUY, R. K. **O livro dos números**. Tradução de José S. Pinto. Lisboa: Gradiva, 1999.

DUNLAP, R. A. **The golden ratio and Fibonacci numbers**. Singapore: Word Scientific, 1997.

GRIMALDI, R. P. **Fibonacci and catalan numbers**: an introduction. Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons, 2012.

HOGGAT, Jr. V. **Fibonacci and Lucas numbers**. Santa Clara: The Fibonacci Association, 1969. Disponível em: <http://www.fq.math.ca/Books/Complete/fibonacci-lucas.pdf>. Acesso em: 28 set. 2015.

HUNTLEY, H. E. **A divina proporção**. Tradução Luís Carlos Ascêncio Nunes. Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 1985.

KESKIN, R.; DEMIRTÜRK, B. Some new Fibonacci and Lucas identities by matrix methods. **International Journal of Mathematics Education and Science and Technology**. [S.l.], v. 41, n. 3, p. 379-387, 2010. Disponível em: <http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/00207390903236426>. Acesso em: 09 dez. 2015.

KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas numbers with applications**. New York: John Wiley and Sons, 2011.

LANDO, S. K**. Lectures on generating functions.** Providence: The American Mathematical Society, 2003.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

LIVIO, M. **The golden ratio:** the history of Phi. New York: Broadway Books, 2002.

PARKER, F. D. On the General Term of a Recursive Sequence. **The Fibonacci Quartely**, [S.l.], v. 2, n. 1, p. 67-72, Feb. 1964. Disponível em: <http://www.fq.math.ca/Scanned/2-1/parker.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2015.

POSAMENTIER, A. S.; LEHMANN, I. **The fabulous Fibonacci umbers**. New York: Prometheus Books, 2007.

SANTOS, A. A.; ALVES, F. R. V. O estudo e o ensino da Sequência de Fibonacci numa abordagem atualizada. **Revista Thema**. [S.l.], v. 14, n. 2, p. 42-53, 2016. Disponível em: <http://revistathema.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/357>. Acesso em: 26 set. 2016.

STAKHOV, A. **The mathematics of harmony:** from Euclid to contemporary mathematics and computer science. London: World Scientific Publishers, 2009.

VOROBIOV. N. N. **Números de Fibonacci**. Tradução de Carlos Vega. Moscou: Editora Mir, 1974.

ZECKENDORF, E. A generalized Fibonacci Numeration. **The Fibonacci Quartely**, [S.l.], v. 10, n. 4, p. 365-372, Oct. 1972. Disponível em: <http://www.fq.math.ca/Scanned/10-4/zeckendorf.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2015.