



**Revista Eletrônica  
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664  
Volume 7, dez. 2016  
Edição ERMAC

**Letícia Maria Miquelin**  
UNESP/Bauru  
lemiquelin@hotmail.com

**Edilaine Martins Soler**  
UNESP/Bauru  
edilaine@fc.unesp.br

## **Modelo matemático para otimização da operação de sistemas de abastecimento de água**

A mathematical model for optimization operation of water supply systems.

### **Resumo**

Os sistemas de abastecimento de água têm a função de levar água em quantidade e qualidade adequadas à população. Na maioria dos sistemas de abastecimento de água, bombas hidráulicas são utilizadas para captar água de poços (ou estações de tratamento de água) e abastecer reservatórios distribuídos pelos bairros de uma cidade, de onde a população é atendida. Um procedimento comum observado na prática consiste em ligar as bombas hidráulicas quando o nível mínimo do reservatório é atingido e mantê-las ligadas até que o nível máximo do reservatório seja atingido. Uma vez que as tarifas de energia elétrica variam ao longo das horas do dia, faz-se necessário um planejamento do funcionamento das bombas garantindo o atendimento da demanda. Neste trabalho de iniciação científica foi investigado um modelo matemático de otimização linear inteira mista para o problema de planejamento de estoque de água em reservatórios proposto na literatura. Testes numéricos realizados com este modelo demonstraram que além do planejamento do liga/desliga das bombas hidráulicas, investimentos para se reduzir os vazamentos na rede de distribuição e a utilização de bombas hidráulicas mais eficientes apresentam um grande retorno financeiro no que diz respeito aos custos com energia elétrica em sistemas de abastecimento de água.

**Palavras-chave:** Sistemas de abastecimento. Bombas Hidráulica. Otimização. Modelagem Matemática e Aplicações.

### **Abstract**

Water supply systems have the function of carrying water in quantity and quality appropriate to the population. In most water supply systems, hydraulic pumps are used to capture water wells (or water treatment plants) and fuel tanks distributed through the neighborhoods of a city, where the population is served. A common procedure followed in practice is to connect the hydraulic pumps when the minimum reservoir level is reached and keeping it connected to the maximum reservoir level is reached. Once the electricity rates vary throughout the hours of the day, planning the operation of the pump it is necessary to ensure to meet the demand. In this work of scientific initiation we investigated a mathematical model of mixed integer linear optimization for inventory planning problem of water in reservoirs proposed in the literature. Numerical tests with this model demonstrated that in addition to the league planning / off hydraulic pumps, investments to reduce leakages in the distribution network and the use of more efficient water pumps have a great financial return with respect to energy costs electric in water supply systems.

**Keywords:** Supply systems. Hydraulic pumps. Optimization. Mathematical Modeling and Application.



## 1 Introdução

A água é um recurso natural indispensável à saúde e ao bem-estar da população. Os sistemas de abastecimento de água têm a função de levar água em quantidade e qualidade adequadas à população para que suas necessidades sejam atendidas. No Brasil, as obras de saneamento, especialmente de sistemas de abastecimento de água às populações urbanas, foram intensificadas nas décadas de 70 e 80, buscando atender a demanda decorrente do crescimento populacional urbano e da industrialização. Segundo resultados da última Pesquisa Nacional de Saneamento Básico realizada em 2008, pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), a quase totalidade dos municípios brasileiros tinha serviço de abastecimento de água em pelo menos um distrito (99,4%). Dos 5.564 municípios existentes no país, em 2008, apenas 33 não dispunham de rede geral de distribuição (IBGE, 2011).

Segundo Tsutiya (2006), as despesas com energia elétrica nas empresas de saneamento básico entre 1993 e 1996 variaram entre 4,8% e 36,3% nos diversos estados brasileiros, e são o segundo ou terceiro item mais importante no orçamento das despesas de exploração. Cerca de 95% do consumo de energia elétrica nos sistemas de abastecimento de água é atribuído aos sistemas de bombeamento. A menor parcela é destinada a sistemas auxiliares e à iluminação. Assim, é muito relevante que as empresas de saneamento possam diminuir seus gastos com energia elétrica, sem prejuízo no abastecimento.

Na maioria dos sistemas de abastecimento de água há a necessidade de utilizar estações elevatórias para recalcar água em reservatórios de distribuição e, para isso, bombas hidráulicas são utilizadas para captar água de poços (ou estações de tratamento de água) e abastecer reservatórios distribuídos pelos bairros de uma cidade, de onde a população é atendida. Um procedimento comum observado na prática consiste em ligar as bombas hidráulicas quando o nível mínimo do reservatório é atingido e mantê-las ligadas até que o nível máximo do reservatório seja atingido. Uma vez que as tarifas de energia elétrica variam ao longo das horas do dia, este procedimento não é eficiente, pois o custo de energia elétrica é bem mais elevado quando o consumo de água é maior, no período de 18 às 21h. Portanto, faz-se necessário um planejamento do funcionamento das bombas e, conseqüentemente, o controle dos níveis de estoque de água nos reservatórios, a fim de evitar o funcionamento das bombas nos horários de alto custo de energia elétrica, garantindo o atendimento da demanda (SOLER et al., 2016).

Toledo et al. (2008) propuseram um modelo matemático para este problema considerando a interdependência entre os reservatórios, cujo objetivo é minimizar o custo com energia elétrica para funcionamento das bombas de captação. O problema de planejamento de estoque de água em reservatórios proposto pelos autores consiste em decidir, em cada período do horizonte de planejamento, as operações (liga/desliga) das bombas hidráulicas de captação que abastecem os reservatórios e a transferência de água entre os mesmos, de modo que a demanda estimada em cada reservatório seja atendida em cada período e que sejam respeitados seus níveis mínimos e máximos, e o custo de energia elétrica seja mínimo. Para facilitar a operação do sistema é considerado um custo de acionamento das bombas hidráulicas, a fim de minimizar o número de vezes que as bombas são acionadas.

Este trabalho é decorrente de pesquisa de iniciação científica e está organizado como segue: na seção 2 é apresentado o modelo matemático de otimização linear inteira mista para o problema de planejamento de estoque de água em reservatórios proposto em Toledo et al. (2008); na seção 3 estão os testes numéricos realizados com o modelo matemático investigado; e, finalmente, na Seção 4 estão as conclusões.



## 2 O problema de planejamento de estoque de água em reservatórios e sua formulação matemática

Em sistemas de abastecimento de água, cerca de 95% do gasto com energia elétrica é devido a operação das bombas hidráulicas. Portanto, torna-se necessário o planejamento do liga/desliga destas bombas para que haja uma redução nos gastos com energia elétrica, de modo que a demanda seja atendida.

O problema abordado nesta pesquisa focaliza o custo de energia elétrica necessária para o funcionamento de bombas hidráulicas utilizadas para a distribuição e transferência de água em um sistema de abastecimento. As bombas são utilizadas para levar água de poços artesianos e/ou estação de tratamento de água a reservatórios distribuídos pelos bairros de uma cidade, de onde a população será atendida por força gravitacional. Como o custo de energia elétrica varia de acordo com o horário (as tarifas de energia elétrica tem preços mais altos das 18 às 21h) se faz necessário um planejamento do funcionamento das bombas para que não sejam ligadas em períodos de custo alto de energia elétrica. Portanto, deve-se planejar o volume dos reservatórios em cada período, ou seja, determinar o estoque de água, ao longo dos períodos, de modo a atender a demanda com mínimo custo de energia.

A seguir apresentamos o modelo proposto em Toledo et al. (2008) para o problema de planejamento de estoque de água em reservatórios.

Para isso, considere:

Dados:

- $d_{kt}$  = demanda ( $m^3$ ) do centro consumidor (bairro)  $k$  durante o período  $t$ ;
- $c_{jt}$  = custo para manter ligada a bomba  $j$  durante todo o período  $t$ ;
- $sc_{jt}$  = custo para acionamento da bomba  $j$  no período  $t$ ;
- $v_{jt}$  = vazão ( $m^3$ ) da bomba  $j$  no período  $t$  (varia de acordo com o tamanho do período);
- $w_{jlt}$  = vazão ( $m^3$ ) da bomba para transportar água do reservatório  $j$  para o reservatório  $l$  no período  $t$  (varia de acordo com o tamanho do período);
- $h_j^{\min}$  = volume ( $m^3$ ) mínimo do reservatório  $j$ ;
- $h_j^{\max}$  = volume ( $m^3$ ) máximo do reservatório  $j$ ;
- $h_j^0$  = volume ( $m^3$ ) do reservatório  $j$  no início do horizonte de planejamento ( $t = 0$ );
- $S_j = \{k, \text{ tal que o centro consumidor } k \text{ é abastecido pelo reservatório } j\}$ ;
- $R_j = \{l, \text{ tal que o reservatório } l \text{ pode receber água do reservatório } j\}$ ;
- $P_j = \{l, \text{ tal que o reservatório } l \text{ pode enviar água para o reservatório } j\}$ ;
- $\gamma_{jlt}$  = custo para transferir água do reservatório  $j$  para o reservatório  $l$  durante todo o período  $t$ .
- $\theta_{jt}$  = fração da água no reservatório  $j$  perdida por vazamento durante o período  $t$ ;
- $x_{j0}$  = estado inicial da bomba  $j$  (0 se a bomba estava desligada e 1 caso contrário);

Variáveis de decisão:

- $I_{jt}$  = volume de água ( $m^3$ ) no reservatório  $j$ , estocada ao final do período  $t$ ;
- $x_{jt}$  = fração do período  $t$  em que a bomba  $j$  permanece ligada (o produto  $x_{jt}$  pelo tamanho do período em horas, fornece o tempo que a bomba permaneceu ligada, em horas);
- $y_{jt} = \begin{cases} 1, & \text{se } x_{jt} > 0 \text{ (isto é, há captação de água no período } t\text{);} \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$
- $\alpha_{jt} = \begin{cases} 1, & \text{se a bomba } j \text{ é acionada no período } t\text{;} \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$

$z_{jlt}$  = fração do período  $t$  na qual existe transporte de água do reservatório  $j$  para o reservatório  $l$ .

O modelo matemático é dado por (1)-(9):

$$\text{Min} \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^R (c_{jt} x_{jt} + sc_{jt} \alpha_{jt}) + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^R \sum_{l \in R_j} \gamma_{jlt} z_{jlt} \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{jt} = (1 - \theta_{jt}) I_{j,t-1} + v_{jt} x_{jt} - \sum_{l \in R_j} w_{jlt} z_{jlt} + \sum_{l \in P_j} w_{ljt} z_{ljt} - \sum_{k \in S_j} d_{kt}, j = 1, \dots, R, t = 1, \dots, T; \end{array} \right. \quad (2)$$

$$x_{jt} \leq y_{jt}, j = 1, \dots, R, t = 1, \dots, T; \quad (3)$$

$$\alpha_{jt} \geq y_{jt} - x_{j,t-1}, j = 1, \dots, R, t = 1, \dots, T; \quad (4)$$

$$h_j^{\min} \leq I_{jt} \leq h_j^{\max}, j = 1, \dots, R, t = 1, \dots, T; \quad (5)$$

$$0 \leq z_{jlt} \leq 1, j, l = 1, \dots, R, t = 1, \dots, T; \quad (6)$$

$$x_{jt} \geq 0, j = 1, \dots, R; \quad (7)$$

$$x_{j0} = x_{j0}^0, I_{j0} = h_j^0, j = 1, \dots, R, t = 1, \dots, T; \quad (8)$$

$$y_{jt} \in \{0, 1\}, \alpha_{jt} \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, R, t = 1, \dots, T; \quad (9)$$

No modelo proposto, a função objetivo (1) representa os custos com energia elétrica para funcionamento e acionamento das bombas hidráulicas de captação e de transferência. As restrições (2) representam o balanceamento de estoque de água em cada um dos períodos para cada um dos reservatórios. As restrições (3) garantem que se  $x_{jt} > 0$ , então  $y_{jt} = 1$ . As restrições (4) asseguram que, caso a bomba  $j$  seja ligada durante todo o período  $t-1$ , ela poderá ser utilizada no período  $t$  sem o custo de acioná-la. As restrições (5) garantem que os volumes mínimos e máximos de água em cada um dos reservatórios sejam respeitados. As restrições (6) e (7) garantem que as bombas de captação e de transferência de água entre os reservatórios possam ser ligadas durante todo o período ou em parte dele. Nas restrições (8), os estados das bombas são ajustados para o desligado no início do horizonte de planejamento e o volume de água inicial nos reservatórios é atribuído. E as restrições (9) definem as variáveis  $y_{jt}$  e  $\alpha_{jt}$  como binárias.

### 3 Testes numéricos

Para resolução do problema de planejamento de estoque de água em reservatórios foi utilizado o pacote de otimização CPLEX em interface com o *software* GAMS (<https://www.gams.com/>).

O GAMS é um software projetado especificamente para modelagem de problemas de otimização. O *solver* CPLEX foi projetado para resolver problemas de grande dimensão de forma rápida e com mínima intervenção do usuário. Para resolver problemas de programação linear inteira mista, como é o caso do problema de planejamento de estoque de água em reservatórios, este *solver* utiliza o método *Branch-and-Bound*.

Um estudo relacionado a alterações na infraestrutura de um sistema de abastecimento foi feito utilizando o modelo matemático, a fim de averiguar o retorno financeiro ao se reduzir os vazamentos na rede e ao se utilizar bombas hidráulicas mais eficientes.

Nos testes realizados foi considerado um horizonte de planejamento de um dia (24 horas) que foi dividido em 8 períodos, de 3 horas cada, sendo o sétimo período, o período crítico, que se encontra das 18 às 21h (período em que a energia elétrica é mais cara).

No sistema de abastecimento considerado nos testes têm-se três reservatórios, que recebem água de poços artesianos e abastecem bairros de uma cidade, conforme ilustrado na Figura 1. Neste sistema pode haver transferência de água do Reservatório 1 para o Reservatório 2, do Reservatório 2 para o Reservatório 1, do Reservatório 2 para o Reservatório 3 e do Reservatório 3 para o Reservatório 2.

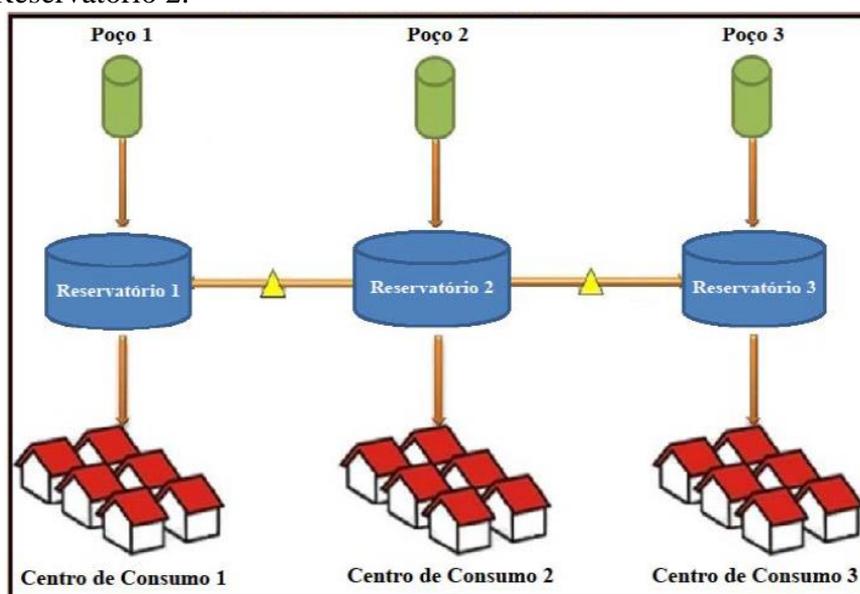


Figura 1: Sistema de Abastecimento: De La Vega e Alem (2015).

### 3.1 Primeira etapa de testes

Na primeira etapa de testes foi analisada a influência dos vazamentos na rede de abastecimento nos gastos com energia elétrica.

Foi considerado que o custo de energia elétrica para cada bomba em cada período que esta permanece ligada é de R\$30,00 para os períodos não críticos e de R\$90,00 para os períodos críticos. Os custos de acionar a bomba considerado nos testes foi de R\$1,00, e os custos com as bombas de transferência de água considerado foram de R\$10,00 para os períodos não críticos e R\$30,00 para os períodos críticos. Foi utilizado o trabalho de Toledo et al (2008) como base para as demandas de água para cada reservatório em cada período.

Foram realizados testes numéricos com o modelo matemático considerando três diferentes situações em relação às perdas de água no sistema de abastecimento: 0% de perda de água, 5% de perda de água, 10% de perda de água e 20% de perda de água.

As Figuras 2, 3, 4 e 5 mostram os níveis de cada reservatório em cada período para as soluções obtidas em cada uma das situações. O valor da função objetivo representa os custos com energia elétrica.

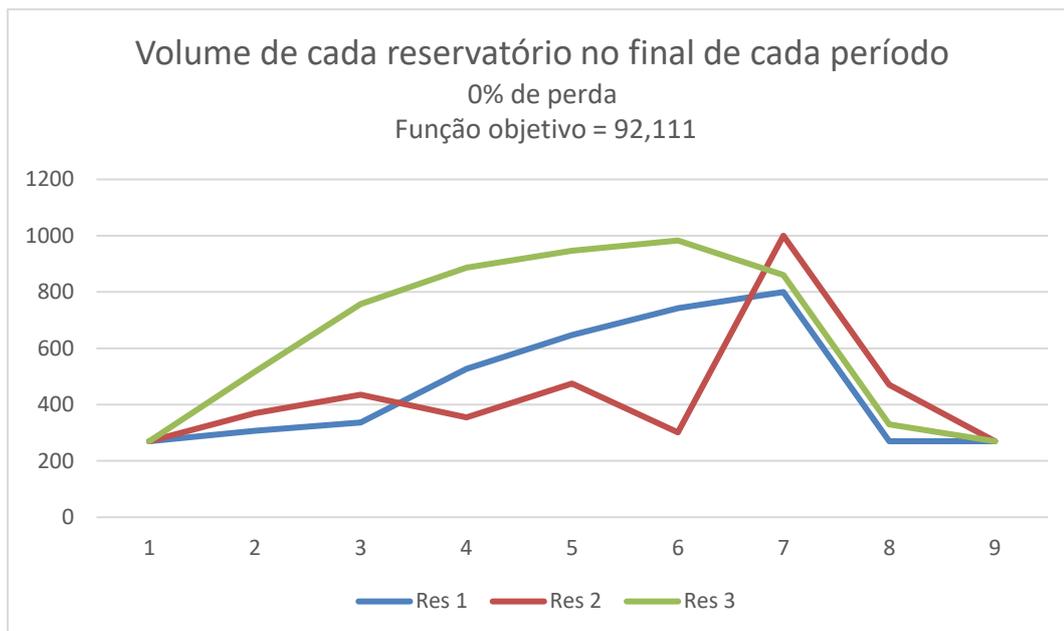


Figura 2: Volumes dos Reservatórios – 0% de perda – 1ª Etapa de testes

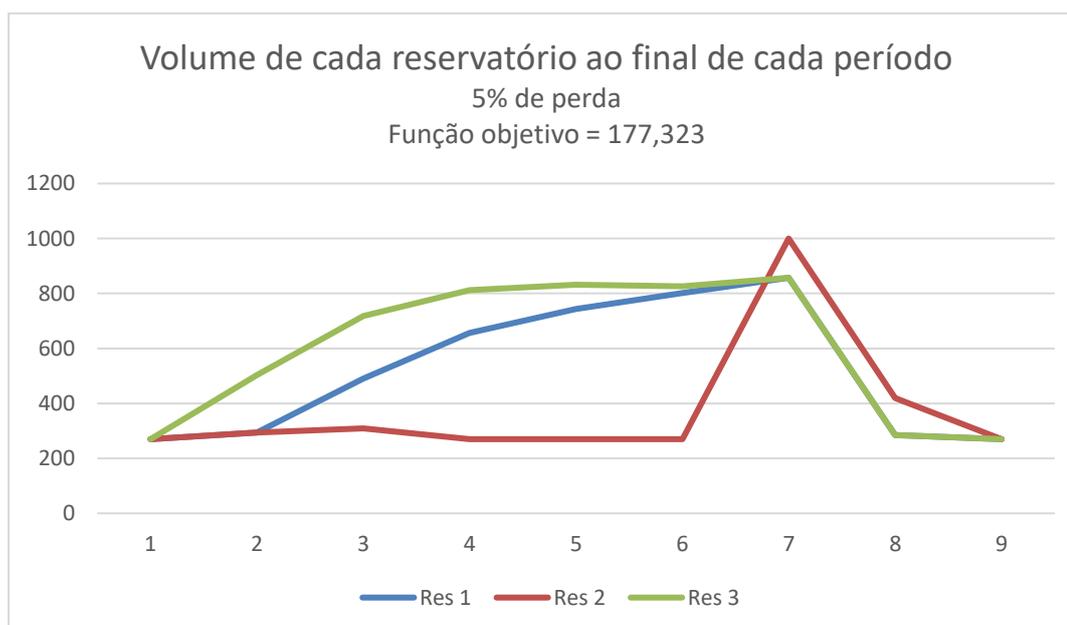


Figura 3: Volumes dos Reservatórios – 5% de perda – 1ª Etapa de testes

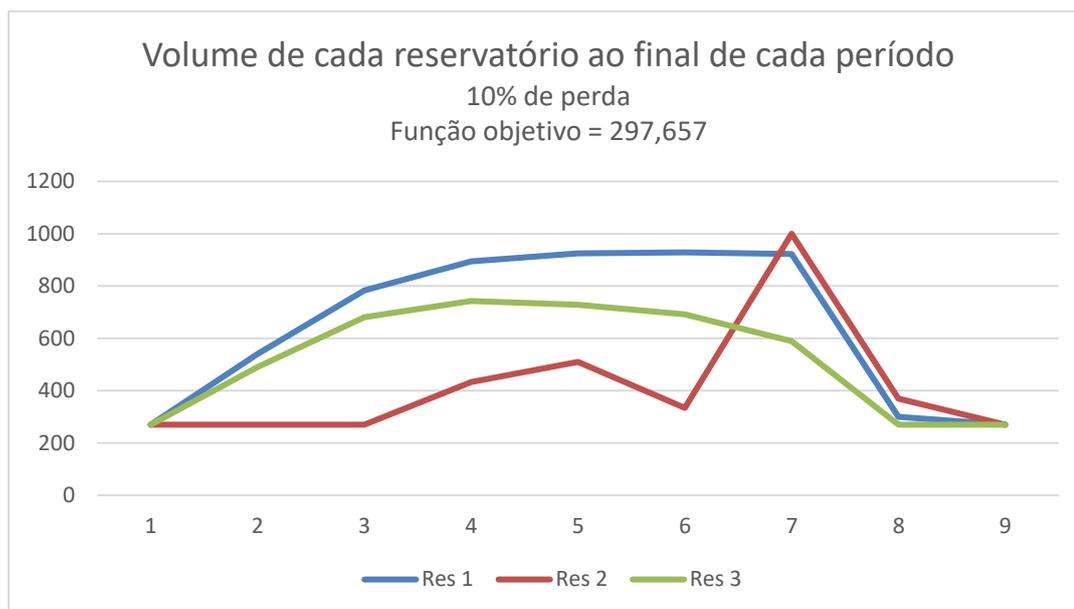


Figura 4: Volumes dos Reservatórios – 10% de perda – 1ª Etapa de testes

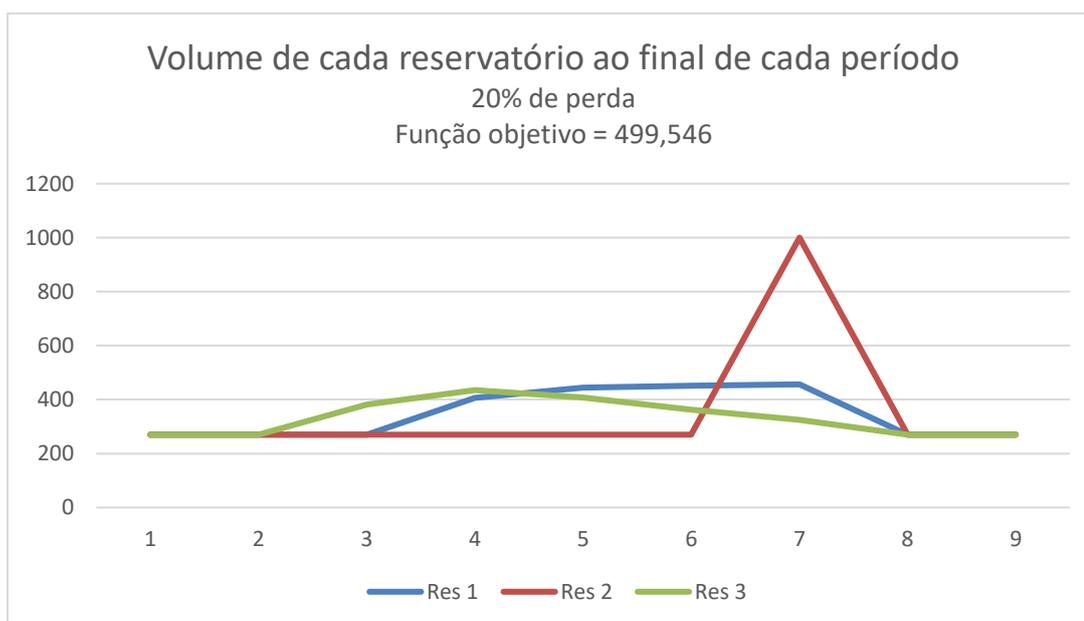


Figura 5: Volumes dos Reservatórios – 20% de perda – 1ª Etapa de testes

Nos gráficos apresentados é possível observar que quanto maior a perda de água no sistema de abastecimento, maior o custo com energia elétrica. Isso ocorre, pois devido às perdas de água, mais água precisa ser bombeada para os reservatórios para que as demandas sejam atendidas. Com isso é possível avaliar os benefícios de investimentos na reparação do sistema a fim de reduzir as perdas de água.



### 3.2 Segunda etapa de testes

Na segunda etapa de testes foi analisado o retorno financeiro ao se utilizar bombas hidráulicas mais eficientes, ou seja, que consomem menos energia elétrica em seu funcionamento. Assim, nesta etapa de testes, foi considerado bombas hidráulicas com consumos de energia elétrica distintos e mesma vazão. Foram consideradas três tipos de bombas: bombas que tem um custo com energia elétrica de R\$30,00 por período para os períodos não críticos, e de R\$90,00 por período para os períodos críticos; bombas que tem um custo de R\$20,00 e R\$60,00, para os períodos não críticos e críticos, respectivamente, e bombas que tem um custo de R\$10,00 e R\$30,00, para os períodos não críticos e críticos, respectivamente. Estas três situações foram simuladas em um sistema de abastecimento sem perdas de água e no mesmo sistema de abastecimento com 10% de perdas de água.

A Tabela 1 apresenta o valor da função objetivo (custos com energia elétrica) para os casos testados.

Tabela 1: Resultados – Diferentes bombas hidráulicas

| Custo de manter a bomba ligada | 0% de perda | 10% de perda |
|--------------------------------|-------------|--------------|
| c1=30, c2=90                   | 92,111      | 297,657      |
| c1=20, c2=60                   | 81,63       | 222,427      |
| c1=10, c2=30                   | 42,815      | 128,421      |

Nestes testes foi possível observar que mesmo em sistemas com perdas, o gasto com energia elétrica diminui significativamente quando há investimentos em bombas mais eficientes. Com isso é possível analisar qual é o custo/benefício desse investimento.

## 4 Conclusão

Testes numéricos com o modelo matemático demonstraram que investimentos a fim de reduzir os vazamentos na rede fornecem uma economia significativa nos gastos com energia elétrica, e investimentos em bombas hidráulicas mais eficientes também fornecem um grande retorno financeiro no que se refere aos custos com energia elétrica em sistemas de abastecimento de água.

## 6 Referências

DE LA VEGA, J.; ALEM, D. Energy rationalization in water supply networks via stochastic programming. **IEEE Latin America Transactions**, v. 13, n. 8, p. 2742-2756, 2015.

IBGE. Atlas de Saneamento 2011. Disponível em:

<[http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/atlas\\_saneamento/default\\_zip.shtm](http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/atlas_saneamento/default_zip.shtm)>. Acesso em: 18 abr. 2013.

SOLER, E. M. et al. Otimização dos custos de energia elétrica na programação da captação, armazenamento e distribuição de água. **Production**, v. 26, n. 2, p. 385-401, 2016.

TOLEDO, F. M. B. et al. Logística de distribuição de água em redes urbanas - racionalização energética. **Pesquisa Operacional**, v. 28, n. 1, p. 75-91, 2008.



---

TSUTIYA, M. T. **Redução do custo de energia elétrica em sistemas de abastecimento de água.**  
São Paulo: ABES - Associação Brasileira de Engenharia Sanitária e Ambiental, 2006.