Métodos de Euler aperfeiçoado e modificado para solução de equações diferenciais ordinárias

Improved and modified Euler methods for the resolution of ordinary differential equations

Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 7, dez. 2016
Edição ERMAC
Iniciação Científica

Beatriz Liara Carreira
Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho"
bia.liara36@homail.com

Analice Costacurta Brandi
Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho"
analice@fct.unesp.br

Resumo

Diversos fenômenos da natureza, envolvidos nas mais diversas áreas, como física, química ou engenharia, são modelados por equações diferenciais ordinárias. Embora a classe de equações diferenciais seja muito abrangente e estudada, a solução exata de grande parte dessas equações, muitas vezes é difícil de ser encontrada, pois os métodos analíticos de solução não são compatíveis com as características da equação. Devido a isso, o estudo de métodos numéricos foi impulsionado, já que desenvolvem uma função bastante importante: gerar soluções numéricas que se aproximem razoavelmente da solução analítica do problema. Nesse contexto, este trabalho consiste na implementação de dois métodos numéricos para a solução de um problema de valor inicial, cuja simulação numérica é executada no software MatLab, com o objetivo de estudar, comparar e analisar os resultados obtidos em relação à soluções analíticas presentes na literatura.
Palavras-chave: Métodos numéricos. Equações diferenciais ordinárias. Método de Euler aperfeiçoado. Método de Euler modificado.

Abstract

Several phenomena of nature, involved in several areas, such as physics, chemistry or engineering, are modeled by ordinary differential equations. Although the class of differential equations is very comprehensive and studied, the exact solution of most of these equations, it is often difficult to find, because the analytical methods of solution are not compatible with the equation characteristics. Because of this, the numerical methods study have been boosted to develop a very important function: generating numerical solutions which fairly approximate the analytic solution of the problem. In this context, this work consists in the implementation of two numerical methods for solving an initial value problem whose numerical simulation is performed in MatLab software, in order to study, compare and analyze the results obtained in relation to the analytical solutions present in the literature.
Keywords: Numerical methods. Ordinary differential equations. Improved Euler's method. Modified Euler's method.

1 Introdução

Como todas as áreas da matemática aplicada, o principal objetivo das equações diferenciais é o de modelar matematicamente eventos da natureza nas mais diversas áreas de aplicação conforme descrito em [1]. Embora as equações diferenciais constituam uma classe de equações de grande visibilidade, onde desenvolvem-se vários estudos, principalmente por ser a base das modelagens de inúmeros problemas que se tem interesse em resolver, até o presente momento existem equações que não permitem serem resolvidas por meio de métodos exatos. Justamente por isso, diversos problemas dentro da área das ciências e engenharias, por exemplo, só admitem soluções aproximadas, e são justamente os métodos numéricos que fornecem essas aproximações.

A necessidade de se resolver problemas cujas modelagens resistiam às técnicas analíticas impulsionou o estudo e aplicação de técnicas numéricas capazes de calcular soluções que substituem a solução analítica, pois tratam-se de aproximações extremamente eficientes.

De outro ponto de vista, observa-se que dentre todas as abordagens possíveis para solucionar um problema matemático, a computacional geralmente é a que fornece maiores vantagens em vários aspectos, sendo a mais apropriada. A princípio, são três tipos de abordagem: a analítica, a experimental e, como dito anteriomente, a computacional.

É fato que a obtenção da solução exata de um problema é algo muito interessante, mas em alguns casos, não é possível. Primeiro porque a grande maioria dos problemas modelados por equações diferenciais não permitem o uso de técnicas analíticas de solução. Geralmente deve-se realizar algumas simplicações na equação modelo do problema para que isso se torne possível. E suponha-se então que isso seja feito. A grande questão agora estará em garantir que o problema continua bem representado por esta nova equação modificada. Se não pode garantir isso, de nada adianta a precisão dos resultados, pois eles não estarão associados à situação do problema para o qual busca-se a solução.

Quando trata-se da abordagem experimental, tem-se a garantia de que aquele resultado é representativo do problema e compatível com os objetivos a princípio. A desvantagem está na demora da obtenção desses resultados, que em alguns casos necessitam de processos extremamente longos e complexos para serem colhidos. Além disso é preciso o uso de equipamentos e uma estrutura física que comporte o experimento, o que consequentemente gera um custo econômico altamente elevado.

Mas se tratando da abordagem computacional, sabe-se que apesar de não estar lidando com soluções exatas, esta ainda é a melhor opção. Essa abordagem não impõe limitações de ordem dimensional, física e espacial.

Essa abordagem computacional é realizada justamente através das técnicas numéricas de solução. Consiste simplesmente em transformar um problema contínuo em discreto a fim de que o computador seja capaz de calcular a solução.

Em contrapartida, detalhes importantes a serem verificados estão relacionados a convergência, consistência e estabilidade, que garantem a integridade da solução. É preciso que haja um controle da propagação do erro, isto é, que a estabilidade esteja garantida. Caso contrário, se o sistema de equações diferenciais ordinárias não for estrututuralmente estável, isso pode gerar um acúmulo de erros que interfere e prejudica totalmente a solução numérica final. A estabilidade aliada à consistência implica em um método convergente, cujos resultados obtidos serão fiéis ao problema, embora não sejam exatos.

No caso das equações diferenciais ordinárias, há diversos métodos destinados à obtenção de aproximações. Obviamente, alguns métodos são mais eficientes do que outros, em contrapartida alguns provocam gastos computacionais maiores e assim por diante. A escolha do método mais adequado dependerá sempre do tipo de resultado esperado para o problema em questão.

Neste trabalho serão testados os métodos de Euler aperfeiçoado e modificado para um problema de valor inicial, em que os resultados numéricos obtidos serão comparados com a solução exata da literatura.

2 Formulação Matemática

Uma equação diferencial ordinária é um problema de evolução, onde uma única variável dependente aparece em função de uma variável independente.

Resolver uma equação diferencial consiste em determinar $y = y(x)$ de tal maneira que y seja diferenciável e além disso $y'(x) = f(x, y(x))$, com $x \in [a, b]$. Quando associa-se uma condição inicial à equação diferencial, então constitui-se um problema de valor inicial.

Em um problema de valor inicial (PVI) a condição inicial é propagada para o interior do domínio através da própria equação diferencial. Problemas desse tipo, de ordem n, podem ser representados pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y', ..., y^{(n-1)}) \\ y(a) = \alpha_1 \\ y'(a) = \alpha_2 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(a) = \alpha_n \end{cases} \tag{1}$$

Para resolver o sistema acima pode-se efetuar uma mudança de variáveis:

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ y_3 = y'' \\ \vdots \\ y_n = y^{(n-1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ \vdots \\ y_n' = f(x, y, y', ..., y(n-1)) \end{cases} \tag{2}$$

Fazendo:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \qquad F = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \end{pmatrix} \tag{3}$$

tem-se $y' = F$. Sabendo que $y(a) = y_a$, portanto:

$$y_a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

Neste trabalho, o problema proposto envolve um problema de valor inicial de primeira ordem. Esse PVI pode ser dado da seguinte forma:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = \alpha \end{cases} \tag{5}$$

onde y é a variável dependente em função da variável independente x.

3 Formulação Numérica

O primeiro passo de qualquer método dedicado à solução numérica de equações é discretizar a região onde procura-se a solução de acordo com [2]. Essa necessidade vem do fato de que o computador precisa calcular a solução aproximada em determinados pontos e estes pontos são selecionados a partir do processo de discretização do domínio que a princípio é contínuo, passando a ser discreto, isto é, agora possui uma quantidade finita de pontos em que o computador calculará a solução. Para isso, deve-se definir uma malha, dividindo o intervalo $[a,b]$ em N subintervalos de comprimento h, sendo portanto:

$$h = \frac{b-a}{N}, \tag{6}$$

também conhecido por espaçamento ou passo da malha.

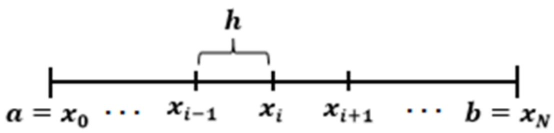

Figura 1: Malha unidimensional de passo h.

3.1 Método de Runge-Kutta de Ordem 2

O método de Runge-Kutta pode ser entendido como um aperfeiçoamento do método de Euler, pois trabalha com uma melhor estimativa para a derivada da função. No método de Euler, a estimativa do valor de y_{n+1} é realizada com o valor de y_n e com a derivada no ponto x_n. No método de Runge-Kutta, a busca por uma uma melhor estimativa da derivada, implica na avaliação da função em um número maior de pontos do intervalo $[x_n, x_{n+1}]$. Um método de Runge-Kutta de ordem R possui erro de ordem $O(h^{R+1})$ e é definido por:

$$y_{n+1} - y_n = h\phi(x_n, y_n, h), \tag{7}$$

onde:

CARREIRA, B. L.; BRANDI, A. C. Método de Euler aperfeiçoado e modificado para solução de equações diferenciais ordinárias. **C.Q.D.- Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 7, p. 4-11, dez. 2016. Edição ERMAC Iniciação Científica.
DOI: 10.21167/cqdvol7ermacic201623169664blcacb0411 - Disponível em: http://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/revista-cqd/

$$
\begin{cases}
\phi(x,y,h) = \sum_{r=1}^{R} c_r k_r \\
k_1 = f(x,y) \\
k_r = f\Big(x + a_r h, y + h\sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} k_s\Big); \quad r = 2,3,...,R \\
a_r = \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs}; \quad r = 2,3,...,R
\end{cases} \tag{8}
$$

A partir daí a obtenção dos métodos de Runge-Kutta ocorre através da determinação das constantes c_r, a_r e b_{rs}. Todo desenvolvimento ocorre a partir da comparação da expanção da função ϕ em potências de h, com a função ϕ_T do método de Taylor, que nada mais é do que:

$$
\phi_T(x,y,h) = f(x,y) + \frac{h}{2!} f'(x,y) + ... + \frac{h^{(q-1)}}{q!} f^{(q-1)}(x,y). \tag{9}
$$

Para obter o método de Runge-Kutta de dois estágios, deve-se tomar $R = 2$, dessa forma o sistema (8) tranforma-se em:

$$
\begin{cases}
\phi(x,y,h) = c_1 k_1 + c_2 k_2 \\
k_1 = f(x,y) \\
k_2 = f(x + a_2 h, y + h b_{21} k_1) \\
a_2 = b_{21}
\end{cases} \tag{10}
$$

Ao substituir os valores de b_{21} e k_1 em k_2, essa constante passa a ser representada da seguinte forma:

$$
k_2 = f(x + a_2 h, y + h a_2 f). \tag{11}
$$

Expandindo k_2 em série de Taylor em torno de (x,y), e depois realizando algumas substituições necessárias determina-se o valor de ϕ:

$$
\phi(x,y,h) = (c_1 + c_2) f + c_2 a_2 h F + \frac{(a_2 h)^2}{2!} c_2 G + O(h^3), \tag{12}
$$

sendo

$$
F = f_x + f_y f \quad \text{e} \quad G = f_{xx} + 2 f f_{xy} + f_{yy} f^2. \tag{13}
$$

A equação acima deverá ser comparada com a função $\phi_T(x,y,h)$, considerando $q = 3$:

$$
\phi_T(x,y,h) = f + \frac{h}{2} F + \frac{h^2}{3!}[G + f_y G] + O(h^3). \tag{14}
$$

A partir da comparação das equações (12) e (14), pode-se determinar métodos de Runge-Kutta de ordem 2. Isso ocorre resolvendo o sistema resultante dessa comparação:

$$\begin{cases} c_1k_1 + c_2k_2 = 1 \\ c_2a_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{15}$$

Como o sistema possui duas equações e três incógnitas, portanto existem infinitas soluções e cada uma delas corresponde a um método de Runge-Kutta, sendo dois deles são mais utilizados e mais populares.

O método de Euler modificado é obtido atribuindo o valor nulo para a constante c_1. Dessa forma obtém-se $c_2 = 1$ e $a_2 = \frac{1}{2}$ e portanto a equação do método é dada por:

$$y_{n+1} = y_n + hk_2, \tag{16}$$

onde:

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad \text{e} \quad k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1). \tag{17}$$

O método de Euler aperfeiçoado é obtido tomando $c_1 = \frac{1}{2}$. Dessa forma obtém-se $c_2 = \frac{1}{2}$ e $a_2 = 1$ e portanto a equação do método é dada por:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \tag{18}$$

onde:

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad \text{e} \quad k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1). \tag{19}$$

4 Resultados Numéricos

Para análise e comparação dos resultados provenientes de simulações numéricas envolvendo os métodos já citados, será utilizada uma equação diferencial ordinária sujeita a seguinte condição inicial, conforme [4]:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{xe^x - xy - 2y}{x} \\ y(1) = \dfrac{e}{4} \end{cases} \tag{20}$$

Esse problema de valor inicial será discretizado no intervalo $[1,3]$ com espaçamento h equivalente a $0,1$, isto é, serão tomados 20 subintervalos do domínio.

A solução analítica é dada por:

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2x}e^x + \frac{1}{4x^2}e^x, \tag{21}$$

para todo x interior ao intervalo $[a,b]$.

A simulação foi executada no software MatLab, e os resultados numéricos estão representados na Figura 2, onde consta também a curva da solução analítica.

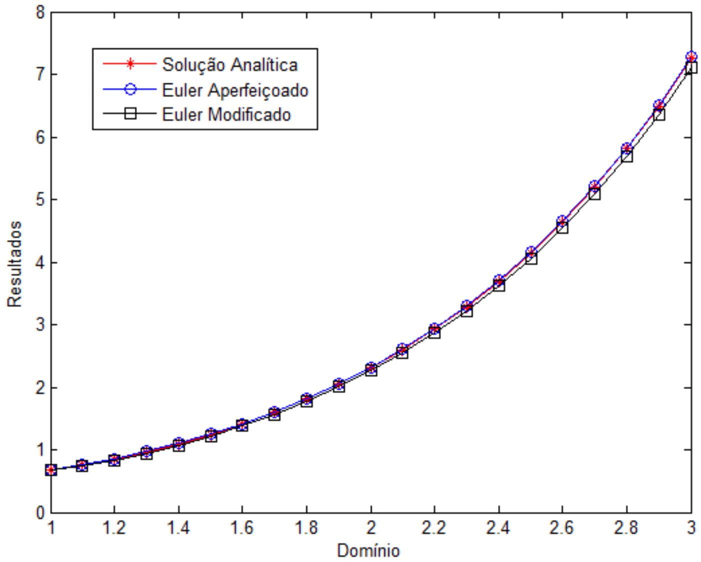

Figura 2: Comparação entre as soluções numéricas e analítica.

Nota-se que ambos os métodos aproximaram bem a solução do problema, pois as curvas estão bastante próximas. Isso indica que os métodos convergiram para a solução da equação diferencial ordinária dentro do intervalo escolhido.

A fim de verificar com maior detalhe qual dos métodos foi mais eficiente para o problema desenvolvido, segue uma ampliação da Figura 2.

Com essa ampliação verifica-se que o método de Euler aperfeiçoado foi ainda mais preciso que o método de Euler modificado, embora ambos tenham desempenhado muito bem a função de aproximar a solução do problema.

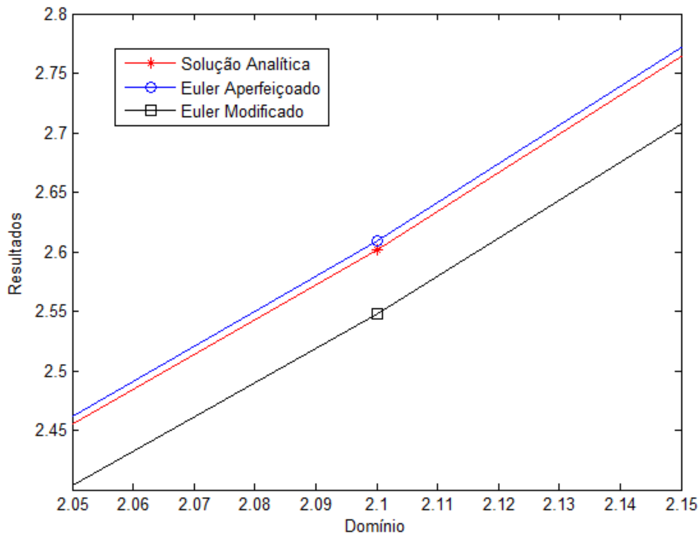

Figura 3: Ampliação da Figura 2.

A seguir encontra-se a representação do erro obtido na simulação dos métodos. Nesse caso é possível analisar qual método foi mais eficiente em todo intervalo, e as curvas permitem uma maior compreensão do quão melhor foi um método em comparação ao outro.

Percebe-se que o método de Euler aperfeiçoado produziu um erro menor que o método de Euler modificado. Além disso, à medida que percorre-se o intervalo o erro de ambos os métodos tende a aumentar e a diferença entre as curvas também aumenta. Em suma, isso mostra que o erro do método de Euler modificado tem uma taxa de crescimento maior que o erro do outro método.

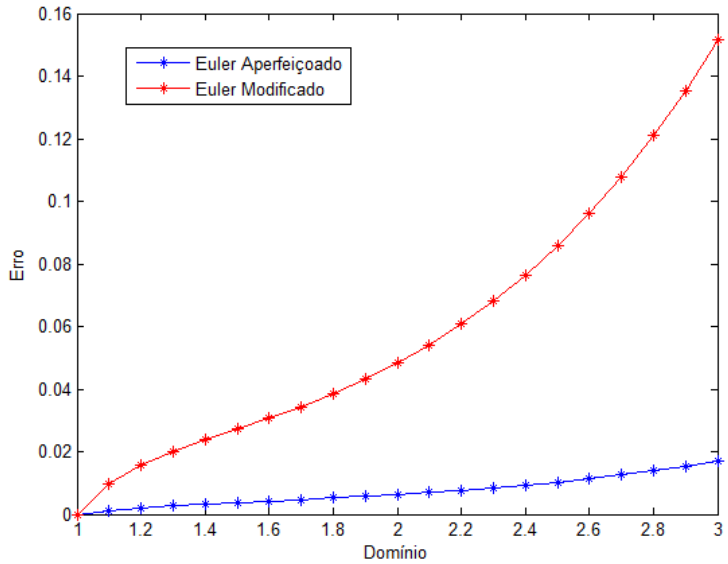

Figura 4: Erro global dos métodos numéricos.

5 Conclusão

Neste trabalho os métodos de Euler aperfeiçoado e modificado foram testados para um problema de valor inicial, em que os resultados numéricos obtidos foram comparados com a solução analítica.

Observa-se nos resultados que a aproximação de ambos os métodos é satisfatória, porém não é suficiente para identificar qual deles tem melhor desempenho. Esta análise é possível com a Figura 3, onde fica evidente que o método de Euler aperfeiçoado se sobressai em comparação ao Euler modificado. Essa verificação é ainda mais reforçada observando a Figura 4.

Em análise geral, ambos os métodos são eficientes na obtenção da solução numérica do problema. Todavia, os resultados numéricos obtidos são próximos entre si. Isto ocorre pois os métodos são obtidos do método de Runge-Kutta de ordem 2, isto é, ambos possuem erro de truncamento de ordem 3.

Referências

[1] CUMINATO, J. A.; MENEGUETTE JUNIOR, M. **Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[2] CUNHA, M. C. C. **Métodos numéricos**. 2. ed. rev. e ampl. Campinas: Editora da UNICAMP, 2003.

[3] GILAT, A; SUBRAMANIAM, V. **Métodos numéricos para engenheiros e cientistas**: uma introdução com aplicações usando o MATLAB. Porto Alegre: Bookman, 2008.

[4] ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.