



**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 7, dez. 2016
Edição ERMAC

Leticia Braga Berlandi

Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho"
(UNESP/FCT).
leticia-braga-berlandi@hotmail.com

Analice Costacurta Brandi

Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho"
(UNESP/FCT).
analice@fct.unesp.br

Comparação entre métodos numéricos computacionais na solução de um problema de valor inicial

Comparison of computational numerical methods in an initial value problem solution

Resumo

Equações diferenciais ordinárias (EDO) ocorrem com muita frequência na descrição de fenômenos da natureza. Há vários métodos que resolvem analiticamente uma EDO, entretanto nem sempre é possível obter essa solução. Neste caso, os métodos numéricos são utilizados para se encontrar uma solução aproximada. Neste trabalho discute-se o desenvolvimento e a utilização de dois métodos numéricos para resolução de EDO's. Para isso, concentra-se, principalmente, em problemas de valor inicial para equações de primeira ordem. Neste contexto, trata-se da comparação de dois métodos numéricos computacionais, utilizados para aproximar equações diferenciais ordinárias, dado um problema de valor inicial (PVI) e a referente solução analítica da equação. O primeiro método utilizado é o Taylor de ordem 2 e o segundo é o Runge-Kutta de ordem 3. O principal objetivo é implementar os dois métodos numéricos no software MatLab e analisar se eles aproximam-se da solução exata. Com os resultados obtidos, deve-se concluir qual dos dois métodos é mais eficaz para esse tipo de problema.

Palavras-chave: Métodos Numéricos. Equações Diferenciais Ordinárias. Método de Taylor. Método de Runge-Kutta.

Abstract

Ordinary differential equations (ODE) occur very often in the description of nature phenomena. There are several methods that analytically solving an ODE, however it is not always possible to obtain this solution. In this case, numerical methods are used to find an approximate solution. In this paper discusses the development and the use of two numerical methods for ODE's resolution. For this we will concentrate primarily in initial value problems for first order equations. In this context, we will treat the comparison of two computational numerical methods used to approximate ordinary differential equations, given an initial value problem (IVP) and the related analytical solution of the equation. The first method is the 2nd order Taylor and the second is 3rd order Runge-Kutta. The main objective is to implement the two numerical methods in MatLab software and analyze if they approach of the exact solution. With the results obtained, must conclude which of the two methods is more effective for this type of problem.

Keywords: Numerical Methods. Ordinary Differential Equations. Taylor Method. Runge-Kutta Method.



1 Introdução

Muitos problemas significativos e importantes da engenharia e das ciências, quando formulados matematicamente, requerem a determinação de uma função que satisfaça uma equação contendo derivadas da função incógnita. Tais equações são denominadas equações diferenciais. Equações diferenciais são classificadas de acordo com o tipo, a ordem e a linearidade. Neste trabalho, o interesse está em resolver um problema de valor inicial, que é composto por uma equação diferencial e por condições adicionais prescritas em um único ponto. Além disso, estuda-se métodos numéricos para problemas de valor inicial para equações diferenciais ordinárias.

Os métodos numéricos consistem em uma ferramenta que auxilia na obtenção de soluções numéricas, em geral aproximadas, de diversos problemas que encontram-se no mundo real. Como a utilização de computadores de baixo custo com uma alta capacidade de processamento, muitas das atividades da ciência têm feito uso cada vez mais intensivo dos métodos computacionais na resolução de problemas reais, para os quais as soluções manuais são impraticáveis, imprecisas, ou ainda, são muito custosas em relação ao tempo de execução. Em situações da vida real, tem-se a necessidade constante de encontrar soluções matemáticas para problemas que são modelados por equações diferenciais ordinárias, uma vez que esse tipo de equação ocorre com muita frequência na explicação de fenômenos da natureza. No presente trabalho serão utilizadas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Esse tipo de equação contém derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável independente, e pode ser descrita na forma $y' = f(x, y)$, onde f é uma função real dada, de duas variáveis reais x e y , e y é uma função incógnita da variável independente x .

O principal objetivo do trabalho é obter a resolução de problemas envolvendo equações diferenciais ordinárias, dado um problema de valor inicial e a referente solução analítica da equação, através do método de Taylor de ordem 2 e do método de Runge-Kutta de ordem 3. A implementação do algoritmo será através do software MatLab, em que uma pequena análise do erro, comparações entre os métodos numéricos e a solução analítica, conhecida da literatura, serão realizadas.

2 Formulação matemática

Um problema de valor inicial é um problema de evolução, no qual a informação inicial é propagada para o interior do domínio. A principal razão para se introduzir métodos numéricos para aproximar soluções de problemas de valor inicial (PVI) é a dificuldade de se encontrar, analiticamente, as soluções da equação. Em muitos casos, a teoria garante a existência e unicidade de solução, mas não se sabe qual é a expressão analítica desta solução. A solução analítica de uma EDO de primeira ordem é uma expressão matemática da função $y(x)$ que satisfaz a equação diferencial e inclui o valor $y(x_1) = y_1$. Uma vez conhecida a função $y(x)$, pode-se calcular o seu valor em qualquer x . Existem técnicas relativamente simples que se aplicam à solução de EDO's de primeira ordem, mas, em muitas situações, não é possível obter uma solução analítica. Daí o uso de métodos numéricos, capazes de se obter uma solução aproximada da solução analítica.

Os métodos estudados aqui se baseiam em

$$\text{dado o PVI: } \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$



constrói-se x_1, x_2, \dots, x_n que serão igualmente espaçados, ou seja: $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 0, 1, \dots$, e calcula-se as aproximações $y_i \approx y(x_i)$ nestes pontos. A equação (1) é uma EDO de primeira ordem com condição inicial $y(x_0) = y_0$, onde $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e y_0 é o valor inicial no ponto x_0 .

3 Formulação numérica

Na abordagem numérica, métodos numéricos são utilizados para aproximar soluções de problemas de valor inicial de equações diferenciais de primeira ordem. Os procedimentos numéricos podem ser executados, em computadores e, também, em algumas calculadoras. Idealmente, os valores aproximados da solução serão acompanhados de cotas para os erros que garantem um nível de precisão para aproximações. Existem muitos métodos, hoje em dia, que produzem aproximações numéricas de soluções de equações diferenciais.

A obtenção de uma solução numérica para um problema físico por meio da aplicação de métodos numéricos nem sempre fornece valores que se encaixem dentro de limites razoáveis. Esta afirmação é verdadeira mesmo quando se aplica um método adequado e os cálculos são efetuados de uma maneira correta. Esta diferença é chamada de erro e é inerente ao processo.

Chama-se solução numérica o procedimento empregado no cálculo de uma estimativa para a solução associada a um conjunto de pontos discretos. O processo de solução é incremental, o que significa que ele é determinado em passos. Ele começa no ponto no qual o valor inicial é fornecido. Em seguida, usando a solução conhecida no primeiro ponto, determina-se uma solução em um segundo ponto próximo. Depois, obtém-se uma solução em um terceiro ponto, e assim por diante.

Há procedimentos que envolvem uma abordagem de passo simples e outros que consideram uma abordagem multipasso. Na abordagem de passo simples, a solução no ponto seguinte, x_{i+1} , é calculada a partir da solução conhecida no ponto atual, x_i . Na abordagem multipasso, a solução em x_{i+1} é calculada a partir das soluções conhecidas em vários pontos anteriores. Neste trabalho utilizou-se a abordagem de passo simples. Para resolver uma EDO de forma numérica, o problema proposto deve incluir, além da equação, o domínio da solução. Nos métodos utilizados deve-se definir o número de pontos do intervalo $[a, b]$, chamado de N . O espaçamento h é definido à partir do intervalo $[a, b]$ e à partir de N , sendo $h = (b - a)/N$, $N \neq 0$. Quando se tem h e os extremos do intervalo, $N = (b - a)/h$, $h \neq 0$.

O processo de discretização consiste em resolver numericamente uma equação diferencial calculando aproximações para a função $y = y(x)$ em pontos discretos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ do intervalo de discretização $[a, b]$. Para discretizar o intervalo $[a, b]$ considera-se N subintervalos, $N \geq 1$ e faz-se $x_n = x_0 + nh$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, com $x_0 = a$ e $x_n = b$, sendo $h = \frac{b-a}{N}$.

Conhecendo $y(x)$ num ponto inicial dado $y(x_0) = y_0$, calcula-se passo à passo, nos pontos $x_1 = x_0 + 1h$, $x_2 = x_0 + 2h$, $x_3 = x_0 + 3h, \dots, x_n = x_0 + nh$, as soluções aproximadas y_n para a solução exata $y(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$.

O erro local, cometido nas aproximações em cada ponto, é a diferença entre o valor exato da equação diferencial e o valor numérico aproximado em cada um dos pontos do intervalo $[a, b]$, isto é,

$$e(x_n) = y(x_n) - y_n, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$



A descrição dos dois métodos utilizados na comparação numérica segue abaixo.

3.1 Método de Taylor de Ordem 2

Considerando o PVI (1), tem-se que a função f pode ser linear ou não, mas admite-se que f seja contínua e suficientemente derivável em relação a x e a y , ou seja, sua derivada existe em cada ponto do seu domínio. Seja $y(x)$ a solução exata de (1). A expansão em série de Taylor para $y(x_n + h)$ em torno do ponto x_n , é dada por:

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \dots + \frac{h^p}{p!}y^{(p)}(x_n) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}y^{(p+1)}(\xi_n), \quad (2)$$

onde $h = x - x_n$, $x_n < \xi_n < x_n + h$ e o último termo da equação é o erro de truncamento local.

As derivadas na expansão (2) não são conhecidas explicitamente, uma vez que a solução exata não é conhecida. Contudo, se f é suficientemente derivável, elas podem ser obtidas considerando-se a derivada total de $y' = f(x, y)$ com respeito a x , sabendo que f é uma função implícita de y . Dessa forma, pode-se expressar qualquer derivada de y em termos de $f(x, y)$ e de suas derivadas parciais. É claro que, a menos que $f(x, y)$ seja uma função muito simples, as derivadas totais de ordem mais elevada tornam-se cada vez mais complexas. Por razões práticas deve-se, então, limitar o número de termos na expansão (2).

Truncando o desenvolvimento da série de Taylor em $p = 2$, é fornecido o seguinte método:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n, \quad (3)$$

onde

$$\begin{cases} y'_n = f(x_n, y_n) \\ y''_n = \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n)y'_n \end{cases}$$

o qual é conhecido como método de Taylor de ordem 2.

Conforme dito acima, derivadas de ordem mais elevada podem ficar cada vez mais complicadas de serem resolvidas e os métodos de Taylor de ordem mais elevada ($p \geq 2$) possuem a grande inconveniência de necessitar do cálculo das derivadas. Para evitar as derivações de f recorre-se normalmente aos chamados métodos de Runge-Kutta. Portanto, pode-se afirmar que os métodos de Runge-Kutta foram desenvolvidos com o objetivo de produzirem resultados com a mesma precisão que os obtidos pelos métodos de Taylor, mas evitando o cálculo das derivadas, que muitas vezes são complicadas de serem calculadas.



3.2 Método de Runge-Kutta de Ordem 3

Segundo Barroso (1987), os métodos de Runge-Kutta de ordens mais elevadas são obtidos através de um sistema de equações para obter aproximações para as derivadas em vários pontos. O método de Runge-Kutta de ordem 3 é dado por:

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{h}{9}\right) (2k_1 + 3k_2 + 4k_3), \quad (4)$$

onde

$$k_1 = f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = f\left(x_n + \left(\frac{1}{2}\right)h, y_n + \left(\frac{1}{2}\right)hk_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x_n + \left(\frac{3}{4}\right)h, y_n + \left(\frac{3}{4}\right)hk_2\right).$$

4 Resultados numéricos

No presente trabalho um problema de valor inicial foi considerado e resolvido pelos métodos de Taylor de ordem 2 e Runge-Kutta de ordem 4.

4.1 Problema

Considerando o PVI abaixo,

$$\begin{cases} y' = \frac{\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sec}(x)}{\operatorname{cot}(x) + \operatorname{csc}(x)}, & x \in [0.5, 1.5], \quad h = 0.1 \\ y(0.5) = 1 \end{cases}$$

sendo a solução analítica dada por:

$$y(x) = x - \operatorname{sen}(x) + 2 \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \ln(\cos(x)) + 0.912003.$$

Ao implementar a solução analítica e os métodos de Taylor de ordem 2 e Runge-Kutta de ordem 3 através do software MatLab, levando em consideração os dados do problema que é fornecido, obtém-se como resultado as Figuras 1 e 2.

A Figura 1 representa a comparação numérica entre os dois métodos aqui abordados e a solução analítica já conhecida, para que dessa forma seja verificado se os métodos realmente apresentam eficácia, com solução próxima à analítica. Como pode-se notar, não é possível concluir apenas observando a Figura 1 qual método numérico melhor se aproxima da solução exata do problema no intervalo de $x = 0.5$ a $x = 1.3$, aproximadamente. Após $x = 1.3$, é evidente que o método que melhor se aproxima da solução analítica é o método de Runge-Kutta de ordem 3. Essa afirmação é concluída quando se observa a Figura 2, que indica um erro numérico muito

pequeno quanto ao método de Runge-Kutta de ordem 3. O método de Taylor de ordem 2 apresenta um erro também considerado pequeno, porém não tanto quanto o método de Runge-Kutta de ordem 3.

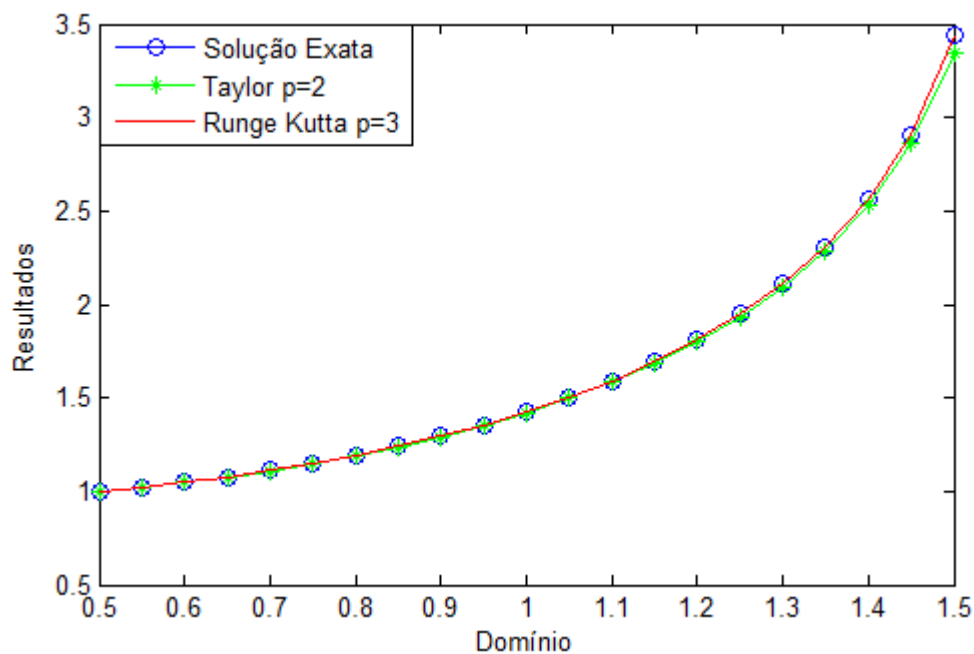


Figura 1: Comparação entre as soluções numéricas e a analítica.

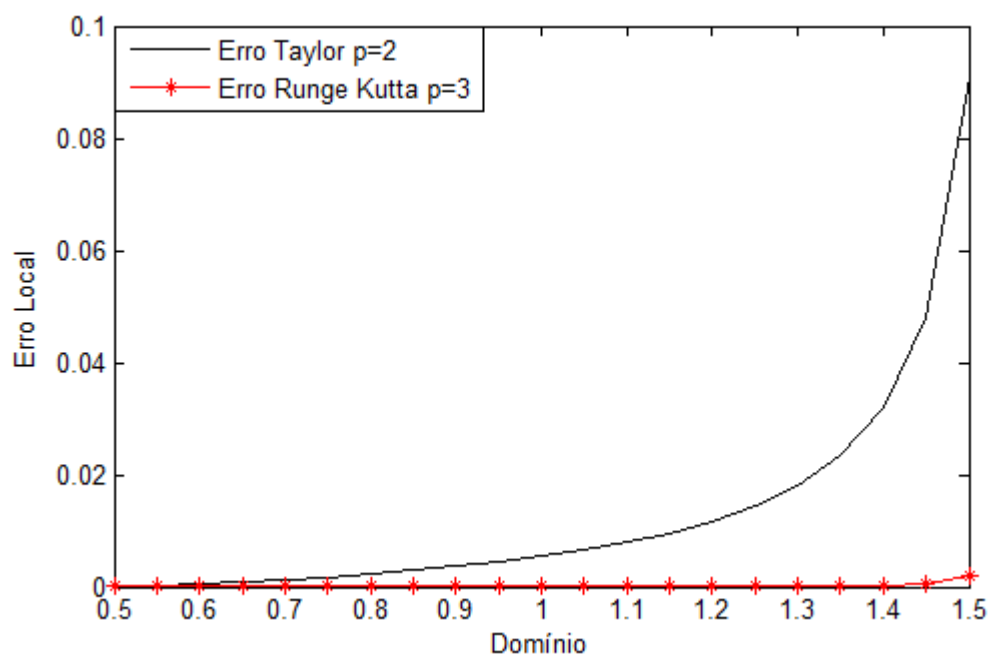


Figura 2: Erro global dos métodos numéricos.



De acordo com o problema apresentado, nota-se que o método de Runge-Kutta de ordem 3 é mais eficaz do que o método de Taylor de ordem 2 para esse tipo de problema, o que era esperado, pois o método de Runge-Kutta é um método de terceira ordem e o método de Taylor é um método de segunda ordem, sabendo-se que quanto maior a ordem do método, mais aproximada é a solução numérica. Os resultados da implementação do algoritmo podem ser observados através da Tabela 1.

Tabela 1 - Resultados da implementação do problema em questão.

Solução Analítica	Taylor $p = 2$	Runge-Kutta de Ordem 3	Erro Taylor $p = 2$	Erro Runge-Kutta de Ordem 3
1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000
1.0479	1.0467	1.0479	0.0013	0.0000
1.1108	1.1079	1.1108	0.0029	0.0000
1.1916	1.1865	1.1916	0.0050	0.0000
1.2944	1.2865	1.2944	0.0079	0.0000
1.4250	1.4132	1.4250	0.0118	0.0000
1.5922	1.5748	1.5922	0.0175	0.0001
1.8112	1.7849	1.8110	0.0262	0.0001
2.1110	2.0693	2.1107	0.0417	0.0003
2.5625	2.4860	2.5613	0.0765	0.0012
3.4385	3.2168	3.4266	0.2216	0.0118

5 Conclusão

Neste trabalho foram testados métodos numéricos para a aproximação de um problema de valor inicial, comparando-se os resultados obtidos com a solução analítica conhecida.

Para obter resultados coerentes e precisos quando utiliza-se métodos numéricos computacionais é necessário implementar o problema corretamente. O problema implementado no software MatLab teve como objetivo mostrar graficamente as soluções através dos métodos de Taylor de ordem 2 e Runge-Kutta de ordem 3. Ao analisar os resultados obtidos percebe-se que o método mais eficaz para tal equação diferencial foi o método de Runge-Kutta de ordem 3, uma vez que esteve mais próximo da solução analítica, apresentando um erro que pode ser considerado desprezível, devido o resultado ser bem próximo ao da solução exata da equação.

6 Referências

BARROSO, L. C. et al. **Cálculo numérico com aplicações**. 2. ed. São Paulo: Harbra, 1987.

CHAPRA, S. C; CANALE, R. P. **Métodos numéricos para engenharia**. 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2011.

CUMINATO, J. A; MENEGUETTE JUNIOR, M. **Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.



FRANCO, N. B. **Cálculo numérico**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB**. Porto Alegre: Bookman, 2008.

RUGGIERO, M. A. G; LOPES, V. L. R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001. v. 1.