Funções representadas por integrais *

Felipe Felix Souto † Marta Cilene Gadotti ‡

Resumo

Na Análise de Fourier os principais elementos são funções definidas por integrais, como os coeficientes da Série de Fourier, ou, principalmente, a função da Transformada de Fourier. Assim, as funções representadas por integrais, ou integrais dependendo de um parâmetro tem grande importância nesse tipo de estudo. Neste trabalho, pretendemos estabelecer alguns resultados com respeito a continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade de funções definidas por integrais, baseado na referência [1].

Palavras Chave: Análise de Fourier, funções representadas por integrais, integrais dependendo de um parâmetro

Introdução

Esse tópico tem grande importância, mas, muitas vezes, é deixado de lado nos cursos de Cálculo e, até mesmo, em alguns cursos introdutórios à Análise: funções representadas por integrais ou, numa nomenclatura antiga, integrais dependendo de um parâmetro. Um exemplo desse tipo de função é a transformada de Fourier de uma função f:

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)dx.$$

Nosso objetivo principal será discutir as propriedades de continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade de uma função mais geral dada por:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy, \tag{0.0.1}$$

onde $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função que satisfaz certas condições, que serão explicitadas nos resultados descritos neste texto, e I pode ser um intervalo limitado ou não de $\mathbb{R}$.

*Trabalho realizado como parte do projeto de Iniciação Científica Fapesp, Processo: 2015/00534-0 sob a orientação da Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti.

†Email: feipe_ felix_ souto@hotmail.com. Curso de Bacharelado em Matemática, Universidade Estadual Paulista - Rio Claro

‡Email: martacg@rc.unesp.br, Departamento de Matemática do IGCE-Unesp, Rio Claro.

1 Integrais definidas

Para estudarmos funções do tipo de (0.0.1), devemos, primeiramente, estudar algo mais simples, que são as funções representadas por integrais definidas:

$$\varphi(x) = \int_a^b f(x,y)dy, \tag{1.0.2}$$

onde $f : I \times [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função e I é um intervalo limitado ou não de $\mathbb{R}$. Note que se f for uma função contínua, então φ está bem definida.

Proposição 1 *Se $f : I \times [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então $\varphi : I \to \mathbb{R}$, definida em* (1.0.2)*, é uma função contínua.*

Demonstração: Seja $x_0 \in I$ qualquer. Queremos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para $|h| < \delta$, temos:

$$|\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)| < \varepsilon.$$

Para tanto, fixamos $\alpha > 0$ e consideramos a restrição de f no retângulo R dado por $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [a,b]$, que é uniformemente contínua (já que é uma função contínua definida num compacto). Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $(x,y),(x',y') \in R$:

$$\begin{cases} |x - x'| < \delta \\ |y - y'| < \delta \end{cases} \Rightarrow |f(x,y) - f(x',y')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Daí,

$$|\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)| \leq \int_a^b |f(x+h,y) - f(x,y)|dy < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dy = \varepsilon,$$

desde que $|h| < \delta$. ■

Definição 2 *Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função $\mathfrak{L}^1$, quando for integrável e absolutamente integrável.*

Corolário 3 *Seja $f : I \times [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função dada por $f(x,y) = g(x,y)k(y)$, onde $g : I \times [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $k : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função $\mathfrak{L}^1$, então φ é uma função continua.*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, a continuidade da restrição de g no conjunto $R = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [a,b]$, para algum $\alpha > 0$ fixado, implica na existência de $\delta > 0$ tal que para $(x,y),(x',y') \in R$ tem-se:

$$|g(x,y) - g(x',y')| < \varepsilon \left[\int_a^b |k(y)|dy \right]^{-1},$$

então, para $|h| < \delta$:

$$|\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)| \leq \int_a^b |g(x,y) - g(x',y')||k(y)|dy < \varepsilon. \quad ■$$

Proposição 4 *Seja $f : I \times [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, possuindo derivada parcial $f_x : I \times [a,b] \to \mathbb{R}$ também contínua. Então $\varphi : I \to \mathbb{R}$ é derivável e vale:*

$$\varphi'(x) = \int_a^b f_x(x,y)dy.$$

Demonstração: Como φ define uma função contínua, basta mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $|h| < \delta$:

$$\left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} - \int_a^b f_x(x,y)dy\right| < \varepsilon$$

ou, equivalentemente,

$$\left|\int_a^b \left[\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} - f_x(x,y)\right] dy\right| < \varepsilon.$$

De fato, dado $\varepsilon > 0$, a continuidade de f_x garante a existência de $\delta > 0$ tal que para $|h| < \delta$:

$$|f_x(x+h,y) - f_x(x,y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{1.0.3}$$

Além disso, do Teorema do Valor Médio, existe $\theta_y \in [0,1]$, tal que:

$$f(x+h,y) - f(x,y) = f_x(x+h\theta_y,y)h. \tag{1.0.4}$$

Portanto, segue de (1.0.3) e (1.0.4) que, para $|h| < \delta$:

$$\left|\int_a^b \left[\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} - f_x(x,y)\right] dy\right| \leq$$
$$\int_a^b \left|\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} - f_x(x,y)\right| dy = \int_a^b |f_x(x+h\theta_y,y) - f_x(x,y)|dy < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

O próximo Corolário, segue diretamente da proposição anterior.

Corolário 5 *Seja $f : I \times [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função dada por $f(x,y) = g(x,y)k(y)$, onde $g : I \times [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua com derivada parcial $g_x : I \times [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e $k : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função $\mathfrak{L}^1$, então φ é uma função derivável e vale:*

$$\varphi'(x) = \int_a^b f_x(x,y)\,dy.$$

Proposição 6 *Sejam $g : [c,d] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $k : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função $\mathfrak{L}^1$, então*

$$\int_c^d \int_a^b g(x,y)k(y)\,dy\,dx = \int_a^b \int_c^d g(x,y)k(y)\,dx\,dy.$$

Demonstração: Primeiramente, defina $F : [c,d] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$F(x,y) = \int_c^x g(\xi,y)\,d\xi$$

e $G : [c,d] \to \mathbb{R}$ por:

$$G(x) = \int_a^b F(x,y)k(y)\,dy.$$

Observe que:

$$G(c) = 0 \quad e \quad G(d) = \int_a^b \int_c^d g(x,y)k(y)\,dx\,dy.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, F é contínua e $F_x(x,y) = g(x,y)$, logo contínua também. Assim, segue do Corolário 5 que:

$$G'(x) = \int_a^b F_x(x,y)k(y)dy = \int_a^b g(x,y)k(y)dy.$$

Por fim, integrando a expressão acima de c até d, concluímos que:

$$\int_a^b \int_c^d g(x,y)k(y)\,dx\,dy = G(d) - G(c) = \int_c^d \int_a^b g(x,y)k(y)\,dy\,dx. \quad \blacksquare$$

SOUTO, F. S.; GADOTTI. Funções representadas por integrais. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 6, p. 4-14, jul. 2016. Edição Iniciação Científica.
DOI: 10.21167/cqdvol6ic201623169664ffsmcg0414 - Disponível em: http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/index.jsp

2 Funções definidas por integrais impróprias

Agora que o caso mais simples foi estudado, podemos seguir com um tipo um pouco mais complexo dado por:

$$\psi(x) = \int_a^\infty f(x,y)\,dy, \tag{2.0.5}$$

onde $f : I \times [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função satisfazendo algumas hipóteses a serem definidas e I pode ser um intervalo limitado ou não de $\mathbb{R}$. Para que ψ esteja bem definida basta que f seja integrável. Entretanto, como nem tudo são flores, nem a condição de continuidade dessa função será suficiente para que possamos ter resultados análogos aos já demonstrados. Por exemplo:

Considere a função $f(x,y) = sen^2(x)e^{-y\mathrm{sen}^2(x)}$ que é integrável em $[0, +\infty)$, para cada x real fixado. E defina:

$$\psi(x) = \int_0^\infty f(x,y)\,dy = \int_0^\infty \mathrm{sen}^2(x)e^{-y\mathrm{sen}^2(x)}\,dy = \lim_{y\to\infty}(1 - e^{-y\mathrm{sen}^2(x)}),$$

a qual pode ser dada explicitamente por:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & se\ x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 1, & c.c. \end{cases}$$

que é uma função descontínua.

Para determinar uma condição para validar alguns resultados análogos, vamos trabalhar com o conceito da integral imprópria como limite uniforme de integrais do tipo:

$$\psi_N(x) = \int_a^N f(x,y)\,dy,$$

assim, como cada ψ_N é contínua, seu limite uniforme, ψ, também será.

Definição 7 *Dizemos que a integral imprópria definida por* (2.0.5) *converge uniformemente num intervalo $J \subset I$ se, dado $\varepsilon > 0$, existir $y(\varepsilon) > a$ tal que para todo $x \in J$ tem-se:*

$$\left| \int_{y(\varepsilon)}^\infty f(x,y)\,dy \right| < \varepsilon.$$

Proposição 8 *Se $f : I \times [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ for uma função contínua e a integral definida em* (2.0.5) *convergir uniformemente, então $\psi : I \to \mathbb{R}$ é contínua.*

Demonstração: Da convergência uniforme, dado $\varepsilon > 0$, existe um $y(\varepsilon) > a$ tal que para todo $x \in I$:

$$\left| \int_{y(\varepsilon)}^\infty f(x,y)dy \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Além disso, a continuidade de f garante que existe $\delta > 0$ tal que, para $|h| < \delta$, vale:

$$\left| \int_a^{y(\varepsilon)} [f(x+h,y) - f(x,y)]\,dy \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Assim, para x e $x+h$ em I, com $|h| < \delta$, temos:

$$|\psi(x+h) - \psi(x)| \le \left| \int_a^{y(\varepsilon)} [f(x+h,y) - f(x,y)]dy \right| + \left| \int_{y(\varepsilon)}^\infty f(x+h,y)\,dy \right| + \left| \int_{y(\varepsilon)}^\infty f(x,y)\,dy \right| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Proposição 9 ***(Teste M de Weierstrass)*** *Suponha que para cada x fixado, a função $y \mapsto f(x,y)$ seja $\mathfrak{L}^1$ em $[a,\infty)$. Suponha, também, que exista uma função $M : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ não negativa e integrável tal que $|f(x,y)| \leq M(y)$, para todo $x \in J \subset [a,\infty)$. Então a integral em (2.0.5) converge absoluta e uniformemente em J, isto é, as integrais:*

$$\int_a^\infty f(x,y)dy \quad e \quad \int_a^\infty |f(x,y)|dy$$

são uniformemente convergentes em J.

Demonstração: Como $M(y)$ é integrável, denote

$$\int_a^\infty M(y)\,dy = L.$$

Para cada $\varepsilon > 0$, existe $y(\varepsilon) \in [a,\infty)$ tal que:

$$L - \varepsilon < \int_a^\alpha M(y)\,dy \leq L, \;\; y(\varepsilon) < \alpha < \infty.$$

Logo, para $y(\varepsilon) < \alpha \leq \alpha'$, tem-se:

$$0 \leq \int_\alpha^{\alpha'} M(y)\,dy = \left(\int_a^{\alpha'} M(y)\,dy - L\right) - \left(\int_a^{\alpha} M(y)\,dy - L\right) < \varepsilon.$$

Portanto, para $a \leq y(\varepsilon) < \alpha \leq \alpha' < \infty$,

$$\left|\int_\alpha^{\alpha'} f(x,y)dy\right| \leq \left|\int_\alpha^{\alpha'} |f(x,y)|dy\right| < \int_\alpha^{\alpha'} M(y)dy < \varepsilon, \;\; \forall x \in J. \quad \blacksquare$$

Observação 10 *Não é sempre que a integral de uma função converge absoluta e uniformemente, um exemplo bem conhecido é:*

$$\int_0^\infty \frac{sen(xy)}{y}\,dy\,,$$

cuja integral converge uniformemente, mas não absolutamente.

Corolário 11 *Seja $f : I \times [a,\infty) \to \mathbb{R}$ uma função dada por $f(x,y) = g(x,y)k(y)$, onde $g : I \times [a,\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada (limitação de g como função de y para x fixado) e $k : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função $\mathfrak{L}^1$, então ψ é uma função contínua.*

Demonstração: Basta observar que a integral de f definida em (2.0.5) converge uniformemente pois:

$$\left|\int_a^\infty g(x,y)k(y)dy\right| < M\int_a^\infty |k(y)|dy,$$

onde M é o máximo de $g(x,y)$ para $x_0 - b \leq x \leq x_0 + b$ e $-\infty < y < +\infty$, sendo $b > 0$ fixado. E daí, temos a continuidade de ψ no ponto x_0. $\blacksquare$

Observação 12 *Observando a demonstração acima, vê-se que para demonstrar a continuidade de ψ num ponto x_0, basta supor que a integral em (2.0.5) convirja uniformemente em uma vizinhança de x_0. No caso de um intervalo ilimitado, a função pode ser convergente em cada vizinhança, sem ser em todo intervalo. Conclui-se que tanto a continuidade, quanto a diferenciabilidade são propriedades locais.*

Proposição 13 *Seja* $f : I \times [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *uma função contínua, com derivada parcial* $f_x : I \times [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *também contínua. Suponha que* (2.0.5) *convirja (não necessariamente uniformemente) e que*

$$\int_a^\infty f_x(x, y)dy$$

convirja uniformemente em I*. Então* ψ *é derivável em todo ponto de* I *e vale:*

$$\psi'(x) = \int_a^\infty f_x(x, y)dy.$$

Demonstração: Queremos mostrar que dados $\varepsilon > 0$ e $x \in I$, existe $\delta > 0$ tal que, para $|h| < \delta$:

$$\left| \frac{\psi(x + h) - \psi(x)}{h} - \int_a^\infty f_x(x, y)dy \right| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\left| \int_a^\infty \left[\frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} - f_x(x, y) \right] dy \right| < \varepsilon.$$

De fato, dado $\varepsilon > 0$, da convergência uniforme, temos a existência de $y(\varepsilon) > a$ tal que:

$$\left| \int_{y(\varepsilon)}^\infty f_x(x, y)dy \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in I. \tag{2.0.6}$$

Segue do Teorma do Valor Médio que existe $\theta_y \in [0, 1]$ tal que

$$f(x + h, y) - f(x, y) = f_x(x + h\theta_y, y)h.$$

Então, fixado $y(\varepsilon)$, da continuidade de f_x, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\left| \int_a^{y(\varepsilon)} [f_x(x + h\theta_y, y) - f_x(x, y)]dy \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.0.7}$$

Assim, de (2.0.6) e (2.0.7) temos:

$$\left| \int_a^\infty \left[\frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} - f_x(x, y) \right] dy \right| \leq \left| \int_{y(\varepsilon)}^\infty [f_x(x + h\theta_y, y) \right| +$$
$$\left| \int_{y(\varepsilon)}^\infty f_x(x, y)]dy \right| + \left| \int_a^{y(\varepsilon)} [f_x(x + h\theta_y, y) - f_x(x, y)]dy \right| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

O Corolário seguinte é obtido diretamente da proposição anterior.

Corolário 14 *Seja* $f : I \times [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *uma função dada por* $f(x, y) = g(x, y)k(y)$*, onde* $g : I \times [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua, limitada (limitação de* g *como função de* y *e* x *fixado) e com derivada parcial* $g_x : I \times [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *uma função também contínua e limitada, e* $k : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *é uma função* $\mathfrak{L}^1$*, então* ψ *é uma função diferenciável.*

Proposição 15 *Seja* $f : I \times [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *uma função como na Proposição 8 ou em seu Corolário. Se* (2.0.5) *converge uniformemente, então para qualquer intervalo limitado* $[b, c] \subset I$*, temos:*

$$\int_b^c \int_a^\infty f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^\infty \int_b^c f(x, y)\, dx\, dy. \tag{2.0.8}$$

Demonstração: Primeiramente, observe que:

$$\int_b^c \int_a^\infty f(x,y)\,dy\,dx = \int_b^c \psi(x)\,dx$$

é a integral definida da função ψ, que existe pela sua continuidade.

Da Proposição 6, provar (2.0.8) é equivalente a provar:

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^N \int_b^c f(x,y)\,dx\,dy = \int_b^c \psi(x)\,dx$$

ou, usando a Proposição 6,

$$\lim_{N\to\infty} \int_b^c \int_a^N f(x,y)\,dy\,dx = \int_b^c \psi(x)\,dx$$

ou ainda,

$$\lim_{N\to\infty} \int_b^c \int_N^\infty f(x,y)\,dy\,dx = 0.$$

De fato, dado $\varepsilon > 0$, a convergência uniforme garante que para N suficientemente grande:

$$\left| \int_N^\infty f(x,y)\,dy \right| < \frac{\varepsilon}{c-b}.$$

Portanto:

$$\int_b^c \int_N^\infty f(x,y)\,dy\,dx < \int_b^c \frac{\varepsilon}{c-b}\,dx = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Finalmente estamos prontos para analisar a função do tipo (0.0.1). Primeiramente, observamos que ela pode ser escrita como a soma de duas integrais do tipo (2.0.5) :

$$\int_0^\infty f(x,y)\,dy \quad e \quad \int_{-\infty}^0 f(x,y)\,dy = \int_0^\infty f(x,-z)dz. \tag{2.0.9}$$

Assim, (0.0.1) converge uniformemente se dado $\varepsilon > 0$, existe $y(\varepsilon) > 0$ tal que:

$$\left| \int_{-\infty}^{y(\varepsilon)} f(x,y)dy + \int_{y(\varepsilon)}^\infty f(x,y)dy \right| < \varepsilon,$$

ou seja, se ambas integrais de (2.0.9) convergirem uniformemente.

Portanto, podemos enunciar os resultados que nos interessam, que seguem como corolários das proposições anteriores.

Proposição 16 *Se $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma função contínua e a integral definida em* (0.0.1) *convergir uniformemente, então $\Phi : I \to \mathbb{R}$ é contínua. Mais geralmente, será suficiente supor $f(x,y) = g(x,y)k(y)$, com $g : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função $\mathfrak{L}^1$.*

Proposição 17 *Seja $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com derivada parcial $f_x : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também contínua. Suponha que* (0.0.1) *convirja (não necessariamente uniformemente) e que*

$$\int_{-\infty}^\infty f_x(x,y)\,dy$$

convirja uniformemente em I. Então Φ é derivável em todo ponto de I e vale:

$$\Phi'(x) = \int_{-\infty}^\infty f_x(x,y)\,dy.$$

Mais geralmente, será suficiente admitir $f(x,y) = g(x,y)k(y)$, com $g : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, possuindo derivada parcial $g_x : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua (ambas limitadas), e $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função $\mathfrak{L}^1$.

Proposição 18 *Seja $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se* (0.0.1) *convergir uniformemente, então para qualquer intervalo limitado $[b, c] \subset I$, temos:*

$$\int_b^c \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_b^c f(x, y)\, dx\, dy.$$

Mais geralmente, será suficiente admitir $f(x, y) = g(x, y)k(y)$, com $g : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função $\mathfrak{L}^1$.

Note que, para a mudança na ordem de integração, analisamos apenas o caso que uma das integrais é indefinida. Para que possamos ter as duas indefinidas, não bastará apenas a convergência uniforme de Φ, como, por exemplo, a função $f(x, y) = e^{i(t-y)x} f(x, y)$. Entretanto, existem várias condições suficientes, contudo a mais útil para a Análise de Fourier é:

Teorema 19 *(**"Fubinizinho"**) Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que as integrais abaixo convirjam:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|\, dy\, dx \;\; e \;\; \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|\, dx\, dy. \tag{2.0.10}$$

Então, as integrais iteradas da f convergem e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{2.0.11}$$

Demonstração: Defina:

$$f^+(x, y) = \begin{cases} f(x, y), \ se\, f(x, y) \geq 0 \\ 0, \ se\, f(x, y) < 0 \end{cases} \qquad e \ f^-(x, y) = \begin{cases} -f(x, y), \ se\, f(x, y) < 0 \\ 0, \ se\, f(x, y) \geq 0 \end{cases}$$

e observe que $f = f^+ - f^-$ e que $|f| = f^+ + f^-$. Assim, podemos provar apenas para o caso que $f(x, y) \geq 0$. Agora, seja

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy = \lim_{a,b \to \infty} \int_{-a}^{b} f(x, y)\, dy,$$

que está bem definida pois as integrais de (2.0.10) convergem. Além disso, como $f(x, y) \geq 0$, tem-se

$$\phi(x) \geq \int_{-a}^{b} f(x, y)\, dy \geq 0, \ \forall a, b > 0.$$

Assim, para quaisquer $c, d > 0$, temos:

$$\int_{-c}^{d} \phi(x)\, dx \geq \int_{-c}^{d} \int_{-a}^{b} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{-a}^{b} \int_{-c}^{d} f(x, y)\, dx\, dy \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, dx \geq \int_{-a}^{b} \int_{-c}^{d} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{2.0.12}$$

Como a integral imprópria

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy$$

existe, segue que o conjunto

$$A = \left\{ \int_{-a}^{b} \int_{-c}^{d} f(x,y)\, dx\, dy \,/\, c, d \text{ são fixados e } a, b \text{ são quaisquer.} \right\}$$

é limitado , como também (2.0.12) é válido para quaisquer $c, d > 0$, $f(x,y) \geq 0$ e

$$\lim_{c,d \to \infty} \int_{-c}^{d} f(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx,$$

segue que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx \geq \int_{-a}^{b} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\, dy.$$

Finalmente, fazendo o limite com $a, b \to \infty$, obtemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx \geq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\, dy,$$

que é uma parte de (2.0.11), sendo que a outra é simétrica, basta definir

$$\phi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx \quad \blacksquare$$

Observação 20 *Se considerarmos a integral de Lebesgue, ao invés da integral de Riemman no teorema acima, o resultado é conhecido como teorema de Fubini e basta supor que uma das integrais em módulo convirja, pois daí teremos a convergência da outra.*

O resultado citado na observação acima é demonstrado por partes, assim como apresentado na referência [2]. Neste trabalho, apresentaremos apenas a demonstração para o caso das funções escadas, enquanto que o mais geral deixaremos o enunciado para um quesito de curiosidade.

Teorema 21 *Seja $s \in S(\mathbb{R}^2)$ (conjunto das funções escadas).*

(a) Para cada $y \in \mathbb{R}$ fixo, a integral

$$\int_{\mathbb{R}} s(x,y)\, dx$$

existe e, como uma função de y, é Lebesgue integrável em $\mathbb{R}$. Além disso,

$$\int_{\mathbb{R}^2} s(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} s(x,y)\, dx \right) dy.$$

(b) Para cada $x \in \mathbb{R}$ fixo, a integral

$$\int_{\mathbb{R}} s(x,y)\, dy$$

existe e, como uma função de x, é Lebesgue integrável em $\mathbb{R}$. Além disso,

$$\int_{\mathbb{R}^2} s(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} s(x,y)\, dy \right) dx.$$

(c) Em particular,

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} s(x,y)\, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} s(x,y)\, dx \right) dy.$$

Demonstração: Provaremos apenas o item (a), pois o (b) sairá de modo análogo e (c) é uma decorrência de (a) e (b).
Note que existem $a_1 < b_1$, e $a_2 < b_2$ tais que $s : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ é uma função escada em $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ e $s(x, y) = 0,\ \forall (x, y) \notin [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Então, exitem partições $a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < b_1$ e $a_2 = y_0 < y_1 < \cdots < y_m < b_2$, de $[a_1, b_1]$ e $[a_2, b_2]$ respectivamente, e $c_{ij} \in \mathbb{R}$ tais que, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $j \in \{1, \ldots, m\}$:

$$s(x, y) = c_{ij},\ \ \forall x \in (x_{i-1}, x_i)\ \ e\ \ \forall y \in (y_{j-1}, y_j).$$

Assim,

$$\int_{[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1}\times y_j]} s(x, y)\, d(x, y) = c_{ij}(x_{i-1}, x_i)(y_{j-1} \times y_j) =$$

$$\int_{[y_{j-1},y_j]} \left(\int_{[x_{i-1},x_i]} s(x, y)\, dx \right) dy.$$

Daí, fazendo a soma sobre i e j, obtemos

$$\int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} s(x, y)\, d(x, y) = \int_{[a_2,b_2]} \left(\int_{[a_1,b_1]} s(x, y)\, dx \right) dy.$$

Como $s(x, y) = 0\ \forall (x, y) \notin [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, segue o resultado. ■

Teorema 22 ***(Teorema de Fubini)*** *Suponha $f \in L(\mathbb{R}^2)$ (conjunto das funções integráveis à Lebsegue). Então:*

(a) A integral de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dx$$

existe para quase todo $y \in \mathbb{R}$ e a função $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$G(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dx, & se\ a\ integral\ existe \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

é Lebesgue integrável em $\mathbb{R}$ e

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dx = \int_{\mathbb{R}} G(y)\, dy\,;$$

(b) A integral de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dy$$

existe para quase todo $x \in \mathbb{R}$ e a função $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$H(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dy, & se\ a\ integral\ existe \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

é Lebesgue integrável em $\mathbb{R}$ e

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} H(x)\, dx\,;$$

(c) Em particular,

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

3 Considerações finais

Como foi mencionado anteriormente, a Transformada de Fourier é um tipo de função definida por uma integral imprópria e com os resultados apresentados neste trabalho, podemos realizar o estudo da continuidade e diferenciabilidade deste tipo de função e de suas propriedades. O texto descrito aqui é útil no estudo de toda função definida por integrais impróprias, como a Transformada de Laplace, a função Gama, entre outras.

Referências

[1] Figueiredo, Djairo Guedes de, *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2003.

[2] W.W.L Chen, Introduction to Lesebgue Integral; Lecture Notes of William Chen, 1977.