Parábolas e hipérboles envolventes

Calixto Garcia *

Resumo

Não é raro na escola do ensino básico a confecção de trabalhos artísticos que consistem em unir, com barbantes esticados, pregos fixados em uma base plana, seguindo alguma regularidade. Nesse contexto, curvas podem ser definidas com a propriedade de tangenciar cada linha da coleção de segmentos concebidos por tais barbantes, característica das chamadas *curvas envolventes*. Pretende-se explorar neste trabalho duas situações que geram curvas com essa propriedade, quais sejam: a parábola e a hipérbole.

Palavras-chave: curvas envolventes, parábola, hipérbole.

Introdução

Dar tratamento matemático a situações do cotidiano é um hábito que usualmente se desenvolve naquele que aprecia as ciências exatas. A situação que expomos no resumo é oportuna a esse tratamento. Ao abordá-la, dispondo-se de uma base plana, inicialmente estabelecemos uma disposição para os pregos e, a depender da interligação destes com os barbantes, determinamos analiticamente a parábola ou a hipérbole como curva envolvente. Em seguida, para cada caso, procedemos a uma generalização (com demonstração de recíproca), estudando o comportamento de cada curva criada na medida em que alteramos o "posicionamento dos pregos". Nesse estudo, é interessante e instrutivo contar com o auxílio de *softwares* geradores de gráficos ou dedicados à Geometria, tais como o *Winplot*, *Graphmatica*, *Cabri* e o *Geogebra*, sobretudo com os que oferecem apresentação dinâmica.

* Email: klixg@yahoo.com.br. EEP, Piracicaba, SP; Uniesp, Tietê, SP; Colégio Gradual, Cerquilho, SP; E. E. Pres. Arthur da Silva Bernardes, Cerquilho, SP

1 Parábola envolvente

Imaginemos, na figura 1, pregos igualmente espaçados sobre os lados de um ângulo reto. Note que os pedaços de barbante esticados que unem cada dois deles são hipotenusas de triângulos com a soma das medidas dos catetos constante.

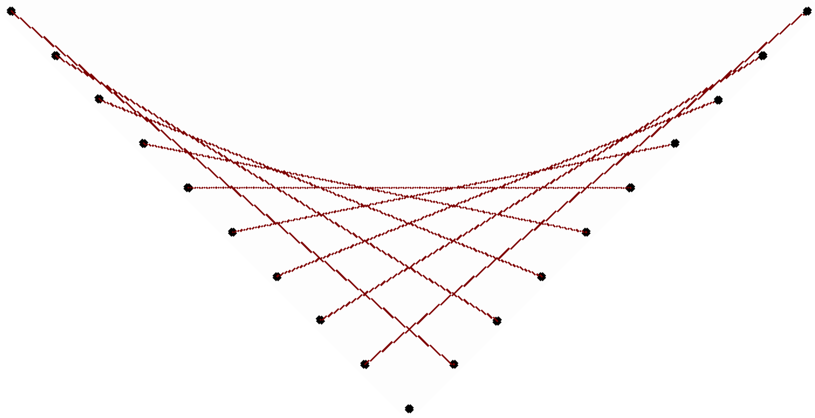

figura 1

Mostremos que existe uma parábola tangenciando cada linha dessa coleção, ou, em outras palavras, que a *curva envolvente* criada por essas linhas é uma parábola.

Iniciemos com um exemplo, adotando $2\sqrt{2}$ para soma das distâncias dos pontos de fixação do barbante ao vértice do referido ângulo reto, considerando-o com lados nas bissetrizes dos dois primeiros quadrantes de um plano cartesiano.

Observando a figura 2, devemos ter $OP + OQ = 2\sqrt{2}$. Assim, sendo $x_Q = k$, com $0 \leq k \leq 2$, temos $OQ = k\sqrt{2}$ e, portanto, $OP = 2\sqrt{2} - k\sqrt{2} = (2-k)\sqrt{2}$. Com isso, concluímos que $x_P = -(2-k)$ e, também, conhecemos $Q = (k, k)$ e $P = (k-2, 2-k)$.

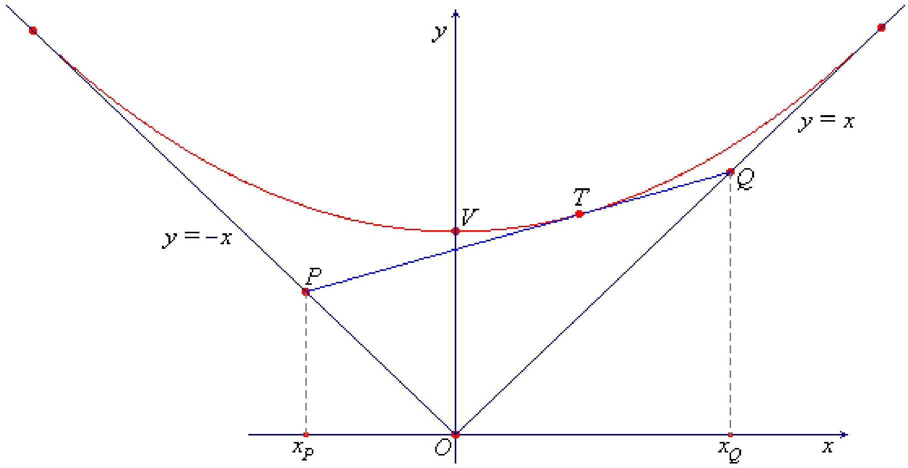

figura 2

Então, a reta PQ tem coeficiente angular $\frac{k-(2-k)}{k-(k-2)}$ = k – 1, e, portanto, sua equação é: $y - k = (k - 1)(x - k)$.

Embora tenhamos um número finito de barbantes, para cada k real entre 0 e 2, vamos considerar a família de retas com a equação $y - k = (k - 1)(x - k)$. Essa equação é quadrática na variável k, a saber, $k^2 - (x + 2)k + x + y = 0$, e deve apresentar uma só solução, se procurarmos os pontos (x, y) pelos quais passa uma única reta dessa família. Com isso, seu discriminante $\Delta = (x + 2)^2 - 4(x + y)$ deve ser nulo, o que conduz à equação $y = ¼\, x^2 + 1$, reconhecidamente de uma parábola. E, para cada k, não é difícil verificar que a tal reta intersecta essa parábola no ponto $(2(k - 1), (k - 1)^2 + 1)$.

Em outras palavras, todos os pontos por onde passa somente uma reta da família pertencem à parábola $y = ¼\, x^2 + 1$.

Vamos proceder agora a uma generalização compreendendo a inclinação das semirretas OP e OQ e a tal soma $OP + OQ$. Sem perdê-la, entretanto, podemos "posicionar" na origem O o vértice do ângulo que delimita a curva envolvente, tendo como bissetriz a parte positiva do eixo y, como fizemos acima. Denominemos S a soma das distâncias dos pontos de fixação do barbante ao vértice desse ângulo.

Como se pode observar na figura 3, os lados dos ângulos estão contidos nas retas de equações $y = (\text{tg}\alpha)\cdot x$ e $y = -(\text{tg}\alpha)\cdot x$. Daí, sendo $x_Q = k$, temos $Q = (k, (\text{tg}\alpha)\cdot k)$. Como $k = OQ\cdot\cos\alpha$ e $OQ + OP = S$, então $OP = S - \frac{k}{\cos\alpha}$, para $0 \le k \le S\cdot\cos\alpha$. Disso, $|x_P| = OP\cdot\cos\alpha = S\cdot\cos\alpha - k$, ou, $x_P = k - S\cdot\cos\alpha$ e, também, $y_P = -(\text{tg}\alpha)\cdot x_P = S\cdot\text{sen}\alpha - k\cdot\text{tg}\alpha$. Portanto, $P = (k - S\cdot\cos\alpha, S\cdot\text{sen}\alpha - k\cdot\text{tg}\alpha)$. Daí, a reta PQ, de coeficiente angular $\frac{2k\cdot tg\alpha - S\cdot sen\alpha}{S\cdot\cos\alpha}$, tem equação $y - k\cdot\text{tg}\alpha = \frac{2k\cdot tg\alpha - S\cdot sen\alpha}{S\cdot\cos\alpha}(x - k)$. Essa equação pode ser reescrita assim: $(2\text{tg}\alpha)\cdot k^2 - (2S\cdot\text{sen}\alpha + 2x\cdot\text{tg}\alpha)\cdot k + S\cdot x\cdot\text{sen}\alpha + S\cdot y\cdot\cos\alpha = 0$. Na variável k, deve apresentar apenas uma solução, se desejarmos encontrar os pontos (x, y) pelos quais passa uma única reta dessa família. Isso significa que é nulo o seu discriminante, o que equivale a $y = \frac{sen\alpha}{2S\cdot\cos^2\alpha}x^2 + \frac{S\cdot sen\alpha}{2}$, com $0 < \alpha < \pi/2$.

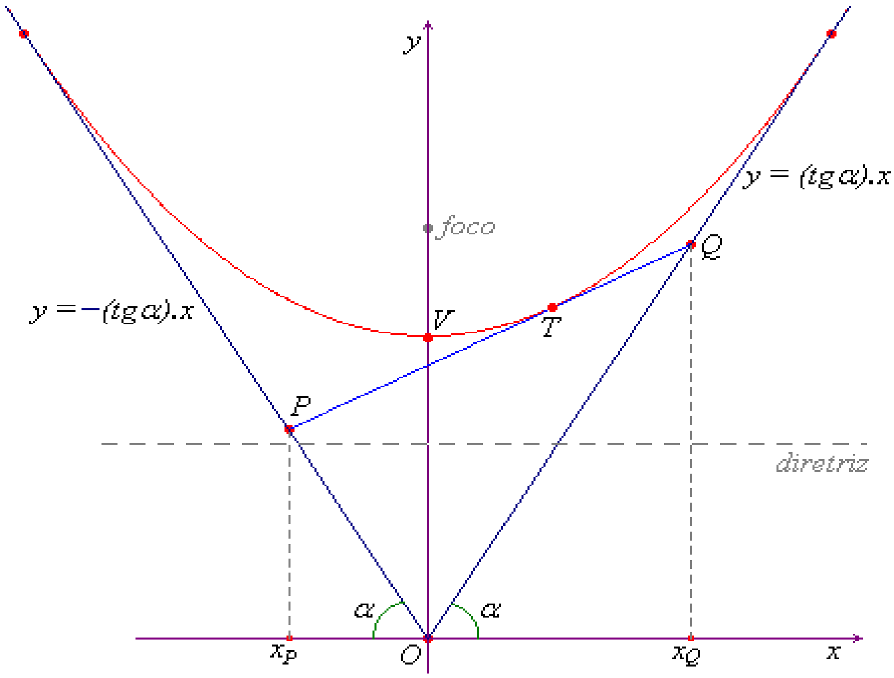

figura 3

Para ilustrar alguns casos particulares dessas porções de parábolas com prolongamentos, apresentamos a figura 4: na esquerda, temos fixo $\alpha = \pi/3$ e, na direita, $S = 4$.

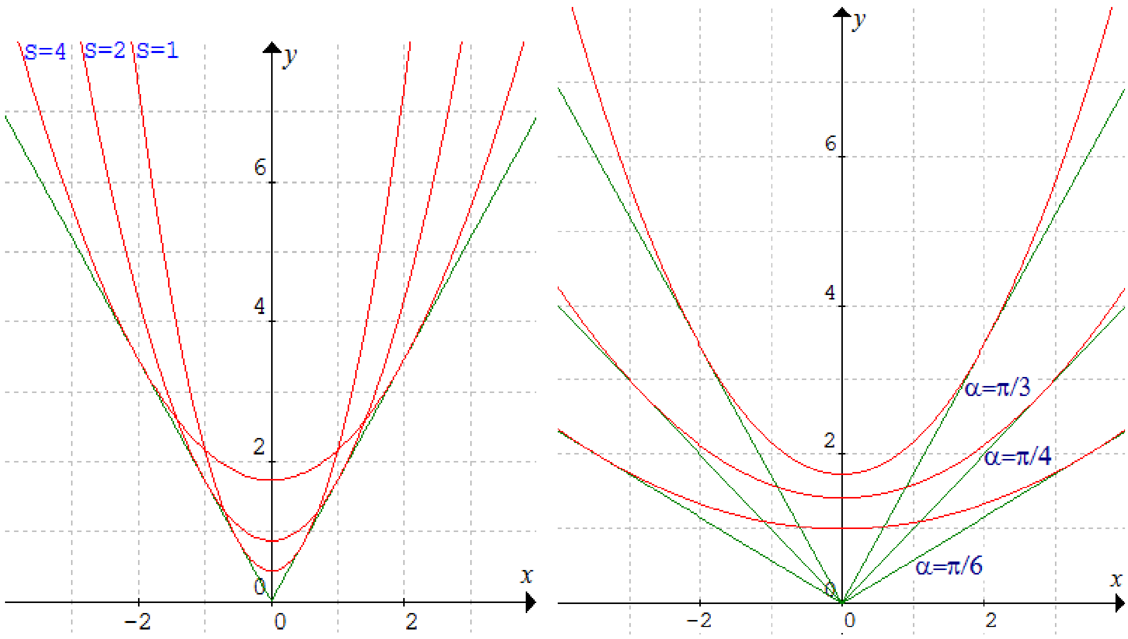

figura 4

GARCIA, C. Parábolas e hipérboles envolventes. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática,** Bauru, v. 4, p. 30-42, ago. 2015.
DOI: 10.21167/cqdvol4201523169664cg3042 - Disponível em: http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/index.jsp

Vamos formular uma espécie de recíproca do que foi tratado acima.

Seja uma parábola e um ângulo com vértice em seu eixo de simetria, de modo que seus lados tangenciam-na. Considere os pontos P e Q, cada qual pertencente a um lado desse ângulo, tal que o segmento PQ seja também tangente à parábola. Mostremos que, quaisquer que sejam os pares de pontos P e Q assim tomados, a soma das distâncias destes pontos ao vértice do referido ângulo é constante.

De fato, sem comprometer a ideia geral, podemos tomar uma parábola com vértice na origem do sistema *cartesiano*, com concavidade voltada para cima. Ela tem, portanto, equação da forma $y = ax^2$, com $a > 0$. Para dado $\lambda > 0$, seja $R = (0, -\lambda)$ o vértice do ângulo descrito acima. Como se pode observar na figura 5, os lados desse ângulo estão contidos em retas de equações $y = mx - \lambda$ e $y = -mx - \lambda$ e, já que são tangentes à parábola, têm discriminante nulo as equações $ax^2 = \pm mx - \lambda$, o que implica em $m = \pm 2\sqrt{a\lambda}$ e, daí, os pontos de tangência são $U = \left(-\sqrt{\frac{\lambda}{a}}, \lambda\right)$ e $V = \left(\sqrt{\frac{\lambda}{a}}, \lambda\right)$.

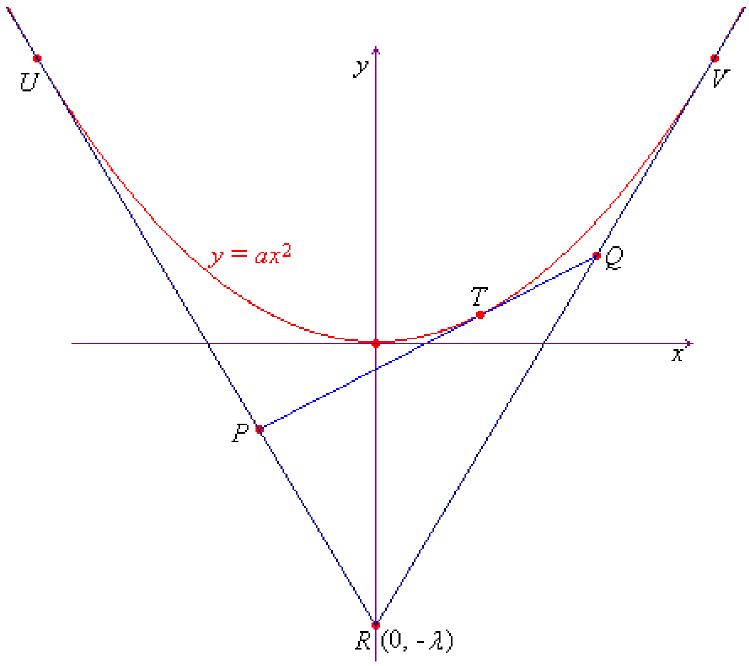

figura 5

Sabemos que, a cada ponto $T = (x_0, a\,x_0^2)$ da parábola em questão, está associada a equação do feixe de retas $y - a\,x_0^2 = m'(x - x_0)$ que o contém. Se procurarmos pela reta PQ deste feixe que a tangencie neste ponto, devemos impor nulo o discriminante da equação $ax^2 - a\,x_0^2 = m'(x - x_0)$, na variável x, o que equivale a se ter $m' = 2ax_0$ (*). Com isso, a equação da reta PQ fica assim: $y = 2ax_0x - a\,x_0^2$. Resolvendo dois sistemas com essa equação em comum, combinada com cada uma das equações das retas suportes $y = 2\sqrt{a\lambda}\,x - \lambda$ e $y = -2\sqrt{a\lambda}\,x - \lambda$ dos lados do ângulo dado, obtemos as coordenadas de Q e P. Eis suas abscissas: $x_Q = \dfrac{ax_0^2 - \lambda}{2ax_0 - 2\sqrt{a\lambda}}$ e $x_P = \dfrac{ax_0^2 - \lambda}{2ax_0 + 2\sqrt{a\lambda}}$.

Uma vez que $y + \lambda = -2\sqrt{a\lambda}\,x$, então, como $PR = \sqrt{x_P^2 + (y_P + \lambda)^2}$ e $QR = \sqrt{x_Q^2 + (y_Q + \lambda)^2}$, temos a soma $S = PR + QR = \sqrt{x_P^2 + 4a\lambda x_P^2} + \sqrt{x_Q^2 + 4a\lambda x_Q^2} = (|x_P| + |x_Q|)\sqrt{1 + 4a\lambda}$. Sendo $-\sqrt{\dfrac{\lambda}{a}} < x_0 < \sqrt{\dfrac{\lambda}{a}}$, $S = (x_Q - x_P)\sqrt{1 + 4a\lambda} = \left(\dfrac{ax_0^2 - \lambda}{2ax_0 + 2\sqrt{a\lambda}} - \dfrac{ax_0^2 - \lambda}{2ax_0 - 2\sqrt{a\lambda}}\right)\sqrt{1 + 4a\lambda}$. Com algumas manipulações algébricas chegamos a $S = \lambda \cdot \sqrt{4 + \dfrac{1}{a\lambda}}$, que é constante, como queríamos mostrar.

2 Hipérbole envolvente

A figura 6 ilustra a mesma disposição dos pregos que na figura 1.

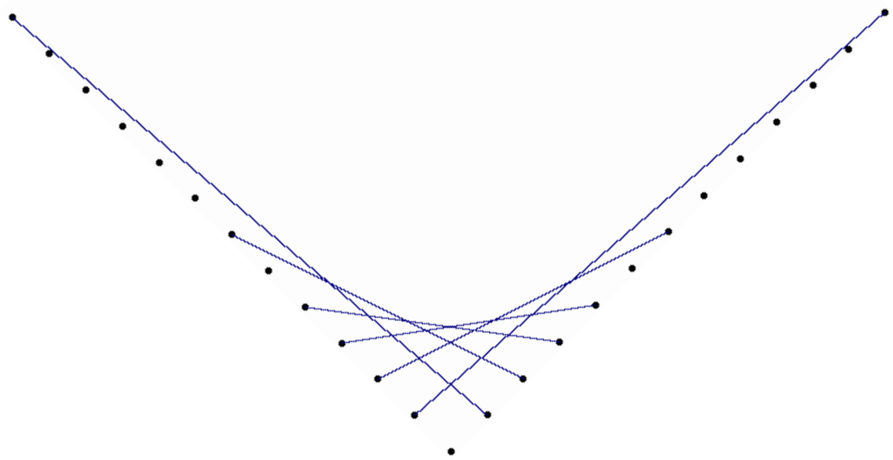

figura 6

---

* Para obter o coeficiente m' mais diretamente, é suficiente calcular a derivada da função $f(x) = ax^2$ no ponto x_0.

Note, agora, que os pedaços de barbante esticados que unem cada dois deles são hipotenusas de triângulos com o produto das medidas dos catetos constante. A curva envolvente criada por essas linhas é um ramo de uma hipérbole equilátera. Suas assíntotas são as retas suportes dos lados desse ângulo.

De fato, seja M o produto das distâncias dos pontos de fixação do barbante ao vértice do referido ângulo reto, considerando-o com lados nas bissetrizes dos dois primeiros quadrantes de um plano cartesiano, assim como fizemos com o caso anterior.

Observando a figura 7, devemos ter $OP \cdot OQ = M$. Assim, com $x_Q = k > 0$, temos $OQ = k\sqrt{2}$ e, portanto, $OP = \dfrac{M}{k\sqrt{2}}$. Com isso, concluímos que $x_P = -\dfrac{M}{2k}$ e, também, conhecemos $Q = (k, k)$ e $P = (-\dfrac{M}{2k}, \dfrac{M}{2k})$. Então, a reta PQ tem coeficiente angular $\dfrac{k - \frac{M}{2k}}{k + \frac{M}{2k}} = \dfrac{2k^2 - M}{2k^2 + M}$, e, portanto, sua equação é: $y - k = \dfrac{2k^2 - M}{2k^2 + M}(x - k)$.

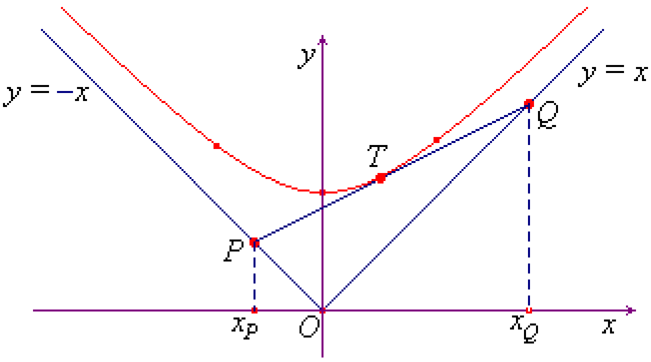

figura 7

Embora também tenhamos um número finito de barbantes, para cada real $k > 0$, vamos considerar a família de retas com a equação $y - k = \dfrac{2k^2 - M}{2k^2 + M}(x - k)$. Essa equação é quadrática na variável k, a saber, $2(y - x)\cdot k^2 - 2M\cdot k + M(y + x) = 0$, e deve apresentar uma só solução, se procurarmos os pontos (x, y) pelos quais passa uma única reta dessa família. Com isso, seu discriminante $\Delta = 4M[M - 2(y^2 - x^2)]$ deve ser nulo, o que conduz à equação $y^2 - x^2 = \dfrac{M}{2}$, reconhecidamente de uma hipérbole equilátera com as bissetrizes dos quadrantes do plano cartesiano como assíntotas.

Em outras palavras, todos os pontos por onde passa somente uma reta da família pertencem à hipérbole $y^2 - x^2 = \dfrac{M}{2}$.

Vamos proceder a uma generalização, baseando-nos na figura 3, ainda com $0 < \alpha < \pi/2$ e agora, com $OP \cdot OQ = M$. Sendo $Q = (k, k \cdot \text{tg}\alpha)$, $k > 0$, como $k = OQ \cdot \cos\alpha$, então, $OP = \dfrac{M \cdot \cos\alpha}{k}$. E, como $|x_P| = OP \cdot \cos\alpha$, então, $x_P = -\dfrac{M \cdot \cos^2\alpha}{k}$. Daí, $y_P = -(\text{tg}\alpha) \cdot x_P = \dfrac{M \cdot sen\alpha \cdot \cos\alpha}{k}$. Portanto, $P = \left(-\dfrac{M \cdot \cos^2\alpha}{k}, \dfrac{M \cdot sen\alpha \cdot \cos\alpha}{k}\right)$.

A reta PQ, de coeficiente angular $m = \dfrac{k^2 \cdot tg\alpha - M \cdot sen\alpha \cdot \cos\alpha}{k^2 + M \cdot \cos^2\alpha}$, tem equação $y - k \cdot \text{tg}\alpha = m(x - k)$ que, após manipulações algébricas, também pode ter a seguinte forma: $(y - x \cdot \text{tg}\alpha) \cdot k^2 - (2M \cdot \text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha) \cdot k + M \cdot y \cdot \cos^2\alpha + M \cdot x \cdot \text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$. Na variável k, esta equação deve apresentar apenas uma solução, se desejarmos encontrar os pontos (x, y) pelos quais passa uma única reta dessa família. Isso significa que é nulo o seu discriminante, o que, com um pouco de trabalho, nos conduz ao equivalente: $\dfrac{y^2}{sen^2\alpha} - \dfrac{x^2}{\cos^2\alpha} = M$, com $y > 0$, que, por sua vez, pode ser reescrita na forma explícita $y = \text{tg}\alpha \cdot \sqrt{M \cdot \cos^2\alpha + x^2}$.

Uma conclusão a mais: para cada k, cada ponto dessa hipérbole é médio do segmento PQ, uma vez que a equação da hipérbole é satisfeita para as coordenadas desse ponto.

De fato, se T é ponto médio de PQ, $T = \left(\dfrac{k^2 - M \cdot \cos^2\alpha}{2k}, \dfrac{M \cdot sen\alpha \cdot \cos\alpha + k^2 \cdot tg\alpha}{2k}\right)$.

Daí, $\text{tg}\alpha\sqrt{M \cdot \cos^2\alpha + x_T^2} = \text{tg}\alpha\sqrt{M \cdot \cos^2\alpha + \left(\dfrac{k^2 - M \cdot \cos^2\alpha}{2k}\right)^2} = \dfrac{tg\alpha}{2k}\sqrt{(k^2 + M \cdot \cos^2\alpha)^2} = \dfrac{M \cdot sen\alpha \cdot \cos\alpha + k^2 \cdot tg\alpha}{2k} = y_T$.

A figura 8 ilustra alguns casos particulares desses ramos de hipérboles com suas assíntotas: na esquerda, temos fixo $\alpha = \pi/3$ e, na direita, $M = 2$.

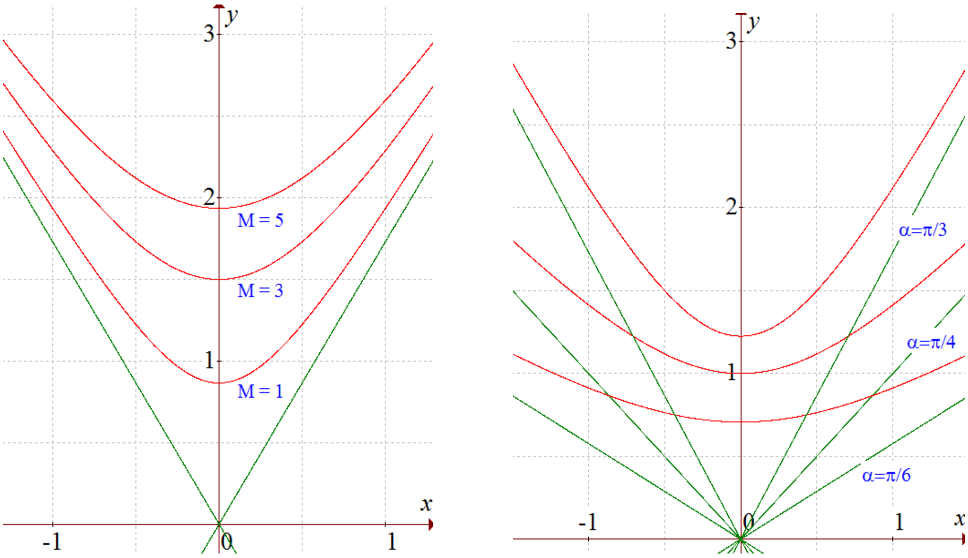

figura 8

Formulemos uma recíproca para esse resultado. Consideremos um ramo de uma hipérbole de centro *O*, o ponto comum de suas assíntotas, e uma reta tangente a essa curva. Sejam *P* e *Q* os pontos de intersecção dessa reta com tais assíntotas. Então, o produto $OP \cdot OQ$ é constante, e mais: o ponto de tangência da reta considerada é médio do segmento *PQ*.

De fato, sem afetar a generalidade, podemos considerar o ramo com ordenadas positivas da hipérbole $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$, com *a* e *b* positivos, ou seja, da curva com equação $y = \dfrac{a}{b}\sqrt{x^2 + b^2}$. Trata-se da tal porção de hipérbole centrada na origem *O* do plano cartesiano, com assíntotas $y = \dfrac{a}{b}x$ e $y = -\dfrac{a}{b}x$ (figura 9).

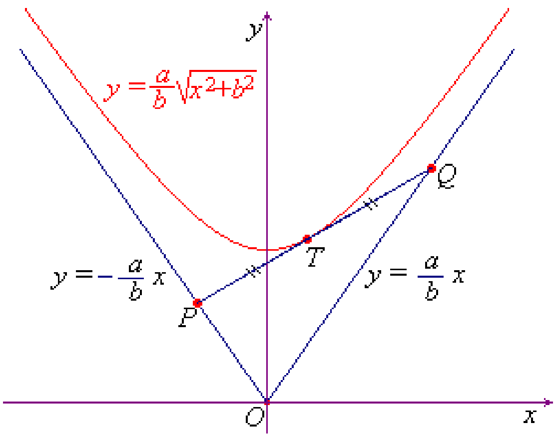

figura 9

Sabemos que, a cada ponto $T = (x_0, \frac{a}{b}\sqrt{x_0^2 + b^2})$ da hipérbole em questão, está associada a equação do feixe de retas $y - \frac{a}{b}\sqrt{x_0^2 + b^2} = m(x - x_0)$ que o contém. A reta desse feixe que é tangente a essa hipérbole tem o coeficiente m igual ao valor da derivada da função $f(x) = \frac{a}{b}\sqrt{x^2 + b^2}$ no ponto x_0, a saber, $m = \frac{a}{b}\frac{x}{\sqrt{x_0^2 + b^2}}$ (*). Assim, a equação da reta tangente à hipérbole no ponto T é $y - \frac{a}{b}\sqrt{x_0^2 + b^2} = \frac{a}{b}\frac{x}{\sqrt{x_0^2 + b^2}}(x - x_0)$. Resolvendo dois sistemas com essa equação em comum, combinada com cada uma das equações $y = \frac{a}{b}x$ e $y = -\frac{a}{b}x$ das assíntotas, obtemos $P = \left(\frac{b^2}{\sqrt{x_0^2 + b^2} - x_0}, \frac{ab}{\sqrt{x_0^2 + b^2} - x_0}\right)$ e $Q = \left(\frac{b^2}{-\sqrt{x_0^2 + b^2} - x_0}, \frac{ab}{\sqrt{x_0^2 + b^2} + x_0}\right)$. Com algumas manipulações algébricas chegamos ao produto $OP \cdot OQ = a^2 + b^2$, que é constante, como pretendido.

Ainda, $\frac{x_P + x_Q}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{\sqrt{x_0^2 + b^2} - x_0} + \frac{b^2}{-\sqrt{x_0^2 + b^2} - x_0}\right) = \frac{-2b^2 x_0}{2[x_0^2 - (x_0^2 + b^2)]} = x_0 = x_T$

e $\frac{y_P + y_Q}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{\sqrt{x_0^2 + b^2} - x_0} + \frac{ab}{\sqrt{x_0^2 + b^2} + x_0}\right) = \frac{2ab\sqrt{x_0^2 + b^2}}{2b^2} = \frac{a}{b}\sqrt{x_0^2 + b^2} = y_0 = y_T$.

Com isso, T é ponto médio de PQ. Isso completa a demonstração da recíproca.

3 Construções geométricas

Os gráficos apresentados nas figuras 4 e 8 foram construídos por um *software* a partir de suas equações cartesianas. Também se contando com recursos da informática, essas curvas podem ser observadas quando da construção geométrica das retas que as delimitam, a partir das propriedades que possuem, evidenciadas nesse estudo.

* Embora mais trabalhoso, é possível obter o coeficiente m da maneira que foi realizado para encontrar m', no caso da parábola, ou seja, sem se valer do Cálculo Diferencial.

No caso da parábola, devemos construir segmentos com extremidades em cada lado de um ângulo dado, de modo que a soma das distâncias dessas extremidades ao vértice desse ângulo seja fixa. Para tanto, primeiramente construímos o ângulo e um segmento de medida fixa *s* (figura 10). Marcamos um ponto nesse segmento e transferimos (via compasso) as medidas das distâncias *u* e *v* desse ponto às suas extremidades em cada lado do ângulo, a partir de seu vértice. Com isso determinamos nesses lados segmentos com a propriedade descrita acima, isto é, com $u + v = s$. Ao "deslizarmos" o ponto marcado, ao longo do segmento de medida *s*, o *software* de Geometria Dinâmica encarrega-se de traçar os segmentos que delimitam a parábola envolvente.

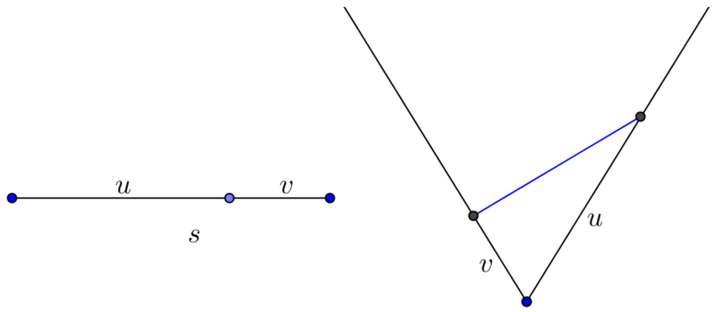

figura 10

No caso da hipérbole, devemos construir segmentos com extremidades em cada lado de um ângulo dado, de modo que o produto ω das distâncias dessas extremidades ao vértice desse ângulo seja fixo. Para tanto, primeiramente definimos o segmento de medida unitária, construímos o ângulo e o segmento de medida ω (figura 11). Assim, se desejamos criar segmentos de medidas *p* e *q* tais que $pq = \omega$ é constante, a serem transferidas nos lados do ângulo dado, como na situação anterior, efetuamos uma construção auxiliar, que se encontra abaixo e à esquerda na figura 11.

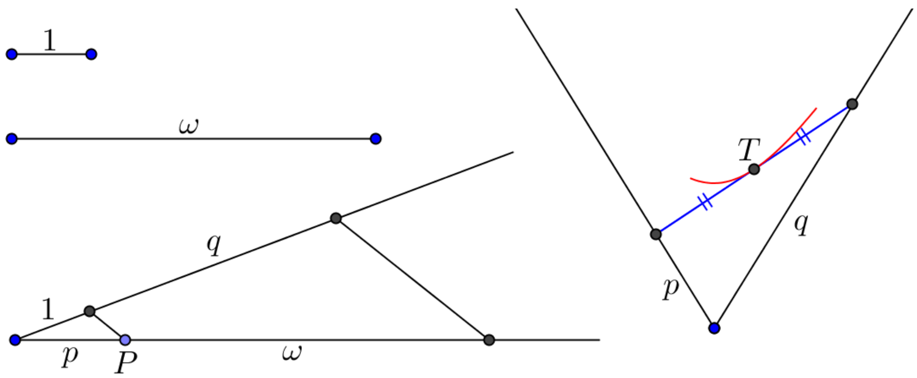

figura 11

Nessa construção auxiliar, temos um ângulo nos lados do qual são transferidas as medida 1 e uma medida *p*, por meio do posicionamento arbitrário do ponto *P*, seguida da transferência de ω. A medida *q*, sendo a quarta proporcional nessa construção, garante que $pq = \omega$. Ao "deslizarmos" o ponto *P* ao longo da semirreta a que pertence, o *software* de Geometria Dinâmica encarrega-se de traçar os segmentos que delimitam a hipérbole envolvente. Essa hipérbole pode também ser obtida pelo *software* com o traçado do lugar geométrico dos pontos médios *T* desses segmentos, por meio do mencionado "deslizamento" de *P*.

A figura 12 ilustra um número considerável de segmentos, com as propriedades citadas, que delimitam as curvas envolventes: na esquerda, a parábola e, na direita, a hipérbole.

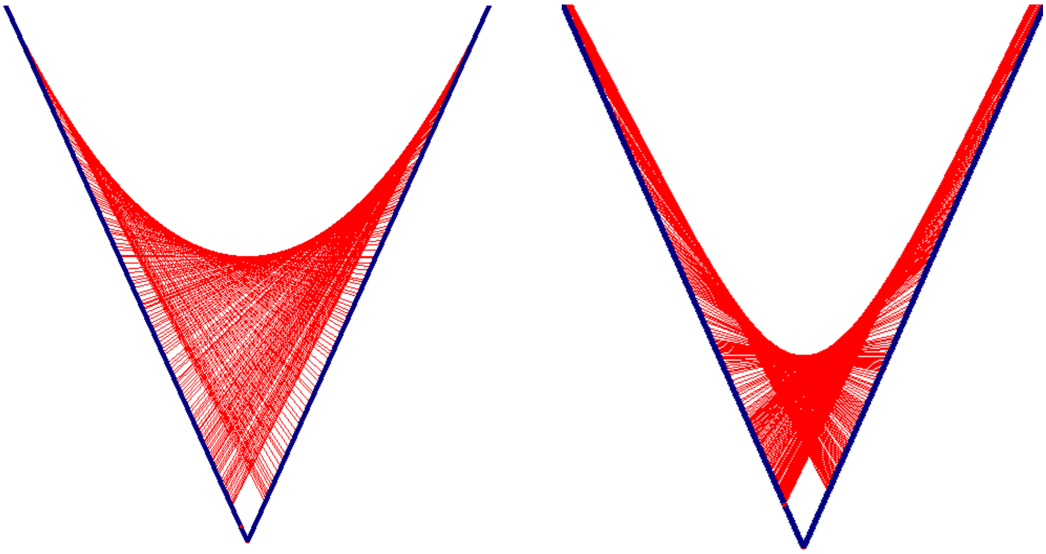

figura 12

4 Conclusão

As cônicas possuem várias definições equivalentes. Nesse texto foram exploradas caracterizações de parábola e hipérbole por meio de envolventes, pouco usuais nos currículos escolares, contudo, associadas a construções acessíveis ao ensino básico, seja fisicamente, seja com o auxílio de *softwares* da informática.

Podemos construir uma infinidade de triângulos em que certo ângulo interno é fixo. Vimos aqui que, aqueles triângulos cuja soma das medidas dos lados que formam esse ângulo é constante têm lados opostos a ele delimitando uma parábola. Já, aqueles cujo produto das medidas dos lados que formam esse ângulo é constante têm lados opostos a ele delimitando uma hipérbole. Aliás, essa hipérbole é formada pelos pontos médios desses mesmos lados que a delimitam. Em outras palavras, a hipérbole pode ser considerada o lugar geométrico dos pontos médios de segmentos que têm extremidades em cada um dos lados de um ângulo α dado, desde que os triângulos formados, conforme mostra a figura 13, sejam equivalentes.

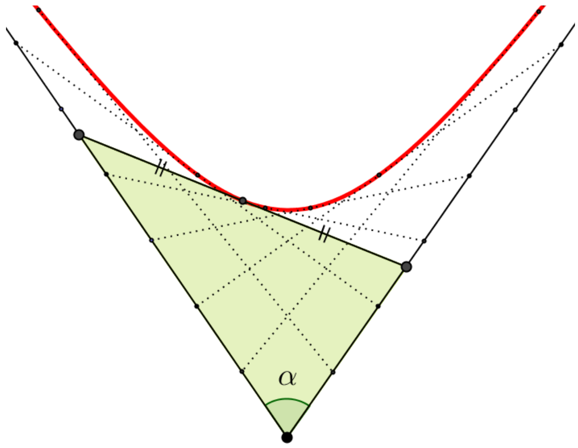

figura 13

Referências

[1] GARCIA, J. C. Parábolas envolventes. Revista do Professor de Matemática, SBM, v. 75, p. 12-14, (2011).

[2] WAGNER, E. Construções Geométricas. SBM, Rio de Janeiro, RJ, (2007).