Sugestões para Aplicação do Teorema de Pick na Educação Básica*

Francisco Silverio da Silva Junior
Fernando Pereira Micena †

Resumo

Neste artigo, apresentaremos algumas sugestões para o tratamento do Teorema de Pick em tópicos do currículo de Matemática do ensino básico, através de três situações problema. Inicialmente, citaremos alguns fatos bastante intuitivos cujas demonstrações podem ser encontradas em [4] e que servirão de base para a demonstração do Teorema de Pick, feita logo em seguida por indução finita. À seguir, discutiremos a validade do Teorema de Pick para o cálculo do volume de poliedros no $\mathbb{R}^3$ e abordaremos a versão do teorema para polígonos com vértices de coordenadas racionais. Por fim, apresentamos 3 problemas cujas soluções podem ser encontradas com o auxílio do Teorema de Pick.

Palavras Chave: Teorema de Pick; Geogebra; Google Maps.

Introdução

O Teorema de Pick foi publicado pela primeira vez num artigo de 1899 em Praga por Georg Alexander Pick, natural de Viena em 1859, que escreveu durante toda a sua vida, cerca de 67 artigos até sua morte no campo de concentração de Theresienstadt em 1942.

Veremos neste artigo, como o cálculo de áreas de polígonos pode ser feito com uma simples contagem de pontos, se forem satisfeitas as hipóteses do teorema. Seria então, uma maneira de discretizar uma grandeza de natureza contínua.

Antes de apresentarmos o Teorema de Pick, vamos considerar conhecidos, os resultados mais importantes da Geometria Plana como os teoremas que nos dão as áreas de quadrados, triângulos, círculos e outros polígonos; o conceito de semelhança de polígono; a relação entre as áreas de polígonos semelhantes, etc.

É importante ressaltar que *polígono* é a união dos segmentos formados por um número finito de pontos não alinhados tomados dois a dois. Quando nos referirmos à área de um certo polígono, na verdade, estaremos nos referindo à área da região poligonal interior ao polígono dado.

---

*Artigo realizado com base na minha dissertação de mestrado "Sobre o Cálculo de Áreas e o Teorema de Pick" sob a Orientação do Professor Dr. Fernando Pereira Micena.

†Email: francisconada@hotmail.com. Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Alagoas

![CQD logo]

1 O Teorema de Pick

O Teorema de Pick afirma que: Dado um polígono P com vértices cujas coordenadas no plano cartesiano são números inteiro, sua área pode ser calculada pela fórmula

$$\acute{A}rea(P) = i + \frac{b}{2} - 1, \tag{1.0.1}$$

onde i representa a quantidade de pontos de coordenadas inteiras interiores ao polígono e b representa a quantidade de pontos de coordenadas inteiras pertencentes às arestas do polígono.

Antes da demonstração do Teorema, vamos fazer algums observações, a partir dos exemplos seguintes:

Exemplo 1 *Vamos calcular a área do triângulo ABC a seguir, utilizando o Teorema de Pick.*

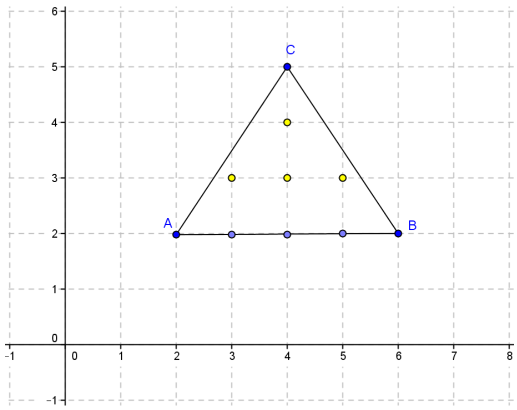

Figura 1: Área do triângulo pela fórmula de Pick.

Solução. Como os vértices do triângulo são pontos do plano com coordenadas inteiras, podemos aplicar o Teorema de Pick. Observando a Figura 1, vemos que o triângulo apresenta quatro pontos de coordenadas inteiras em seu interior (em amarelo) e seis pontos de coordenadas inteiras em suas arestas (em azul).

Portanto,

$$\acute{A}rea(ABC) = 4 + \frac{6}{2} - 1 = 6 \ u.a.$$

Exemplo 2 *Agora vamos tentar calcular a área do polígono P da Figura 2 com o Teorema de Pick.*

Solução. Antes disso, vamos calcular a área de P de um outro modo.
Como o polígono P é formado por dois triângulos congruentes de bases 4 $u.c.$ e alturas 2 $u.c.$, pela fórmula usual do cálculo da área de um triângulo, a área de P é dada por:

$$\acute{A}rea(P) = 2.\frac{4.2}{2} = 8 \ u.a.$$

Agora, se considerarmos que cada unidade da malha da figura 2 corresponde a 1 unidade inteira de comprimento, o polígono P terá vértices de coordenadas inteiras com dois pontos de coordenadas inteiras em seu interior (em amarelo) e quinze pontos de coordenadas inteiras em suas arestas (em azul).

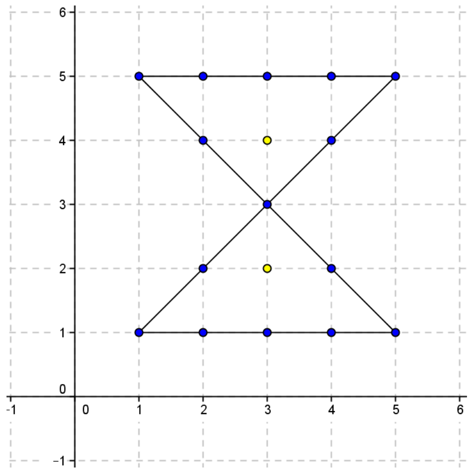

Figura 2: Polígono P que apresenta autointersecção.

Então utilizando a fórmula (1.0.1), segue-se que

$$\acute{A}rea(P) = 2 + \frac{15}{2} - 1 = \frac{17}{2}\ u.a.$$

que é um resultado diferente do calculado anteriormente, e falso.

De fato, o Teorema de Pick falha no polígono anterior, porque este não é um polígono simples (apresenta autointersecção).

Portanto, devemos considerar que os polígonos, dos quais queremos calcular a área com a Fórmula de Pick, são polígonos simples.

1.1 Considerações iniciais e resultados preliminares

Nesta seção, vamos apresentar algumas definições, juntamente com dois lemas (cujas demonstrações podem ser encontradas em [4]) e a proposição que mostra a propriedade aditiva da fórmula (1.0.1). Todos estes resultados serão fundamentais na demonstração do Teorema de Pick.

Definição 3 *Dizemos que um polígono é simples se não possuir "buracos" e a intersecção de um par de arestas não consecutivas do polígono for sempre vazia. Em outras palavras, um polígono é simples se suas arestas não consecutivas, não se intersectarem.*

Definição 4 *O interior de um polígono P é o conjunto de todos os pontos do plano pertencentes à região poligonal interna a P.*

Definição 5 *O exterior de um polígono P é o conjunto de todos os pontos do plano pertencentes à região poligonal externa a P.*

Definição 6 *Chamamos de reticulado um conjunto de pontos coplanares, cujas coordenadas são múltiplos inteiros de uma unidade de medida racional (inteira ou não inteira) escolhida.*

Lema 7 *Dado um polígono P, qualquer ponto A de P pode ser ligado a qualquer ponto Q da região interior I de P por uma linha poligonal, cujos pontos, exceto A, são todos pertencentes a I.*

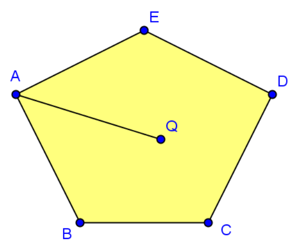

Figura 3: Segmento $\overline{AQ}$ cujos pontos, exceto A são todos pertencentes ao interior do polígono.

Lema 8 *Num polígono simples com mais de três vértices, existe um par de vértices que são extremos de um segmento cujo interior não intersecta o polígono.*

Este resultado é bastante intuitivo, pois basta que liguemos vértices não consecutivos do polígono dado, como no polígono convexo abaixo:

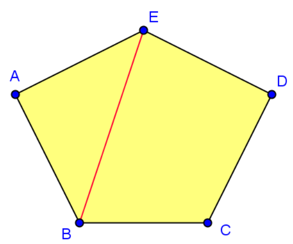

Figura 4: Segmento $\overline{BE}$ cujo interior não intersecta o polígono.

Para ver as demonstrações dos Lemas 7 e 8, ver referência [4].

Proposição 9 (Propriedade Aditiva da Fórmula de Pick) *Sejam P e Q polígonos simples no plano cuja intersecção é uma aresta comum. Então, se a fórmula (1.0.1) é válida para P e Q, ela também é válida para o polígono $P \cup Q$.*

Prova. Considere dois polígonos P e Q com coordenadas inteiras no plano, e tais que os vértices de P sejam $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Como Q tem apenas uma aresta de intersecção com P, sejam os vértices de Q, os pontos $V_1, V_2, U_1, U_2, \ldots, U_m$.

Considere $P \cup Q$, o polígono formado pelos polígonos P e Q, ou seja, $P \cup Q$ é o polígono de vértices $V_1, V_2, \ldots, V_n, U_1, U_2, \ldots, U_m$.

Sejam i_1, i_2 e i a quantidade de pontos de $\mathbb{Z}^2$ no interior de P, Q e $P \cup Q$, respectivamente.

Sejam b_1, b_2 e b a quantidade de pontos de $\mathbb{Z}^2$ que pertencem às arestas de P, Q e $P \cup Q$, respectivamente.

Seja Q' o complementar da aresta $\overline{V_1V_2}$ em Q. Neste caso, Q' é a união de linhas poligonais com extremos pertencentes ao polígono P. Como as arestas de P e Q se intersectam apenas na aresta $\overline{V_1V_2}$, nós temos duas possibilidades: ou Q' está inteiramente contido no interior de P, ou Q' está inteiramente contido no exterior de P.

Vamos considerar, primeiramente, o caso em que Q' está inteiramente contido no exterior de P e os interiores I_p e I_q de P e Q respectivamente, não se intersectam (Ver Figura 5 à esquerda).

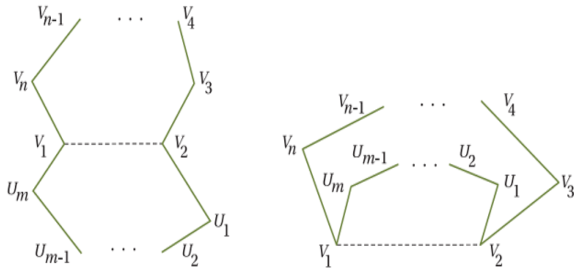

Figura 5: Q' está inteiramente no interior de P (à direita), ou no exterior de P (à esquerda).

Neste caso, o interior de $P \cup Q = I_p \cup I_q \cup I_a$, onde I_a designa o interior da aresta $\overline{V_1V_2}$, e de modo que $V_1 \notin I_a$ e $V_2 \notin I_a$.

Esta afirmação pode ser justificada com o auxílio do Lema 7. De fato, dado um ponto C qualquer da aresta $\overline{V_1V_2}$, podemos ligá-lo a um ponto B qualquer no interior de Q por uma linha poligonal que está inteiramente contida em I_q, com exceção de C. Do mesmo modo, podemos ligar C a um ponto D qualquer do interior de P por outra linha poligonal que está inteiramente contida em I_p (com exceção de C). A união das duas linhas poligonais forma uma linha poligonal que não intersecta $P \cup Q$ e liga B e D. Assim, a área do polígono $P \cup Q$ é igual a soma das áreas dos polígonos P e Q. Portanto, queremos mostrar que

$$i + \frac{b}{2} - 1 = \left(i_1 + \frac{b_1}{2} - 1\right) + \left(i_2 + \frac{b_2}{2} - 1\right). \tag{1.1.1}$$

Como o interior de $P \cup Q$ é formada pela união disjunta dos interiores de P, Q e $\overline{V_1V_2}$, temos que $i = i_1 + i_2 + b_3$, onde b_3 denota o número de pontos de $\mathbb{Z}^2$ contidos em I_a.

A linha poligonal, $P \cup Q$ é igual à união de P com Q subtraída de I_a. Como $P \cap Q = \overline{V_1V_2}$, o número de pontos de $\mathbb{Z}^2$ contidos em $P \cap Q$ é igual $b_3 + 2$ (todos os pontos que pertencem ao interior de $\overline{V_1V_2}$ além de V_1 e V_2, já que V_1 e $V_2 \in \mathbb{Z}^2$, por hipótese). Logo,

$$b = b_1 - (b_3 + 2) + b_2 - (b_3 + 2) + 2 = b_1 + b_2 - 2(b_3 + 1).$$

Disto, segue-se que

$$i + \frac{b}{2} - 1 = (i_1 + i_2 + b_3) + \frac{(b_1 + b_2 - 2(b_3 + 1))}{2} - 1 = (i_1 + i_2) + \frac{(b_1 + b_2)}{2} - 2,$$

o que demonstra (1.1.1).

Agora, vamos supor que Q' está contido no interior de P. Queremos provar que

$$i + \frac{b}{2} - 1 = \left(i_1 + \frac{b_1}{2} - 1\right) - \left(i_2 + \frac{b_2}{2} - 1\right). \tag{1.1.2}$$

Neste caso, o interior de P é formado pela união disjunta do interior de $P \cup Q$ com o interior de Q e com o complementar de V_1V_2 em Q (Ver Figura 5). Portanto,

$$i_1 = i + i_2 + [b_2 - (b_3 + 2)],$$

ou seja,

$$i = i_1 - i_2 - b_2 + (b_3 + 2).$$

Como no caso anterior, teremos:

$$b = b_1 - (b_3 + 2) + b_2 - (b_3 + 2) + 2 = b_1 + b_2 - 2(b_3 + 1).$$

E daí, segue-se que

$$i+\frac{b}{2}-1 = (i_1-i_2-b_2+(b_3+2))+\frac{(b_1 + b_2 - 2(b_3 + 1))}{2}-1 = (i_1+\frac{b_1}{2}-1)-(i_2+\frac{b_2}{2}-1).$$

O que demonstra (1.1.2).

O caso em que P está contido no interior de Q' é análogo ao anterior.

□

Observação 10 *Importante notarmos que os argumentos apresentados e as igualdades (1.1.1) e (1.1.2), nos garantem que se a fórmula (1.0.1) vale para $P \cup Q$ e para P, então ela também é válida para Q. Este fato já era conhecido para polígonos convexos. A partir de agora, o mesmo será válido para dois polígonos quaisquer simples e com apenas uma aresta comum de intersecção.*

1.2 O Teorema de Pick: Demonstração

Vamos, agora, apresentar a demonstração do Teorema de Pick. Antes, mostraremos que o teorema é válido em triângulos retângulos de catetos paralelos aos eixos coordenados. Depois estenderemos o Teorema para retângulos e triângulos quaisquer.

A Fórmula de Pick para triângulos. Seja T um triângulo retângulo com vértices em $\mathbb{Z}^2$ e catetos paralelos aos eixos coordenados.

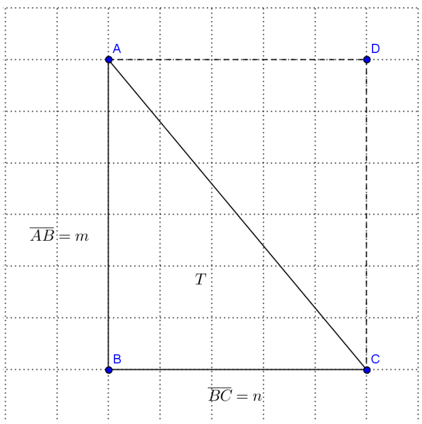

Figura 6: O Teorema de Pick para triângulos retângulos.

Seja R o retângulo que tem os catetos de T como dois de seus lados. Sejam também m e n os comprimentos dos catetos de T, i o número de pontos de $\mathbb{Z}^2$ no interior de T e b_h o número de pontos de $\mathbb{Z}^2$ no interior da hipotenusa de T.

O número de pontos de $\mathbb{Z}^2$ no interior de R é $(m-1)(n-1)$. Disto segue-se que

$$i = \frac{(m-1)(n-1) - b_h}{2}.$$

O número b de pontos de $\mathbb{Z}^2$ em T é igual $m + n + b_h + 1$, logo

$$i + \frac{b}{2} - 1 = \frac{(m-1)(n-1) - b_h}{2} + \frac{(m + n + b_h + 1)}{2} - 1 = \frac{mn}{2}.$$

O que confirma o resultado que pode ser obtido com o cálculo usual da área de um triângulo, já que podemos tomar qualquer um dos catetos como base e o outro como altura do triângulo.

Portanto, a fórmula vale para triângulos retângulos cujos catetos são paralelos aos eixos coordenados.

Como todo retângulo R pode ser formado por dois triângulos retângulos T_1 e T_2, pela Proposição 1 e pelo que acabamos de demonstrar, a fórmula (1.0.1) vale também para todo retângulo de vértices em $\mathbb{Z}^2$ cujos lados são paralelos aos eixos coordenados.

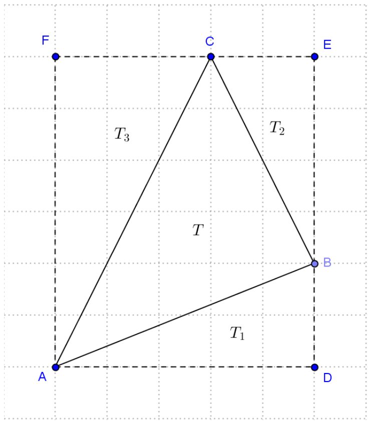

Figura 7: O Teorema de Pick para triângulos quaisquer.

Agora, considere um triângulo T qualquer com vértices em $\mathbb{Z}^2$. Podemos formar um retângulo R com vértices em $\mathbb{Z}^2$, tal que $R = T \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3$, onde T_1, T_2, T_3 sejam triângulos retângulos convenientes com catetos paralelos aos eixos coordenados (em alguns casos, menos de três triângulos retângulos são necessários, mas o argumento é análogo). (Ver Figura 7)

Como a fórmula (1.0.1) vale para R, T_1, T_2 e T_3, ela vale também para o triângulo T, pela Observação 10.

Agora, temos todas as ferramentas necessárias para demonstrar o Teorema de Pick.

Teorema 11 (Teorema de Pick) *Dado um polígono simples P com vértices de coordenadas inteiras, a área de P será dada por*

$$\text{Área}(P) = i + \frac{b}{2} - 1,$$

onde i representa a quantidade de pontos de coordenadas inteiras interiores ao polígono, e b representa a quantidade de pontos de coordenadas inteiras nas arestas do polígono.

Prova. A demonstração será feita por indução sobre n. Vimos no caso de triângulos, que a fórmula (1.0.1) é válida, ou seja, para polígonos com 3 vértices de coordenadas inteiras.

Suponhamos então, que a fórmula (1.0.1) seja válida para qualquer polígono simples com k vértices, todos com coordenadas inteiras, onde $k \leq n$ e $k,\ n \in \mathbb{N}$.

Considere então um polígono P com $(n+1)$ vértices $(V_1, V_2, \ldots, V_{n+1})$. Pelo Lema 8, P possui um par de vértices que são extremos de um segmento cujo interior não intersecta P.

Sem perda de generalidade, sejam V_1 e V_p este par de vértices, seja P_1 o polígono de vértices $V_1, V_2, \ldots, V_p$ e seja P_2 o polígono de vértices $V_1, V_p, V_{p+1}, \ldots, V_{n+1}$. A fórmula (1.0.1) vale tanto para P_1 como para P_2, pois cada um dos polígonos tem no máximo n vértices, logo pela Proposição 9, a fórmula (1.0.1) vale também para P, o que prova que ela é válida para todo polígono simples com n vértices de coordenadas inteiras.

□

Exemplo 12 *Calcular a área do polígono P da Figura 8.*

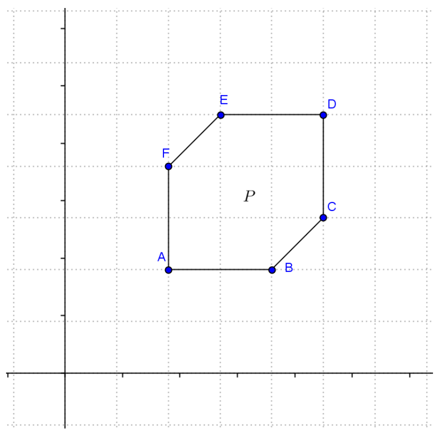

Figura 8: Polígono de vértices com coordenadas inteiras.

Solução. Pela Figura 8, vemos que P é um polígono simples que apresenta seus vértices em pontos de coordenadas inteiras, logo, pelo Teorema de Pick, como há dez pontos de coordenadas inteiras em suas arestas e quatro pontos de coordenadas inteiras no interior de P, teremos:

$$\acute{A}rea(P) = \frac{10}{2} + 4 - 1 = 8\, u.a.$$

1.3 O Teorema de Pick para poliedros: Um contraexemplo

Se tomarmos pontos do $\mathbb{R}^3$ de coordenadas inteiras, é natural imaginar que possa existir uma fórmula semelhante à fórmula de Pick que calcule o volume de um poliedro com vértices de coordenadas inteiras em função do número de pontos de coordenadas inteiras pertencentes às arestas e dos pontos de coordenadas inteiras interiores a P.

Vamos verificar que a fórmula (1.0.1) não é valida no $\mathbb{R}^3$, através do seguinte exemplo.

Exemplo 13 *Considere o tetraedro T de vértices $A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(0,1,0)$ e $D(0,1,1)$ no $\mathbb{R}^3$. Calcular o volume de T.*

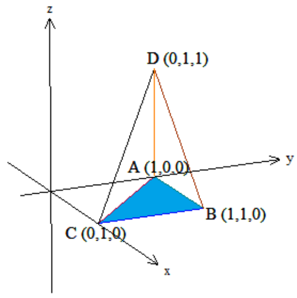

Figura 9: Tetraedro com coordenadas inteiras.

Solução. Analisando a Figura 9, vemos que os únicos pontos de coordenadas inteiras pertencentes ao interior ou às arestas do triângulo ABC são o seus 3 vértices, pois ABC é um triângulo elementar.

Na aresta $\overline{CD}$, existem 2 pontos de coordenadas inteiras em seu interior, a saber C e D:

Na aresta $\overline{BD}$, há apenas dois pontos de coordenadas inteiras pertencentes à mesma, B e D, pois $\overline{BD}$ é a diagonal do quadrado $BCDG$, cuja equação é dada por $(1-t, 1, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Se $t = 0$, teremos o ponto B; para $t = 1$, teremos o ponto D e para qualquer outro valor de $t \in (0, 1)$, $(1-t, 1, t)$ não será um ponto de coordendas inteiras.

Já, na aresta $\overline{AD}$, os únicos pontos de coordenadas inteiras são os vértices A e D, isto fica claro, considerando que o segmento $\overline{AD}$ tem equação $(1-t, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Se $t = 0$ teremos o ponto A, para $t = 1$ teremos o ponto D e para qualquer outro valor de $t \in (0, 1)$, $(1-t, t, t)$ não será um ponto de coordenadas inteiras, logo não entra na contagem dos pontos com coordenadas inteiras.

Agora, verificando o interior do tetraedro $ABCD$, vemos que aí não há pontos de coordenadas inteiras. Isto também fica claro ao observarmos que o interior do tetraedro $ABCD$ pertence ao inteiror de um cubo de aresta unitária e cujo interior também não possui pontos de coordenadas inteiras.

Portanto, nas arestas e vértices do tetraedro, temos os 2 pontos pertencentes à aresta $\overline{CD}$ e os pontos A e B que possuem coordenadas inteiras , ou seja, $b = 4$.

Já no interior do tetraedro não há pontos de coordenadas inteiras, logo, $i = 0$.

Se aplicarmos a fórmula (1.0.1), supondo-a válida para o cálculo do volume do tetraedro T, teremos

$$V(T) = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{4}{2} + 0 - 1 = 1\, u.v.$$

Mas, pelo cálculo usual do volume de um tetratedro, temos que

$$V(T) = \frac{1}{3}A(b).h = \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\, u.v.,$$

onde $A(b)$ representa a área da base do prisma (ABC), h a altura do mesmo e $u.v$ é unidade de volume.

Portanto, para poliedros tridimensionais não existe uma fórmula simples como a (1.0.1), que nos dê os volumes dos mesmos, apenas contando-se seus pontos internos e os pontos pertencentes às suas faces. Para generalizar a fórmula (1.0.1) é necessário utilizar um outro tipo de reticulado. Ver [2].

1.4 Extensão do Teorema de Pick para polígonos com vértices de coordenadas racionais

Mostraremos, agora, que se as coordenadas dos vértices de uma região poligonal não forem todas números inteiros, mas forem racionais, com o auxílio do Teorema de Pick para coordenadas inteiras, torna-se possível calcular a área da região. Inicialmente, vamos demonstrar o seguinte resultado:

Lema 14 *Considere um polígono P no plano $\mathbb{R}^2$. Se multiplicarmos todas as coordenadas de seus vértices por um mesmo número n, teremos um novo polígono Q cujas medidas dos lados sofrerão um aumento (ou diminuição) por um fator de n em relação às medidas dos lados de P.*

Prova. Basta mostrarmos que ao se multiplicar as coordenadas de dois vértices consecutivos quaisquer por um número n, a nova distância entre eles ficará multiplicada também por n. De fato:

Seja $A(x_i, y_i)$ e $B(x_j, y_j)$ dois vértices consecutivos quaisquer de um polígono P. A distância entre A e B é dada por:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}.$$

Multiplicando-se as coordenadas de A e B por n, teremos $\tilde{A}(nx_i, ny_i)$ e $\tilde{B}(nx_j, ny_j)$, logo

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sqrt{(nx_j - nx_i)^2 + (ny_j - ny_i)^2} = \sqrt{n^2[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2]} = nd(A,B).$$

□

Proposição 15 (Teorema de Pick para coordenadas racionais) *Seja P um polígono simples de n vértices com coordenadas racionais $A_1\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{r_1}{s_1}\right)$, $A_2\left(\frac{p_2}{q_2}, \frac{r_2}{s_2}\right)$, $\ldots$, $A_n\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{r_n}{s_n}\right)$ no $\mathbb{R}^2$. A área de P é dada por*

$$\text{Área}(P) = \frac{\text{Área}(Q)}{m^2},$$

onde m é o $mmc(q_1, s_1, q_2, s_2, \ldots, q_n, s_n)$ e Q é o polígono que se obtém ao multiplicarmos todas as coordenadas de P por m.

Prova. Multiplicando-se todas as coordenadas de P por m, construiremos um novo polígono simples Q cujos vértices terão todos eles, coordenadas inteiras.

Mas neste caso, pelo Lema 14, as medidas dos lados de Q serão iguais as respectivas medidas dos lados correspondentes de P multiplicados por m, ou seja, os polígonos Q e P são semelhantes, cuja razão de semelhança é m.

Aplicando o Teorema de Pick a Q, teremos a $\acute{A}rea(Q)$, mas como a razão entre as áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança, segue-se:

$$\frac{\acute{A}rea(Q)}{\acute{A}rea(P)} = m^2,$$

ou seja,

$$\acute{A}rea(P) = \frac{\acute{A}rea(Q)}{m^2}.$$

□

Observação 16 *Na verdade, para que possamos utilizar a Fórmula de Pick, basta que tenhamos um reticulado (ou malha), cuja distância entre seus pontos consecutivos seja constante e de modo que o polígono do qual se deseja calcular a área, possua todos os seus vértices em pontos do reticulado.*

2 Aplicações do Teorema de Pick

Problema 1. Sejam p e q números inteiros positivos, tais que $mdc(p, q) = 1$. Encontrar inteiros m e n tais que:

$$mp - nq = 1.$$

Solução. Não conhecemos nenhuma fórmula para calcular os valores de m e n que satisfaçam a igualdade acima. O que podemos fazer é aplicar o algoritmo de Euclides a cada (p, q) para encontrar uma solução (m, n).

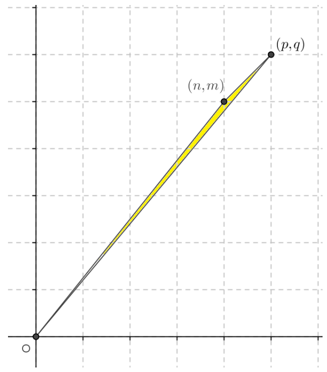

Figura 10: Solução da equação dionfantina $mp - nq = 1$.

O cálculo de m e n, no entanto pode ser feito com o auxílio do Teorema de Pick, como se segue.

Sejam p e q números primos entre si e considere o segmento de reta que une à origem $O(0, 0)$ ao ponto $P(p, q)$ no $\mathbb{R}^2$.

Como p e q são primos entre si, afirmamos que não existe qualquer outro ponto de coordenadas inteiras neste segmento de reta. De fato, suponhamos que exista tal ponto (a, b) neste segmento diferente de (p, q), com a e b números inteiros. Como os pontos (x, y) que pertencem ao seguimento $\overline{OP}$ satisfazem as desigualdades:

$$0 \leq x \leq p \text{ e } 0 \leq y \leq q,$$

e como estamos supondo (a, b) diferente de O e P, deveremos ter:

$$a < p \text{ e } b < q.$$

Mas a equação deste segmento de reta é $y = \frac{q}{p}x$. Assim, teremos

$$b = \frac{q}{p}a \Rightarrow bp = qa.$$

Além disso, a e b são inteiros positivos e como $mdc(p, q) = 1$, segue-se que:

$$p/a \Rightarrow p < a \quad \text{e}$$

$$q/b \Rightarrow q < b.$$

Contrariando as desigualdades anteriores. Portanto não existe tal ponto de coordenadas inteiras no segmento citado.

Agora, translandando-se o segmento paralelamente (para cima) a sua posição inicial até encontrar um primeiro ponto $M(n, m)$ qualquer, de coordenadas inteiras, veremos que os pontos O, P e M formam um triângulo elementar (T), pois não contém em seu interior nem na sua fronteira, pontos de coordenadas inteiras, exceto nos vértices. Sua área então é dada pela fórmula de Pick

$$\acute{A}rea(T) = 0 + \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Além disso, calculando-se a área do triângulo pela metade do módulo do determinante de suas coordenadas, temos que

$$\acute{A}rea(T) = \frac{1}{2}(pm - qn).$$

Igualando as duas igualdades anteriores para $\acute{A}rea(T)$, segue-se que

$$mp - nq = 1.$$

Observação 17 *Se transladarmos o segmento paralelamente para baixo formando um triângulo elementar e calculando sua área pela metade do módulo do determinante de suas coordenadas, chegaremos à equação:*

$$nq - mp = 1.$$

Neste caso, as soluções da equação serão os números inteiros $-m$ e $-n$.

Problema 2. Vamos agora, mostrar como o Teorema de Pick pode ser útil também para se estimar o valor de π.

Inicialmente, sabemos que π está relacionado com a área do círculo (A_c) pela fórmula:

$$\pi = \frac{A_c}{r^2}. \tag{2.0.1}$$

Podemos estimar o valor de π utilizando o Teorema de Pick, através de polígonos que melhores se ajustem e aproximem o círculo dado.

Considere a Figura 11 que representa círculo de raio 1.

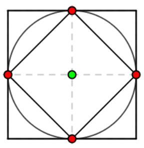

Figura 11: Quadrados inscritos e circunscritos ao círculo de raio 1.

Este círculo está entre os quadrados inscritos e circunscritos a ele (ver Figura 11). Vamos aproximar o valor de π pelas áreas dos dois polígonos. Para a aproximação pela área do polígono interno Q_1, temos quatro pontos de coordenadas inteiras que pertencem às arestas de Q_1, ou seja, $b = 4$ e um ponto interno a Q_1, ou seja $i = 1$.

Logo,

$$\acute{A}rea(Q_1) = \frac{4}{2} + 1 - 1 = 2\, u.a.$$

Pela fórmula (2.0.1),

$$\pi = \frac{A_c}{r^2} \cong \frac{\acute{A}rea(Q_1)}{r^2} = \frac{2}{1^2} = 2.$$

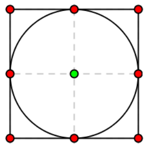

Figura 12: Quadrado circunscrito ao círculo de raio 1.

que é uma aproximação muito ruim.

Agora, considere o quadrado Q_2 circunscrito ao círculo de raio 1.

Em Q_2 temos oito pontos que pertencem às arestas de Q_2, ou seja, $b = 8$ e um ponto interior a Q_2, ou seja $i = 1$, portanto

$$\acute{A}rea(Q_2) = \frac{8}{2} + 1 - 1 = 4\,u.a.$$

Pela fórmula (2.0.1):

$$\pi = \frac{A_c}{r^2} \cong \frac{\acute{A}rea(Q_2)}{r^2} = \frac{4}{1^2} = 4.$$

que também é uma aproximação grosseira para π.

Mas podemos tomar a média aritmética das duas aproximações encontradas:

$$\pi \cong \frac{(2+4)}{2} \cong 3,$$

que é uma aproximação ainda ruim, mas bem melhor que as anteriores.

Agora, vamos considerar um círculo de raio 3 e efetuar o mesmo procedimento. Neste caso, o octógono (P_1) é o polígono que melhor aproxima o círculo (Ver Figura 13).

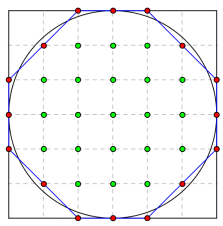

Figura 13: Octógono aproximando o círculo de raio 3.

Assim, $b = 16$ e $i = 21$. Logo,

$$\acute{A}rea(P_1) = \frac{16}{2} + 21 - 1 = 28\,u.a.$$

Pela fórmula (2.0.1) temos:

$$\pi = \frac{A_c}{r^2} \cong \frac{\acute{A}rea(P_1)}{r^2} = \frac{28}{3^2} = 3,111\ldots$$

que é uma aproximação bem melhor que as anteriores. Mas podemos aproximar ainda mais.

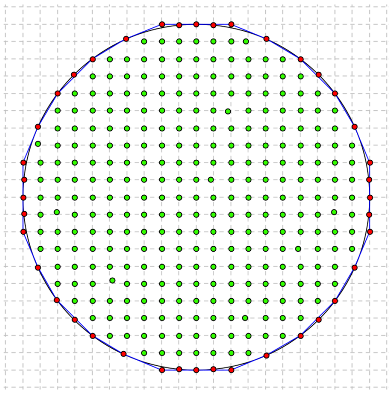

Figura 14: Polígono que aproxima o círculo de raio 10.

Considere agora um círculo de raio 10.

O polígono R que melhor aproxima o círculo é um polígono com 40 pontos de coordenadas inteiras em suas arestas e 293 pontos de coordenadas inteiras internos a R. Assim,

$$\acute{A}rea(R) = \frac{40}{2} + 293 - 1 = 312\, u.a.$$

Agora, pela fórmula (2.0.1):

$$\pi = \frac{A_c}{r^2} \cong \frac{\acute{A}rea(R)}{r^2} = \frac{312}{10^2} = 3,12.$$

que já é uma aproximação razoável.

Mas este procedimento pode ser feito sucessivamente, aproximando manualmente, um círculo qualquer por polígonos que apresentem uma quantidade de pontos com coordenadas inteiras (em suas arestas e em seu interior) cada vez maior, de modo que esta quantidade de pontos tenda ao infinito, o que fará π se aproximar cada vez mais de seu valor real.

Problema 3. Calcular a área aproximada do Estado de Alagoas.

Esta atividade foi dividida em 5 passos que se referem respectivamente ao acesso ao site Google Maps, ao acesso ao software Geogebra, à construção do polígono que aproximará o mapa da região e ao cálculo aproximado da área da região.

Para que esta atividade possa ser realizada com sucesso é necessário que os alunos conheçam a Fórmula de Pick e as hipóteses que devem ser satisfeitas para a validade da fórmula. Além disso, os alunos devem ter domínio sobre o conceito de perímetro e área de polígonos, figuras semelhantes e da relação entre as áreas de polígonos semelhantes.

Para uma sugestão de sequência didática sobre estes tópicos de Geometria, que culmine na aplicação do Teorema de Pick no cálculo aproximado das áreas de regiões, ver referência [4].

A nossa sugestão é que esta atividade seja realizada durante 2 aulas com a turma dividida em grupos que poderão ter entre 5 ou 6 alunos.

No laboratório de informática, cada grupo deverá ficar em um computador para a realização das atividades. Os primeiros passos abaixo na operação do Geogebra podem ser feitos pelo próprio professor, mas seria importante que os alunos pudessem fazê-los, mesmo com a ajuda do professor.

1º passo: Cada grupo deverá acessar o Google Maps e buscar o mapa de Alagoas, ajustando o zoom (no canto inferior esquerdo) para 20 km sobre 20 mi (milhas), como na Figura 15. Os 20 km é o valor que corresponde ao segmento de tamanho de $1,5\,cm$. Portanto a escala é a razão entre $20\,km$ e $1,5\,cm$, ou seja, $13,333\ldots$ km/cm. O valor aproximado de $13,33$ é a razão de semelhança que utilizaremos para o cálculo aproximado da área real do Estado de Alagoas.

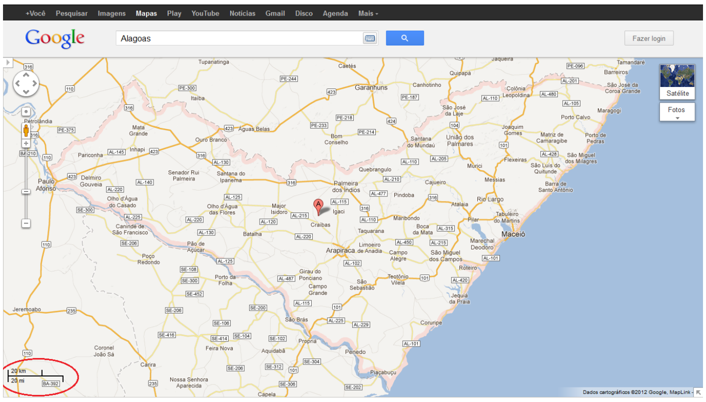

Figura 15: Alagoas no Google Maps.

2º passo: Depois disto, o aluno responsável pela operação do computador deve pressionar as teclas *Alt + Prt sc* para copiar a imagem do mapa no Google, abrir qualquer programa de edição de imagens (por exemplo, o Paint), colar a imagem copiada do Google Maps e salvar o arquivo numa pasta do computador.

3º passo: Agora o aluno deve abrir o software Geogebra, clicar no Menu *Opções*, depois *Configurações*, *Janela de Visualização* e clicar na aba *Malha*. Depois marcar *Exibir Malha* e deve-se ajustar a distância entre os pontos da malha, de modo que a distância fique a mais próxima possível de $1\,cm$. Essa medição pode ser feita com o auxílio de uma régua. Neste trabalho a distância que melhor se aproximou a 1 cm foi 0.9, como podemos ver na Figura 16.

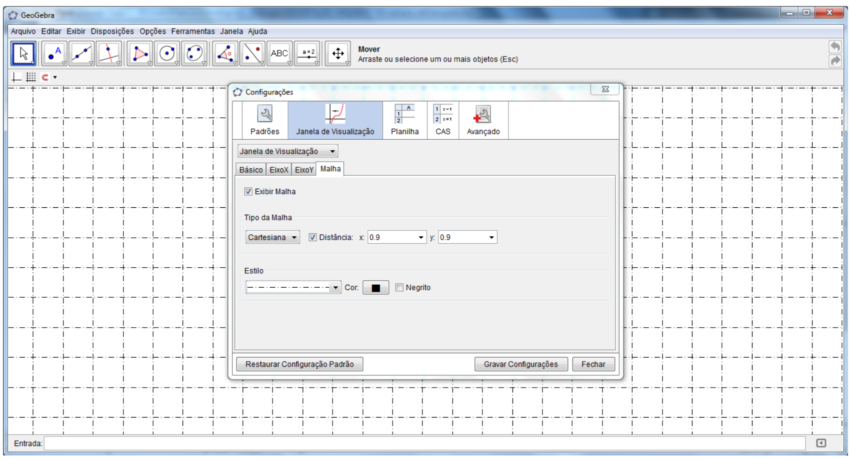

Figura 16: Ajustando a malha no Geogebra.

Depois de ajustada a malha, abaixo da barra de Menu, o aluno deve clicar no

10º botão e 4ª opção, clicar na tela e escolher a pasta do computador onde a imagem está salva, depois clicar com o botão direito do mouse em *Propriedades*, depois na guia *Básico*, *Imagem de Fundo* e *Fechar* (Ver Figura 17).

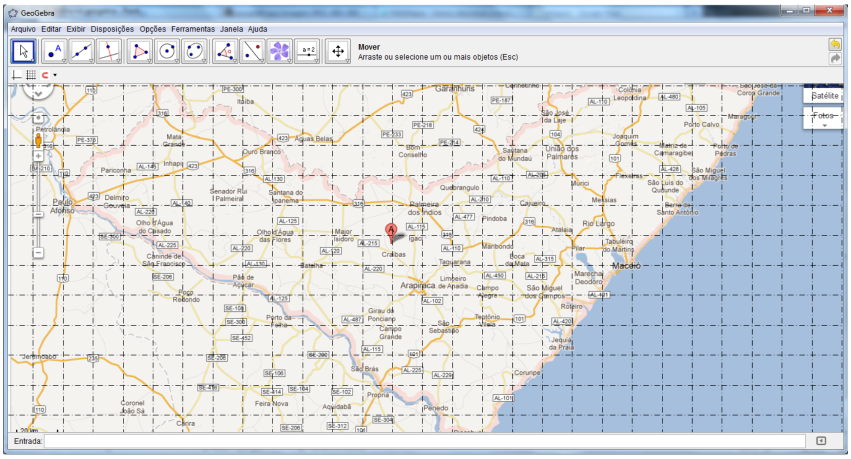

Figura 17: Imagem do Google no Geogebra.

4º passo: Agora o aluno deve aproximar o mapa de Alagoas por um polígono que tenha vértices com coordenadas inteiras (para respeitar as hipóteses do Teorema de Pick). Ele traçará segmentos que unam dois vértices de coordenadas inteiras até que a união de todos estes segmentos formem um polígono que aproxime da melhor maneira possível, a região do mapa. Para isso, o aluno clicará no 3º botão abaixo da barra de Menu e depois em *Segmento definido por dois pontos*. Para fazer o papel da barra de rolagem (subir ou descer a tela do geogebra) deve-se usar as setas do teclado. A área do polígono é uma aproximação para a área do mapa. (Ver Figura 18).

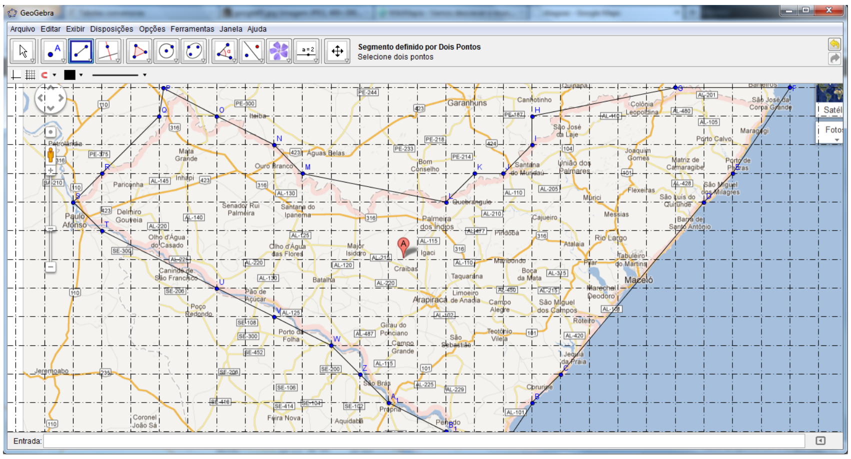

Figura 18: O polígono que aproxima o mapa de Alagoas.

5º passo: Sabendo que o mapa é semelhante à superfície real do Estado, o grupo deve calcular a área aproximada de Alagoas utilizando a relação entre as áreas de duas figuras semelhantes que neste caso é o quadrado de 13,33 (razão de semelhança) e considerando que o polígono construído é uma aproximação para a figura do mapa.

Utilizando a Fórmula de Pick, podemos calcular a área do polígono (P) que construímos anteriormente. Assim, como $b = 31$, $i = 134$, teremos

$$\acute{A}rea(P) = \frac{31}{2} + 134 - 1 = 148,5\, cm^2.$$

Se chamarmos a área real do mapa de Alagoas de A, e sabendo-se que a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança ($13,33\, km/cm$), segue-se que

$$\frac{A}{148,5} = 13,33^2 \Rightarrow A = 148,5 \times 177,6889 = 26.386,8\, km^2.$$

A área real do mapa de Alagoas é de $27.778,506 km^2$ (Fonte:http://www.ibge.gov.br).

O erro no cálculo da superfície alagoana é de aproximadamente 5%, que é um erro razoavelmente pequeno, considerando-se o relevo, a possível imprecisão do mapa e levando-se em conta o método utilizado de aproximar o mapa por segmentos de retas, que é um processo quase manual.

Observação 18 *O professor pode também escolher a região da qual os grupos deverão calcular a área, podendo ser cidades, estados ou países. Também pode-se sugerir que cada grupo calcule a área de uma região distinta das demais regiões escolhidos pelos outros grupos. Ao final da aula, o professor pode calcular, juntamente com os grupos, qual grupo apresentou menor erro no cálculo aproximado da área da sua região.*

O professor também pode desafiar os grupos a tentarem calcular a área da superfície da escola utilizando a planta baixa da mesma (se esta planta baixa estiver disponível). Para isso, o professor deve informar aos alunos a escala do desenho, e sugerir que eles utilizem a fórmula de Pick e a razão entre as áreas de figuras semelhantes.

O professor pode ficar responsável pelos 1º, 2º e 3º passos, se achar que os alunos não apresentam a desenvoltura necessária com o computador, para o sucesso da atividade. Os grupos podem ficar responsáveis apenas pela poligonalização do mapa no Geogebra e depois pelo cálculo da área do polígono e da área do mapa real. Pode-se também aumentar a precisão do processo, diminuindo-se o tamanho da unidade de medida da malha utilizada. Isto torna o processo de poligonalização do mapa ainda mais preciso, pelo fato de os quadrados da malha se tornarem menores. Escolhida a unidade da malha a ser adotada (u.m.), a escala deve ser dada em km por u.m, para que a área aproximada da região do mapa seja calculada corretamente em km^2.

É possível que na escola onde o professor aplicará a referida proposta, não haja conexão com internet, neste caso pode-se colher diferentes mapas previamente e levar aos computadores a serem utilizados, para depois podermos utilizar o software Geogebra. Para isso, devemos informar ao aluno, a escala da figura, para que este possa calcular a área do mapa da região pretendida, utilizando-se a relação entre as áreas de duas regiões semelhantes.

Caso, a escola não tenha o software Geogebra instalado em seus computadores, pode-se utilizar alternativamente o software Inkscape ou então o Paint, que pode ser encontrado em qualquer computador com sistema operacional Windows.

Se a escola não tem laboratório de informática e computadores, o professor pode colher os mapas previamente, imprimi-los, recortá-los e levá-los à sala de aula juntamente com o papel seda (transparente) e o papel milimetrado, para que os alunos *possam aplicar a Fórmula de Pick aos desenhos dos mapas feitos no papel seda e aproximados por um polígono desenhado no papel milimetrado, ao qual se possa aplicar a fórmula de Pick. Evidentemente, o professor deve informar aos alunos, a escala do mapa das figuras a que se deve aplicar a fórmula de Pick.*

3 Conclusão

Como vimos com os exemplos e construções anteriores, o Teorema de Pick não é apenas uma ferramenta bastante útil no estudo do cálculo de áreas de polígonos simples (mesmo com formas mais irregulares) mas também mostra-se muito eficaz para estimar aproximações para o valor de π, resolver certas equações diofantinas e estimar as áreas de regiões geográficas.

Assim, é totalmente possível introduzir a Fórmula de Pick no ensino de matemática da Educação Básica, principalmente utilizando-se malhas ou reticulados, softwares como o Geogebra e fazendo uso dos conceitos de perímetro, semelhança de figuras, cálculo de áreas, entre outros conceitos básicos de geometria que os alunos já devem dominar.

Referências

[1] Andrade, D., *Teorema de Pick*. Disponível em <http://www.dma.uem.br/kit/pick/>. Acesso em 10 dez. 2012.

[2] Kolodziejczyka, K. Reayb, J. Polynomials and spatial Pick-type theorems. *Expositiones Mathematicae*. Vol. 26, No.1, pp 41-53, 2008.

[3] Pereira, A. L.; Melo, S. T., Contando Áreas: O Teorema de Pick. *Revista do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro: IMPA, n.78, Ano 30, 2º quadrimestre, p. 36-42, 2012.

[4] Silva Junior, F. S., *Sobre o Cálculo de Áreas e o Teorema de Pick*. Dissertação (Mestrado profissional em Rede Nacional) - Universidade Federal de Alagoas, Instituto de Matemática, 2013.

[5] Tavares, J. N., *Teorema de Pick*. Disponível em <http://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/>. Acesso em 05 dez. 2012.