Uma ferramenta para o estudo local de curvas e superfícies singulares no espaço Euclidiano*

Alex Paulo Francisco †
Luciana de Fátima Martins †

Resumo

O objetivo deste trabalho é aplicar uma clássica ferramenta da Teoria de Singularidades, a saber, desdobramentos de funções reais, no estudo da estrutura local de alguns subconjuntos do espaço Euclidiano.

Palavras Chave: Geometria diferencial, singularidades, desdobramentos, conjunto bifurcação, conjunto discriminante.

Introdução

Considere uma função $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ suave. Considerando F como uma família de funções a r-parâmetros, chamada de desdobramento de uma determinada função pertencente à família dada, a existência de desdobramentos com a propriedade de serem "versais"é um dos resultados centrais da Teoria de Singularidades. A grosso modo, um desdobramento versal de uma função real g contém todas as funções próximas a g. Reconhecer desdobramentos versais é importante para estudar propriedades de subconjuntos do espaço de parâmetros que são preservadas por difeomorfismos. O principal objetivo deste trabalho é apresentar fundamentos básicos sobre desdobramentos de funções reais e algumas de suas aplicações ao estudo da estrutura local de curvas e superfícies.

Sabemos que, na vizinhança de pontos regulares de curvas e superfícies, estas são difeomorfas a retas ou a planos, respectivamente. Portanto, a questão que resta analisar é quanto a estrutura local em pontos singulares, ou seja, em pontos onde não temos bem definido a reta tangente ou o plano tangente. Por exemplo, a curva $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ não é regular em $t = 0$ (Figura 1, esquerda), e a superfície parametrizada por $f(x, y) = (x, y^2, y^3)$ (Figura 1, direita), não é regular em $\{(x, 0);\ x \in \mathbb{R}\}$, a primeira chamada *cúspide ordinária*, e a segunda *cuspidal edge*.

A organização deste trabalho é como segue: Nas duas primeiras seções apresentamos os principais resultados sobre desdobramentos p-versais e versais. A diferença básica na definição entre eles é a existência de uma função constante. Associado a desdobramentos p-versais temos os conjuntos singular e bifurcação e, associado a desdobramentos versais, temos os conjuntos zero e discriminante. Os conjuntos singular (no caso p-versal) e zero (no caso versal) são variedades diferenciáveis suaves, de mesma dimensão que o espaço de parâmetros. Já o mesmo não ocorre para os

*Este trabalho é parte da dissertação de mestrado do primeiro autor, bolsista PICME-CAPES, orientado pelo segundo autor.

†E-mails: alexpf_uchoa@yahoo.com.br e lmartins@ibilce.unesp.br. Departamento de Matemática, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, UNESP - Univ Estadual Paulista, Câmpus de São José do Rio Preto, SP, Brazil.

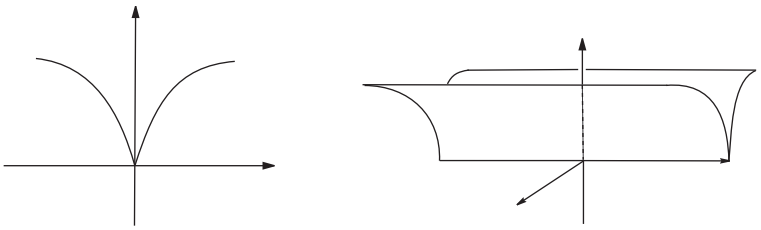

Figura 1: Cúspide ordinária (esquerda) e cuspidal edge (direita).

conjuntos bifurcação e discriminante. Estes desempenham papel cruscial no estudo de propriedades de subconjuntos do espaço de parâmetros que são preservadas por difeomorfismos, o que é apresentado na terceira seção deste trabalho. Veremos, por exemplo, que a evoluta de uma curva regular é, na vizinhança de um ponto singular (que é vértice ordinário da curva dada), o conjunto bifurcação de um desdobramento e, como consequência de resultados que veremos, é difeomorfa a uma cúspide ordinária. Além da evoluta de uma curva plana, também apresentamos o estudo da curva e da supefície paralela associadas a uma curva plana. Vários outros conjuntos podem ser estudados com a mesma técnica, como por exemplo, a ortotômica, a curva dual de uma curva plana, a superfície dual e a tangente desenvolvível de uma curva no espaço, o envelope das retas tangentes, entre outros. As demonstrações dos resultados enunciados nas duas primeiras seções são omitidas por serem longas e técnicas, mas encontram-se nas referências citadas ou, com todos os seus detalhes, na dissertação de mestrado do primeiro autor.

A referência principal deste estudo é o livro de J. W. Bruce e P. J. Giblin ([4]) e outras referências consultadas estão citadas na bibliografia. Os resultados que enunciamos estão no livro [4], ou como proposição/teorema, ou como exercício proposto. Acreditamos que nossa maior contribuição na elaboração deste trabalho é apresentar ao leitor um texto em português e rico em detalhes.

No que segue, a notação $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \to \mathbb{R}$ significa que F está definida em uma vizinhança de (t_0, x_0) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ e dizemos que F é um *desdobramento a r parâmetros* de $f = F_{x_0}$, onde $F_{x_0}(t) = F(t, x_0)$. Por exemplo, um desdobramento para a função $f(t) = t^5$ pode ser dado pela família de funções a 3 parâmetros $F(t, a, b, c) = t^5 + at^3 + bt^2 + ct$, onde f é obtida tomando $a = b = c = 0$.

1 Desdobramentos p-versais

Definição 1 *Seja $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s, (t_0, y_0) \to \mathbb{R}$ um desdobramento a s-parâmetros da função $g = G_{y_0}$. Considere*

$$\begin{cases} a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \to \mathbb{R}, \text{ onde } a(t, x_0) = t \\ b : \mathbb{R}^r, x_0 \to \mathbb{R}^s, y_0, \text{ onde } b(x_0) = y_0 \\ c : \mathbb{R}^r, x_0 \to \mathbb{R} \end{cases},$$

em que a, b e c são suaves. Então o desdobramento $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \to \mathbb{R}$ da função $f(t) = g(t) + c(x_0)$ dado por

$$F(t, x) = G(a(t, x), b(x)) + c(x)$$

*é dito **p-induzido de** G. Se todo desdobramento de g é p-induzido de G, dizemos que G é um **desdobramento p-versal de** g **em** t_0.*

FRANCISCO, A. P.; MARTINS, L. F. Uma ferramenta para o estudo local de curvas e superfícies singulares no espaço Euclidiano. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática,** Bauru, v. 2, n. 2, p. 2-17, dez. 2013.
DOI: 10.21167/cqdvol22201323169664apflfm0217 - Disponível em: http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/index.jsp

Exemplo 2 *Sejam* $g(t) = t^3$, $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (0,0) \to \mathbb{R}$ *um desdobramento a 1-parâmetro de* g, *dado por* $G(t, x_1) = t^3 + x_1 t$, *e* $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, (0,0) \to \mathbb{R}$ *um desdobramento a 2-parâmetros de* g *dado por* $H(t, x_1, x_2) = t^3 + x_1 t + x_2 t^2$. *Afirmamos que* G *é p-induzido de* H *e* H *é p-induzido de* G.

De fato, observe que $G(t, x_1) = H(t, x_1, 0)$. *Assim, tomando*

$$\begin{cases} a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (0,0) \to \mathbb{R}, \text{ dado por } a(t, x_1) = t \\ b : \mathbb{R}, 0 \to \mathbb{R}^2, 0, \text{ dado por } b(x_1) = (x_1, 0) \\ c : \mathbb{R}, 0 \to \mathbb{R}, \text{ dado por } c(x_1) = 0 \end{cases},$$

obtemos $G(t, x_1) = H(a(t, x_1), b(x_1)) + c(x_1)$, *de onde concluímos que* G *é p-induzido de* H. *Mostremos agora que* H *é p-induzido de* G.

Podemos eliminar o termo t^2 *obtendo:*

$$H(t - \frac{1}{3}x_2, x_1, x_2) = G(t, x_1 - \frac{1}{3}x_2^2) + \frac{2}{27}x_2^3 - \frac{1}{3}x_1 x_2$$

e, assim, $H(t, x_1, x_2) = G(t + \frac{1}{3}x_2, x_1 - \frac{1}{3}x_2^2) + \frac{2}{27}x_2^3 - \frac{1}{3}x_1 x_2 = G(a(t, x_1, x_2), b(x_1, x_2)) + c(x_1, x_2)$, *onde*

$$\begin{cases} a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, (0,0) \to \mathbb{R}, \text{ dado por } a(t, x_1, x_2) = t + \frac{1}{3}x_2 \\ b : \mathbb{R}^2, 0 \to \mathbb{R}, 0, \text{ dado por } b(x_1, x_2) = x_1 - \frac{1}{3}x_2^2 \\ c : \mathbb{R}^2, 0 \to \mathbb{R}, \text{ dado por } c(x_1, x_2) = \frac{2}{27}x_2^3 - \frac{1}{3}x_1 x_2 \end{cases}.$$

Portanto, H *é p-induzido de* G.

Observação 3 *Seja* $g : \mathbb{R}, 0 \to \mathbb{R}$ *suave e sejam* F, G *e* H *desdobramentos de* g *em* t_0. *A partir da definição, podemos mostrar que:*

(a) *Se* F *é p-induzido de* G *e* G *é p-induzido de* H, *então* F *é p-induzido de* H.

(b) *Se* G *é desdobramento p-versal de* g *em* t_0 *e* G *é p-induzido de* H, *então* H *é desdobramento p-versal de* g *em* t_0.

No que segue neste artigo, denotamos por $g(t) = \pm t^{k+1}$, se $g(t) = t^{k+1}$ para todo t, ou $g(t) = -t^{k+1}$ para todo t. O teorema a seguir é fundamental para as aplicações que veremos. Sua demonstração para o caso em que os desdobramentos são analíticos pode ser encontrada em [4], ou em [1], para o caso geral.

Teorema 4 ([4], p. 137) *Seja* $g : \mathbb{R}, 0 \to \mathbb{R}$ *dada por* $g(t) = \pm t^{k+1}$. *Então o desdobramento* $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1}, (0,0) \to \mathbb{R}$ *de* g *em* 0 *dado por*

$$G(t, x) = \pm t^{k+1} + x_{k-1}t^{k-1} + ... + x_2 t^2 + x_1 t$$

é p-versal.

Exemplo 5 *Seja* $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k, (0,0) \to \mathbb{R}$, *dado por* $H(t, x) = t^{k+1} + x_k t^k + ... + x_1 t$, *desdobramento de* $g : \mathbb{R}, 0 \to \mathbb{R}$ *dada por* $g(t) = t^{k+1}$. *Mostremos que* H *é um desdobramento p-versal de* g *em* 0.

Seja $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1}, (0,0) \to \mathbb{R}$ *o desdobramento p-versal de* g *dado no Teorema 4, ou seja,* $G(t, x) = t^{k+1} + x_{k-1}t^{k-1} + ... + x_2 t^2 + x_1 t$. *Mostremos que* G *é p-induzido de* H.

Note que $G(t, x_1, ..., x_{k-1}) = H(t, x_1, ..., x_{k-1}, 0)$. *Logo, considerando*

$$\begin{cases} a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1}, (0,0) \to \mathbb{R}, \text{ dada por } a(t, x_1, ..., x_{k-1}) = t \\ b : \mathbb{R}^{k-1}, 0 \to \mathbb{R}^k, 0, \text{ dada por } b(x_1, ..., x_{k-1}) = (x_1, ..., x_{k-1}, 0) \\ c : \mathbb{R}^{k-1}, 0 \to \mathbb{R}, \text{ dada por } c(x_1, ...x_{k-1}) = 0 \end{cases},$$

obtemos

$$G(t,x) = H(a(t,x), b(x)) + c(x),$$

ou seja, G é p-induzido de H.

Como G é desdobramento p-versal de g em 0 e G é p-induzido de H, pela Observação 3(b), concluímos que H é desdobramento p-versal de g em 0.

Note que, seguindo a definição de desdobramento p-versal, é difícil decidir se um dado desdobramento é ou não p-versal. Desse modo, necessitamos de condições (critérios) que nos digam quando um desdobramento é p-versal ou não. A seguir enunciamos um critério bastante útil, que será fundamental para as aplicações que veremos.

Uma função suave $f : \mathbb{R}, t_0 \to \mathbb{R}$ tem *singularidade do tipo A_k em t_0*, para $k \geq 1$, se $f^{(p)}(t_0) = 0$ para $p = 1, 2, ..., k$ e $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$. Por exemplo, a função $f(t) = t^{k+1}$ tem singularidade do tipo A_k em $t_0 = 0$. Veremos neste trabalho que o tipo de singularidade de uma função real é fundamental para o estudo da geometria de certas curvas e superfícies na vizinhança de um ponto regular.

Sejam $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$. O k-jato de g em t_0 é, por definição, o polinômio em t de grau $\leq k$, dado por

$$\begin{aligned} j^k g(t_0) &= \frac{dg}{dt}(t_0)t + \frac{d^2g}{dt^2}(t_0)\frac{t^2}{2!} + \\ &\quad +... + \frac{d^{k-1}g}{dt^{k-1}}(t_0)\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}. \end{aligned}$$

Teorema 6 ([4], p. 140) **(Critério)** Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \to \mathbb{R}$ desdobramento de $f : \mathbb{R}, t_0 \to \mathbb{R}$, onde f tem singularidade do tipo A_k $(k \geq 1)$ em t_0. Suponhamos que

$$j^{k-1}(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0))(t_0) = \alpha_{1i}t + \alpha_{2i}t^2 + ... + \alpha_{(k-1)i}t^{k-1},$$

para $i = 1, ..., r$. Então F é p-versal se, e somente se, a matriz dos coeficientes $(\alpha_{ji})_{(k-1)\times r}$ tem rank $k-1$ (isso requer que $k - 1 \leq r$).

Exemplo 7 *Seja $F(t,x) = t^4 + x_1t^3 + x_2t^2 + x_3t$ desdobramento a 3-parâmetros de $g(t) = t^4$ em $t_0 = 0$. Como g tem singularidade do tipo A_3 em 0,*

$$j^2(\frac{\partial F}{\partial x_1}(t,0))(0) = 0;\ j^2(\frac{\partial F}{\partial x_2}(t,0))(0) = t^2;\ j^2(\frac{\partial F}{\partial x_3}(t,0))(0) = t$$

e $j^2(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t,0))(0) = \alpha_{1i}t + \alpha_{2i}t^2$, $i = 1, 2, 3$, então a matriz (α_{ji}) dada no Teorema 6 é

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

a qual possui rank 2. Segue, portanto, que F é um desdobramento p-versal de f em $t_0 = 0$.

Consideremos agora o desdobramento a 2-parâmetros de g em 0 dado por $F(t,x) = t^4 + x_1x_2t^2 + x_2t$. Como

$$j^2(\frac{\partial F}{\partial x_1}(t,0))(0) = 0;\ j^2(\frac{\partial F}{\partial x_2}(t,0))(0) = t$$

e $j^2(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t,0))(0) = \alpha_{1i}t + \alpha_{2i}t^2$, $i = 1, 2$, então a matriz (α_{ji}) é dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a qual possui rank 1. Portanto, F não é desdobramento p-versal de f em $t_0 = 0$.

Note que, se $r \geq k-1$, então sempre existe uma escolha adequada dos α_{ji} tais que a matriz dada no Teorema 6 tenha rank igual $k-1$, obtendo assim um desdobramento p-versal. Observamos também que se $r < k-1$, então não existe desdobramento p-versal, pois a matriz não terá rank $k-1$. Assim, um desdobramento p-versal com o menor número de parâmetros para $\pm t^{k+1}$ é o dado pelo Teorema 4, o qual chamamos de *desdobramento miniversal*.

1.1 Conjunto singular e conjunto bifurcação

Definição 8 *Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \to \mathbb{R}$ um desdobramento de $f = F_{x_0}$. O **conjunto singular** S_F de F é o conjunto dos pontos (t, x) tais que F_x tem singularidade em t, ou seja,*

$$S_F = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r; \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 0\}.$$

*O **conjunto bifurcação** de F é o conjunto*

$$\mathcal{B}_F = \{x \in \mathbb{R}^r;\ \exists t \in \mathbb{R},\ \text{onde } \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t, x) = 0\},$$

*o t que existe é dito **correspondente** a x.*

Exemplo 9 *Seja $G(t, x_1) = t^3 + x_1 t$ desdobramento miniversal de t^3. Fazendo os cálculos obtemos $S_G = \{(t, -3t^2), t \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{B} = \{0\}$. Ver Figura 2.*

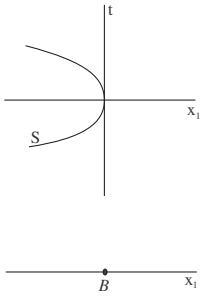

Figura 2: Conjunto singular e bifurcação de $G(t, x_1) = t^3 + x_1 t$.

Exemplo 10 *Seja $F(t, x_1, x_2) = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}x_1 t^2 + x_2 t$ desdobramento de $\frac{1}{4}t^4$. Obtemos $S_F = \{(t, x_1, x_2); t^3 + x_1 t + x_2 = 0\}$ e $\mathcal{B}_F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 4x_1^3 + 27x_2^2 = 0\}$ é uma cúspide. Ver Figura 3.*

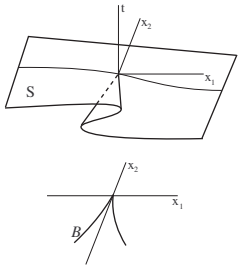

Figura 3: Conjunto singular e bifurcação de $F(t, x_1, x_2) = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}x_1 t^2 + x_2 t$.

Os conjuntos singulares dos desdobramentos dos exemplos acima são variedades suaves. A proposição a seguir diz que, se $(t_0, x_0) \in S_F$ então, numa vizinhança de (t_0, x_0) (supondo $f = F_{x_0}$), isto é sempre válido, supondo o desdobramento ser p-versal. Sua demonstração pode ser feita facilmente a partir das definições.

Proposição 11 ([4], p. 143) *Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \to \mathbb{R}$ um desdobramento p-versal de $f = F_{x_0}$ em t_0. Se $(t_0, x_0) \in S_F$, então existe uma vizinhança U de (t_0, x_0) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ tal que $S_F \cap U$ é uma r-variedade suave.*

Veremos a seguir que o conjunto bifurcação de qualquer desdobramento p-versal a r-parâmetros de uma singularidade A_k é localmente o mesmo, a menos de difeomorfismo, o mesmo valendo para o conjunto singular.

Considere F e f como na proposição acima e G um desdobramento p-versal a r-parâmetros de $g = G_{u_0}$ em t_1. Suponha que f e g têm singularidade A_k, $k \geq 1$, em t_0 e t_1, respectivamente. Então $(t_0, x_0) \in S_F$ e $(t_1, u_1) \in S_G$. Pela proposição anterior, existem vizinhanças U de (t_0, x_0) e V de (t_1, u_1) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ tais que $S_F \cap U$ e $S_G \cap V$ são r-variedades parametrizadas.

Proposição 12 ([4], p. 143 ou [1], p. 123) ***(Unicidade dos conjuntos singular e bifurcação)*** *Com as notações acima, as vizinhanças U e V podem ser escolhidas tais que exista um difeomorfismo $\phi : U \to V$ de forma que $\phi(t, x) = (a(t, x), b(x))$ onde $a(t_0, x_0) = t_1$, $b(x_0) = u_1$ e*

(i) $\phi(S_F \cap U) = S_G \cap V$;

(ii) *b é um difeomorfismo de $\pi(U)$ a $\pi(V)$, onde π é a projeção no espaço dos parâmetros, e $b(\mathcal{B}_F \cap \pi(U)) = \mathcal{B}_G \cap \pi(V)$.*

Como $\mathcal{B}_F$ e $\mathcal{B}_G$ são localmente difeomorfos, para F e G desdobramentos p-versais a r-parâmetros de funções tendo singularidade do tipo A_k, então, para estudarmos propriedades do conjunto bifurcação de um desdobramento p-versal de uma função real com singularidade do tipo A_k, as quais são preservadas por difeomorfismos, basta estudarmos $\mathcal{B}_F$ sendo F desdobramento p-versal de t^{k+1}. É claro que devemos tomar $r \geq k - 1$.

Exemplo 13 ***Desdobramentos p-versais de uma singularidade*** A_2 *($r \geq 1$) Para $r = 1$, como $k = 2$, tomamos $f(t) = t^3$ e $F(t, x) = t^3 + xt$. Os conjuntos singular e bifurcação estão dados no Exemplo 9. Para $r > 1$ basta tomarmos $\overline{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0, 0) \to \mathbb{R}$ dado por $\overline{F}(t, x) = t^3 + x_1 t$, o qual independe dos parâmetros $x_2, ..., x_r$. Então $\mathcal{B}_{\overline{F}} = \mathcal{B}_F \times \mathbb{R}^{r-1} = \{0\} \times \mathbb{R}^{r-1}$. Assim, o conjunto bifurcação de um desdobramento p-versal a r-parâmetros de uma singularidade A_2 é localmente um espaço linear de dimensão $r - 1$ em $\mathbb{R}^r$ e, portanto, é localmente difeomorfo a uma $(r - 1)$-variedade suave em $\mathbb{R}^r$. A Figura 4 mostra a estrutura local dos conjuntos S_F e $\mathcal{B}_F$ de uma singularidade A_2 com $r = 1, 2, 3$ (no caso $r = 3$ o conjunto S_F não é representado na figura por ser um subconjunto de $\mathbb{R}^4$).*

Exemplo 14 ***Desdobramentos p-versais de uma singularidade*** A_3 *($r \geq 2$) Para $r = 2$, como $k = 3$, tomamos $f(t) = t^4$ e F o desdobramento p-versal dado no Exemplo 10. Os conjuntos singular e bifurcação são dados naquele exemplo. Para $r = 3$, de modo análogo ao feito no exemplo anterior, podemos concluir que o conjunto bifurcação é uma superfície chamada cuspidal edge (isto é, difeomorfa ao conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 4x^3 + 27y^2 = 0\}$). A Figura 5 mostra as estruturas locais de S_F e $\mathcal{B}_F$ de uma singularidade A_3 com $r = 2, 3$ (no caso $r = 3$ o conjunto S_F não é representado na figura por ser um subconjunto de $\mathbb{R}^4$).*

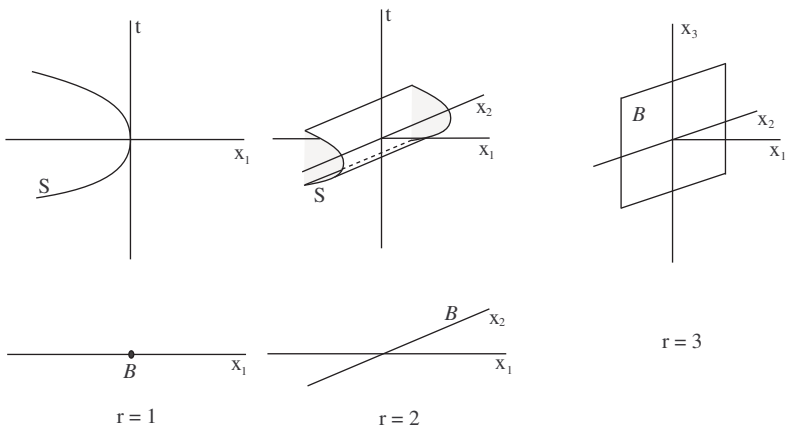

Figura 4: Conjunto singular e bifurcação de uma singularidade A_2.

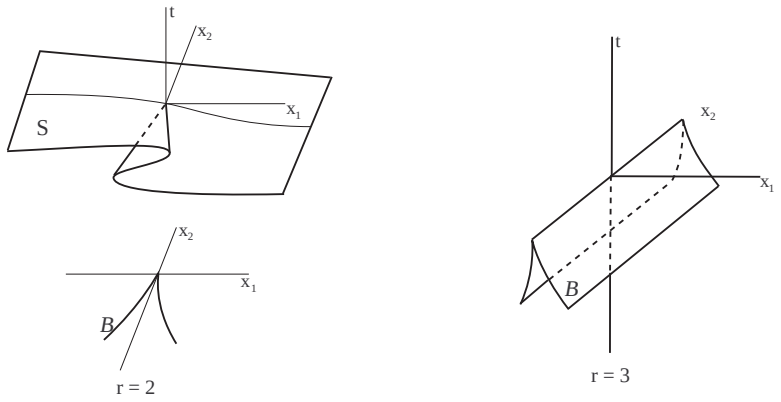

Figura 5: Conjunto singular e birfucação de uma singularidade A_3.

Exemplo 15 ***Desdobramentos p-versais de uma singularidade*** A_4 *($r \geq 3$) Considere $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0,0) \to \mathbb{R}$ o desdobramento p-versal de $f(t) = \frac{1}{5}t^5$ dado por $F(t,x) = \frac{1}{5}t^5 + x_1t + \frac{1}{2}x_2t^2 + \frac{1}{3}x_3t^3$. Então o conjunto bifurcação é $\mathcal{B}_F = \{x \in \mathbb{R}^r; \exists t; t^4 + x_1 + x_2t + x_3t^2 = 4t^3 + x_2 + 2x_3t = 0\}$. Para $r = 3$ esse conjunto é chamado de rabo de andorinha e é dado na Figura 6.*

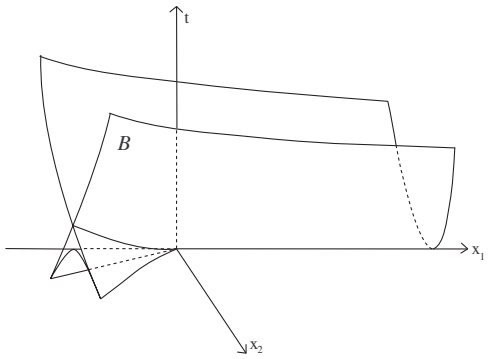

Figura 6: Conjunto bifurcação de uma singularidade A_4 (rabo de andorinha).

2 Desdobramentos versais

Os resultados anteriores são adaptados para o caso versal como segue.

Definição 16 *Seja $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s, (t_0, y_0) \to \mathbb{R}$ um desdobramento a s-parâmetros da função $g = G_{y_0}$. Considere*

$$\begin{cases} a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \to \mathbb{R}, \text{ onde } a(t, x_0) = t \\ b : \mathbb{R}^r, x_0 \to \mathbb{R}^s, y_0, \text{ onde } b(x_0) = y_0 \end{cases},$$

em que a e b são suaves. Então o desdobramento $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \to \mathbb{R}$ de g dado por

$$F(t, x) = G(a(t, x), b(x))$$

*é dito **induzido de** G. Se G é tal que todo desdobramento de g é induzido de G, então G é chamado **desdobramento versal de** g **em** t_0.*

Teorema 17 ([4], p. 149) *Seja $g : \mathbb{R}, 0 \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \pm t^{k+1}$. Então o desdobramento $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k, (0, 0) \to \mathbb{R}$ dado por*

$$G(t, x) = \pm t^{k+1} + x_k t^{k-1} + ... + x_2 t + x_1$$

é um desdobramento versal de g em 0.

Teorema 18 ([4], p. 149) *Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \to \mathbb{R}$ desdobramento de $f : \mathbb{R}, t_0 \to \mathbb{R}$, onde f tem singularidade do tipo A_k ($k \geq 1$) em t_0. Suponhamos que $\frac{\partial F}{\partial x_i}(t_0, x_0) + j^{k-1}(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0))(t_0) = \alpha_{0i} + \alpha_{1i}t + \alpha_{2i}t^2 + ... + \alpha_{(k-1)i}t^{k-1}$, para $i = 1, ..., r$. Então F é versal se, e somente se, a matriz dos coeficientes $(\alpha_{ji})_{(k)\times r}$ tem rank k (isso requer que $k \leq r$).*

Exemplo 19 *Consideremos o desdobramento a 4-parâmetros de $f(t) = t^4$ em $t_0 = 0$ dado por $F(t, x) = t^4 + x_1 t^3 + x_2 t^2 + x_3 t + x_4$. Como f tem singularidade do tipo A_3 em 0,*

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(0,0) + j^2(\frac{\partial F}{\partial x_1}(t,0))(0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(0,0) + j^2(\frac{\partial F}{\partial x_2}(t,0))(0) = t^2;$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_3}(0,0) + j^2(\frac{\partial F}{\partial x_3}(t,0))(0) = t \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial x_4}(0,0) + j^2(\frac{\partial F}{\partial x_4}(t,0))(0) = 1$$

e $\frac{\partial F}{\partial x_i}(0,0) + j^2(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t,0))(0) = \alpha_{0i} + \alpha_{1i}t + \alpha_{2i}t^2$, $i = 1, 2, 3, 4$, então a matriz (α_{ji}) dada no Teorema 18 é

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a qual possui rank 3. Portanto, pelo Teorema 18, concluímos que F é um desdobramento versal de f em $t_0 = 0$.

2.1 Conjunto zero e discriminante

Definição 20 *Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \to \mathbb{R}$ um desdobramento de $f = F_{x_0}$. O **conjunto zero** de F é o conjunto*

$$M_F = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r; F(t, x) = 0\},$$

*e o **conjunto discriminante** de F é o conjunto*

$$\mathcal{D}_F = \{x \in \mathbb{R}^r; \ \exists t \in \mathbb{R}, \text{ onde } F(t, x) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 0\}.$$

Proposição 21 ([4], p. 150) *Seja F um desdobramento versal a r-parâmetros de $f = F_{x_0}$ em t_0. Se $(t_0, x_0) \in M_F$ então existe uma vizinhança U de (t_0, x_0) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ tal que $M_F \cap U$ é uma r-variedade suave.*

Considere F e f como na proposição acima e G um desdobramento versal a r-parâmetros de $g = G_{u_1}$ em t_1, onde f e g tem singularidades A_k em t_0 e t_1, respectivamente. Se $(t_0, x_0) \in M_F$ e $(t_1, u_1) \in M_G$ então, pela proposição anterior existem vizinhanças U de (t_0, x_0) e V de (t_1, u_1) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ tais que $M_F \cap U$ e $M_G \cap V$ são r-variedades suaves.

Proposição 22 ([4], p. 150) ***(Unicidade dos conjuntos zero e discriminante)*** *Com as notações acima, as vizinhanças U e V podem ser escolhidas tais que existe um difeomorfismo $\phi : U \to V$ dado por $\phi(t, x) = (a(t, x), b(x))$, com $a(t_0, x_0) = t_1$, $b(x_0) = u_1$ e*

(i) $\phi(M_F \cap U) = M_G \cap V$;

(ii) *b é um difeomorfismo de $\pi(U)$ a $\pi(V)$, onde π é a projeção no espaço dos parâmetros, e $b(\mathcal{D}_F \cap \pi(U)) = \mathcal{D}_G \cap \pi(V)$.*

Assim, como os conjuntos discriminantes de F e G são localmente difeomorfos, para F e G desdobramentos versais a r-parâmetros de funções tendo singularidade do tipo A_k, então, para estudarmos propriedades do conjunto discriminante de um desdobramento versal de uma função real com singularidade do tipo A_k, as quais são preservadas por difeomorfismos, basta estudarmos $\mathcal{D}_F$, sendo F desdobramento versal de t^{k+1}.

Vejamos alguns exemplos. Note que agora requer-se que $k \leq r$.

Exemplo 23 ***Desdobramentos versais de uma singularidade*** A_1 *($r \geq 1$) Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0, 0) \to \mathbb{R}$ o desdobramento versal de $f(t) = t^2$ dado por $F(t, x) = t^2 + x_1$. Então, os conjuntos discriminante $\mathcal{D}_F$ são os conjuntos bifurcação de uma singularidade A_2. Para $r = 1$ um ponto em $\mathbb{R}$, para $r = 2$ uma reta em $\mathbb{R}^2$, para $r = 3$ um plano em $\mathbb{R}^3$ (ver Figura 4).*

Exemplo 24 ***Desdobramentos versais de uma singularidade*** A_2 *($r \geq 2$) Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0, 0) \to \mathbb{R}$ o desdobramento versal de $f(t) = t^3$ dado por $F(t, x) = t^3 + x_1 + x_2 t$. Então, os conjuntos discriminante $\mathcal{D}_F$ são os conjuntos bifurcação de uma singularidade A_3. Para $r = 2$, uma cúspide em $\mathbb{R}^2$, para $r = 3$, uma cuspidal edge em $\mathbb{R}^3$ (ver Figura 5).*

Exemplo 25 ***Desdobramentos versais de uma singularidade*** A_3 *($r \geq 3$) Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0, 0) \to \mathbb{R}$ o desdobramento versal de $f(t) = t^4$ dado por $F(t, x) = t^4 + x_1 + x_2 t + x_3 t^2$. Então, os conjuntos discriminante $\mathcal{D}_F$ são os conjuntos bifurcação de uma singularidade A_4. Para $r = 3$ é a superfície rabo de andorinha em $\mathbb{R}^3$ (ver Figura 6).*

3 Aplicações

Veremos nesta seção aplicações da teoria de desdobramentos no estudo da estrutura local de alguns subconjuntos do espaço Euclidiano. Para tanto, encontramos um desdobramento p-versal apropriado (resp., versal) cujo conjunto bifurcação (resp., discriminante) é o conjunto que queremos estudar. Dessa forma, encontrando a dimensão do espaço de parâmetros e as condições para a função desdobrada ter singularidade do tipo A_k, obtemos que o conjunto em questão é localmente difeomorfo

a um daqueles apresentados nos Exemplos 13, 14 e 15 (respectivamente, Exemplos 23, 24 e 25).

Denotamos o vetor tangente unitário em t de uma curva regular por $T(t)$, o vetor normal por $N(t)$ e por κ sua função curvatura.

3.1 Evoluta de uma curva plana

Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular com curvatura κ não nula. Um ponto x de $\mathbb{R}^2$ é dito *centro de curvatura* de γ em t se

$$x = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} N(t).$$

O lugar geométrico dos centros de curvatura de γ é conhecido como *evoluta* de γ. Para propriedades de evolutas ver, por exemplo, [4, 6]. Dado $t_0 \in I$ temos:

(i) $\gamma(t_0)$ é dito *vértice ordinário* se, e somente se, $\kappa(t_0) \neq 0,\ \kappa'(t_0) = 0$ e $\kappa''(t_0) \neq 0$;

(ii) $\gamma(t_0)$ é dito *vértice maior* se, e somente se, $\kappa(t_0) \neq 0,\ \kappa'(t_0) = 0$ e $\kappa''(t_0) = 0$;

(iii) $\gamma(t_0)$ é dito *inflexão ordinária* se, e somente se, $\kappa(t_0) = 0$ e $\kappa'(t_0) \neq 0$;

(iv) $\gamma(t_0)$ é dito *inflexão maior* se, e somente se, $\kappa(t_0) = 0$ e $\kappa'(t_0) = 0$.

Podemos mostrar facilmente que a evoluta de γ é uma curva regular em t_0 se, e somente, $\kappa'(t_0) \neq 0$, ou seja, fora de vértices e de inflexões maiores. Assim, fora desses pontos, a evoluta é localmente difeomorfa a um segmento de reta. Portanto, resta estudar a geometria local da evoluta nos pontos onde ela deixa de ser uma curva regular.

Na Figura 7 apresentamos uma elipse, a qual possui quatro vértices ordinários, sua evoluta, possuindo quatro cúspides ordinárias, uma parábola, com um vértice ordinário, e sua evoluta, com uma cúspide ordinária. As cúspides são pontos correspondentes aos vértices da curva. Será que isso sempre ocorre? A resposta para essa questão é dada na Proposição 26.

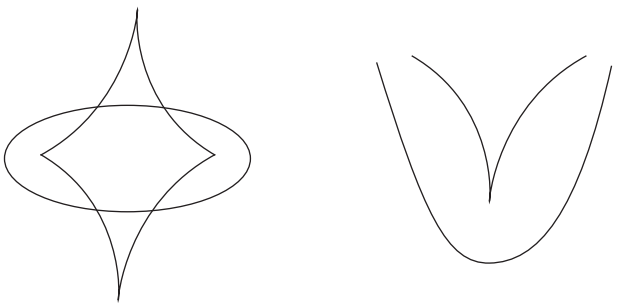

Figura 7: Elipse, parábola e suas evolutas.

Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizada por comprimento de arco e consideremos a seguinte aplicação:

$$F : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$F(t, x) = (\gamma(t) - x)(\gamma(t) - x), \tag{3.1.1}$$

conhecida como *família de funções distância ao quadrado* de γ. Para cada $x_0 \in \mathbb{R}^2$, F é um desdobramento a 2-parâmetros de $f = F_{x_0}$. Encontremos condições para f ter singularidade A_2 e A_3 em t_0. Em (t, x), temos:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \gamma(t) + \lambda N(t), \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R};$$
$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \kappa(t) \neq 0 \text{ e } x = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} N(t);$$
$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 F}{\partial t^3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \kappa(t) \neq 0\,,\ x = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} N(t) \text{ e } \kappa'(t) = 0.$$

Portanto, f tem singularidade A_2 em t_0 se, e somente se, x_0 é centro de curvatura em t_0 e $\kappa'(t_0) \neq 0$, isto é, $\gamma(t_0)$ não é um vértice. Ainda mais, podemos verificar que f tem singularidade A_3 em t_0 se, e somente se, x_0 é centro de curvatura em t_0, $\kappa'(t_0) = 0$ e $\kappa''(t_0) \neq 0$, o que implica que $\gamma(t_0)$ é um vértice ordinário.

Verifiquemos se F é desdobramento p-versal quando f tem singularidades A_2 ou A_3 em t_0. Para existir um desdobramento p-versal temos que ter $r \geq k-1$. Como $r = 2$, devemos ter, portanto, $k \leq 3$. Logo não precisamos nos preocupar com $k \geq 4$, pois em tal situação a função nunca será desdobrada p-versalmente a 2-parâmetros.

Suponhamos $\gamma(t) = (X(t), Y(t))$. Assim, $F(t,x) = (X(t) - x_1)^2 + (Y(t) - x_2)^2$ e, além disso,

$$j^2(\frac{\partial F}{\partial x_1}(t, x_0))(t_0) = -2(tX'(t_0) + \frac{1}{2}t^2 X''(t_0))$$

e

$$j^2(\frac{\partial F}{\partial x_2}(t, x_0))(t_0) = -2(tY'(t_0) + \frac{1}{2}t^2 Y''(t_0)).$$

Portanto, se f tem singularidade A_2 em t_0, a matriz dada no Teorema 6 é

$$\begin{pmatrix} -2X'(t_0) & -2Y'(t_0) \end{pmatrix}$$

que tem rank 1, já que γ é regular. Portanto, F é p-versal.

Se f tem singularidade A_3 em t_0, a matriz dada no Teorema 6 é

$$\begin{pmatrix} -2X'(t_0) & -2Y'(t_0) \\ -X''(t_0) & -Y''(t_0) \end{pmatrix}$$

que é invertível, já que o determinante é $\kappa(t_0)$, que é não nulo, concluindo assim que F é um desdobramento p-versal de $f = F_{x_0}$.

Encontremos o conjunto singular e bifurcação de F. Dos cálculos das derivadas de F com relação a t feitos acima, concluímos que conjunto singular é

$$S_F = \{(t, \gamma(t) + \lambda N(t)), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

e o conjunto bifurcação é

$$\mathcal{B}_F = \{x \in \mathbb{R}^2;\ \exists t \in I;\ x = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} N(t)\}$$

o qual é a evoluta de γ.

Como aplicação do estudo que fizemos, temos o seguinte resultado. Recordamos que uma cúspide ordinária em $\mathbb{R}^2$ é uma curva difeomorfa a (t^2, t^3).

Proposição 26 ([4], p. 161) *Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada regular com curvatura não nula e x um ponto da evoluta de γ correspondente ao valor de parâmetro t. Então, localmente em x, a evoluta é*

(i) difeomorfa a uma reta em $\mathbb{R}^2$, se a curva não possui um vértice em t;

(ii) difeomorfa a uma cúspide ordinária em $\mathbb{R}^2$, se a curva tem um vértice ordinário em t.

Demonstração: Podemos supor γ parametrizada por comprimento de arco. Seja F a família de funções distância ao quadrado dada na equação (3.1.1) e $x \in \mathbb{R}^2$ ponto da evoluta de γ em t.

Suponhamos que $\gamma(t)$ não é um vértice. Então $f = F_x$ tem singularidade A_2 em t. Como F é desdobramento p-versal de f, segue da Proposição 12 que o conjunto bifurcação de F (e, portanto, a evoluta de γ) é localmente difeomorfo ao conjunto bifurcação de um desdobramento p-versal de $g(t) = t^3$, a qual é uma reta em $\mathbb{R}^2$ (conforme Exemplo 13).

Se $\gamma(t)$ é um vértice ordinário, então $f = F_x$ tem singularidade A_3 em t e, com os mesmos argumentos anteriores, tomando $g(t) = t^4$ e o Exemplo 14, concluímos que a evoluta de γ é localmente difeomorfa a uma cúspide ordinária em $\mathbb{R}^2$. □

Observamos que em um vértice de ordem maior não podemos deduzir nada com o método acima. No entanto, genericamente, todo vértice é ordinário (ver [4], pag. 235, ou [2, 3] para propriedades genéricas de curvas planas e espaciais).

3.2 Paralelas de uma curva plana

Sejam $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada regular e d um número real fixado. A curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = \gamma(t) + dN(t)$ é chamada *paralela* a γ à uma distância d.

Podemos mostrar facilmente que α é regular em t se, e somente se, $\alpha(t)$ não é centro de curvatura de γ em t, ou seja, não pertence à evoluta de γ em t (ver Figura 8). Portanto, para concluirmos sobre a geometria local de α basta estudarmos na vizinhança de centros de curvatura de γ. Para propriedades de paralelas, ver [4, 6].

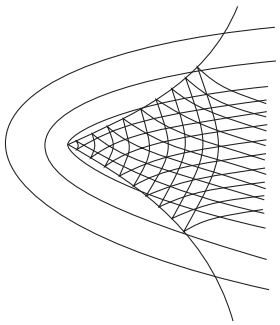

Figura 8: Paralelas e evoluta da parábola

Para provarmos a proposição que enunciaremos usamos o Teorema de Sard, o qual recordamos seu enunciado abaixo. Para sua demonstração recomendamos [7] ou [8].

Teorema 27 (**Sard**) *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ uma aplicação suave, sendo U um aberto de $\mathbb{R}^n$. Então o conjunto dos valores críticos de f tem medida nula.*

Proposição 28 ([4], p. 168) *Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada regular.*

(i) Se γ não tem um vértice em t, então a paralela a γ pelo centro de curvatura em t tem uma cúspide ordinária nesse ponto.

(ii) A paralela a γ a uma distância d, para quase todo d, tem somente singularidades cúspides ordinárias.

Demonstração: (i) Podemos supor γ parametrizada por comprimento de arco. Seja $F : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por

$$F(t, x) = (x - \gamma(t))(x - \gamma(t)) - r^2,$$

onde $r > 0$.

Calculando a derivada de F em relação a t, concluímos que o conjunto discriminante de F é

$$\mathcal{D}_F = \{x \in \mathbb{R}^2; x = \gamma(t) \pm rN(t)\},$$

sendo, portanto, a união das paralelas a γ a uma distância r e $-r$.

Encontremos condições para a função desdobrada $f = F_x$ ter singularidade A_2 em t, sendo este valor de parâmetro correspondente a $x \in \mathcal{D}_F$. Sejam $x_0 \in \mathcal{D}_F$ e t_0 correspondente a x_0. Temos:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t_0, x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \gamma(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}N(t_0) \text{ e } r = \frac{1}{|\kappa(t_0)|},$$

sendo, portanto, essas as condições para F_{x_0} ter singularidade $A_{\geq 2}$ em t_0.

Calculando a terceira derivada de F em relação a t e supondo que F_{x_0} tem singularidade $A_{\geq 2}$ em t_0, temos

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t_0, x_0) = -2\frac{\kappa'(t_0)}{\kappa(t_0)} \neq 0 \Leftrightarrow \kappa'(t_0) \neq 0.$$

Concluímos assim que F_{x_0} tem singularidade A_2 em t_0 se, e somente se, $x_0 = \gamma(t_0) \pm \frac{1}{\kappa(t_0)}N(t_0)$, $r = \frac{1}{|\kappa(t_0)|}$ e $\kappa'(t_0) \neq 0$.

Supondo que F_{x_0} tem singularidade A_2 em t_0, mostremos agora que F é desdobramento versal de F_{x_0}. Considere $\gamma(t) = (X(t), Y(t))$ e $x = (x_1, x_2)$. Desse modo, podemos escrever F da seguinte forma: $F(t, x_1, x_2) = (x_1 - X(t))^2 + (x_2 - Y(t))^2 - r^2$. Calculando as derivadas de F em relação a x_1 e x_2, obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(t, x) = 2(x_1 - X(t)); \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(t, x) = 2(x_2 - Y(t)).$$

Assim, supondo $x_0 = (a, b)$, a matriz dada no Teorema 18 é

$$\begin{pmatrix} 2(a - X(t_0)) & 2(b - Y(t_0)) \\ -2X'(t_0) & -2Y'(t_0) \end{pmatrix},$$

cujo determinante é igual a $4(x_0 - \gamma(t_0))N(t_0) = \pm\frac{4}{\kappa(t_0)} \neq 0$ uma vez que $f = F_{x_0}$ tem singularidade A_2 em t_0. Portanto, F é desdobramento versal de $f = F_{x_0}$ em t_0.

Consequentemente, usando a Proposição 22 e o Exemplo 24, concluímos que em tais condições (x_0 é centro de curvatura e $\kappa'(t_0) \neq 0$) o conjunto discriminante de F tem uma cúspide ordinária em x_0, ou seja, a paralela de γ ($\mathcal{D}_F$), que passa pelo centro de curvatura em t_0 (x_0), tem uma cúspide ordinária em tal ponto, desde que γ não possua um vértice em t_0.

(ii) Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ a paralela de γ a uma distância d e seja A o conjunto de todos $d \in \mathbb{R}$, tais que $d \neq 0$ e $\frac{1}{d}$ não é valor crítico da função curvatura de γ. Pelo Teorema de Sard, $\mathbb{R} - A$ tem medida nula.

Seja $d \in A$. Para concluir a proposição basta mostrarmos que a paralela a γ que dista d, tem somente cúspides ordinárias.

Se $1/d$ pertence a imagem de κ, ou seja, se existe $t_0 \in I$ tal que $\kappa(t_0) = \frac{1}{d}$ então $\kappa'(t_0) \neq 0$, ou seja, γ não tem um vértice em t_0. Logo, pelo item (i), a paralela a γ que dista $d = \frac{1}{\kappa(t_0)}$ tem uma cúspide ordinária em $x = \gamma(t) + dN(t)$.

Se $1/d$ não pertence a imagem de κ, ou seja, se $d \neq \frac{1}{\kappa(t)}$ para todo $t \in I$, então $\alpha'(t) = T(t) + dN'(t) = (1 - d\kappa(t))T(t) \neq 0$, ou seja, a paralela a γ que dista d não tem nenhuma singularidade. □

3.3 Superfície paralela de uma curva plana

Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada regular com curvatura não nula. Chamamos de *superfície paralela* de γ ao subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$S = \{(x, r) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*_+;\ \exists t \in I \text{ tal que } x = \gamma(t) \pm rN(t)\}.$$

Logo, S consiste de todas as curvas paralelas a γ empilhadas na forma de uma ou duas superfícies em $\mathbb{R}^3$. Se $(x, r) \in S$ e t é tal que $x = \gamma(t) \pm rN(t)$, dizemos que t é *correspondente* a (x, r). A Figura 9 mostra o círculo unitário e algumas paralelas (à esquerda), e sua superfície paralela S (à direita).

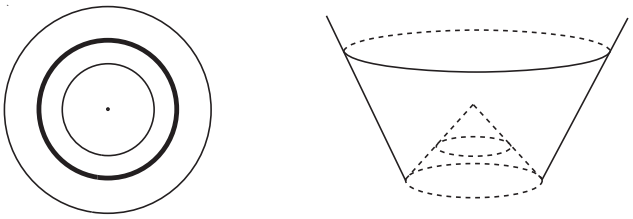

Figura 9: O círculo unitário e a sua superfície paralela S

Com as notações acima, temos:

Proposição 29 ([4], p. 169) *Sejam $(x, r) \in S$ e t correspondente a (x, r). Então S é, numa vizinhança de (x, r), difeomorfo a:*

(i) um plano, se x não é centro de curvatura de γ em t;

(ii) uma cuspidal edge, se x é centro de curvatura em t, $r = \frac{1}{|\kappa(t)|}$ e γ não tem vértice em t;

(iii) um rabo de andorinha, se x é centro de curvatura em t, $r = \frac{1}{|\kappa(t)|}$ e γ tem um vértice ordinário em t.

Demonstração: Consideremos a aplicação $G : I \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ dado por

$$G(t, x, r) = (x - \gamma(t))(x - \gamma(t)) - r^2.$$

Podemos mostrar facilmente que o conjunto discriminante de G é a superfície paralela S de γ. Procuramos por condições para que a função desdobrada $g = G_{(x,r)}$ tenha singularidade A_1, A_2 ou A_3 em t.

Sejam $(x_0, r_0) \in \mathcal{D}_G$ e t_0 correspondente a (x_0, r_0). Então, para $g = G_{(x_0,r_0)}$, podemos mostrar que:

- g tem singularidade A_1 em t_0 se, e somente se, $x_0 = \gamma(t_0) + \lambda N(t_0)$ e $\lambda \neq \frac{1}{\kappa(t_0)}$;

- g tem singularidade A_2 em t_0 se, e somente se, $x_0 = \gamma(t_0) - \frac{1}{\kappa(t_0)}N(t_0)$, $\kappa'(t_0) \neq 0$ e $r_0 = \frac{1}{|\kappa(t_0)|}$;
- g tem singularidade $A_{\geq 3}$ em t_0 se, e somente se, $x_0 = \gamma(t_0) - \frac{1}{\kappa(t_0)}N(t_0)$, $\kappa'(t_0) = 0$, $\kappa''(t_0) \neq 0$ e $r_0 = \frac{1}{|\kappa(t_0)|}$.

Encontremos condições para G ser desdobramento versal de g em cada um dos casos de singularidade de g em t_0. Para isso, considere $\gamma(t) = (X(t), Y(t))$, $x = (x_1, x_2)$ e $x_0 = (a, b)$. Logo, $G(t, x_1, x_2, r) = (x_1 - X(t))^2 + (x_2 - Y(t))^2 - r^2$.

Em (t, x_1, x_2, r), temos:

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = 2(x_1 - X(t)); \ \frac{\partial G}{\partial x_2} = 2(x_2 - Y(t)); \ \frac{\partial G}{\partial r} = -2r.$$

Se g tem singularidade A_1 em t_0, então a matriz dada no Teorema 18 é

$$\begin{pmatrix} 2(a - X(t_0)) & 2(b - Y(t_0)) & -2r_0 \end{pmatrix},$$

a qual tem o menor $-2r_0$ não nulo, já que $r_0 \neq 0$. Portanto, G é desdobramento versal de g em t_0.

Se g tem singularidade A_2 em t_0, então a matriz dada no Teorema 18 é

$$\begin{pmatrix} 2(a - X(t_0)) & 2(b - Y(t_0)) & -2r_0 \\ 2X'(t_0) & 2Y'(t_0) & 0 \end{pmatrix},$$

a qual tem a submatriz de ordem 2

$$\begin{pmatrix} 2(a - X(t_0)) & 2(b - Y(t_0)) \\ 2X'(t_0) & 2Y'(t_0) \end{pmatrix}$$

com determinante não nulo, como feito na demonstração da Proposição 28. Portanto, G é desdobramento versal de g em t_0.

Se g tem singularidade A_3 em t_0, então a matriz dada no Teorema 18 é

$$\begin{pmatrix} 2(a - X(t_0)) & 2(b - Y(t_0)) & -2r_0 \\ 2X'(t_0) & 2Y'(t_0) & 0 \\ X''(t_0) & Y''(t_0) & 0 \end{pmatrix},$$

cujo determinante é

$$4r_0(-X'(t_0)Y''(t_0) + Y'(t_0)X''(t_0)) = 4r_0T(t_0)N'(t_0) = -4r_0\kappa(t_0) \neq 0.$$

Portanto, G é desdobramento versal de g em t_0.

Consequentemente, o resultado segue da Proposição 22 e dos Exemplos 23, 24 e 25. □

Observamos que podemos definir a superfície paralela de uma superfície regular de maneira similar à definição para curvas e estudar sua estrutura local usando o mesmo raciocínio que feito acima. Ver [5].

Referências

[1] BROCKER, Th. e LANDER, L., *Differentiable Germs and Catastrophes*, London Math. Soc. Lecture Note Series, 17, cambridge University Press, 1975.

[2] BRUCE, J. W., Isotopies of generic plane curves, *Glasgow Math. J.*, 24 (1983) 195-206.

[3] BRUCE, J. W. e GIBLIN, P. J., Generic isotopies of space curves, *Glasgow Math. J.*, 29 (1987) 41-63.

[4] BRUCE, J. W. e GIBLIN, P. J., *Curves and Singularities: a geometrical introduction to singularity theory*. 2^{nd}. ed. Cambridge University Press, 1992.

[5] FUKUI, T. e HASEGAWA, M., Singularities of parallel surfaces. Preprint 2012.

[6] GIBSON, C. G., *Elementary Geometry of Differentiable Curves: an Undergraduate Introduction*, Cambridge University Press, 2001.

[7] HIRSCH, M. W., *Differential Topology*, Graduate Texts in Math. 33, Springer-Verlag, New York, 1976.

[8] MILNOR, J. W., *Topology from the Differentiable Viewpoint*, The University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.