



# Máximos e mínimos na geometria euclidiana: uma abordagem histórica

Hermes Antônio Pedroso      Juliana C. Precioso Pereira

Depto de Matemática, IBILCE, UNESP,

15054-000, São José do Rio Preto, SP

E-mail: hermes@ibilce.unesp.br,    precioso@ibilce.unesp.br

## Resumo

O objetivo deste trabalho é realizar uma abordagem histórica de resultados importantes sobre máximos e mínimos, na geometria euclidiana, envolvendo perímetros, áreas e volumes. Como destaque, pode-se citar os problemas isoperimétricos de Dido e o de Pappus sobre a sagacidade das abelhas. Nesse contexto, com uma preocupação didática, procurou-se usar, sempre que possível, fórmulas clássicas da geometria para o cálculo de áreas. Por outro lado, no caso da desigualdade isoperimétrica, as técnicas do cálculo diferencial e integral se tornaram mais adequadas para os nossos propósitos.

**Palavras chave:** problema isoperimétrico, máximos e mínimos, áreas e volumes.

## Abstract

The goal of this work is to perform a historical approach of important results about maxima and minima, on Euclidean geometry, involving perimeters, areas and volumes. As a highlight, we can mention the Dido's isoperimetric problem and the Pappus's problem about the wit of the bees. In this context, with a concern didactic, we tried to use, whenever possible, the geometry classical formulas to the calculus of areas. On the other hand, in the case of isoperimetric inequality the techniques of differential and integral calculus became more suitable for our purposes.

**Key words:** isoperimetric problem, maxima and minima, areas and volumes.

## 1 Introdução

Os primeiros problemas envolvendo máximos e mínimos são encontrados na geometria euclidiana e envolvem perímetros, áreas e volumes. Segundo o historiador Dirk Jan Struik (1894-2000), o primeiro problema de máximo que chegou até nós encontra-se no Livro VI de Os Elementos de Euclides (330-275 a.C.), proposição 27, e consiste na prova que de todos os retângulos de um dado perímetro, o quadrado é o que tem a área máxima.

Problemas isoperimétricos, como o referido acima, foram muito importantes no desenvolvimento da matemática, tendo inclusive uma referência na literatura romana. É conhecida como Lenda de Dido, e faz parte do Cântico I da "Eneida", obra em que de Virgílio (70-19 a.C.) narra a epopéia de Enéas de Tróia.

Um dos primeiros trabalhos a abordar o assunto, com mais profundidade, foi realizado por Pappus de Alexandria (século IV d.C.) em sua Coleção Matemática, composta por oito livros (ou volumes). No livro V ele discorreu sobre isoperimetria no plano e no espaço e fez uma curiosa observação a respeito da sagacidade das abelhas.

Após ter provado que de dois polígonos regulares de mesmo perímetro, o que tem maior número de lados tem maior área, Pappus concluiu que as abelhas provavam algum entendimento matemático, ao construírem suas células como prismas com secções hexagonais, em vez de quadradas ou triangulares. Desse modo a opção teria sido para maximizar o volume do mel armazenado para uma mesma quantidade de cera utilizada.

O livro examinou, ainda, outros problemas de isoperimetria, inclusive apresentando uma prova de que, para um perímetro dado, o círculo tem maior área que qualquer polígono regular.

Para se resolver problemas que envolvem triângulos e quadriláteros usaremos as fórmulas para o cálculo de áreas de Heron de Alexandria (75-150 d.C.), de Brahmagupta (século VII d.C.) e de Bretschneider (1808-1878). Será apresentada ainda, a dedução da fórmula de Heron, uma vez que ela foi fonte de inspiração para as outras e devido a importância dessas fórmulas nesse estudo. Deve-se observar que esta dedução está mais próxima da original, ao contrário das que são apresentadas nos livros didáticos atuais cujo enfoque é trigonométrico.

## 2 A Lenda de Dido

Dido (ou Elisa) era uma princesa fenícia do século IX a.C. da cidade de Tiro, às margens do Mediterrâneo, localizada onde hoje é o Líbano. Seu irmão, o rei Pigmalião, assassinou seu marido, o grande sacerdote Arquebas, para subtrair-lhe seus tesouros. Temendo sua própria morte, Dido então fugiu em um navio com um grande número de seguidores dispostos a fundar uma nova cidade, “Qart Hadash” (Cartago).

No lugar escolhido para ser Cartago (norte da África, também às margens do Mediterrâneo, onde hoje é a Tunísia) tentou comprar terras do rei local, para que pudessem se estabelecer.

O acordo feito com o rei foi que só teria em terras o que pudesse abranger com a pele de um boi, ver Figura 1. Dido e seu grupo decidiram então cortar a pele em tiras tão finas quanto possível, emendar todas e englobar num semicírculo um terreno beirando o mar.



Figura 1: Ilustração do corte do couro em tiras

As referências históricas para essa solução correta do problema não se restringem apenas à literatura. Durante a Idade Média era comum a construção de muros de proteção para as cidades. Ao consultar alguns mapas disponíveis na época, não por acaso, encontramos muros no formato circular, ou semicircular. Como os muros eram feitos de pedras, sua construção era cara e trabalhosa. Utilizar o resultado do problema isoperimétrico, já conhecido na época, otimizava a área cercada, para uma quantidade fixa de material.

A seguir, apresentamos os mapas das cidades de Paris - França, Colônia - Alemanha e Braga - Portugal, que tinham formatos circulares (Braga) ou semicirculares (Paris e Colônia), quando as cidades eram banhadas por rios, ver Figuras 2 e 3.



Figura 2: A esquerda o mapa de Paris e a direita o mapa de Colônia

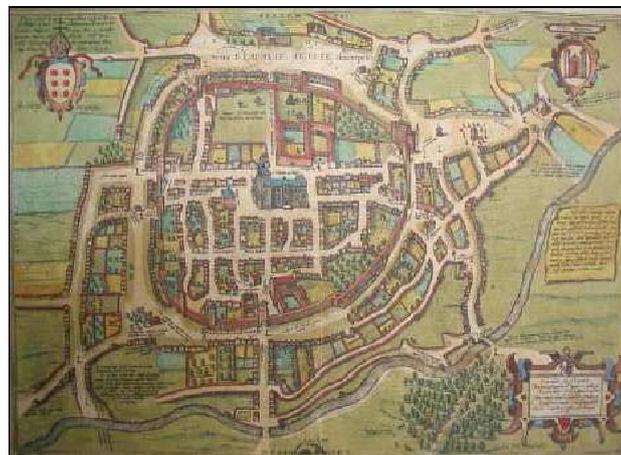


Figura 3: Mapa da cidade de Braga

### 3 Máximos e mínimos envolvendo triângulos e quadriláteros

#### 3.1 Heron

Heron de Alexandria, um dos grandes matemáticos do chamado período greco-romano é conhecido, sobretudo, pela fórmula

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

que tem o seu nome e é usada para encontrar a área de triângulos de lados  $a, b, c$  e perímetro  $2p = a + b + c$ .

A dedução dessa fórmula encontra-se em *A métrica*, uma de suas obras mais importantes que ficou perdida durante muito tempo até ser redescoberta em 1896 num manuscrito de 1100. Outra obra de Heron que merece destaque é a *Catóptrica*, (ou *reflexão*), na qual provou, de forma geométrica, que o caminho mínimo percorrido pela luz de uma fonte a um observador, após refletir em um espelho, ocorre quando o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

**Dedução da Fórmula de Heron:** Seja, conforme a Figura 3.1, o triângulo  $ABC$ , de lados  $a, b$  e  $c$ .

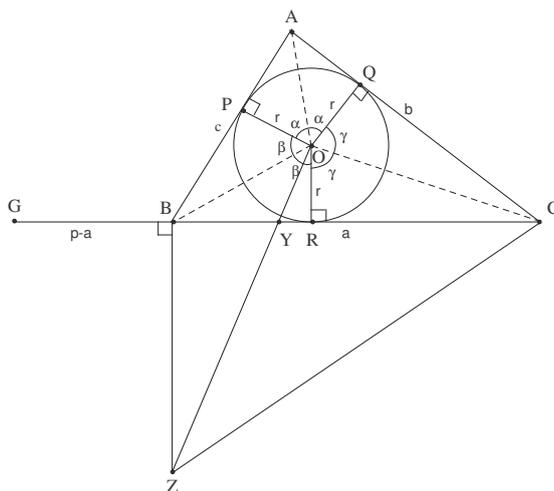


Figura 4: Dedução da fórmula de Heron

Heron construiu inicialmente a circunferência nele inscrita cujo centro  $O$  é o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos  $A, B$  e  $C$ . Se  $P, Q$  e  $R$  são os pontos de tangência da circunferência com os lados  $AB, AC$  e  $BC$ , respectivamente, então  $OP = OR = OQ = r$ .

A área  $S$  do triângulo  $ABC$  é a soma das áreas dos triângulos  $AOB, BOC$  e  $AOC$ , ou seja,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}rAB + \frac{1}{2}rBC + \frac{1}{2}rAC \\ &= \frac{1}{2}r(AB + BC + AC) \\ &= rp, \end{aligned} \quad (3.1)$$

em que  $p = \frac{a + b + c}{2}$  é o semiperímetro do triângulo.

Uma vez que  $AP = AQ, BP = BR, CQ = CR$ , e  $AP + BP = AB, AQ + CQ = AC, BR + CR = BC$  tem-se

$$\begin{aligned} (AP + AQ) + (BP + BR) + (CQ + CR) &= 2p \\ (AP + AP) + (BP + BP) + (CQ + CQ) &= 2p \\ AP + BP + CQ &= p \end{aligned}$$

e como

$$AP + BP = AB = c$$

tem-se que

$$CQ = p - (AP + BP) = p - c.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} BP &= p - (AP + CQ) = p - (AQ + CQ) = p - AC = p - b, \\ AP &= p - (BP + CQ) = p - (BR + CR) = p - BC = p - a, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} AP &= AQ = p - a \\ BP &= BR = p - b \\ CQ &= CR = p - c. \end{aligned}$$

Em seguida, Heron construiu sobre o prolongamento do lado  $BC$  o segmento  $BG = AP = p - a$ . Logo,

$$\begin{aligned}CG &= BG + BR + CR \\ &= (p - a) + (p - b) + (p - c) \\ &= 3p - (a + b + c) \\ &= 3p - 2p = p.\end{aligned}$$

A seguir, construiu-se duas perpendiculares, uma pelo ponto  $O$  à reta  $OC$  e outra pelo ponto  $B$  à reta  $BC$ , cuja interseção é  $Z$ . Seja  $Y$  a interseção de  $BC$  com  $OZ$ .

Pela construção realizada inicialmente,  $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^\circ$ , ou seja,  $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$ .

Analisemos, agora, o quadrilátero  $BOCZ$ . Como os ângulos  $Z\widehat{B}C$  e  $Z\widehat{O}C$  são retos, os pontos  $B$  e  $O$ , segundo o resultado atribuído a Tales, estão na semicircunferência de diâmetro  $ZC$ , ou seja, o quadrilátero  $BOCZ$  é inscritível e seus ângulos opostos somam  $180^\circ$ .

Logo,  $\beta + \gamma + B\widehat{Z}C = 180^\circ$ , ou seja,  $B\widehat{Z}C = 180^\circ - (\beta + \gamma) = \alpha$ .

Heron, agora, tirou conclusões baseadas em semelhanças de triângulos. Em primeiro lugar,  $APO$  e  $CBZ$  são semelhantes (ambos são retângulos e tem um dos ângulos igual a  $\alpha$ ) e assim,

$$\frac{BC}{BZ} = \frac{AP}{OP} = \frac{BG}{r}, \quad (\text{pois } AP = AQ = BG = (p - a) \text{ e } OP = r),$$

ou seja,

$$\frac{BC}{BG} = \frac{BZ}{r}. \quad (3.2)$$

Em segundo lugar, os triângulos  $BYZ$  e  $YOR$  são semelhantes. Logo,

$$\frac{BZ}{BY} = \frac{OR}{YR} = \frac{r}{YR} \quad \text{ou} \quad \frac{BZ}{r} = \frac{BY}{YR}. \quad (3.3)$$

De (3.2) e (3.3), conclui-se que

$$\frac{BC}{BG} = \frac{BY}{YR}. \quad (3.4)$$

Por construção, o triângulo  $OYC$  é retângulo. Então, o quadrado da altura em relação à hipotenusa é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa, ou seja,

$$OR^2 = r^2 = YR CR. \quad (3.5)$$

Agora, Heron tomou a igualdade (3.4) e somou 1 a ambos os termos, obtendo

$$\frac{BC}{BG} + 1 = \frac{BY}{YR} + 1 \quad \text{ou} \quad \frac{(BC + BG)}{BG} = \frac{(BY + YR)}{YR}.$$

Como  $BC + BG = CG$  e  $BY + YR = BR$ , tem-se

$$\frac{CG}{BG} = \frac{BR}{YR}.$$

Multiplicando-se o lado esquerdo dessa igualdade por  $\frac{CG}{CG}$  e o lado direito por  $\frac{CR}{CR}$ , tem-se

$$\frac{CG CG}{BG CG} = \frac{BR CR}{YR CR}.$$

Mas por (3.5),  $YR CR = r^2$ , logo  $\frac{CG CG}{BG CG} = \frac{BR CR}{r^2}$ , ou seja,

$$r^2 CG^2 = CG CR BR BG.$$

Como  $CG = p$ ,  $CR = (p - c)$ ,  $BR = (p - b)$  e  $BG = (p - a)$ , tem-se

$$r^2 p^2 = p(p - a)(p - b)(p - c), \text{ isto é, } rp = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Portanto, por (3.1),

$$S = rp = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

■

**Proposição 3.1** *Dentre todos os triângulos  $ABC$  de base  $AB$  com medida fixa e perímetro dado, o de maior área é o isósceles.*

**Demonstração:** Considere o triângulo  $ABC$  como na Figura 5.

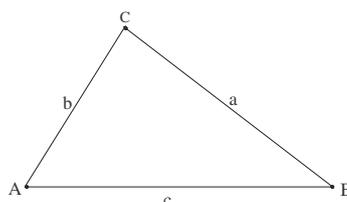


Figura 5:

Pela fórmula de Heron, a área  $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$ , sendo  $p = \frac{a + b + c}{2}$ .

Como por hipótese  $c$  e  $p$  são fixos, tem-se que  $p - c = k$ , ( $k$  constante) e maximizar  $S$  equivale a maximizar  $S^2 = p(p - a)(p - b)k$ . Como  $a + b = 2p - c$ , isto é  $b = 2p - a - c$  tem-se que  $S^2$  é um trinômio do segundo grau em  $a$ , ou seja,  $S^2 = p(p - a)(p - b)k = pk[-a^2 + (p + k)a - pk]$ , e como se sabe atingirá o seu máximo em  $a = \frac{p + k}{2} = \frac{2p - c}{2}$ , ou seja,  $a = b$ , donde conclui-se que o triângulo  $ABC$  é isósceles. ■

**Proposição 3.2** *Sejam  $ABC$  e  $ABC'$  dois triângulos com mesmo perímetro, como na Figura 6. Se  $|b - a| < |b' - a'|$ , então a área de  $ABC$  é maior do que a área de  $ABC'$ .*

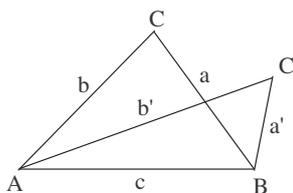


Figura 6:

**Demonstração:** Pela Proposição 3.1, sabe-se que a área máxima ocorre quando a diferença entre os lados não fixados é igual a zero. Portanto, quanto menor for essa diferença, maior será a área do triângulo. ■

### 3.2 Pappus (século IV d.C.)

Pappus de Alexandria é considerado o último dos grandes geômetras gregos. Seu principal trabalho, *Synagoge (Coleção)*, composta de 8 livros é um misto de comentário e guia de outros trabalhos de seu tempo. Numerosas proposições originais, aprimoramentos, extensões e valiosos comentários históricos entremeiam a obra.

Um ponto importante da obra de Pappus, que nos interessa, é a questão da isoperimetria. Em um comentário sobre a obra de Zenodoro (c.200 a.C.) sobre figuras isoperimétricas, que se perdeu, Pappus aborda o seguinte problema:

*Dentre todos os retângulos de mesmo perímetro, qual o de maior área?*

A solução de Zenodoro consiste em considerar um quadrado de lado  $a$ , perímetro  $4a$  e uma família de retângulos de perímetro também igual a  $4a$ . Os lados de tais retângulos, portanto, são  $(a + x)$  e  $(a - x)$  para que o perímetro se mantenha constante, ver Figura 7.

Fazendo  $x$  variar, são obtidas todas as alternativas possíveis.

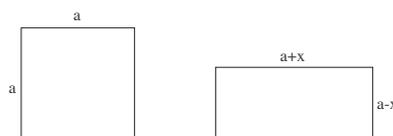


Figura 7: Demonstração de Zenodoro

As áreas dos retângulos são  $(a - x)(a + x) = a^2 - x^2$ . Isso mostra que, exceto para  $x = 0$ , a área de qualquer dos retângulos é sempre menor do que a área do quadrado,  $a^2$ , que é máxima.

No livro V, da *Coleção*, Pappus discorre sobre isoperimetria no plano e no espaço e faz uma curiosa observação a respeito da forma como as abelhas constroem seus favos, ver Figura 8. Tendo mostrado que de dois polígonos regulares de mesmo perímetro, o que tem o maior número de lados tem maior área, concluiu que as abelhas provavam algum entendimento matemático, ao construir suas células como prismas hexagonais em vez de quadradas ou triangulares. O livro examina ainda, outros problemas de isoperimetria, inclusive a prova de que, para um perímetro dado, o círculo tem maior área que qualquer polígono regular.

*Sagacidade das abelhas.*



Figura 8:

A seguir faremos uma análise do problema das abelhas a que Pappus se refere. Primeiramente considera-se um resultado, já conhecido desde os pitagóricos (século V a.C.), de que triângulo, quadrado e hexágono são os únicos polígonos regulares que tornam possível a pavimentação de um plano. Posteriormente, comprovaremos que dentre estes polígonos, com perímetro fixo, o hexágono é o que maximiza a área.

**Proposição 3.3** *Os únicos polígonos regulares que pavimentam um plano são o triângulo, o quadrado e o hexágono.*

**Demonstração:** Sabe-se que um polígono regular de  $n$  lados,  $n \geq 3$ , possui ângulos internos dados pela fórmula  $a_i = \frac{(n-2)180^\circ}{n}$ .

Suponhamos que se tenha uma pavimentação do plano formada exclusivamente por polígonos regulares de  $n$  lados. Se em um dos vértices dos polígonos da pavimentação aparecem  $m$  polígonos, então a soma dos ângulos internos, neste vértice, deve ser igual a  $360^\circ$ , ou seja,  $m \left[ \frac{(n-2)}{n} 180^\circ \right] = 360^\circ$ . Simplificando esta igualdade, obtém-se  $m = \frac{2n}{n-2}$ . Como  $m \geq 3$ , segue que  $\frac{2n}{n-2} \geq 3$  e, portanto,  $n \leq 6$ . Assim, concluí-se que os únicos candidatos a ladrilhos de uma pavimentação do plano são: o triângulo, o quadrado, o pentágono e o hexágono.

Analisaremos agora quais desses polígonos realmente pavimentam o plano.

- Se  $n = 3$ , obtém-se  $m = \frac{2n}{n-2} = 6$ . A figura 9 ilustra uma pavimentação do plano por triângulos equiláteros, sendo que em cada vértice concorrem 6 triângulos.

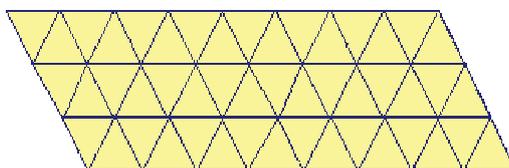


Figura 9: Pavimentação do plano por triângulos

- Se  $n = 4$ , obtém-se  $m = \frac{2n}{n-2} = 4$ . A figura 10 ilustra uma pavimentação do plano por quadrados, sendo que em cada vértice concorrem 4 quadrados.

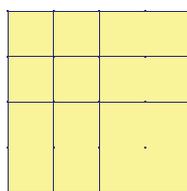


Figura 10: Pavimentação do plano por quadrados

- Se  $n = 5$ , obtém-se  $m = \frac{2n}{n-2} = \frac{10}{3} = 3,333\dots$ . Como  $m$  deve ser um número inteiro, conclui-se que o pentágono não pode ser utilizado para pavimentar o plano. De fato, como está ilustrado na figura 11, podemos colocar três pentágonos ao redor de um vértice, perfazendo  $324^\circ$ , com falta de  $36^\circ$ , mas se colocarmos o quarto pentágono, este irá se sobrepor ao primeiro.

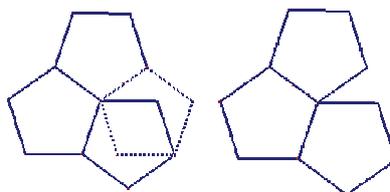


Figura 11: Impossibilidade de pavimentar o plano por pentágonos

- Se  $n = 6$ , obtém-se  $m = \frac{2n}{n-2} = 3$ . A figura 12 ilustra uma pavimentação do plano por hexágonos, sendo que em cada vértice concorrem 3 hexágonos.

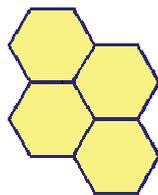


Figura 12: Pavimentação do plano por hexágonos

Desse modo, conclui-se que somente o triângulo, o quadrado e o hexágono podem ser utilizados como ladrilhos de uma pavimentação do plano por polígonos regulares.

■

**Proposição 3.4** *Dentre os polígonos que pavimentam o plano, com perímetro  $p$  fixo, o hexágono é o de maior área.*

**Demonstração:**

- Triângulo: lado  $l = \frac{p}{3}$ , ver Figura 13.

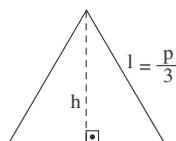


Figura 13: Triângulo

$$\left(\frac{p}{3}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{p}{6}\right)^2,$$

ou seja,  $h = \frac{\sqrt{3}}{6}p$ .

Desse modo, a área do triângulo é  $S = \frac{p}{3} \frac{\sqrt{3}}{6} p = \frac{\sqrt{3}}{36} p^2 \simeq 0,0481p^2$ .

- Quadrado: lado  $l = \frac{p}{4}$ , ver Figura 14.

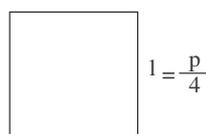


Figura 14: Quadrado

Nesse caso, a área é dada por  $S = \left(\frac{p}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}p^2 = 0,0625p^2$ .

- Hexágono: lado  $l = \frac{p}{6}$ , ver Figura 15.

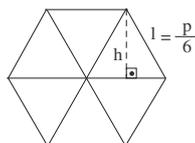


Figura 15: Hexágono

Como pode se observar pela figura, o hexágono é constituído por 6 triângulos de base  $\frac{p}{6}$  e altura  $h = \frac{\sqrt{3}}{12}p$ , uma vez que

$$h^2 = \left(\frac{p}{6}\right)^2 - \left(\frac{p}{12}\right)^2.$$

Assim, a área de cada um desses triângulos é dada por  $S' = \frac{\frac{p}{6} \frac{\sqrt{3}}{12} p}{2} = \frac{\sqrt{3}}{144} p^2$ , logo a área do hexágono é dada por  $S = 6S' = \frac{6\sqrt{3}}{144} p^2 = \frac{\sqrt{3}}{24} p^2 \simeq 0,0721p^2$ .

Portanto, da análise realizada conclui-se que, de fato, o hexágono é o de maior área. ■

**Observação:** Embora o círculo de perímetro  $p = 2\pi r$  tenha a área  $S = \pi r^2 = \frac{1}{4\pi} p^2 \simeq 0,0795p^2$  maior do que a área dos polígonos tratados na Proposição 3.4, não foi escolhido, por não pavimentar o plano, ver Figura 16.

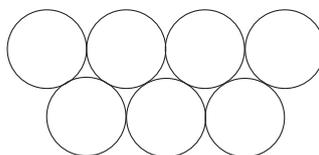


Figura 16: “Pavimentação” com círculos

A questão que se coloca agora é sobre a escolha das abelhas para o formato dos alvéolos, onde será depositado o mel.

**Proposição 3.5** *Dentre os prismas de bases triangulares, quadradas e hexagonais com mesmo perímetro, o de base hexagonal é o de maior volume.*

**Demonstração:** O volume de um prisma é igual ao produto da área da base pela altura e a área lateral é igual ao produto do perímetro do polígono pela altura. Como o perímetro da base é o mesmo para os três prismas em questão, a área lateral é a mesma, ver Figura 17.

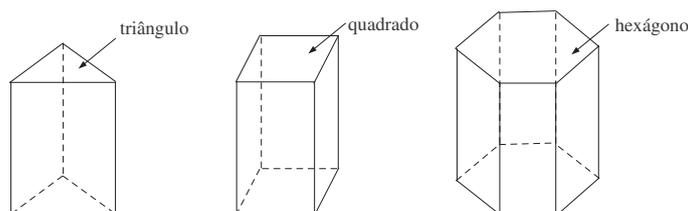


Figura 17:

Assim, o prisma que tiver maior área da base será o de volume máximo e, portanto, o de base hexagonal é o que satisfaz essa condição. ■

*Economia das abelhas: mito ou realidade?*

Consultando um apicultor conseguimos alguns dados sobre a construção dos favos que compõe uma “caixa” de abelhas. Atualmente, de uma forma mais industrial, os apicultores adiantam um pouco o trabalho para as abelhas. Uma placa retangular de cera, já com o molde de uma pavimentação hexagonal é fixada a uma estrutura de madeira como estímulo para esse trabalho, ver Figura 18. Isso evita que as abelhas tenham que consumir o mel para a fabricação da cera.



Figura 18: Ilustração de uma placa de cera, após a retirada do mel

Cada “caixa” tem 10 placas de dimensões 42 cm por 20 cm e a pavimentação é formada por hexágonos de 3 mm de lado, ou seja, de perímetro 1,8 cm. Após a conclusão do trabalho constata-se que os alvéolos tem altura média de 1,7 cm, ver Figura 19.

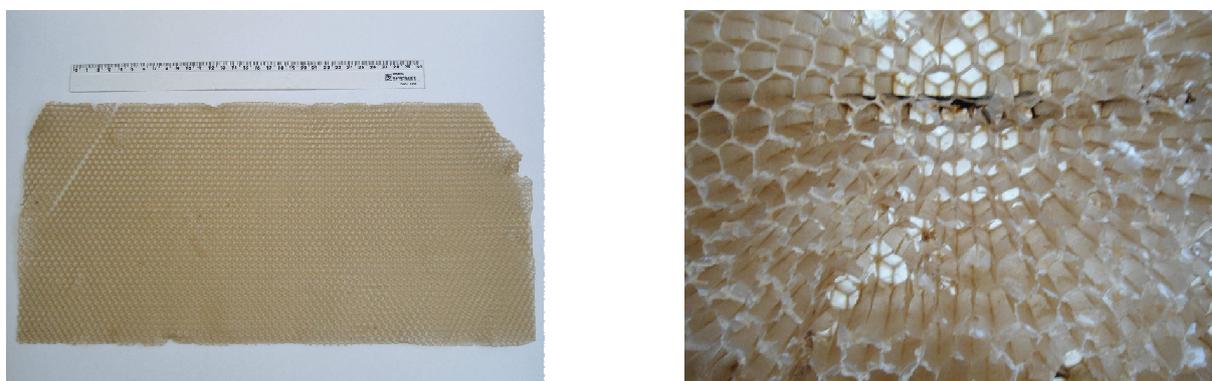


Figura 19: À esquerda, o molde da pavimentação hexagonal e à direita, ilustração dos alvéolos concluídos

As tabelas, a seguir, mostram um resumo dos cálculos envolvendo volumes de possíveis configurações de uma dessas placas numa “caixa” de abelhas.

Pavimentação	Área da base dos alvéolos ( $p = 1,8 \text{ cm}$ )	$n^\circ$ total de alvéolos na placa	Volume de cada alvéolo
triângulo	$0,08658 \text{ cm}^2$	9702	$0,147186 \text{ cm}^3$
quadrado	$0,2025 \text{ cm}^2$	4148,148	$0,34425 \text{ cm}^3$
hexágono	$0,2336 \text{ cm}^2$	3595,8904	$0,39712 \text{ cm}^3$
círculo	$0,2575 \text{ cm}^2$	3262,1359	$0,43775 \text{ cm}^3$

Pavimentação	Volume total	Diferença de volumes em relação aos alvéolos hexagonais
triângulo	$2855,996 \text{ cm}^3$	$0,003991296 \text{ cm}^3$
quadrado	$2855,999898 \text{ cm}^3$	$0,000093296 \text{ cm}^3$
hexágono	$2855,999991296 \text{ cm}^3$	-
círculo	$2855,99998045 \text{ cm}^3$	$0,000010846 \text{ cm}^3$

Analisando as tabelas acima pode-se constatar que de fato a pavimentação hexagonal é a que contém uma quantidade maior de mel.

Portanto, numa produção em larga escala verifica-se que, de fato, as abelhas provam algum tipo de entendimento econômico.

### 3.3 Brahmagupta (século VII d.C.)

Brahmagupta que viveu na Índia Central, fez várias contribuições importantes na matemática. Foi num de seus trabalhos que apareceu pela primeira vez as regras de sinais envolvendo números negativos, além do zero como número. Na resolução de equações quadráticas quase sempre apresentava as duas soluções, inclusive quando uma era negativa. Apresentou uma solução geral da equação linear diofantina  $ax + by = c$ , em  $a, b$  e  $c$  são números inteiros.

Um resultado, talvez o mais significativo de sua obra, é a extensão da fórmula de Heron para quadriláteros, ou seja, dado um quadrilátero de lados  $a, b, c, d$  com semiperímetro  $p$ , a sua área é dada por

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Há uma restrição não observada por Brahmagupta de que essa fórmula só é correta no caso de um quadrilátero inscrito num círculo. O caso geral será abordado na próxima seção.

Para a dedução da fórmula de Brahmagupta, que é semelhante a de Heron apresentada na Seção 3.1, ver [6].

### 3.4 Bretschneider (1808 - 1878)

Carl Anton Bretschneider natural de Gotha, Alemanha, trabalhou com geometria, teoria dos números, história da geometria, integrais logarítmicas e algumas tabelas matemáticas. Foi um dos primeiros matemáticos a usar o símbolo  $\gamma$  para a constante de Euler, quando, em 1837, publicou o seu trabalho “Theoriae logarithmi Integralis lineamenta nova” no Crelle Journal, vol.17, p.257-285 (submetido em 1835). É de grande importância para os nossos propósitos a sua generalização da fórmula de Brahmagupta para o cálculo de áreas de quadriláteros convexos quaisquer.

**Fórmula de Bretschneider:** A área  $S$  de um quadrilátero convexo  $ABCD$  de lados  $a = AB, b = BC, c = CD$  e  $d = DA$  e ângulos  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ , ver Figura 20, e  $\hat{D}$  é dada por

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - \frac{1}{2}abcd \left[ 1 + \cos(\hat{A} + \hat{C}) \right]},$$

na qual  $2p = a + b + c + d$ .

**Demonstração:** Inicialmente divide-se o quadrilátero  $ABCD$  em dois triângulos, a partir da diagonal  $BD$ . Logo, sua área será

$$S = \frac{1}{2}ad \sin \hat{A} + \frac{1}{2}cb \sin \hat{C},$$

e assim,

$$4S^2 = a^2 d^2 \sin^2 \hat{A} + b^2 c^2 \sin^2 \hat{C} + 2abcd \sin \hat{A} \sin \hat{C}. \quad (3.6)$$

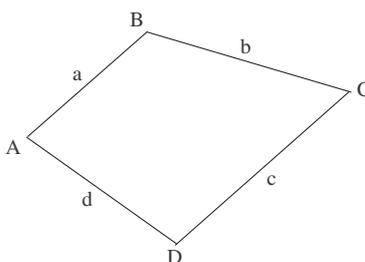


Figura 20:

Pela lei dos cossenos para o cálculo da diagonal  $BD$ , verifica-se que

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos \widehat{A} = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{C},$$

ou seja,

$$\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2} = ad \cos \widehat{A} - bc \cos \widehat{C}.$$

Elevando ambos os membros dessa igualdade ao quadrado, tem-se

$$\frac{(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{4} = a^2 d^2 \cos^2 \widehat{A} + b^2 c^2 \cos^2 \widehat{C} - 2abcd \cos \widehat{A} \cos \widehat{C}. \quad (3.7)$$

Somando membro a membro as igualdades (3.6) e (3.7), obtém-se

$$4S^2 + \frac{(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{4} = a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd \cos(\widehat{A} + \widehat{C}),$$

ou seja,

$$16S^2 = -a^4 - b^4 - c^4 - d^4 + 2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2a^2 d^2 + 2b^2 c^2 + 2b^2 d^2 + 2c^2 d^2 - 8abcd \cos(\widehat{A} + \widehat{C}).$$

Somando e subtraindo  $8abcd$  a igualdade anterior, tem-se

$$16S^2 = (-a^4 - b^4 - c^4 - d^4 + 2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2a^2 d^2 + 2b^2 c^2 + 2b^2 d^2 + 2c^2 d^2 + 8abcd) - (3.8) \\ - 8abcd - 8abcd \cos(\widehat{A} + \widehat{C}).$$

Uma vez que

$$(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d) = -a^4 - b^4 - c^4 - d^4 + \\ + 2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2a^2 d^2 + 2b^2 c^2 + 2b^2 d^2 + 2c^2 d^2 + 8abcd,$$

a igualdade (3.8) torna-se

$$S^2 = \frac{(-a + b + c + d)}{2} \frac{(a - b + c + d)}{2} \frac{(a + b - c + d)}{2} \frac{(a + b + c - d)}{2} - \\ - \frac{1}{2}abcd - \frac{1}{2}abcd \cos(\widehat{A} + \widehat{C}).$$

Como  $2p = a + b + c + d$ , segue que

$$S^2 = \frac{(2p - 2a)}{2} \frac{(2p - 2b)}{2} \frac{(2p - 2c)}{2} \frac{(2p - 2d)}{2} - \\ - \frac{1}{2}abcd - \frac{1}{2}abcd \cos(\widehat{A} + \widehat{C})$$

$$= (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - \frac{1}{2}abcd \left[ 1 + \cos(\widehat{A} + \widehat{C}) \right].$$

Portanto, fica demonstrada a fórmula de Bretschneider:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - \frac{1}{2}abcd \left[ 1 + \cos(\widehat{A} + \widehat{C}) \right]}.$$

■

**Proposição 3.6** *Dentre todos os quadriláteros com perímetro fixado, o de maior área é inscritível.*

**Demonstração:** Da fórmula de Bretschneider, conclui-se que o valor de  $S$  será maximizado quando  $\cos(\widehat{A} + \widehat{C}) = -1$ , ou seja,  $\widehat{A} + \widehat{C} = \pi$ , que é uma condição necessária e suficiente para que o quadrilátero seja inscritível. ■

## 4 Desigualdade Isoperimétrica

**A desigualdade isoperimétrica para polígonos:**

**Teorema 4.1** *Se  $i < j$ ,  $i$  e  $j$  inteiros positivos, então a área de um polígono regular de  $i$  lados é menor do que a área de um polígono regular de  $j$  lados de mesmo perímetro. Além disso, a área do círculo é maior do que a área de qualquer polígono regular de mesmo perímetro.*

**Demonstração:** Seja  $p$  o perímetro de um polígono regular de  $n$  lados. Assim, o lado  $l$  do polígono é  $l = \frac{p}{n}$ .

Podemos dividir o polígono regular em  $n$  triângulos isósceles de base  $l$  e altura  $a$ , ver Figura 21.

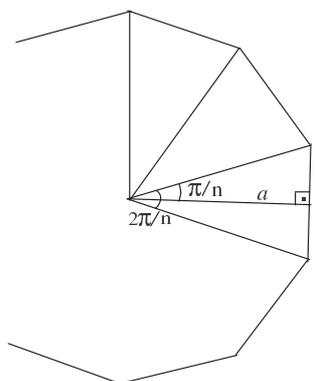


Figura 21:

Observe que  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = \frac{l}{2a}$  e, portanto,  $a = \frac{l}{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}$ .

Daí, a área do polígono é  $S_n = n \frac{la}{2} = \frac{p^2}{4n} \frac{\pi}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}$ .

Para entender como a área  $S_n$  varia, estuda-se a função  $f(x) = \frac{x}{\operatorname{tg} x}$ ,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , já que ela fornecerá informações sobre  $S_n$  para  $n > 2$ .

Tem-se que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 0$ .

Além disso,  $f$  é contínua em  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  e nesse intervalo,  $f'(x) = \frac{\operatorname{tg}x - x \sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\sin x \cos x - x}{\sin^2 x} = \frac{\sin(2x) - 2x}{2\sin^2 x} < 0$ , isto é,  $f$  é estritamente decrescente em  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Isto significa que a área  $S_n$  é estritamente crescente quando  $n$  cresce.

Logo, se  $i < j$  a área do polígono regular de  $i$  lados será menor do que a área do polígono regular de  $j$  lados.

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg}x} = 1$  e, portanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{n}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}} = 1$ , segue que a área  $S_n$  de um polígono regular de  $n$  lados satisfaz,  $S_n < \frac{p^2}{4\pi}$ .

Para mostrar que a área do círculo é maior do que a área de qualquer polígono regular de mesmo perímetro, considere um círculo de perímetro  $p$ . Neste caso seu raio  $r$  será  $r = \frac{p}{2\pi}$ , e sua área será  $S = \frac{p^2}{4\pi}$ . Portanto, a área do círculo é maior do que a área de qualquer polígono regular de mesmo perímetro. ■

**A desigualdade isoperimétrica (caso geral):** Para o caso geral, precisaremos dos seguinte resultados:

**Proposição 4.2** *Dado um polígono não convexo, temos outro polígono com número de lados menor, perímetro menor e área maior.*

**Proposição 4.3** *Dado qualquer polígono não regular, existe um polígono regular com número de lados menor ou igual, perímetro menor ou igual e área maior do que a do polígono original.*

**Teorema 4.4** *Toda curva fechada de comprimento  $p$  engloba uma área menor ou igual a  $\frac{p^2}{4\pi}$ . Além disso, esse valor só é alcançado para o círculo de raio  $\frac{p}{2\pi}$ .*

**Demonstração:** Considere uma curva de comprimento  $p$  englobando uma área  $S$  e marque ao longo dessa curva  $n$  pontos igualmente espaçados.

Ligando-se esses pontos por segmentos de reta, obtém-se um polígono de  $n$  lados e perímetro menor do que  $p$  e, portanto, pelas Proposições 4.2 e 4.3 e pelo Teorema 4.1, sua área  $A$  é menor do que  $\frac{p^2}{4\pi}$ , ver Figura 22.

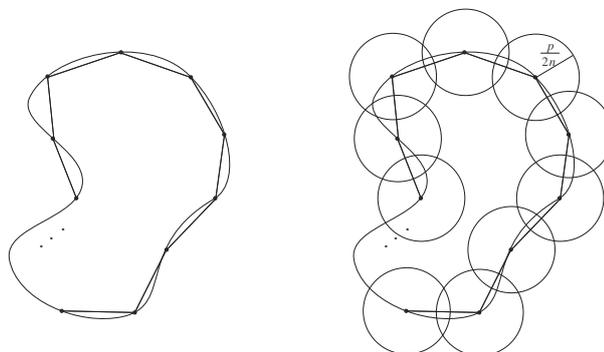


Figura 22:

Seja  $R_n$  a região constituída pelos pontos que pertencem ao polígono e pelos pontos que distam até  $\frac{p}{2n}$  de algum dos  $n$  pontos marcados sobre a curva, ver Figura 22. Assim, a curva

original estará totalmente contida em  $R_n$ , pois qualquer ponto da curva dista menos do que  $\frac{p}{2n}$  de algum desses  $n$  pontos. Por outro lado, a área de  $R_n$  é menor ou igual a  $A + n\pi \left(\frac{p}{2n}\right)^2$ ,  $\forall n$ .

Portanto,  $S \leq A + n\pi \left(\frac{p}{2n}\right)^2 \leq \frac{p^2}{4\pi} + \frac{\pi p^2}{4n}$ ,  $\forall n$ , isto é,  $S \leq \frac{p^2}{4\pi}$ .

Por fim, considera-se uma curva de comprimento  $p$  englobando a área  $\frac{p^2}{4\pi}$ . O objetivo é mostrar que ela é um círculo.

Se a curva não for convexa, existe um segmento de reta ligando dois pontos da curva e contido inteiramente no exterior da mesma.

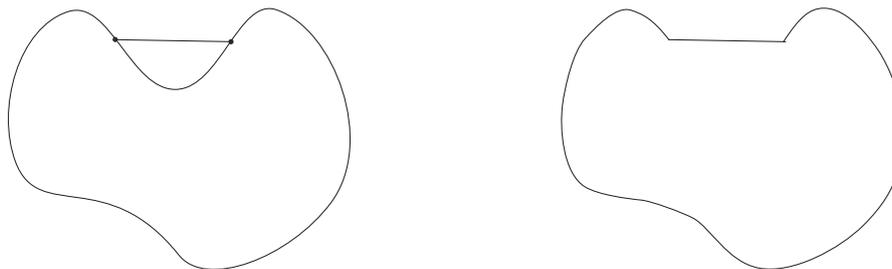


Figura 23:

Observe que esse segmento divide a parte do plano fora da curva em duas regiões, uma limitada e a outra não. Tomando a porção da curva em contato com a parte ilimitada mais o segmento de reta, temos uma nova curva fechada de perímetro menor do que  $p$  e área maior do que  $\frac{p^2}{4\pi}$ , contradizendo a primeira parte, já demonstrada, ver Figura 23.

Assim, a curva deve ser convexa.

Para uma curva convexa distinta do círculo, tomamos quatro pontos não cocirculares (que não pertencem ao mesmo círculo). Se o quadrilátero, com esses quatro vértices, for deformado, mantendo rígidos os arcos de curva entre dois pontos até o quadrilátero tornar-se inscrito, uma vez que dentre todos os quadriláteros com comprimentos de lados fixados, ou seja, com perímetro fixo, aquele de maior área é inscrito, ver Proposição 3.6, conclui-se que a área está sendo aumentada sem alterar o perímetro, contradizendo novamente a primeira parte já demonstrada, ver figura 24.

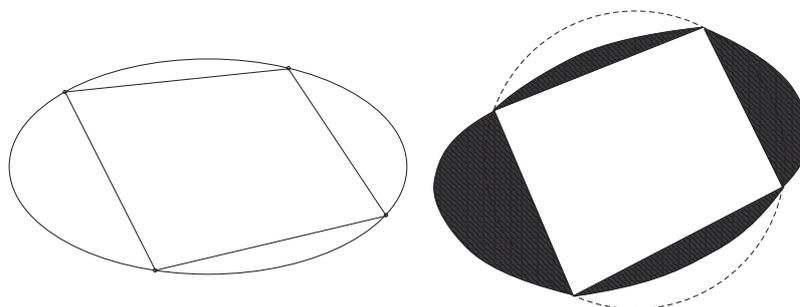


Figura 24:

Portanto, a curva deve ser um círculo. ■

## Referências

- [1] ÁVILA, Geraldo, *Introdução à Análise Matemática*, São Paulo: Edgard Blücher, 1993.
- [2] BOYER, Carl, B., *História da Matemática*, São Paulo: Edgard Blücher, 2 Ed., 1996.
- [3] CASTRO, R. F. C. R., *Pavimentações no plano euclidiano*, Monografia do Instituto de Ciências Exatas da UFMG, Belo Horizonte, 2008.
- [4] COURANT, R.; ROBBINS, H., *Qué es la matemática?*, Madrid: Aguilar, 1964.
- [5] FIGUEIREDO, D. G., *Problemas de máximo e mínimo na geometria euclidiana* In: *Matemática Universitária*, Rio de Janeiro, 9/10, 69-108, 1989.
- [6] GARBI, G. G., *A rainha das ciências*, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.
- [7] LIMBERGER, R., *Abordagens do problema isoperimétrico*, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011.
- [8] MOREIRA, C.G.T.de A.; SALDANHA, N.C., *A desigualdade isoperimétrica*, In: *Matemática Universitária*, Rio de Janeiro, 15, 13-19, 1993.
- [9] PEDROSO, H. A., *História da matemática*, São José do Rio Preto: Gráfica da UNESP, 1992.
- [10] SIMMONS, George F., *Cálculo com Geometria Analítica*, Volumes 1 e 2, São Paulo: McGraw-Hill, 1987.
- [11] STRUIK, D. J., *História concisa das matemáticas*, 3.ed. Trad. João C. S. Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1997.
- [12] VIEIRA, F.B.P.; RODRIGUES, L.B.; AGUSTINI, E., *O teorema isoperimétrico e o problema da cerca*, FAMAT em Revista, n.04, p. 141- 152, abril de 2005.