Cálculo Fracionário Aplicado ao Problema da Tautócrona*

Pedro Felipe Pavanelo Ramos[†]
Rubens de Figueiredo Camargo[†]

Resumo

Apresentamos neste trabalho um estudo introdutório sobre integrais e derivadas de ordens arbitrárias, o assim chamado cálculo de ordem não-inteira, popularizado com o nome de *Cálculo Fracionário.* Em particular, discutimos e resolvemos o clássico problema da tautócrona, isto é, o problema de se determinar a curva na qual o tempo gasto por um objeto para deslizar, sem fricção, em gravidade uniforme até seu ponto de mínimo é independente de seu ponto de partida, utilizando integrais e derivadas de ordem não inteira.

Palavras Chave: Cálculo Fracionário, Integral Fracionária, Derivada Fracionária de Riemann-Liouville.

Introdução

O cálculo fracionário tem sua origem em 30 de Setembro de 1695 em uma carta escrita por l'Hospital ao seu amigo Leibniz [13, 18], na qual o significado de uma derivada de ordem meio é proposto e discutido.

A resposta de Leibniz ao seu amigo, somada à contribuição de inúmeros brilhantes matemáticos como Euler, Lagrange, Laplace, Fourier, Abel, Heaviside, Liouville, entre outros, levaram às primeiras definições de derivadas e integrais de ordens não-inteiras, que no final do século XIX, devido primordialmente as definições propostas por Riemann-Liouville e Grünwald-Letnikov, pareciam estar completas[16].

Até próximo ao final do século passado o desenvolvimento do cálculo fracionário deu-se estritamente no campo da matemática pura, sem grandes aplicações em outras áreas. Contudo, em 1969 M. Caputo, em seu livro *Elasticità e Dissipazione* [13], resolveu problemas de viscoelasticidade utilizando uma nova definição, proposta por ele, para a derivada de ordem fracionária. Além disso, o autor utilizou sua definição para descrever problemas de sismologia. Por outro lado, a assim chamada derivada fracionária de Grünwald-Letnikov, mostrou-se bastante eficiente para resolver problemas numéricos.

A partir das definições introduzidas por Caputo e Grünwald-Letnikov, que têm um caráter local, nas últimas décadas diversos autores mostraram que a modelagem

*Trabalho realizado como parte do relatório final do projeto de iniciação científica entitulado: *Das Transformadas Integrais ao Cálculo Fracionário aplicado à Engenharia de Produção, Bolsa Fapesp, processo 2011/07241-8.* sob a Orientação do Prof. Dr. Rubens de Figueiredo Camargo.

[†]Email: pedrof_ramos@hotmail.com e rubens@fc.unesp.br, respectivamente, curso de Engenharia de Produção, UNESP-Bauru e docente do departamento de Matemática da UNESP de Bauru.

RAMOS, P. F. P.; CAMARGO, R. F. Cálculo fracionário aplicado ao problema da tautócrona. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática,** Bauru, v. 1, p. 15-22, dez. 2012.
DOI: 10.21167/cqdvol1201223169664pfprrfc1522 - Disponível em: http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/index.jsp

feita a partir do cálculo fracionário oferece uma descrição mais fina de fenômenos naturais que aquela feita a partir do cálculo usual, tendo em vista que derivadas fracionárias proporcionam uma excelente descrição para efeitos de memória e propriedades hereditárias [13].

A maneira canônica de se utilizar esta importante ferramenta é substituir a derivada de ordem inteira de uma equação diferencial parcial, que descreve um determinado fenômeno, por uma derivada de ordem não-inteira. Vários resultados importantes e generalizações foram obtidos através desta técnica, em diversas áreas do conhecimento, tais como: mecânica dos fluidos, fenômenos de transporte, redes elétricas, probabilidade, biomatemática, dentre outros [1, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18].

No presente trabalho, introduzimos os conceitos de integral e de derivada de ordens não inteira, segundo Riemann Liouville e utilizamos estes conceitos para resolver o problema da tautócrona, que consiste em se determinar a curva na qual o tempo gasto por um objeto para deslizar, sem fricção, em gravidade uniforme até seu ponto de mínimo é independente de seu ponto de partida [15].

1 Integral Fracionária

Vamos introduzir o conceito de integral fracionária como uma generalização da integral de ordem inteira. Para tanto, vamos mostrar que uma integral de ordem n, de uma função integrável $f(x)$, pode ser vista como um produto de convolução de Laplace entre $f(x)$ e a função Gel'fand-Shilov de ordem n. Em seguida, vamos utilizar a generalização do conceito de fatorial através da função gama para generalizar o conceito de integral de ordem inteira.

Definição 2: Função de Gel'fand-Shilov

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\nu \notin \mathbb{N}$, definimos a função de Gel'fand-Shilov como

$$\phi_n(t) := \begin{cases} \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \phi_\nu(t) := \begin{cases} \dfrac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Definição 3: Operador Integral de ordem n

Definimos a integral de ordem inteira através do operador I definido como

$$If(t) = \int_0^t f(t_1)\,\mathrm{d}t_1.$$

Desta forma temos

$$I^2 f(t) = I[If(t)] = \int_0^t \int_0^{t_1} f(t_2)\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1.$$

De maneira análoga para o operador integral de ordem n, isto é,

$$I^n f(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)\,\mathrm{d}t_n\,\mathrm{d}t_{n_1} \ldots \mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1.$$

Definição 4: Convlução de Laplace

Definimos a convolução, ou produto de convolução de Laplace, de $f(t)$ e $g(t)$, denotada por $f(t) * g(t)$, como sendo [7]

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Teorema 1: Integral de ordem n

Seja $f(x)$ uma função integrável, então

$$I^n f(t) = \phi_n(t) * f(t) = \int_0^t \phi_n(t-\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{1.0.1}$$

Demonstração: Vamos provar o teorema por indução em n. Para $n=1$ temos que

$$I f(t) = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{1-1}}{(1-1)!}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \phi_1(t) * f(t).$$

Para concluir basta mostrar que se $I^n f(t) = \phi_n(t) * f(t)$ então $I^{n+1}f(t) = I[I^n f(t)] = \phi_{n+1}(t) * f(t)$. Por hipótese indutiva temos que

$$I^{n+1}f(t) = I[\phi_n(t) * f(t)] = \int_0^t \phi_n(u) * f(u)\mathrm{d}u = \int_0^t \int_0^u \frac{(u-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}u.$$

Pelo teorema de Goursat [13] podemos mudar a ordem de integração, i.e.,

$$I^{n+1}f(t) = \int_0^t \left[\int_\tau^t \frac{(u-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}f(\tau)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}\tau.$$

Calculando a integral entre colchetes podemos escrever

$$I^{n+1}f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^n}{n!}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \phi_{n+1}(t) * f(t),$$

que é justamente o resultado desejado, a partir do qual apresentamos a definição que se segue.

Definição 5: Integral de ordem arbitrária segundo Riemann-Liouville.

Seja $f(t)$ uma função integrável, utilizamos a generalização da função fatorial pela função gama [4] para definirmos a integral de ordem ν de $f(t)$, denotada por $I^\nu f(t)$, por

$$I^\nu f(t) = \phi_\nu(t) * f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{1.0.2}$$

2 Derivada Fracionária

Há várias formas de se introduzir a derivada de ordem não-inteira como uma generalização para a derivada de ordem inteira, dentre elas podemos citar a definição de Riemann-Liouville, que é a mais conhecida e a de Caputo, que é mais restritiva, mas parece ser mais adequada para o estudo de problemas físicos [9, 10, 11, 12]. Além disso, destacamos a definição de Grünwald-Letnikov que é mais apropriada para se utilizar em problemas numéricos. Estas e outras definições podem ser encontradas em detalhes no livro de Podlubny [18].

No presente trabalho, estamos interessados na resolução de uma equação integrodiferencial fracionária, relacionada ao problema da tautócrona, por esta razão apresentamos apenas a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville, que como veremos, baseia-se no fato da derivação ser o operador inverso à esquerda da integração e na lei dos expoentes de Lagrange [13].

Definição 6: Derivada fracionária segundo Riemann-Liouville.

Sejam $f(t)$ uma função diferenciável, $m \in \mathbb{N}$ e $\alpha \notin \mathbb{N}$ tais que $m-1 < Re(\alpha) < m$.

A derivada de ordem α no sentido de Riemann-Liouville é definida como sendo a derivada de ordem inteira de uma integral fracionária, de forma que a lei dos expoentes faça sentido, isto é,

$$D^{\alpha}f(t) = D^{m}I^{m-\alpha}f(t) = D^{m}[\phi_{m-\alpha}(t) * f(t)]. \tag{2.0.3}$$

3 O Problema da Tautócrona

Apresentamos aqui a primeira aplicação do cálculo fracionário presente na literatura, ou seja, a solução proposta por Abel para o problema da Tatócrona ou curva isocrônica, isto é, o problema de se determinar a curva na qual o tempo gasto por um objeto para deslizar, sem fricção, em gravidade uniforme até seu ponto de mínimo é independente de seu ponto de partida.

Vamos resolver este problema de duas maneiras distintas a primeira utilizando o cálculo usual e a segunda utilizando o cálculo fracionário.

A solução proposta por Abel parte do *Princípio da Conservação de Energia* que estabelece que a quantidade total de energia em um sistema isolado permanece constante, ou ainda, que a soma entre energia potencial gravitacional e a energia cinética é constante.

Por hipótese, no problema da tautócrona, a partícula se move sem atrito e consequentemente sua energia cinética é exatamente igual à diferença entre a energia potencial em seu ponto inicial e a energia potencial no ponto em que se encontra. Sendo m a massa do objeto, $v(t)$ sua velocidade no instante t, y_0 a altura em que foi abandonado e $y(t)$ a altura no instante t, sabemos que as energias cinética e potencial são dadas, respectivamente, por

$$\frac{1}{2}m\,v^2 \qquad \text{e} \qquad m\,g\,y.$$

Como a partícula está restrita a mover-se sobre a curva, sua velocidade é simplesmente $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$, onde s é a distância medida ao longo da curva. Utilizando o princípio da conservação de energia podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 &= mg(y_0 - y)\\
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= \pm\sqrt{2g(y_0 - y)}\\
\mathrm{d}t &= \pm\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2g(y_0 - y)}}\\
\mathrm{d}t &= \pm\frac{1}{\sqrt{2g}}(y - y_0)^{-1/2}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

onde a última passagem é devida à regra da cadeia. Note que a função $s(y)$ descreve a distância remanescente na curva em termos da altura remanecente y, como a distância e a altura diminuem a medida que o tempo passa devemos tomar apenas o sinal negativo na equação anterior, isto é;

$$\mathrm{d}t = -\frac{1}{\sqrt{2g}}(y - y_0)^{-1/2}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y. \tag{3.0.4}$$

Integrando a equação (3.0.4) em ambos os lados de y_0 a zero temos

$$\tau = T(y_0) = \int_{y_0}^{0}\mathrm{d}t = -\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{y_0}^{0}(y - y_0)^{-1/2}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y,$$

ou seja,

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{y_0} (y - y_0)^{-1/2} \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y} \right) \mathrm{d}y, \tag{3.0.5}$$

na qual τ é o tempo de descida. Esta equação integrodiferencial pode ser resolvida de várias formas, a seguir apresentamos a clássica solução que utiliza a transformada de Laplace e posteriormente a solução proposta por Abel utilizando o cálculo fracionário.

3.1 Transformada de Laplace

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da equação (3.0.5) podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[\tau] &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \mathfrak{L}\left[\int_0^{y_0} (y_0 - y)^{-1/2} \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y} \right) \mathrm{d}y \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \mathfrak{L}\left[\frac{1}{\sqrt{y}} \right] \mathfrak{L}\left[\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y} \right], \end{aligned}$$

a última igualdade é devida ao teorema da convolução.

Sendo s o parâmetro da transformada de Laplace, temos que $\mathfrak{L}[1] = 1/s$ e $\mathfrak{L}\left[\frac{1}{\sqrt{y}} \right] = \sqrt{\pi}\, s^{-1/2}$, logo

$$\mathfrak{L}\left[\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y} \right] = \frac{\tau \sqrt{2g}}{\sqrt{\pi}}\, s^{-1/2}.$$

A fim de explicitar a solução, isto é, $\mathrm{d}s/\mathrm{d}y$, aplicamos a transformada de Laplace inversa de onde obtemos

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y} = \frac{\tau \sqrt{2g}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y}}. \tag{3.1.1}$$

3.2 Solução de Abel

A solução proposta por Abel baseia-se na observação de que a integral da equação (3.0.5), exceto pelo fator multiplicativo $1/\Gamma(1/2) = 1/\sqrt{\pi}$ é exatamente a definição de integração fracionária de ordem $1/2$. Desta forma aplicando a derivada segundo Riemann-Liouville de ordem $1/2$ em ambos os lados da equação temos[1]

$$\frac{\mathrm{d}^{1/2}}{\mathrm{d}y^{1/2}} \tau = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2g}} \frac{\mathrm{d}^{1/2}}{\mathrm{d}y^{1/2}} \left[\frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^{y_0} (y - y_0)^{-1/2} \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y} \right) \mathrm{d}y \right]. \tag{3.2.1}$$

Lembrando que a derivada de Riemann-Liouvile de ordem $1/2$ de $1 = y^0$ vale $(\sqrt{\pi\, y})^{-1/2}$ podemos escrever

$$\frac{\tau}{\sqrt{\pi\, y}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2g}} \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y} \right),$$

ou seja,

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y} = \frac{\tau \sqrt{2g}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y}}$$

[1] Lembre-se que a derivada fracionária de Riemann-Liouville é o operador inverso à esquerda da integral fracionária.

que é o mesmo resultado obtido na equação (3.1.1). Note que a solução via cálculo fracionário é bem mais simples e direta que a solução clássica. Essa equação (variáveis separáveis) nos mostra que

$$\mathrm{d}s = \frac{\tau\sqrt{2g}}{\pi}\frac{1}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y,$$

de onde segue, após a integração, que

$$s(y) = \frac{2\,\tau\sqrt{2g}}{\pi}y^{1/2}.$$

3.3 Representação gráfica

A fim de ilustrar a solução do problema da tautócrona apresentamos a seguir uma representação gráfica da curva correspondente com cinco massas abandonadas em pontos diferentes, e verificamos que todas atingem o vértice ao mesmo tempo.

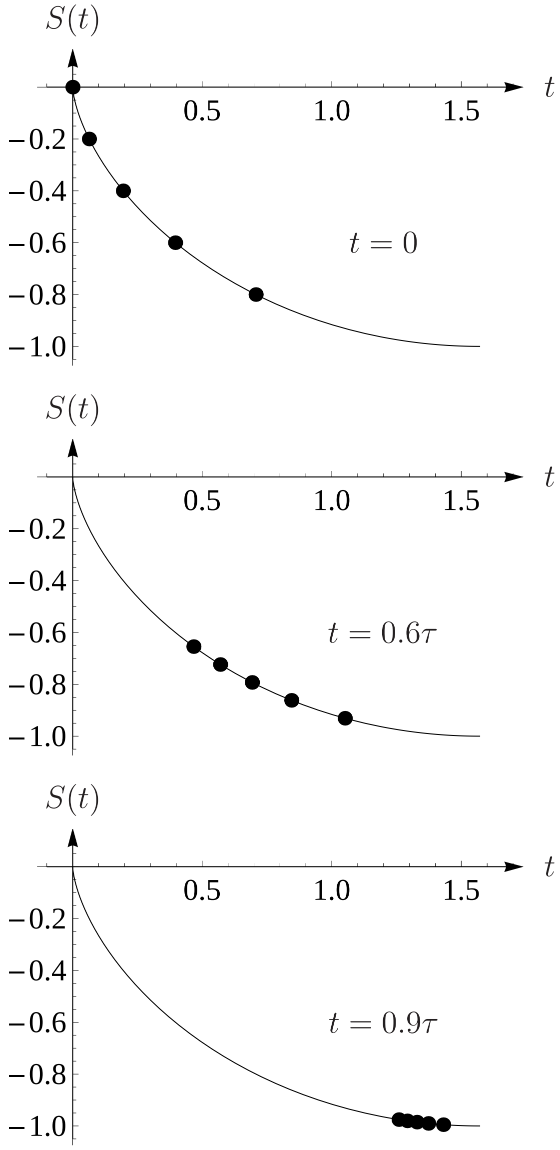

Figura 1: Posição das partículas para diferentes valores de t.

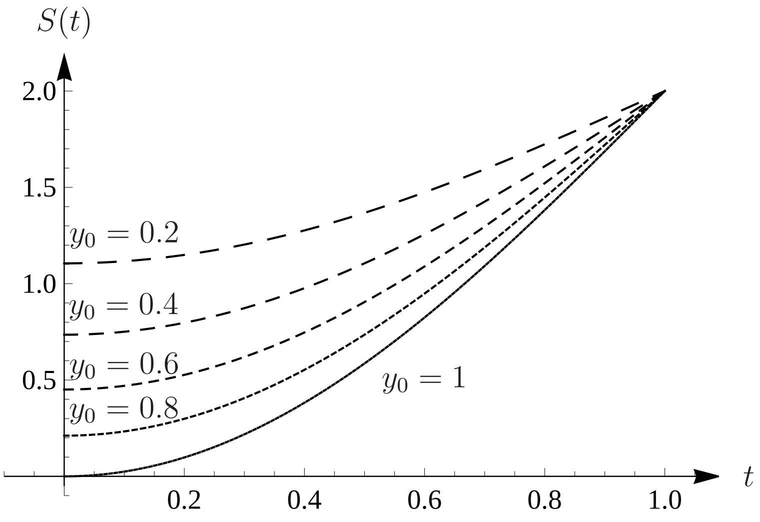

Figura 2: Caminho percorrido por cada partícula.

4 Conclusões

Concluímos que além de ser uma ferramente precisa para refinar a descrição de fenômenos naturais, o cálculo fracionário também pode ser utilizado para obter de maneira simples e elegante a solução de problemas de cálculo variacional, tais como o da Tautócrona.

5 Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer à FAPESP por ter financiado este projeto, processo 2011/07241-8. Além disso, agradecemos ao Prof. Dr. Alexys Bruno Alfonso por sua indispensável ajuda com a parte gráfica e aos pareceristas por suas valiosas contribuições e correções.

Referências

[1] A. Luisa Soubhia, R. Figueiredo Camargo, E. Capelas de Oliveira, J. Vaz *Theorem for Series in Thee-Parameter Mittag-Leffler Function*, Fractional Calculus and Applied Analysis, bf13, (2010).

[2] H. Bernhard *The Bernoulli family,* In: Wussing, H. Arnold, W. Biographien bedeutender Mathematiker. Berlin, 1983.

[3] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Equações Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Oitava Edição, LTC, Rio de Janeiro, (2006).

[4] E. Capelas de Oliveira, *Funções Especiais com Aplicações*, Editora Livraria da Física, São Paulo, (2005).

[5] L. Debnath, *Recent Applications of Fractional Calculus to Science and Engineering*, Int. J. Math. Math. Sci., **54**, 3413-3442, (2003).

[6] Felix Silva Costa ; Capelas de Oliveira, E. ; R. Figueiredo Camargo,; J. Vaz. *Integrais de Mellin-Barnes e a Função de Fox.* TEMA. Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, v. 11, p. 01/01, (2011). [doi:10.5540/tema.2011.012.02.0157]

[7] R. Figueiredo Camargo, *Do Teorema de Cauchy ao Método de Cagniard*, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, (2005).

[8] R. Figueiredo Camargo, E. Capelas de Oliveira and F. A. M. Gomes, *The Replacement of Lotka-Volterra Model by a Formulation Involving Fractional Derivatives*, R. P. 10/07, (2007).

[9] R. Figueiredo Camargo, Ary O. Chiacchio and E. Capelas de Oliveira, *Differentiation to Fractional Orders and the Fractional Telegraph Equation*, J. Math. Phys., **49**, 033505, (2008) [doi:10.1063/1.2890375].

[10] R. Figueiredo Camargo, R. Charnet and E. Capelas de Oliveira, *On Some Fractional Green's Functions*, J. Math. Phys. **50**, 043514 (2009). [doi:10.1063/1.3119484].

[11] R. Figueiredo Camargo, Ary O. Chiacchio, R. Charnet and E. Capelas de Oliveira, *Solution of the fractional Langevin equation and the Mittag-Leffler functions*, J. Math. Phys. **50**, 063507 (2009). [doi:10.1063/1.3152608].

[12] R. Figueiredo Camargo, E. Capelas de Oliveira and J. Vaz Jr. *On anomalous diffusion and the fractional generalized Langevin equation for a harmonic oscillator* J. Math. Phys. **50**, 123518 (2009). [doi:10.1063/1.3269587].

[13] R. Figueiredo Camargo, *Cálculo Fracionário e Aplicações*, Tese de Doutorado, Unicamp, Campinas, (2009).

[14] R. Figueiredo Camargo,; Oliveira, Edmundo Capelas ; Vaz, Jayme. *On the Generalized Mittag-Leffler Function and its Application in a Fractional Telegraph Equation.* Mathematical Physics, Analysis and Geometry , v. 14, p. 274, (2011). [doi:10.1007/s11040-011-9100-8]

[15] R. Figueiredo Camargo e E. Capelas de Oliveira. *Introdução ao Cálculo de Ordem não Inteira.*, livro em fase final de editoração.

[16] K. S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley & Sons, Wiley-Interscience, (1993).

[17] G. Pedroso Pires Abreu e R. Figueiredo Camargo, *Modelagem Matemática: Das Transformadas Integrais ao Cálculo de Ordem não-Inteira*, XXIII Congresso de Iniciação Científica da UNESP, Bauru, (2011).

[18] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Mathematics in Science and Engineering, Vol.198, Academic Press, San Diego, (1999).